UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
PRÓ – REITORIA DE PESQUISA E PÓS – GRADUAÇÃO – PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ERIVELTON MENDES CORRÊA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DAS EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS ATRAVÉS DO TIRO COM ARCO

São Luís - MA
2018

ERIVELTON MENDES CORRÊA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DAS EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS ATRAVÉS DO TIRO COM ARCO

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, como pré– requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientadora: Professora Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

São Luís - MA
2018

Corrêa, Erivelton Mendes.
Uma proposta de ensino das equações e funções quadráticas através do tiro com arco / Erivelton Mendes Corrêa.– São Luís, 2018.
68 f.

Dissertação (Mestrado) – Curso de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, 2018.

Orientador: Profª. Drª. Sandra Imaculada Moreira Neto.

1.Equações quadráticas. 2.Funções quadráticas. 3.Tiro com Arco. I.Título

CDU: 517.5/.9:37

ERIVELTON MENDES CORRÊA

UMA PROPOSTA DE ENSINO DAS EQUAÇÕES E FUNÇÕES QUADRÁTICAS ATRAVÉS DO TIRO COM ARCO

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão – UEMA, como pré–requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática, através do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Orientadora: Professora Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Aprovado em: 27 de julho de 2018

BANCA EXAMINADORA

Sandra Imaculada Moreira Neto

Prof^a^. Dr^a^ Sandra Imaculada Moreira Neto (Orientadora)

Universidade Estadual do Maranhão

José Antonio Pires Ferreira Marão

Prof^o^ Dr^o^ José Antônio Pires Ferreira Marão

Universidade Estadual do Maranhão

Prof^o^ Dr^o^ Giovane Ferreira Silva

Universidade Federal do Maranhão

São Luís - MA

2018

À minha esposa Lailde Silva, por seu companheirismo e amor por todos esses anos

À meus pais e família pelo incentivo nesta caminhada chamada educação matemática.

AGRADECIMENTOS

À Professora Doutora Sandra Imaculada Moreira Neto, pela orientação e paciência ao longo desses meses.

A banca examinadora, Drº José Antônio Pires Ferreira Marão e Drº Giovane Ferreira Silva, pela importante participação neste momento ímpar.

Ao corpo discente do PROFMAT pelo conhecimento ensinado brilhantemente.

Aos arqueiros Dennyson Pereira, Gawaine Lisboa e Zé Ricardo pela participação direta neste projeto.

A Arqueria Imperial por todo o apoio e incentivo dado.

Aos meus amigos do PROFMAT, Alex, Aristóteles, Clessio, Darcio, Diwey, Enildo, Katharine, Mario, Nazareno, Paulo, Valderlandio, Vilson e Wnickson, pelos últimos 02 anos de maior aprendizado e diversão ao lado de cada um.

A CAPES pelo apoio financeiro.

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo."

(*Galileu Galilei*)

RESUMO

Apresentamos uma proposta de ensino das equações e funções quadráticas através do esporte olímpico do tiro com arco, em uma turma do ensino fundamental de uma escola pública na cidade de São José de Ribamar, Maranhão. Além disso, apresentamos a explicação formal dos assuntos abordados e finalizamos com uma aula contextualizada utilizando um arco artesanal.

Palavras-chave: Equações quadráticas, Funções quadráticas, tiro com arco.

ABSTRACT

We present a proposal of teaching equations and quadratic functions through the Olympic sport of archery, in a class of elementary school of a public school in the city of São José de Ribamar, Maranhão. In addition, we present the formal explanation of the subjects covered and we end with a contextualized class using a craft bow.

Keywords: Quadratic equations, Quadratic functions, archery.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Por muitos anos, antes do advento da pólvora, nossos ancestrais usavam armas mais primitivas para caça de alimentos, e dentre essas armas estava o arco e flecha, seja para caçar animais de pequeno ou grande porte, esta arma era fundamental para sobrevivência e provimento de alimento do homem antigo. Atualmente não existe mais a necessidade de sairmos em busca de alimentos munidos de um arco e uma aljava com flechas, hoje o tiro com arco tornou-se um esporte olímpico e com uma matemática simples e fascinante por trás de cada disparo de flecha.

Essa matemática que se esconde a cada disparo, pode ser vista quando se estuda equações e funções quadráticas, conteúdo este que muitos alunos têm dificuldade em compreender e transpor o ensinado em sala de aula para o seu cotidiano.

Infelizmente, muitos alunos ainda vêem a matemática como sendo um bicho papão, algo distante, chato, maçante, e possuem muitas dificuldades em compreender teoremas, fórmulas e aplicar o que é ensinado em sala de aula no seu cotidiano. Muitas vezes por desinteresse dos estudantes ou, por ainda termos a infeliz cultura de dizermos que matemática é algo para poucos ou apenas aqueles que possuem uma certa afinidade.

Sabendo disso, este trabalho pretende apresentar uma maneira diferente de ser ensinado o estudo das equações e funções quadráticas, utilizando o esporte de tiro com arco como forma de abordagem auxiliar para este estudo.

Justifica-se esse trabalho devido à necessidade hoje existente, para nós professores, de mostrar para os alunos o quanto a matemática é algo simples e importante na vida, seja estudantil ou não, levando-os assim, a compreender que o estudo da matemática não pode e nem deve ser feito apenas decorando-se fórmulas, e que estudar matemática pode e deve ser divertido.

Sendo assim, uma abordagem diferenciada sobre os estudos das equações e funções quadráticas usando um esporte olímpico como o tiro com arco, poderia ajudar muito a compreensão e o interesse do aluno para tal assunto, além de impulsionar e estimular o crescimento das atividades esportivas dentro da escola.

Uma abordagem essencial hoje no ensino é a questão da interdisciplinaridade, pois permite a parceria entre disciplinas que aparentemente não teriam tanto em comum, como no caso da matemática, história, física e educação física.

Tal parceria permitiria ainda mais a construção dos saberes necessários para o processo de ensino – aprendizagem. Mas para que esse processo de concretize de forma correta é necessário que metas sejam pré – estabelecidas pelos professores que irão participar.

> Em outras áreas do conhecimento, embora seu uso seja menor que nas chamadas ciências exatas, a matemática também constitui um subsídio importante, em função de conceitos, linguagem e atitudes que ajuda a desenvolver. (BRASIL 1998, p.24).

Além disso, hoje é essencial termos novas formas de ensino para o aluno, de modo que, ele possa inserir o aprendido em sala no seu cotidiano, tornando assim ainda mais significativo e real o aprendizado.

> No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las (BRASIL 1998, p.40).

Às vezes, a matemática é vista apenas como mais uma matéria a se decorar fórmulas, com o único objetivo da aprovação ao final do ano, o que a torna assim, distante e desanimadora. A prática do tiro com arco pode ajudar ainda mais a aproximar o aluno do universo da beleza da matemática.

> Pode parecer, a princípio, que alguns temas da matemática não têm aplicação imediata no mundo em que vivemos; isso pode gerar certo desapontamento. Na verdade, a aplicação da matemática no cotidiano ocorre como resultado do desenvolvimento e do aprofundamento de certos conceitos nela presentes. (GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B., JR, J. R. G. 1998, p.3).
>
> A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. (BRASIL, 1997, p. 24).

Este trabalho visa apresentar uma proposta de estudo, através do esporte olímpico do tiro com arco, para as equações e funções quadráticas. Os alunos do 9º ano da Escola Municipal Maria Elisa Almeida Silva localizada na cidade de São José de Ribamar – MA, tiveram 09 aulas, sendo 08 em sala e 01 aula prática do conteúdo, todas elas realizadas no 4º bimestre.

Nas 03 aulas inicias os alunos reviram conceitos fundamentais sobre equação do 2º grau, visto que este conteúdo já é visto no 2º ou 3º bimestres do ano letivo da grade curricular do ensino fundamental.

Da 4ª a 7ª aula, os alunos estudaram com o professor as funções quadráticas, seu conceito, aplicabilidade, cálculos de pontos máximos e mínimos, e a construção do gráfico de uma função quadrática.

Na 8ª aula, foi a aula prática, os alunos dispararam uma flecha com um arco construído de cano PVC ¾, anotaram as distâncias e o tempo de cada disparo, e depois guardaram os dados obtidos para a construção do gráfico da função que descreve a trajetória de cada disparo efetuado. Esta aula é fundamental para o professor, pois é nela que o aluno poderá perceber visualmente, que a trajetória que a flecha descreve é uma parábola e a altura máxima atingida é o vértice da parábola feita em sua trajetória.

Na 9ª aula, os alunos calcularam a velocidade média que cada flecha pôde atingir, representando a trajetória da flecha em um gráfico, mostrando que o vôo de uma flecha é a representação de uma parábola com concavidade voltada para baixo, calcularam a altura máxima da flecha durante seu vôo. Mostraram também que ângulos de disparos diferentes, geram trajetórias e alturas diferentes para a mesma flecha, sendo assim gerando parábolas com vértices e zeros da função quadrática diferentes.

O presente trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1 está a introdução, justificativa e relato dos objetivos da proposta de ensino esperados a serem alcançados.

No capítulo 2 é apresentado um pouco da história do estudo das equações e funções quadráticas.

No capítulo 3 é feita a fundamentação teórica matemática sobre as equações e funções quadráticas.

No capítulo 4 aparece a descrição e aplicação da proposta de ensino.

E no capítulo 5 é feito as análises e discussões do trabalho.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

2.1 TIRO COM ARCO

Os dados abaixo foram retirados de [11].

Quando entramos em contato pela primeira vez com um arco, não temos a noção que se trata de uma atividade que se pratica a cerca de 20.000 anos. As pinturas rupestres mais antigas já mostram homens primitivos caçando com arco.

O arco e a flecha formam há bastante tempo ferramentas para a sobrevivência da humanidade. Graças a esses instrumentos o homem se converteu em caçador. A caça com arco era mais segura que os outros métodos conhecidos até então, por permitir uma distância de segurança. As características dos arcos revelavam alguns segredos dos seus modos de vida. Por exemplo os arcos pequenos eram fáceis de manejar montando um cavalo ou em cima de um carro de combate, enquanto que os arcos grandes eram ideais para atingir objetivos que se encontravam a grandes distâncias, nomeadamente um acampamento fortificado.

Os primeiros a utilizar foram os egípcios por volta dos 3.500 a.C. Os arcos eram do tamanho dos arqueiros e utilizavam flechas com pontas de pedra e bronze.

Em 1.800 a.C. os assírios introduziram um novo desenho: um arco construído com couro de marfim e madeira conseguindo um perfil recurvo. Estes arcos eram muito mais potentes que os utilizados até então, com a vantagem adicional de poderem ser disparados a partir de um cavalo. Foi essa arma que permitiu expandir o seu império.

Os romanos que possuíam um dos melhores exércitos, nada puderam fazer perante os arqueiros persas. Os mongóis conquistaram grande parte da Europa, e os turcos demonstraram a sua valia nas suas cruzadas, em parte devido a superioridade dos seus arcos recurvos e uma melhor técnica no seu manejo.

Os normandos no século XI desenvolveram um arco grande conhecido por longbow que utilizaram para se defenderem dos ingleses na batalha de Hastings em 1066 d.C. A partir de então os ingleses adotaram o longbow como arma principal reconhecendo assim que o modelo que utilizavam estava obsoleto. Muitas das lendas que surgiram entre os séculos XIII e XIV, como é o caso de Robin Hood, mostraram que o uso do longbow se tornou muito popular.

Enquanto o valor do arco como arma de guerra declinou depois do aparecimento das armas de fogo no século XVI, o divertimento garantiu a sua existência. Por exemplo Henrique VIII promoveu o tiro com arco como desporto oficial na Inglaterra enquanto que Sir

Christopher Morris em 1537 criou uma sociedade de arqueiros conhecida como a Irmandade de São Jorge.

As competições e os torneios serviam para medir as categorias de cada uma delas, sendo o primeiro passo para a oficialização do desporto. Com o tempo as senhoras começaram a praticar a modalidade, e em 1787 dá-se a entrada da primeira mulher numa sociedade de arqueiros.

No continente americano os índios também utilizavam o arco e a flecha para caçar. Mas o arco utilizado era mais curto e frágil. O caçador tinha de se aproximar muito da presa para poder derrubá-la. Também havia em algumas tribos campeonatos de caça a cavalo ou então na selva.

Com a chegada dos europeus e dos seus arcos e flechas o interesse pela arma continuou e o primeiro clube de arqueiros foi fundado em 1828, na cidade de Filadélfia, EUA, designado por United Bowmen.

Curiosamente foi a guerra civil dos Estados Unidos que impulsionou o interesse no tiro com arco. Quando a guerra terminou os soldados foram proibidos de usarem armas de fogo, encontrando no arco uma forma de sublimar as suas vivências, e com o convívio com os índios aprenderam todas as técnicas relacionadas com a arte.

Em 1879 fundou-se a Associação Nacional de Arqueiro, responsável por realizar as competições nacionais. O entusiasmo surgido desde então provoca o seu incremento e em 1939 aparece a Associação Nacional de Tiro de Caça.

A primeira participação do tiro com arco nas Olimpíadas, foi em 1900 na cidade de Paris, em homenagem ao guerreiro mítico Hércules, o qual era considerado o primeiro arqueiro da história. Nos jogos Olímpicos de Saint Louis (1904) e nos de Londres (1908), o tiro com arco ainda teve relevo. A partir daí a modalidade, entra em declínio, nos jogos olímpicos, com apenas uma representação fugaz nos jogos de Antuérpia (1920).

Foram precisos 52 anos para que, finalmente, o arco se impor como modalidade olímpica. Os problemas existentes nas primeiras competições tiveram a haver com as inexistências de regras universais. Se o país que organizava os jogos tinha associações de arqueiros e tradição na modalidade então nesse ano disputava-se o tiro com arco, caso contrário não havia prova. Foram os polacos que em 1930 trabalharam intensivamente para criarem um regulamento internacional, que resultou na fundação na Federação Internacional de Tiro com Arco (FITA). Foi encarregada de estipular as regras para as competições internacionais entre a quais as Olimpíadas. Foi devido a esse movimento que se conseguiu o interesse por este desporto em todo o mundo e em 1972 implementou-se definitivamente como modalidade olímpica.

O avanço da técnica tem permitido novos modelos e novos materiais, permitindo um aumento na qualidade do tiro e por conseguinte o aumento do interesse na modalidade. Neste aspecto refere-se dois acontecimentos: o primeiro teve lugar em 1946 quando o homem chamado Doug Easton utilizou o alumínio para construir as flechas, permitindo uma melhor uniformidade e velocidade do material, melhorando notavelmente os resultados dos arqueiros. O segundo acontecimento teve lugar em 1966 quando H.W. Allen inventou o arco composto. Este arco utiliza duas roldanas descentradas em relação ao eixo central do arco e colocadas na sua extremidade, e que vão reduzir significativamente a tensão de abertura do arco. São muito populares no norte da América tanto no tiro olímpico como na caça.

Recentemente tem aparecido novos materiais, como o carbono que permite a construção de flechas muito mais rápidas e ligeiras, e associado ao aparecimento dos mais variados acessórios, permite desfrutar cada vez mais e melhor do prazer desta interessante atividade desportiva.

2.2 EQUAÇÃO DO 2º GRAU

A fundamentação teórica desta seção está de acordo com Rogério (2009).

As equações do segundo grau tiveram seu primeiro registro com os babilônios, que tinham uma álgebra bem desenvolvida e conseguiam resolver seus problemas por métodos semelhantes aos que conhecemos hoje ou pelo método de completar quadrados.

O método de completar quadrados é utilizado para encontrar raízes de uma equação do 2º grau e como uma das demonstrações da fórmula de Bhaskara.

Segundo Silva (2018), as equações do segundo grau em muito se parecem com os produtos notáveis quadrado da soma e quadrado da diferença.

O quadrado da soma, por exemplo, é uma soma de dois monômios elevada ao quadrado. Observe:

$$(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$$

O primeiro membro da igualdade acima é conhecido como produto notável e o segundo como trinômio quadrado perfeito. Este último em muito se parece com uma equação do segundo grau. Observe:

Trinômio quadrado perfeito: $x^2 + 2kx + k^2$

Equação do segundo Grau: $ax^2 + bx + c = 0$

Dessa maneira, caso haja alguma maneira de escrever uma equação do segundo grau como um produto notável, talvez haja também uma forma de encontrar seus resultados sem a necessidade de utilizar a fórmula de Bháskara.

Para tanto, observe que, no produto notável acima, $a = 1, b = 2k$ e $c = k^2$. Dessa maneira, é possível escrever equações que cumprem esses requisitos na forma de produto notável.

Portanto, observe os coeficientes da equação. Se "a" for diferente de 1, divida toda a equação pelo valor de "a". Caso contrário, observe o coeficiente "b". O valor numérico de metade deste coeficiente deve ser igual ao valor numérico da raiz quadrada do coeficiente "c". Matematicamente, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, se $a = 1$ e, além disso:

$$\frac{b}{2} = \sqrt{c}.$$

Então, pode-se escrever essa equação da seguinte maneira:

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right) = 0.$$

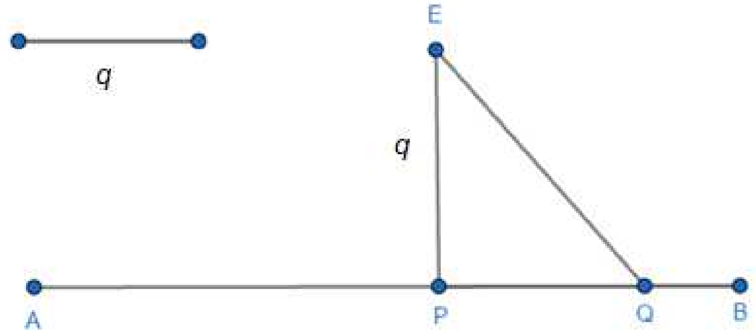
E as suas raízes serão $\frac{b}{2}, -\frac{b}{2}$.

Já Euclides, em seu trabalho Os Elementos, resolve equações polinomiais do 2° grau através de métodos geométricos.

Abaixo estão algumas das proposições encontradas nos Elementos de Euclides

Proposição 28 Livro VI: Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada. Em linguagem atual, $x^2 - px + q^2 = 0$, em que p e q são os segmentos dados.

Figura 1: Divisão do segmento de reta $\overline{AB}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

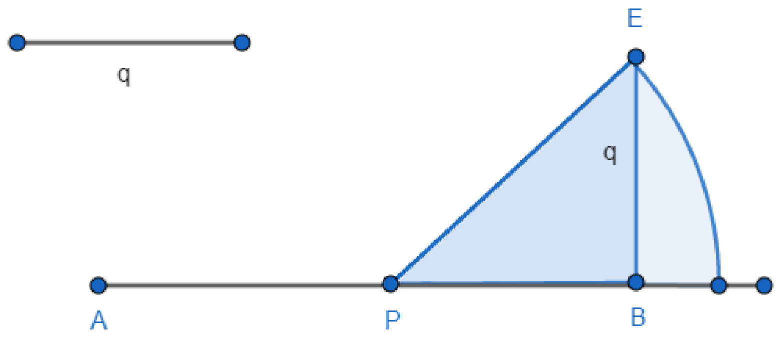
Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{PE}$ dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$, $\overline{PE} = q$ e $q < \frac{p}{2}$. Dividindo $\overline{AB}$ com o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ}.\overline{QB} = q^2$ tem-se a solução procurada. Para isso basta traçar uma circunferência de centro em E e raio $\frac{p}{2}$, que cortará segmento AB no ponto Q. Logo

$$q^2 = \overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2 = (\overline{PB} - \overline{PQ}).(\overline{PB} + \overline{PQ}) = \overline{QB}.\overline{AQ}.$$

Finalmente denotando por $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{QB}$ as raízes da equação dada, conclui-se que $p = r + s\ e\ q^2 = rs.$

Proposição 29 Livro VI: Prolongar um dado segmento de reta de modo que o retângulo contido pelo segmento estendido e a extensão seja igual a um quadrado dado. Em linguagem atual, $x^2 - px + q^2 = 0$.

Figura 2: Prolongamento do segmento de reta $\overline{AB}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$ dois segmentos de reta, em que $\overline{AB} = p$ e $\overline{BE} = q$. Determina-se o ponto Q tal que $\overline{AQ} + \overline{QB} = p$ e $\overline{AQ}.\overline{QB} = q^2$. Pela construção tem-se $\overline{PE} = \overline{PQ}$, em que P é o ponto médio de $\overline{AB}$. Nota-se que $q^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PE}^2 = \overline{PQ}^2$, ou seja,

$$q^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{PB}^2 = (\overline{PQ} - \overline{PB}).(\overline{PQ} + \overline{PB}) = \overline{QB}.(\overline{PQ} + \overline{PA}) = \overline{QB}.\overline{AQ}.$$

Considerando $r = \overline{AQ}$ e $s = \overline{QB}$, então

$$p = r - s\ e\ r\,.(-s) = -r.s = -\overline{QB}.\overline{AQ} = -q^2$$

e, assim, r e s são as raízes da equação dada.

Proposição 11 Livro II (Segmento Áureo): Dividir uma linha reta em duas partes tais que o retângulo contido pelo todo e uma das partes tenha área igual à do quadrado sobre a outra parte.

De forma equivalente, dado um segmento de reta AB, deve-se determinar o ponto X desse segmento tal que o retângulo de lados AB e XB tenha a mesma área do quadrado de lado AX. Indicando-se as medidas de AB e AX por a e x, respectivamente, mostra-se que a e x devem satisfazer a seguinte equação: $a(a-x) = x^2$.

Numa forma simplificada, e em notação atual, a solução de Euclides compõe-se dos seguintes passos:

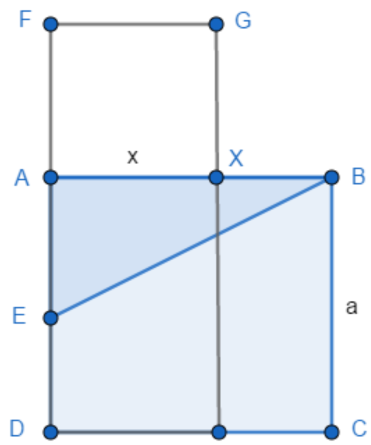
1. Construir o quadrado $ABCD$ sobre o segmento dado $\overline{AB}$;
2. Tomar o ponto médio, E, de $\overline{AD}$;
3. Tomar F sobre o prolongamento de $\overline{AD}$ de maneira que $\overline{EF} = \overline{EB}$;
4. Construir o quadrado sobre o lado $\overline{AF}$ no mesmo semi-plano de $\overline{BC}$.
5. O vértice X desse quadrado, pertencente ao segmento $\overline{AB}$, é a solução do problema.

De fato:

$\overline{AE} = \frac{\overline{AD}}{2} = \frac{a}{2}$. Portanto, no triângulo ABE tem-se $\overline{EB} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Daí, $x = \overline{AX} = \overline{AF} = \overline{EF} - \overline{EA} = \overline{EB} - \overline{EA} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(-1+\sqrt{5})}{2}$ é a raiz positiva de $a(a-x) = x^2$, denominado número áureo, que é a medida do segmento $\overline{AX}$.

Figura 3: Segmento áureo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Índia, as equações eram resolvidas completando quadrados. Esta forma de resolução foi apresentada por Al-Khowarizmi, no século IX, onde se descartavam raízes negativas por não serem adequadas e aceitavam raízes irracionais.

Os Babilônios se utilizavam de tabletes de argila e tinham um sistema de numeração bem desenvolvido com base 60. Dos tabletes que foram encontrados, existem alguns que tratam das equações do 2º grau. Em um deles há o seguinte problema: Achar o lado de um quadrado se sua área menos seu lado é igual a 870. Hoje escrevemos a equação $x^2 - x = 870$.

A Matemática grega é diferente da babilônica e egípcia. Eles transformaram os conhecimentos destas duas civilizações em resultados bem estruturados, onde a argumentação é feita através da demonstração matemática. A maneira dos matemáticos gregos apresentarem seus resultados é geométrica, como nos Elementos de Euclides, escritos por volta do ano 300 a. C.

Os Árabes assimilaram a Matemática dos gregos e fizeram progressos em várias áreas. O matemático muçulmano Muhammad ben Musa al-Khowarizmi (780-850), foi o primeiro escrever sobre a solução de problemas usando al-jabr (adicionar termos iguais a ambos os membros de uma equação, a fim de eliminar termos negativos) e al-muqabala (redução de termos positivos por meio da subtração de quantidades iguais de ambos os membros da equação).

No Brasil, costuma-se chamar de fórmula de Bhaskara a fórmula que dá soluções a equação do segundo grau. Além de ser historicamente incorreta, esta nomenclatura não é usada em nenhum outro país.

2.3 FUNÇÃO DO 2º GRAU

De acordo com Araújo (2013), podemos dividir o desenvolvimento da noção de função em três momentos históricos: Antiguidade, Idade Média e Modernidade.

O período da Antiguidade foi caracterizado por diferentes estudos de casos de dependência entre duas quantidades. Contudo, não foi criada uma noção geral da ideia de função.

Já no período da Idade Média, as funções foram definidas sob uma ótica geométrica e mecânica. Entretanto, como no período anterior, a noção de dependência entre duas variáveis foi definida de maneira verbal ou através de um gráfico, ao invés de uma expressão algébrica (como conhecemos atualmente).

Por fim, na Idade Moderna, principalmente a partir do século XVII, houve a preferência pelas expressões analíticas para definir funções.

2.3.1 ANTIGUIDADE

Mesmo sem o desenvolvimento de uma noção geral da ideia de variável ou função, o período da Antiguidade foi marcado pelo estudo de casos práticos, em especial no campo de astronomia, que utilizaram métodos quantitativos e construção de tabelas, onde a noção de função era entendida como a relação entre conjuntos discretos e constantes dadas.

No trabalho de Maciel (2011), ele relata que na Idade da Pedra, os homens comercializavam entre si e havia a necessidade de fazer o controle das partes das caçadas entre as famílias. Para a realização de tal procedimento havia a existência da ideia de contagem. O homem associava, por exemplo, uma pedra a cada animal de um rebanho para fazer o controle e dessa forma, estava criando uma relação de dependência entre as pedras e os animais.

Boyer (1996) afirma que, gradualmente, os homens, a partir das suas experiências caóticas, começaram a perceber as existências das analogias e das semelhanças. Ao comparar o conjunto de objetos, como, por exemplo, lobos, carneiros e árvores, o homem percebia que entre eles havia algo em comum, a unicidade.

Ele ainda define o processo de contagem como uma correspondência entre objetos. Tal evento podia ser facilmente realizado com a utilização dos dedos de uma mão que indicavam conjuntos com um, dois, três, quatro ou cinco elementos ou, fazendo uso dos dedos das mãos e dos pés, o homem poderia contar até no máximo vinte. Mais do que isso, era comum usar o monte de pedras para representar a correspondência entre objetos de outro conjunto.

Quando o conjunto de pedras era inadequado, pois tal recurso não favorecia o armazenamento da informação, utilizavam-se marcas num bastão ou pedaço de osso para fazer a contagem. O provável uso de contar se baseava em algum método simples que empregava o principio de correspondência biunívoca.

2.3.2 IDADE MÉDIA

Araújo (2013) menciona, que a Idade Média foi bastante importante para o desenvolvimento das ciências exatas, onde conceitos como, por exemplo, velocidade instantânea e aceleração, foram capazes de contribuir para a área da cinemática e do pensamento matemático. Também, este período foi caracterizado pela observação de fenômenos naturais, onde foi descoberto que existiam regularidades que podiam ser descritas através de leis quantitativas.

> O estudo da intensidade das formas e seu aspecto mais importante, a cinemática, eram abordados na Inglaterra em um contexto aritmético, enquanto que, na França, Nicole Oresme (1323–1382) desenvolveu esse estudo através de uma abordagem geométrica, introduzindo o conceito de latitude das formas em meados do séc. XIV. As formas ou qualidades são fenômenos como a luz, a distância, a velocidade, que possuem vários níveis de intensidade e que mudam continuamente, dentro de limites dados. (Bueno & Viali, 2009, p. 39)

Uma das implicações práticas da teoria da latitude foi o desenvolvimento das funções do tempo, e, em especial, a determinação da velocidade média de um movimento uniformemente acelerado. Entretanto, no período da Idade Média, uma relação de dependência entre duas quantidades foi definido através de uma descrição verbal (ou gráfica), não tendo sido desenvolvido o conceito de expressões algébricas.

2.3.3 IDADE MODERNA

A fundamentação teórica nesta seção está conforme Araujo (2013).

O conceito de função que conhecemos hoje foi possível, em grande parte, pelo desenvolvimento da álgebra simbólica e também pela extensão do conceito de número, na medida em que foi introduzida a noção de números imaginários e o conjunto dos números complexos. Isso fez com que fosse possível conceituar função como uma relação entre conjuntos numéricos e também expressar funções através de fórmulas.

Com a formalização do simbolismo de François Viète, a partir da segunda metade do século XVI, após a contextualização de funções através de equações escritas, houve significativo avanço no estudo da matemática, em especial no desenvolvimento das funções. Um dos principais percussores do desenvolvimento do conceito de função foi René Descartes.

> Com os registros de representação tabular, gráfico e algébrico bem desenvolvidos, há, então, a partir das ideias de Descartes de aplicação da álgebra à geometria, o componente que levou o conceito de função a se desenvolver mais rapidamente e a alcançar o cerne de toda a Matemática atual. A partir das ideias e inovações de Descartes, foi possível desenvolver-se, então, o estudo do cálculo diferencial e integral, da análise matemática e de outros campos fundamentais para o desenvolvimento da ciência moderna. (Bueno & Viali, 2009, p. 46)

Outros dois estudiosos que contribuíram de forma bastante significativa foram Isaac Newton e Gottfried Leibniz. Newton apresentou uma intepretação cinemática e geométrica de análise matemática, descrevendo conceitos de tempo e movimento, sendo capaz de interpretar as variáveis dependentes como uma quantidade "continuamente fluente que possui uma velocidade de variação".

Já Leibniz foi capaz de desenvolver noções básicas de diferenciação e integração, sendo um dos percussores do Cálculo Diferencial e Integral. Ele definiu os termos constante, variável, coordenadas e parâmetros, além de dividir as funções e curvas em duas classes diferentes: algébricas e transcendentais.

Outro estudioso que merece destaque é Johann Bernoulli, um dos primeiros matemáticos a utilizar o Cálculo na resolução de problemas.

Em 1718, Bernoulli publicou um artigo que continha a definição de função como "uma quantidade composta, de alguma forma, por uma variável e constantes". Foi Bernoulli o primeiro a fornecer uma definição explícita de uma função como uma expressão analítica. Leonhard Euler (1707-1783), foi possivelmente, um dos maiores matemáticos da história.

> Euler também foi o responsável pelos avanços seguintes mais significativos no desenvolvimento do conceito de função, detalhando o seu estudo de acordo com o padrão da análise matemática da época. Definiu uma constante como uma quantidade definitiva que assume sempre um e o mesmo valor, uma variável como um valor indeterminado ou universal que compreende todos os valores determinados e uma função de uma variável como uma expressão analítica composta por uma quantidade variável e números ou quantidades constantes. (Bueno & Viali, 2009, p. 42)

A definição dada por Euler foi capaz de influenciar todo o desenvolvimento da matemática a partir de então, contribuindo para o desenvolvimento do estudo do tema. Depois de Euler, podemos citar D'Alembert, Lagrange, Laplace, Cauchy, Fourier e Dirichlet. Além destes, diversos outros estudiosos contribuíram para o avanço do desenvolvimento do estudo das funções ao longo dos últimos cinco séculos.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 EQUAÇÕES QUADRÁTICAS

Em matemática, uma equação quadrática é uma equação polinomial de grau dois. A forma geral deste tipo de equação é $ax^2 + bx = c = 0$, onde x é uma variável, sendo a, b e c constantes, com $a \neq 0$. As constantes a, b e c, são chamadas respectivamente de coeficiente quadrático, coeficiente linear e coeficiente constante ou termo livre. Equações quadráticas podem ser resolvidas através da fatoração, do completamento de quadrados, do uso de gráficos, da aplicação do método de Newton ou do uso de uma fórmula.

De acordo com Bosquilha (2010), após vários estudos, o hindu Bhaskara encontrou a resolução da equação do 2º grau sem recorrer a figuras. Mas somente no século XVI, quando o matemático francês François Viète começou a usar letras simbolizando coeficientes e incógnitas, a fórmula de Bhaskara adquiriu o formato que conhecemos hoje.

E conforme Amaral (2017), seu método era da seguinte forma:

Seja $ax^2 + bx = c = 0$ (I), com $a \neq 0$. Fazendo-se $x = u + v$, e substituindo na equação (I), temos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0,$$

$$a(u^2 + 2uv + v^2) + b(u+v) + c = 0.$$

Reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos:

$$av^2 + (2au+b)v + au^2 + bu + c = 0.$$

Viète transformou essa equação numa equação incompleta do 2° grau, escolhendo $u = \frac{-b}{2a}$. Obtendo assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

e chegou, após simples manipulações, a:

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$, então:

$$v = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ou \quad v = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Logo, $x = u + v = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, que é a fórmula de Bhaskara.

3.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA

A fundamentação teórica desta seção está conforme Lima (2013).

Sejam os conjuntos X, Y, uma função $f: X \rightarrow Y$ é uma regra, que mostra como relacionar cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$, onde o conjunto X é denominado por domínio e o conjunto Y é chamado de contra-domínio de f.

Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ é chamado de imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. Sendo escrito $x \rightarrow f(x)$ para indicar que f leva x em $f(x)$.

Uma função $f: R \rightarrow R$ é chamada de função quadrática quando existem números reais $a, b\ e\ c$, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in R$.

Os coeficientes $a, b\ e\ c$ da função quadrática f, são determinados pelos valores que essa função assume. Ou seja, se

$$ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$$

para todo $x \in R$. Então

$$a = a', b = b' e\ c = c'.$$

De fato, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$, para todo $x \in R$. Ao fazermos $x = 0$, obtemos $c = c'$. Então se $c = c'$, ao simplificarmos temos $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in R$.

Neste caso, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Assim sendo, conseguimos $ax + b = a'x + b$ para todo $x \neq 0$. E ao fazermos $x = 1\ e\ x = -1$, obtemos

$$a + b = a' + b' e - a + b = -a' + b',$$

de onde se conclui que $a = b\ e\ a' = b'$.

Os cálculos anteriores nos ajudam a perceber que uma função quadrática é um trinômio do segundo grau, ou seja, uma expressão do tipo $ax^2 + bx = c$, com $a, b\ e\ c \in R$, sendo $a \neq 0$. Por definição, dois trinômios $ax^2 + bx + c$ e $a'x^2 + b'x + c'$são iguais quando $a = a', b = b'\ e\ c = c'$.

3.2.1 UM PROBLEMA MUITO ANTIGO

Uns dos primeiros problemas que recaem numa equação do segundo grau estão em textos antigos escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, onde encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo o valor de sua soma *s* e seu produto *p*.

Em termos geométricos, usando as notações atuais, este problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro s e a área p.

Os números procurados são as raízes da seguinte equação do segundo grau, ou seja

$$x^2 - sx + p = 0.$$

De fato, se um dos números é x, o outro é $s - x$ e seu produto é

$$p = x(s - x) = sx - x^2,$$

logo

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Observe que se α é uma raiz desta equação, isto é, $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$, então $\beta = s - \alpha$ também é raiz, pois

$$\beta^2 - s\beta + p = (s - \alpha)^2 - s(s - \alpha) + p =$$

$$s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p =$$

$$\alpha^2 - s\alpha + p = 0.$$

Até o final do século 16, não era comum usar uma fórmula para determinar as raízes desta equação, visto que não havia-se o costume de ser representado por letras os coeficientes de uma equação. Anteriormente, o que se era feito, era uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos (com coeficientes numéricos).

A regra para achar dois números cujo o valor da soma e produto são dados, era enunciada pelos babilônios da seguinte forma:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Na notação atual, esta regra fornece as raízes

$$x' = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad e \quad x'' = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

para a equação $x^2 - sx + p = 0$.

Não há registro histórico de como chegou-se a esta conclusão, mas os indícios indicam de que pode ter sido algo assim:

Sejam α e β os números procurados, fazendo com $\alpha \leq \beta$. Esses números α e β são equidistantes da média aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Se conhecermos a diferença

$$d = \beta - \left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right) - \alpha,$$

teremos os dois números $\alpha = \left(\frac{s}{2}\right) - d$ e $\beta = \left(\frac{s}{2}\right) + d$. Mas d é fácil de achar, pois

$$p = \alpha.\beta = \left[\left(\frac{s}{2}\right) - d\right].\left[\left(\frac{s}{2}\right) + d\right] = \left(\frac{s}{2}\right)^2,$$

Logo

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \quad e \quad d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Daí

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p},$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Como os valores encontrados para a soma *s* e produto *p* do problema eram sempre números positivos, nunca houve por parte dos babilônios uma preocupação com eventuais soluções negativas fornecidas por sua forma resolutiva. Mas certamente deviam ocorrer casos em que $\left(\frac{s}{2}\right)^2 < p$, como no exemplo de achar dois números cuja soma e cujo produto são ambos iguais a 2. Nestes casos, eles simplesmente diziam que os números procurados não existiam.

3.2.2 A FORMA CANÔNICA DO TRINÔMIO

Considerando o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Temos que as duas primeiras parcelas dentro do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Completando o quadrado, podemos escrever:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right],$$

ou:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

O fato de escrevermos o trinômio do segundo grau tem alguns efeitos resultantes. A primeira consequência nos leva diretamente à fórmula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Com efeito, sendo $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0, \quad (1)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}, \qquad (2)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad (3)$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (4)$$

A passagem da linha (*2*) para a linha (*3*) só tem lógica quando o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é maior ou igual a 0. Caso o tenhamos menor que 0, a equivalência entre as linhas (*1*) e (*2*) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ será sempre positivo e nunca negativo.

Da fórmula (*4*) resulta imediatamente que, se o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo, a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

tem duas raízes reais distintas

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad e \qquad \beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

com $\alpha < \beta$, cuja soma é

$$s = -\frac{b}{a},$$

e cujo produto é

$$p = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Neste caso, a média aritmética das raízes é $-\frac{b}{a}$, ou seja, as raízes $\alpha\, e\, \beta$ são equidistantes do ponto $-\frac{b}{2a}$.

Quando o discriminante for igual a *0*, a equação dada possui uma única raiz, e é chamada de *raiz dupla*, igual a $-\frac{b}{2a}$.

Supondo *a* positivo. A forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right],$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de *x* e é sempre maior ou igual a 0. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0,$$

ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, *f(x)* também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = c - \left(\frac{b^2}{4a}\right) = \frac{(4ac - b^2)}{4a}$$

Se o valor de *a* for negativo, o valor $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ é o maior dos números *f(x)*, para qualquer $x \in R$.

Agora se questionarmos a seguinte pergunta: Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, para quais valores $x \neq x'$tem-se $f(x) = f(x')$? A forma canônica nos fornece a ajuda necessária para respondê-la.

Olhando para a forma canônica, vemos que $f(x) = f(x')$ se, e somente se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x' + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como é suposto que $x \neq x'$, isto significa que

$$x' + \frac{b}{2a} - \left(x + \frac{b}{2a}\right) =$$

isto é

$$\frac{x + x'}{2} = -\frac{b}{2a}$$

Portanto, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor

$$f(x) = f(x')$$

para $x \neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $-\frac{b}{2a}$.

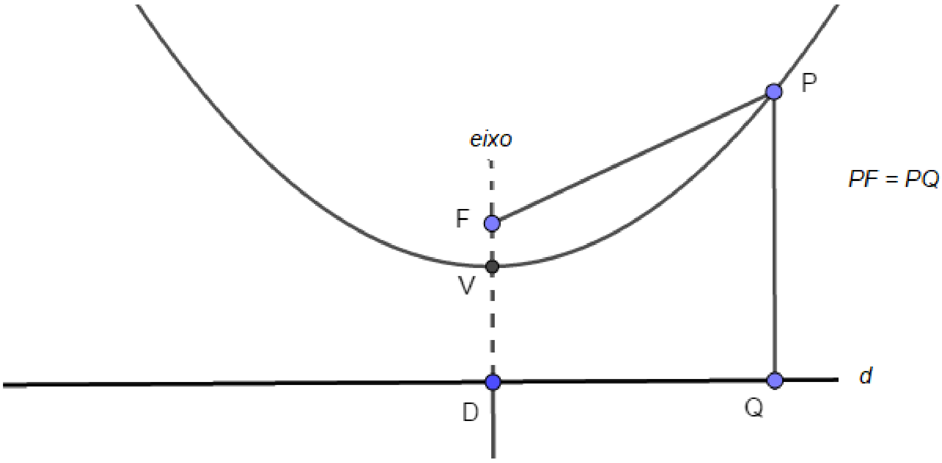
3.2.3 O GRÁFICO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola, sendo assim, dados um ponto *F* e uma reta *d* que não o contém, a parábola de foco *F* e diretriz *d* é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de *F* e de *d*.

A reta perpendicular à diretriz, feita a partir do foco, é chamada de eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz por sua vez, é chamado de vértice dessa parábola.

Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Figura 4: Foco e eixo da parábola



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vale ressaltar que a distância de um ponto a uma reta é o comprimento do segmento perpendicular baixado do ponto sobre a reta, e para que o conceito de gráfico da função quadrática fique mais evidente, serão mostrados a seguir três exemplos.

Exemplo 1: O gráfico da função quadrática $f(x) = 5x^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0,\ \frac{1}{20}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{20}$.

De fato, pois para todo $x \in R$, vale a igualdade

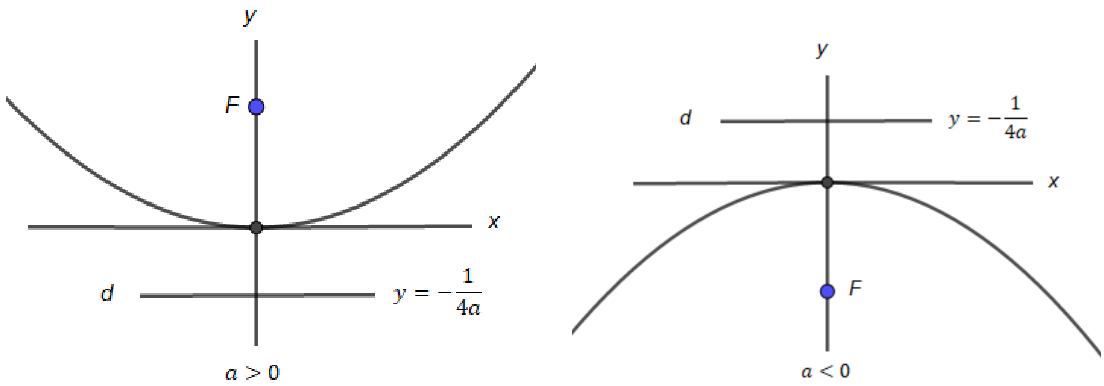
$$x^2 + \left(5x^2 - \frac{1}{20}\right)^2 = \left(5x^2 + \frac{1}{20}\right)^2$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto $P = (x,\ 5x^2)$ do gráfico de $f(x) = 5x^2$ ao foco $F = \left(0,\ \frac{1}{20}\right)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = -\frac{1}{20}$.

De forma geral temos, se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$, onde a igualdade abaixo é válida.

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2.$$

Figura 5: Os gráficos de $f(x) = ax^2$

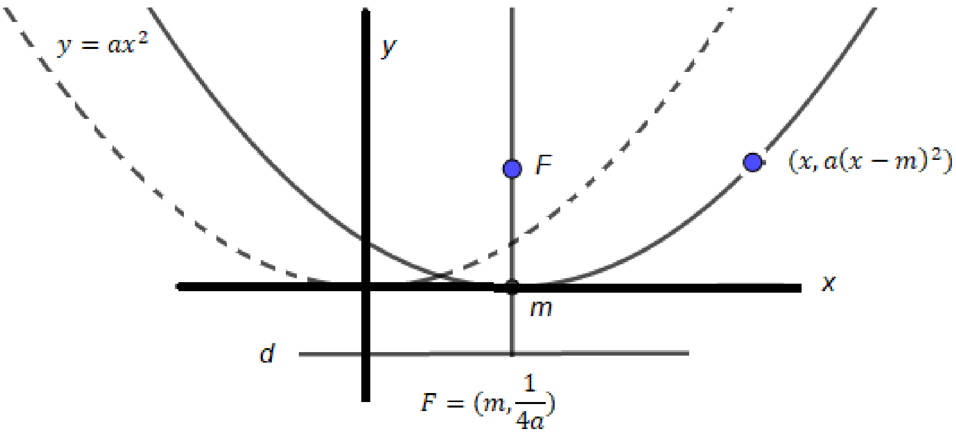


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos também que se a for positivo a concavidade da parábola $y = ax^2$ é voltada para cima e caso a seja negativo, a sua concavidade é voltada para baixo.

Exemplo 2: Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in R$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Figura 6: Translações horizontais



Fonte: Elaborada pelo autor.

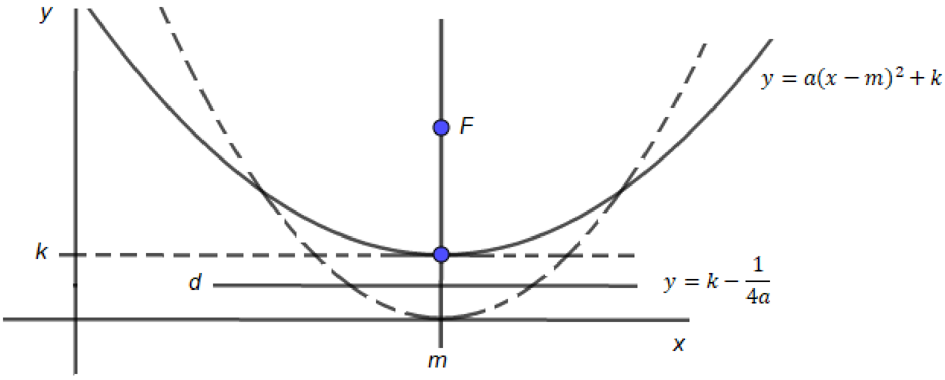
Para se obter este resultado, podemos ir por dois caminhos. Inicialmente podemos verificar que, para todo $x \in R$, vale a igualdade

$$(x - m)^2 + \left[a(x - m)^2 - \frac{1}{4a}\right]^2 = \left[a(x - m)^2 + \frac{1}{4a}\right]^2,$$

ou uma outra maneira seria mostrar simplesmente que o gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x,y) \to (x+m,\ y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$.

Exemplo 3: Dados $a,\ m,\ k \in R$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = \left(m,\ k + \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

Figura 7: Os gráficos de $f(x) = a(x-m)^2 + k$



Fonte: Elaborada pelo autor.

A confirmação acima vem do resultado imediato do exemplo anterior, considerando que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x,y) \to (x,\ y+k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

Segue-se deste último exemplo que o gráfico de qualquer função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c\ ,$$

é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

e cujo foco é o ponto

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right).$$

Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se *a* por positivo ou para baixo se *a* for negativo.

Com efeito, a forma canônica do trinômio

$$ax^2 + bx + c$$

nos dá

$$ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + k$$

Onde

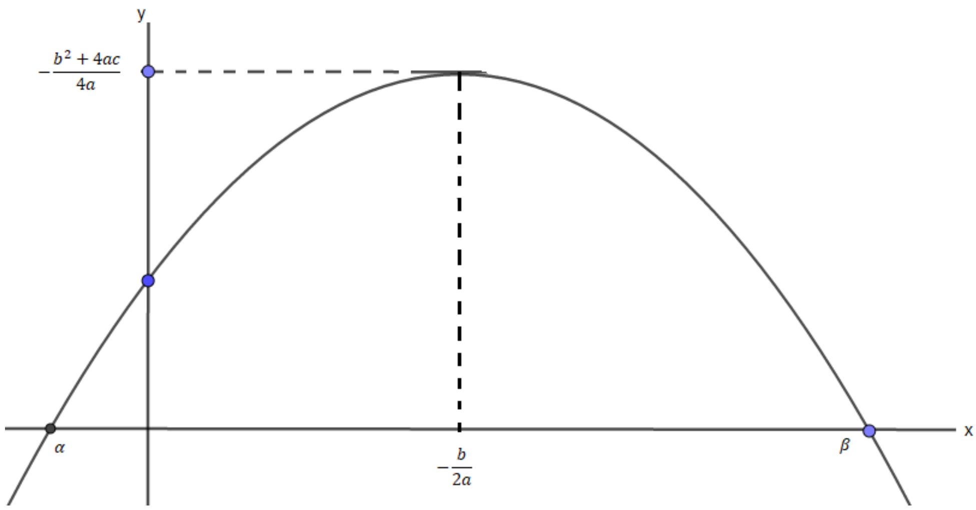
$$m = -\frac{b}{2a} \qquad e \qquad k = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

O ponto do gráfico de

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = -\frac{b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Ainda quando $x = -\frac{b}{2a}$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$.

Figura 8: Coordenadas do vértice



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2.4 O MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

Este tipo de movimento, tem como importante exemplo a queda dos corpos no vácuo, sujeitos apenas à ação da gravidade, tem-se um ponto que se desloca sobre um eixo. Sua posição no instante t é dada pela abscissa $f(t)$. O movimento uniformemente variado é descrito por uma função quadrática:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c \qquad (5)$$

Nesta expressão a constante a chama-se aceleração, b é a velocidade inicial (no instante $t = 0$) e c é a posição inicial do ponto.

Em qualquer movimento, dado por uma função f, o quociente

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{espaço\ percorrido}{tempo\ de\ percurso},$$

é chamado de velocidade média do ponto no intervalo cujos extremos são t e $t+h$. No caso em que f é dada pela fórmula (5), a velocidade média do móvel entre os instantes t e $t+h$ é igual a $at+b+\frac{ah}{2}$. Se tomarmos h cada vez menor, este valor se aproxima de $at+b$. Portanto pode-se dizer que

$$v(t) = at + b,$$

é a velocidade do ponto (no movimento uniformemente variado) no instante t.

Quando t for igual a 0 temos $v(0) = b$, por isso b se chama a velocidade inicial. Além disso, temos que $a = \frac{v(t+h)-v(t)}{h}$ para quaisquer $t, h,$ logo a aceleração constante a é a taxa de variação da velocidade. Por isso o movimento se chama uniformemente variado.

No caso da queda livre de um corpo, a aceleração a é a da gravidade, normalmente indicada pela letra g.

O movimento uniformemente variado pode ocorrer também no plano. Um exemplo disso é o movimento de um projétil (uma flecha, uma bola, uma bala de canhão, etc.) lançado por uma força instantânea e, a partir daí, sujeito apenas à ação da gravidade, sendo desprezada a resistência do ar. A trajetória do projétil está contida no plano determinado pela reta vertical no ponto de partida e pela direção da velocidade inicial.

Quando se tem um movimento retilíneo (sobre um eixo), a velocidade do móvel é expressa por um número. Mas quando o movimento ocorre no plano ou no espaço, a velocidade é expressa por um vetor (segmento de reta orientado), cujo comprimento se chama por velocidade escalar do móvel. A direção e o sentido desse vetor indicam a direção e o sentido do movimento.

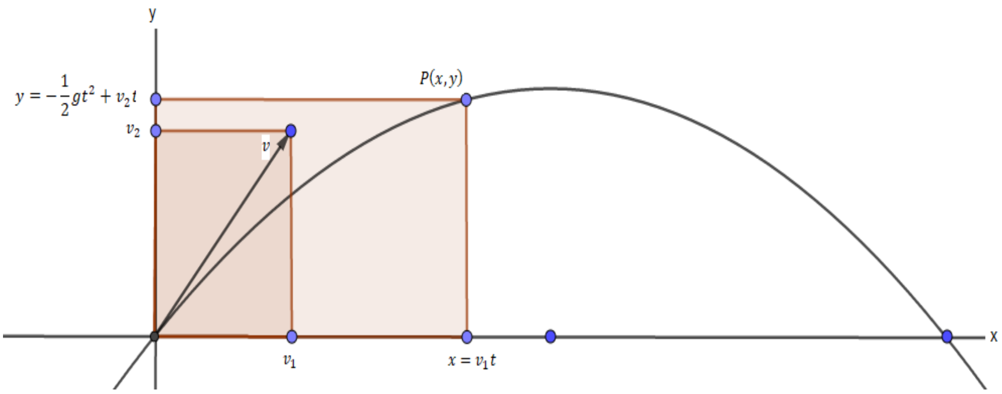
No plano em que se dá o movimento, será tomado um sistema de coordenadas cuja origem é o ponto de partida do projétil e cujo eixo OY é a vertical que passa por esse ponto.

A velocidade inicial do projétil é o vetor $v = (v_1, v_2)$ cuja primeira coordenada v_1 fornece a velocidade da componente horizontal do movimento (deslocamento da sombra, ou projeção do projétil sobre o eixo horizontal OX).

Como a única força atuando sobre o projétil é a gravidade, a qual não possui componente horizontal, nenhuma força atua sobre este movimento horizontal, que é portanto um movimento uniforme. Assim, se $P = (x, y)$ é a posição do projétil no instante t, tem-se $x = v_1 t$.

Por sua vez, a aceleração da gravidade é constante, vertical, igual a $-g$. (O sinal menos se deve ao sentido da gravidade ser oposto à orientação do eixo vertical *OY*). Portanto, a componente vertical do movimento de P é um movimento uniformemente acelerado sobre o eixo OY, com aceleração igual a $-g$ e velocidade inicial v_2.

Figura 9: Movimento uniformemente variado



Fonte: Elaborada pelo autor.

Logo, em cada instante t, a ordenada *y* do ponto $P = (x, y)$ é dada por

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$. (Não há termo constante porque *y = 0* quando *t = 0*).

Se $v_1 = 0$ então, para todo t, tem-se $x = v_1 t = 0$, logo $P = (0, y)$, com

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t.$$

Neste caso, a trajetória do projétil é vertical.

Suponhamos agora $v_1 \neq 0$. Então, de $x = v_1 t$ vem $t = \frac{x}{v_1}$. Substituindo *t* por este valor na expressão de *y*, obtemos

$$y = ax^2 + bx, \text{ onde } a = -\frac{g}{2v_1^2} \text{ e } b = \frac{v_2}{v_1}$$

Isto mostra que a trajetória do projétil é uma parábola.

> A parábola aparece como padrão de comportamento de muitos fenômenos, como por exemplo, a trajetória de um projétil ao ser lançado, a linha descrita pela água numa fonte e a estrutura que sustenta o farol de um automóvel (DANTE 2010, p. 149).

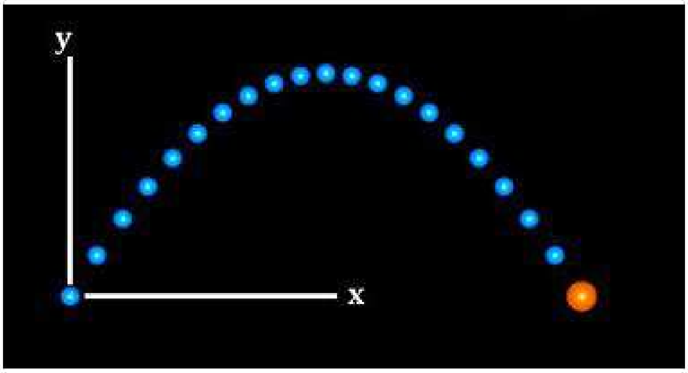
3.2.5 LANÇAMENTO OBLÍQUO

Os resultados desta seção estão em conformidade com Junior (2018).

O lançamento oblíquo é uma junção de movimentos na vertical e horizontal, e ocorre quando o objeto lançado forma um determinado ângulo com a horizontal.

O lançamento oblíquo ocorre quando um objeto inicia seu movimento formando um determinado ângulo θ com a horizontal. Nesse tipo de lançamento, o objeto executa dois movimentos simultâneos, ao mesmo tempo em que executa um movimento na vertical, subindo e descendo, também se desloca horizontalmente.

Figura 10: Lançamento obliquo



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lancamento-obliquo.htm

A imagem acima indica a trajetória de um corpo que executa um movimento oblíquo. Esses tipos de movimentos podem ser observados, por exemplo, no tiro de meta executado por um goleiro em uma partida de futebol, e no momento da tacada em uma bola de golfe.

A análise do lançamento oblíquo deve ser feita levando em consideração o movimento executado na vertical (eixo *y*) e o movimento na horizontal (eixo *x*). Quanto ao movimento no eixo *y*, a preocupação será a determinação da altura máxima atingida pelo corpo, por conta da atuação da gravidade neste eixo o movimento será uniformemente variado. As análises do movimento no eixo *x* irão determinar o alcance horizontal do lançamento, isto é, a distância entre os pontos de partida e chegada. Horizontalmente, o movimento será retilíneo e uniforme.

O alcance horizontal é a distância entre os pontos de partida e chegada do objeto lançado obliquamente. A sua determinação será feita a partir da função horária da posição para o movimento retilíneo uniforme (MRU), sendo assim podemos escrever:

$$s = s_0 + v_x t$$

$$s - s_0 = v_x t$$
$$A = v.\cos\theta.t \qquad (6)$$

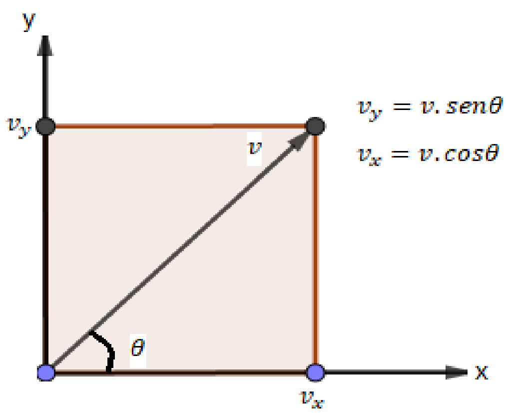
Onde s é a posição final do objeto lançado, s_0 é a posição inicial, v_x é velocidade no componente do eixo x, t é o tempo do deslocamento e θ é o ângulo formado com o plano horizontal.

Observe que a diferença entre as posições final e inicial foi substituída por A, simbolizando o alcance do objeto. A velocidade do objeto forma um ângulo θ com a horizontal, sendo assim, as análises feitas tanto na horizontal quanto na vertical devem utilizar os devidos componentes do vetor velocidade em cada eixo.

Eixo y: $v_y = v\,.\,\text{sen}\,\theta$

Eixo x: $v_x = v.\cos\theta$

Figura 11: Velocidade Vetorial Média



Fonte: Elaborada pelo autor.

O tempo considerado na equação (6) é o tempo total para que o objeto saia do chão, atinja a altura máxima e retorne ao solo. No estudo do lançamento vertical, vemos que o tempo gasto para que um objeto atinja a altura máxima vertical é dado por:

$$t_s = \frac{v}{g}.$$

Nessa equação, v é a velocidade do objeto e g é a aceleração da gravidade. Para o caso do lançamento oblíquo, a velocidade considerada na vertical será a componente v_y, sendo assim, podemos escrever:

$$t_s = \frac{v_y}{g},$$

$$t_s = \frac{v.sen\theta}{g}$$

O tempo destacado acima refere-se à subida do objeto, logo, o tempo total do movimento será o dobro.

$$t = \frac{2v.\operatorname{sen}\theta}{g}.$$

Assim, a equação *(6)* poderá ser reescrita:

$$A = v\,.cos\,\theta.t,$$

$$A = v.\cos\theta\frac{2v\;sen\;\theta}{g},$$

$$A = \frac{2v^2 sen\theta cos\theta}{g}.$$

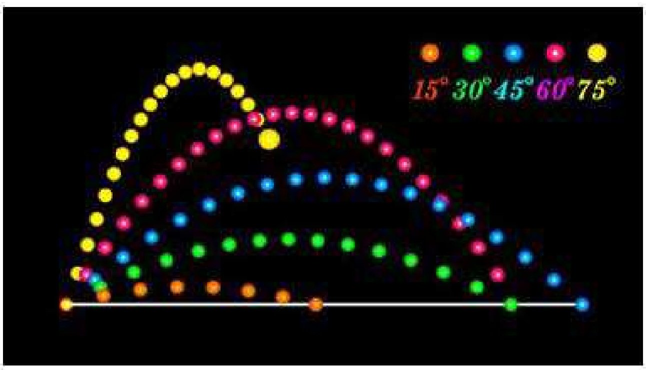
Sabemos que $2sen\theta cos\theta$ pode ser substituído pela identidade trigonométrica $sen2\theta$, sendo assim, a equação final para a determinação do alcance horizontal em um lançamento oblíquo será:

$$A = \frac{v^2 sen2\theta}{g}.$$

O alcance será o máximo possível quando o ângulo de lançamento for igual a 45°, pois o ângulo é multiplicado por dois na equação do alcance, o seno calculado será o de 90°, já que $sen90°$ = 1 que corresponde ao máximo valor de seno possível, assim o alcance será o máximo possível.

A imagem abaixo indica as possíveis trajetórias para lançamentos oblíquos executados sobre ângulos diversos. Observe que o maior alcance ocorre quando o ângulo de lançamento é igual a 45º.

Figura 12: Lançamentos



Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lancamento-obliquo.htm

A altura máxima de um objeto lançado será determinada a partir da equação de Torricelli, equação do movimento uniformemente variado independente do tempo.

$$v = v_0^2 + 2a\Delta s,$$

onde v_0 é a velocidade inicial, v é a velocidade final, a é a aceleração e Δ_s é a variação do deslocamento $(s - s_0)$.

Para o lançamento oblíquo, teremos:

$$v_y = v_{0y}^2 - 2aH,$$

onde H é a altura atingida pelo objeto lançado.

Na altura máxima, a velocidade do móvel será nula**.** O sinal negativo na equação acima justifica-se pelo fato do movimento ser ascendente, contrário ao sentido da gravidade.

$$0 = (v_0 sen\theta)^2 - 2gH,$$

$$2gH = (v_0 sen\theta)^2,$$

$$H_{max} = \frac{(v_0 sen\theta)^2}{2g}$$

$$H = \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2. g}$$

A equação acima determina a altura máxima atingida por um objeto que executa movimento oblíquo.

4 SISTEMATIZAÇÃO

Como visto anteriormente, o estudo das equações e funções quadráticas é amplo, interessante e de importante aplicabilidade, e neste capítulo, o trabalho apresentará a sua proposta de ensino.

Realizamos 09 aulas com duração de 50 minutos cada, com os 25 alunos do 9ºA da Escola Municipal Maria Elisa Almeida Silva, localizada na cidade de São José de Ribamar - MA. A escolha destes alunos foi devido ao fato de muitos terem interesses em esportes não muito comuns ao cotidiano do povo brasileiro e também, por perceber a importância do estudo das funções quadráticas ao longo do ensino médio.

Outro motivo é o interesse dos alunos nos atuais filmes, revistas e séries de super-heróis, onde alguns destes são exímios arqueiros.

As aulas foram ministradas durante o mês de Novembro nos dias 21, 22, 27, 28 e 29, e nos dias 4, 5, 6 e 11 do mês de Dezembro de 2017, no turno matutino.

Como já dito anteriormente na introdução, foram feitas 08 aulas teóricas em sala de aula e 01 aula prática, sendo inicialmente as 03 primeiras uma revisão sobre equação quadrática, seguida de 04 aulas sobre função quadrática. Após estas 07 aulas, tivemos com os alunos 01 aula prática utilizando um arco feito com cano de PVC 3/4, e por fim 01 aula onde os alunos construíram o gráfico da função quadrática que descreve a trajetória do disparo da flecha.

4.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Ensinar matemática para qualquer nível da educação básica, não deve ser feito somente apenas através do método tradicional, já bastante conhecido e desgastante, tanto para o professor quanto para o aluno. Ele deve ser abordado de forma que possa levar o aluno a ter compreender a real utilidade da matemática e sua aplicação em seu cotidiano, tornando-a mais interessante e divertida de aprender.

> Muitos têm a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade. Tal constatação os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da Matemática em situações na vida futura. (BRASIL, 1998, pg. 79)

O ensino deve levar em conta o cotidiano e a realidade de cada região, as experiências vividas pelos alunos, quais serão suas prováveis áreas de atuação profissional, como eles podem atuar como cidadãos; enfim, ensinar levando em conta o contexto dos estudantes. Sendo assim, o professor deve iniciar sua aula sobre equações e funções quadráticas contando um pouco da história de cada um, sempre mostrando o que levou cada matemático a querer aprofundar e a procurar cada vez mais conhecer e como utilizar seus aprendizados em prol da humanidade.

Conforme Lobato (2008), a contextualização tem muito a ver com a motivação do aluno, por dar sentido àquilo que ele aprende, fazendo com que relacione o que está sendo ensinado com sua experiência cotidiana. Através da contextualização, o aluno faz uma ponte entre teoria e a prática, o que é previsto na LDB e nos Parâmetros Curriculares Nacionais, que definem Ciência como uma elaboração humana para a compreensão do mundo.

> A contextualização visa dar significado ao que se pretende ensinar para o aluno (...), auxilia na problematização dos saberes a ensinar, fazendo com que o aluno sinta a necessidade de adquirir um conhecimento que ainda não tem. (Ricardo, 2003, v. 4, p. 11).

4.2 PROPOSTA DE ENSINO

4.2.1 CONSTRUÇÃO DO ARCO

Para a construção do arco o docente necessitará dos seguintes materiais:

- 01 cano de PVC 3/4, com 3 mm de espessura e 64 polegadas de comprimento, aproximadamente 162,5 cm.

Figura 13: Canos de PVC.

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

- 01 corda para varal no tamanho de 71 polegadas, aproximadamente 180 cm.

Figura 14: Corda para o arco

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

- Fio dental para a estruturação do nock point (local exato na qual a flecha se encaixa na corda), para o encaixe do nock da flecha (parte traseira da flecha que se encaixa na corda).
- Uma furadeira e uma serra para cano

Primeiramente, deve-se fazer um furo de um lado ao outro em uma das extremidades do cano, de modo que a corda possa passar por eles.

Figura 15: Foto dos furos

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Em seguida, serrar a parte da outra extremidade do cano, conforme a figura abaixo.

Figura 16: Foto do cano serrado

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Após os furos e cortes, a corda deve ser passada pelos furos e dar um nó, e posteriormente irá fazer o mesmo na parte serrada dos arcos, de modo que o brace (distância entre o centro arco e a corda) seja de pelo menos 22 cm, aproximadamente a distância de 1 palmo.

Figura 17: Foto da corda com os nós

Fonte Registro fotográfico realizado pelo autor.

Figura 18: Verificação do Brace

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor .

Para deixar o arco um pouco mais confortável na mão do aluno, pode-se também fazer o local exato da pegada no arco, conhecido como grip. Ele deve ser feito com o arco desarmado. Mede-se a metade do cano, e dessa metade para baixo, enrola-se um fio no arco de aproximadamente 10 cm de comprimento.

Figura 19: Construção do grip

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Para encerrar, é necessário fazer o nock point na corda. O nock point fica exatamente no meio da corda, e pode ser feito com fio dental. Mede-se o comprimento da corda com o arco armado, marca-se a metade de seu comprimento e em seguida encaixa-se a flecha no meio da corda. Após isso, dá-se algumas voltas com o fio dental abaixo do nock da flecha, e pronto, o arco está construído.

Figura 20: Nock point

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Figura 21: Arco feito de cano PVC 3/4

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

4.2.2 DESCRIÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO

O professor irá iniciar com o estudo das equações quadráticas, dando ênfase ao cálculo dos zeros da equação e em exemplos de aplicação do estudo dos zeros da equação quadrática. É necessário trabalhar exercícios contextualizados, pois ficará mais fácil para o professor mostrar ao aluno a importância do assunto estudado.

Ao longo dessa seção, usaremos $ax^2 + bx = c = 0$, com $a \neq 0$, como modelo para equação do 2º grau.

1ª aula: Reconhecer e identificar os coeficientes de uma equação do 2º grau, e estudar a resolução das equações incompletas, através de exemplos do cotidiano como o abaixo:

"Numa sala de aula, havia 50 alunos entre meninos e meninas. Quantos meninos havia na sala, sabendo que o produto dos dois grupos é igual a 621, e a quantidade de meninas é maior que a quantidade de meninos?"

Montando o sistema juntamente com os alunos, onde *H* representa o número de meninos e *M* representa o número de meninas teremos:

$$\begin{cases} H + M = 50 \\ H.M = 621 \end{cases}$$

Trabalhando as equações do sistema da forma que for de melhor compreensão para eles, chegaremos a equação:

$$H^2 + 50H + 621 = 0,$$

onde os valores dos coeficientes são $a = 1, b = -50\ e\ c = 621.$

Vale ressaltar que, exemplos históricos também são de fundamental importância e devem ser trabalhados.

E logo após, estudar a resolução das equações incompletas, com $b = 0$ ou com $c = 0$. Nesse caso, recomenda-se que os exemplos iniciais sejam de equações simples e diretos, como:

$$9x^2 - 25 = 0,$$

que resolvendo-se temos:

$$9x^2 - 25 = 0$$

$$9x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{9}$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$x = \frac{5}{3} \qquad ou \qquad x = -\frac{5}{3}.$$

Após o professor mostrar como resolver a equação, ele pode apresentar outros exemplos diretos e em seguida alguns exemplos contextualizados para os alunos, levando-os a tentarem resolvê-los em dupla.

2ª aula: Reconhecer e resolver situações – problemas que envolvam equações do 2º grau.

O professor pode iniciar a aula mostrando o seguinte exemplo:

"Carlos pretende construir uma piscina retangular em sua casa e ao conversar com o engenheiro ele fez duas exigências. O comprimento dela deve ser 10 metros maior que a largura e a sua área superficial deve ser de 144m^2. Quais são as dimensões da piscina para que o pedido de Carlos seja atendido?"

Representando x como a largura da piscina e $(x + 10)$ como o comprimento, temos:

$$x(x + 10) = 144$$

$$x^2 + 10x - 144 = 0.$$

O professor em seguida irá expor aos alunos que as soluções das equações do 2º grau completas é dada através da formula resolutiva:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dando atenção que a expressão $b^2 - 4ac$ (que é um número real) é usualmente representada pela letra *Δ* (delta) e é chamada de discriminante da equação.

E resolvendo o problema dado, temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 676$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

logo

$$x' = 8 \qquad \text{e} \qquad x'' = -18.$$

Assim, a largura da piscina deve medir 8 metros e o comprimento, 18 metros.

Vale ressaltar que o resultado de $x'' = -18$, nesta situação, não nos é válido pois estamos trabalhando com um problema que como resultado só admite valores positivos, pois no cotidiano, não há como termos – *18* metros de comprimento.

Completado esta explicação, o professor deve fazer ao menos, mais dois exemplos, e em seguida, pedir que os alunos se reúnam em duplas e tentem resolver outros exemplos sugeridos pelo professor. Após isso, serão recolhidos os resultados e em seguida comparados os resultados, terminando a aula resolvendo cada problema no quadro.

3ª aula: Estudar as relações entre as raízes e os coeficientes da equação quadrática.

Um exemplo que o docente pode usar inicialmente em sala de aula é o seguinte:

"Escreva uma equação do 2º grau em que a soma das raízes seja 35 e o produto, 300".

Devemos encontrar *x' e x''* de modo que:

$$x' + x'' = 35 \qquad e \qquad x'.x'' = 300$$

Considerando *S* a soma das raízes de uma equação do 2º grau, podemos verificar que $S = \frac{-b}{a}$.

De fato:

$$S = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

ou seja,

$$S = \frac{-b}{a}$$

Indicando por *P* o produto das raízes, podemos também verificar que

$$P = \frac{c}{a}.$$

De fato:

$$P = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right).\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right),$$

assim

$$P = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2},$$

portanto

$$P = \frac{c}{a}.$$

E, considerando por fim a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, podemos dividir todos os termos por *a*, sendo $a \neq 0$. Ficando da seguinte forma a equação:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0.$$

como mostramos que $S = \frac{-b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$ temos:

$$S = \frac{-b}{a} \quad ou \quad -S = \frac{b}{a} \quad e \quad P = \frac{c}{a}$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por $-S$ e $\frac{c}{a}$ por P, em $x^2 = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$, temos:

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

e assim, a equação procurada é $x^2 - 35x + 300 = 0$.

Em seguida o professor pode sugerir mais alguns exemplos para os alunos de modo que ajude a fixar o conteúdo já revisto.

Chegando ao estudo das funções quadráticas, deve-se falar sobre o histórico e serventia destas funções. Ao iniciar a parte da construção do gráfico, feito de forma habitual, como é ensinado comumente, é recomendado que os elementos que compõem o gráfico, como zeros, vértices, pontos máximos e mínimos sejam bem trabalhados e fixados com os alunos, pois será extremamente necessário que eles os compreendam bem para a construção dos gráficos das trajetórias dos disparos com o arco.

4ª aula: Identificar e resolver situações – problema que envolva uma função quadrática.

Iniciar com um breve resumo histórico do estudo das funções quadráticas e em seguida, mostrar que a função polinomial do 2º grau é toda função definida pela sentença matemática $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$.

O professor pode usar o exemplo abaixo para ajudar a fixar melhor o entendimento.

"*Uma flecha é lançada para o alto e sua trajetória é definida pela função* $y = \frac{-x^2}{5} + 5x$, *sendo x o tempo em segundos de vôo e y a altura atingida em metros. Qual a medida da altura em que a flecha estará quando a duração de vôo for de 4 segundos?*"

Figura 22: Arqueiro atirando

Fonte:
https://www.facebook.com/arqueriaimperial/photos/a.1835216873374595.1073741842.1794979000731716/2059814080914872/?type=3&theater

Sendo x = 4 segundos, temos:

$$y = \frac{-x^2}{5} + 5x,$$

$$y = \frac{-4^2}{5} + 5.4,$$

$$y = 16 \text{ metros.}$$

Após este exemplo, pode-se trabalhar mais algumas questões com os alunos divididos em duplas ou trios, de modo que os permita compreender o conceito inicial de função quadrática.

5ª aula: Construir o gráfico da função quadrática.

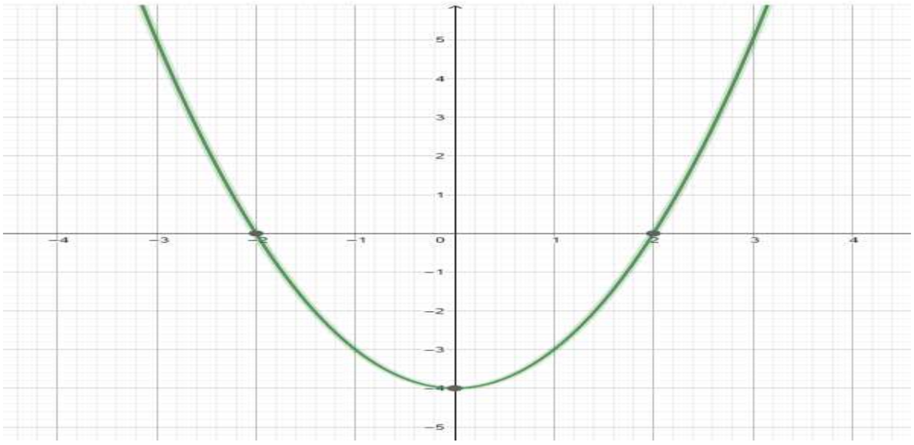
Nesta aula, o professor irá iniciar o estudo da construção do gráfico da função quadrática. No primeiro momento, mostrará de forma simples como construir o gráfico da função $y = x^2 - 4$, sendo $x \in R$. Para isso ele deve atribuir alguns valores reais arbitrários para x, como, por exemplo, os valores -3,-2, 0, 2, 3.

Compondo a tabela para determinar os pares (x, y), temos:

x	y	(x, y)
-3	5	(-3, 5)
-2	0	(-2, 0)
0	- 4	(0, - 4)
2	0	(2, 0)
3	5	(3, 5)

Em seguida, localizará esses pontos no plano cartesiano, e mostrará para os alunos que o conjunto de todos os pontos (x, y), com x real e $y = x^2 - 4$, é o gráfico desta função, e esse gráfico é representado por uma curva chamada parábola.

Figura 23: Gráfico da função $y = x^2 - 4$



Fonte: Elaborada pelo autor.

E por fim, irá passar mais alguns exemplos para que os alunos construam gráficos de outras funções, tais como, a construção dos gráficos das funções:

$$y = x^2 + 2x - 3 \ e \ y = x^2 - 4x + 4.$$

6ª aula: Estudar os zeros da função polinomial do 2º grau.

O professor irá apresentar aos alunos como calcular os valores de *x* para que a função $y = ax^2 + bx + c$ tenha $y = 0$ (ou $ax^2 + bx + c = 0$). Deixando claro para os alunos que, algebricamente, os zeros da função quadrática são obtidos quanto resolvemos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, sendo assim:

- Quando $\Delta > 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem dois zeros reais diferentes
- Quando $\Delta = 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um único zero real.
- Quando $\Delta < 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ não tem zeros reais.

E com essas condições de relação, temos que o discriminante Δ:

- Quando $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo *x* em dois pontos distintos.
- Quando $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo *x*.
- Quando $\Delta = 0$, a parábola e o eixo x têm apenas um ponto em comum, ou seja, a parábola tangencia o eixo *x*.

Finalizando a aula com exercícios para a fixação do que foi mostrado pelo professor, como o sugerido abaixo:

"Determinar, algebricamente, os zeros da seguinte função do 2º grau:

$y = x^2 - 10x + 21$".

Fazendo $y = 0$, temos a equação do 2º grau:

$$x^2 + 10x + 21 = 0.$$

Assim, calculamos o discriminante da equação encontrada, temos:

$$\Delta = 16,$$

e como raízes obtemos:

$$x' = 7 \; e \; x'' = 3,$$

que são os zeros da função inicial.

7ª aula: Estudar o ponto máximo e mínimo do gráfico da função quadrática.

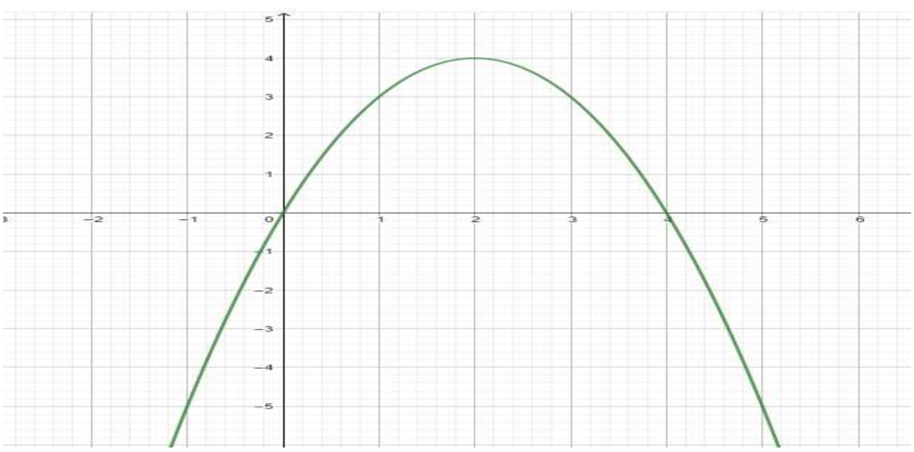
O professor irá iniciar esta aula utilizando o exemplo seguinte:

"Um dardo é lançado da origem segundo determinado referencial e percorre a trajetória de uma parábola. A função que representa essa parábola é $y = -x^2 + 4x$. Quais são as coordenadas do ponto onde esse dardo atinge sua altura máxima?"

Em seguida, o professor irá construir o gráfico desta função atribuindo os seguintes valores para *x*.

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
3	3	(3, 3)
4	0	(4, 0)

Figura 24: Gráfico da função $y = -x^2 + 4x$



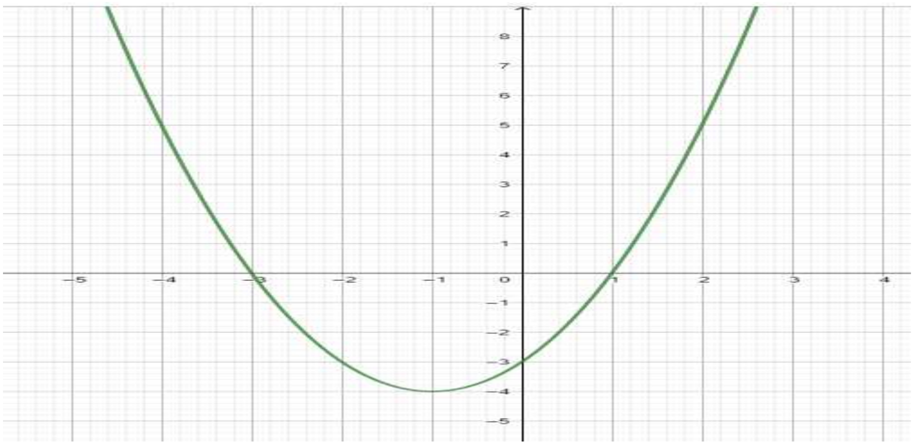
Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao término da construção da parábola, o professor irá destacar o ponto (2, 4), mostrando para os alunos que aquela coordenada é o ponto máximo da parábola, pois a sua concavidade esta voltada para baixo.

Logo após este exemplo o professor irá construir, com a participação de um aluno indo ao quadro, o gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$, atribuindo os seguintes valores para *x*.

x	y	(x, y)
-3	0	(- 3, 0)
- 2	- 3	(- 2, - 3)
- 1	- 4	(- 1, - 4)
0	- 3	(0, - 3)
1	0	(1, 0)

Figura 25: Gráfico da função $y = x^2 + 2x - 3$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após atribuir os valores para *x* e com o aluno encontrando os valores para *y*, o docente mostrará que a coordenada (- 1, - 4) é o ponto mínimo da função.

Em seguida irá comentar com os alunos que:

- Quando $a > 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um valor mínimo, e o vértice é o ponto de mínimo.
- Quando $a < 0$, a função $y = ax^2 + bx + c$ tem um valor máximo, e o vértice é o ponto de máximo.

Após esta explicação, o professor irá mostrar para os alunos que também é possível calcular algebricamente o ponto de máximo ou mínimo de uma função quadrática, sendo a coordenada x do vértice (x_v) dada por $\frac{-b}{2a}$ e a coordenada y do vértice (y_v) dada por $\frac{-\Delta}{4a}$, através dos seguintes exemplos:

"Para que valor de x o valor da função $y = -2x^2 + 6x + 1$ é máximo?"

Queremos calcular o ponto máximo que essa função atinge, ou seja, x_v. Assim temos:

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

$$x_v = 1{,}5.$$

Logo, *y* tem valor máximo para $x = 1{,}5$.

"O custo C, em reais, de um produto é dado por $C(x) = x^2 - 80x + 3000$, sendo x a quantidade de unidades produzidas. Qual o valor do custo mínimo para que as unidades deste produto sejam produzidas?"

Queremos calcular neste caso y_v. Assim temos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$y_v = 1400.$$

Logo o custo mínimo da produção é de R$ 1.400,00.

Depois desta explicação, o professor dividirá a turma em duplas distribuindo 2 funções para cada dupla e pedindo em seguida para que os alunos calculem os pontos de máximos ou mínimos de cada uma função que a equipe recebeu, dando um tempo de 10 minutos. Passado o tempo, ele pedirá que cada dupla mostre no quadro o cálculo feito.

8ª aula: nesta aula, ocorrerá a sessão de disparo com os alunos. Vale ressaltar que para esta aula, os alunos levaram antes para casa um pedido de autorização para os pais ou responsáveis pedindo a liberação ou não da participação desta atividade extra – classe, conforme o Apêndice 1.

O material necessário para a realização desta aula será:

- Arco construído com cano PVC 3/4
- 01 flecha (a flecha usada foi uma Easton Inspire, e pode ser comprada na internet, mas recomenda – se que neste caso o docente faça a opção por uma flecha mais barata, feita de alumínio).

- Trena de 50 metros para medição das distâncias alcançadas em cada disparo.

Para a sessão de disparo com os alunos, o docente precisa inicialmente seguir algumas regras de segurança:

1 – Fazer uma linha de tiro no chão, onde os alunos devem ficar atrás dela, conforme a imagem abaixo.

Figura 26: Linha de tiro

Fonte: http://www.wikiwand.com/pt/Tiro_com_arco

2 – Olhar antes de disparar para ver se não tem ninguém próximo ao alvo. (Nesta aula não haverá um alvo, apenas a medição da distância alcançada em cada disparo)

3 – Nunca atirar flechas para cima.

4 – Atirar somente na linha de tiro.

5 – Só buscar flechas quando todas tiverem sido atiradas.

6 – Nunca apontar flechas para pessoas ou animais.

7 – Se puder, fazer esta atividade ao lado de um instrutor de tiro com arco ou o professor de educação física.

Seguindo estas regras, o professor pode iniciar os disparos com os alunos, e eles serão feitos da seguinte maneira:

1 – Dispor a trena em linha reta a partir da linha tiro.

Figura 27: Trena em linha reta

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

2 – Os disparos serão feitos em um terreno plano com distância mínima de 70 metros de comprimento por 30 metros de largura.

Figura 28: Campo para disparos

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

3 – Chamar aluno por aluno para fazer um disparo, e em seguida acompanha – lo para verificar a distância alcançada pela flecha. Em cada disparo o professor, ou outro aluno, irá cronometrar o tempo de trajetória da flecha, desde sua saída do arco até o chão.

Figura 29: Disparo do aluno 14

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Figura 30: Disparo do aluno 13

Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Essa sessão de disparo é o momento mais importante no projeto, pois será onde o professor irá tentar levar cada aluno a perceber que a trajetória que a flecha faz durante o vôo, descreve a parábola que representa a função de cada disparo.

O docente neste momento deve encorajar cada disparo de cada aluno e comemorar com eles o sucesso de cada tiro, visto que, provavelmente este será o primeiro contato dos alunos com o esporte não tão comum ao seu cotidiano, e o incentivo nesse instante é de fundamental importância, principalmente com aqueles alunos mais tímidos.

O professor deve acompanhar os discentes no caminho para buscar cada flecha e durante esse trajeto, conversar com o aluno sobre a sensação do disparo, se houve dificuldade de preparar o tiro, puxar o arco e principalmente se ele conseguiu notar a trajetória que a flecha fez no ar durante todo o seu vôo.

Após todos os disparos, o professor voltará com os alunos para sala de aula explicando aos discentes que na aula seguinte precisarão trazer os seguintes materiais: 01 folha de papel A4 ou almaço, régua, lápis, borracha e caneta, para a construção do gráfico da função descrita pela trajetória de cada disparo pessoal.

Abaixo segue a tabela com as distâncias alcançadas em cada disparo por aluno. Observa-se que neste dia faltaram 02 alunos, devido a este fato, a relação a seguir conta com apenas 23 alunos dos 25 selecionados para esta atividade.

Aluno	**Distância alcançada no disparo**
Aluno 1	32 metros
Aluno 2	36 metros
Aluno 3	47 metros
Aluno 4	27 metros
Aluno 5	44 metros
Aluno 6	50 metros
Aluno 7	17 metros
Aluno 8	34 metros
Aluno 9	32 metros
Aluno 10	33 metros
Aluno 11	26 metros
Aluno 12	17 metros
Aluno 13	40 metros
Aluno 14	37 metros

Aluno 15	27 metros
Aluno 16	16 metros
Aluno 17	46 metros
Aluno 18	35 metros
Aluno 19	32 metros
Aluno 20	40 metros
Aluno 21	12 metros
Aluno 22	25 metros
Aluno 23	42 metros

9ª aula: o professor irá mostrar para cada aluno o próprio tempo e distância alcançada de cada disparo, mostrando em seguida como calcular a velocidade média da flecha após o tiro com o arco.

Por serem alunos do 9º ano, a matemática necessária para calcular a altura máxima atingida por cada disparo ainda não é dominada por eles, então neste caso o professor pode apresentar a Equação de Torricelli:

$$H = \frac{v_0^2 . sen^2\theta}{2g},$$

fixando previamente o valor do ângulo e tempo de vôo da flecha no ar de acordo com cada distância alcançada, e assim, os ajudar a calcular a altura máxima de cada disparo.

Os valores fixados previamente para ângulo e tempo de vôo foram os seguintes:

- De 10 metros até 20 metros

  Valor do ângulo: 10º graus, tempo de vôo da flecha: 1,25 segundos.
- De 21 metros até 30 metros

  Valor do ângulo: 15º graus, tempo de vôo da flecha: 1,5 segundos
- De 31 metros até 40 metros

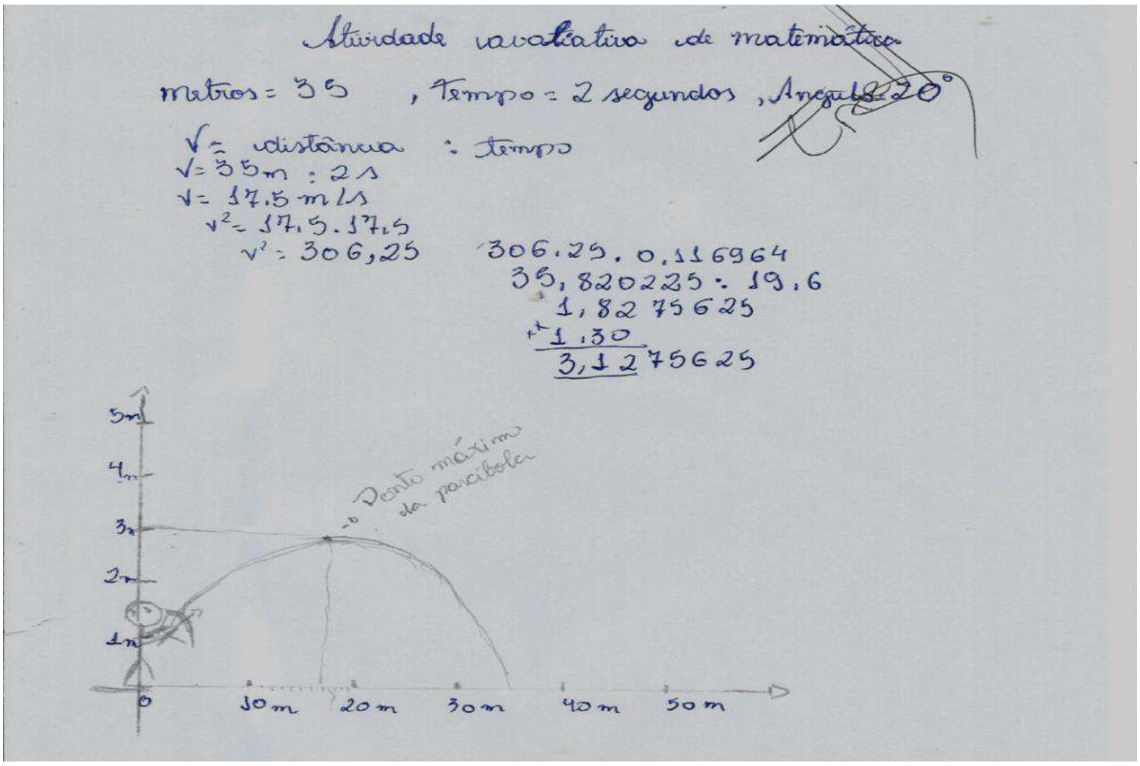
  Valor do ângulo: 20º graus, tempo de vôo da flecha: 1,75 segundos
- De 41 metros até 50 metros

  Valor do ângulo: 25º graus, tempo de vôo da flecha: 2,0 segundos

Em seguida irá pedir para cada aluno construir o gráfico que representa a trajetória do vôo da flecha disparada por ele, mostrando que a trajetória da flecha representa a parábola da função descrita pelo seu disparo.

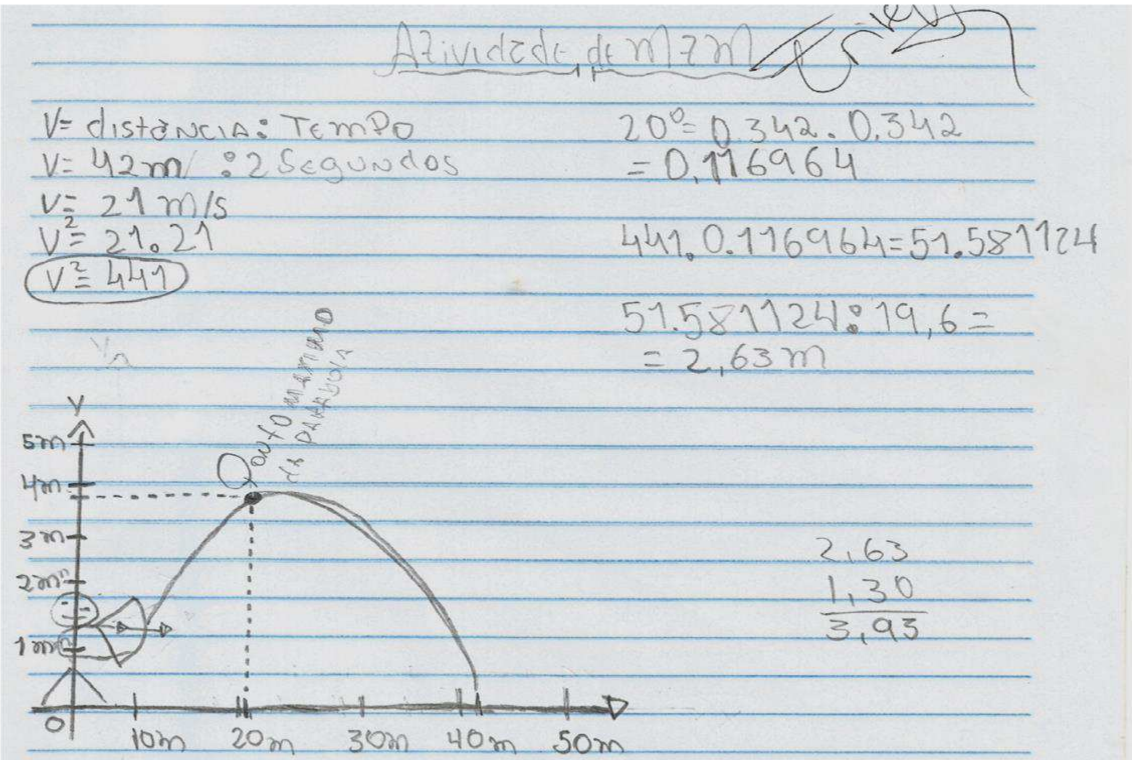
A seguir estão quatro exemplos dos gráficos construídos pelos alunos do 9º ano da Escola Municipal Professora Maria Elisa Almeida Silva, onde os dois primeiros o resultado obtido não foi o esperado, e os dois últimos estão de acordo com o resultado previsto.

Figura 31: Atividade do aluno 18



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Figura 32: Atividade do aluno 6

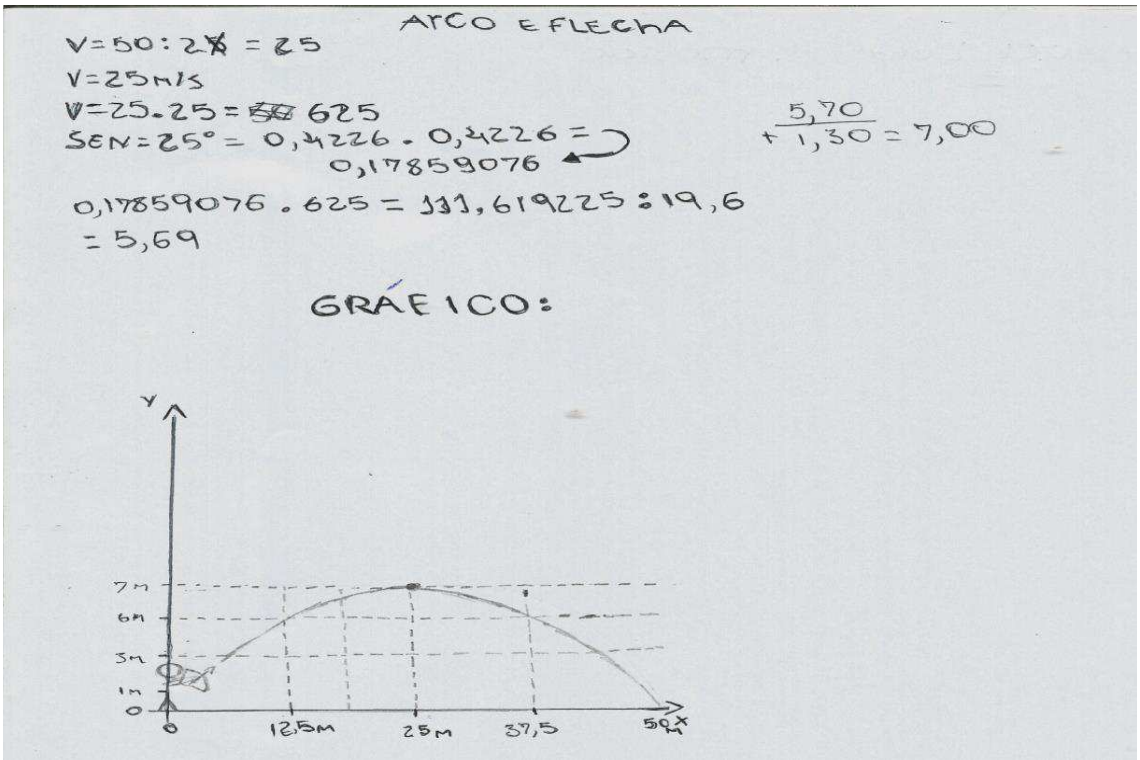


Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Na figura 31 o erro cometido pelo aluno 18, foi a discrepância entre a distância alcançada pela flecha e o tempo de vôo do disparo com os valores previamente fixados pelo professor.

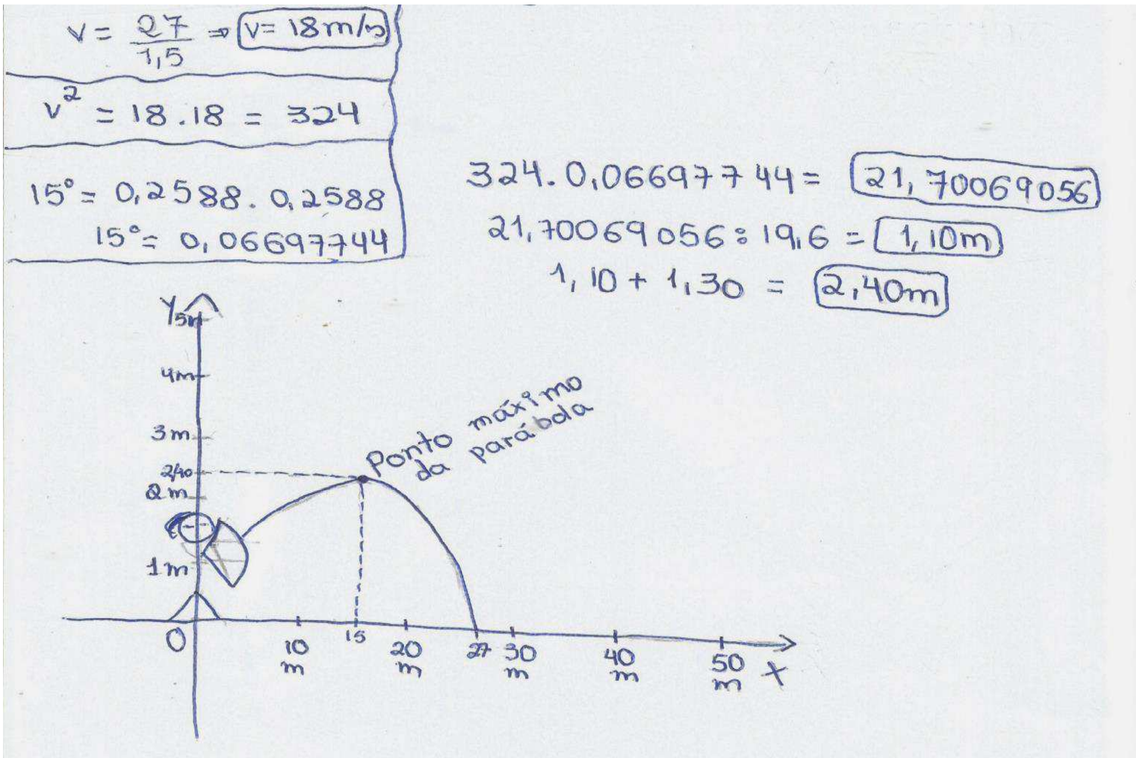
Já na figura 32 o erro cometido pelo aluno 6, foi a divergência entre a distância alcançada e o ângulo de disparo.

Figura 33: Atividade do aluno 23



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

Figura 34: Atividade do aluno 15



Fonte: Registro fotográfico realizado pelo autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho, foi possível perceber a dificuldade do aluno em compreender bem o significado e aplicação em seu cotidiano dos conceitos estudados. A ideia de função quadrática não é algo inicialmente de fácil visualização para o aluno, então realmente se torna de vital importância uma nova abordagem de ensino, de modo que possa facilitar e deter a sua atenção.

A aula prática com o arco artesanal foi o ponto culminante desta proposta de ensino, e foi o momento mais aguardado por todos os alunos, pois foi nesta hora que o significado da trajetória de uma parábola se tornou real.

Dessa forma, todo o assunto abordado antes teve um significado concreto e compreensível para cada um deles.

Abaixo estão alguns depoimentos dados pelos alunos sobre a aula prática:

Aluno 12: *"Foi muito legal porque é um jeito de se divertir e aprender ao mesmo tempo. Eu achei muito legal por causa disso."*

Aluno 17: *"Eu achei ótimo ter uma aula com tiro de arco porque é interessante o cálculo que a gente fez do ponto que a flecha percorreu e a altura que ela atingiu."*

Aluno 20: *"Eu achei esse trabalho muito bom, bem legal e divertido no momento de atirar."*

Aluno 23: *"Foi interessante fazer uma aula prática sobre o assunto. Se fosse assim em todas as aulas, aprenderíamos mais."*

Sendo assim, a análise que fazemos é que abordar um tema matemático no ensino fundamental deve ser feito de preferência utilizando a *Seqüência Fedathi* que consiste em dividir a aula em quatro momentos:

1. Tomada de posição – apresentação do problema;
2. Maturação – compreensão e identificação das variáveis envolvidas no problema;
3. Solução – apresentação e organização de esquemas/modelos que visem á solução do problema;
4. Prova – apresentação e formalização do modelo matemático e ser ensinado;

Juntando a esta sequência uma aula prática, o professor tem em mãos um ótimo meio para ajudá-lo no processo de ensino-aprendizagem.

Este trabalho não tem a intenção de ser o norteador em relação ao ensino das equações e funções quadráticas, mas esperamos que ele possa ser mais uma ferramenta que o professor terá a sua disposição nessa longa jornada chamada educação matemática.

REFERÊNCIAS

[1] AMARAL, JOÃO TOMAS DO. Método de Viète para Resolução de Equações do 2° Grau. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/13/4.htm>. Acesso em: 01 de Outubro de 2017;

[2] ARAUJO, MARCO JULIO CICERO DE. Funções e Continuidade: Conceitos e Aplicações Práticas. São Paulo, 2013;

[3] BOSQUILHA, ALESSANDRA. Manual compacto de matemática / Alessandra Bosquilha, Marlene Lima Pires Corrêa, Tânia Cristina Viveiro – 1. Ed – São Paulo: Rideel, 2010;

[4] BOYER, C, B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996;

[5] BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998;

[6] BUENO, R. W. D. S. & VIALI, L., 2009. A Construção Histórica do Conceito de Função. Educação Matemática em Revista, 1(10), pp. 37-47;

[7] CARAÇA, B. J. Conceitos fundamentais da matemática. Lisboa: Gradiva, 1952;

[8] DANTE, LUIZ ROBERTO. Matemática: contexto e aplicações / Luiz Roberto Dante – São Paulo: Ática, 2010;

[9] DUTRA, SABRINA MARQUES DE ASSIS. Contextualizando o Ensino das Parábolas. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Juiz de Fora: MG, 2015;

[10] GIOVANNI, J.R., CASTRUCCI, B., JR, J. R. G..A Conquista da Matemática. 8ª.série. São Paulo: FTD, 1998;

[11] Historia do Tiro com Arco. Disponível em: http://www.camadeira.com/arco/main/arco_historia_info.htm. Acesso em: 19 de Agosto de 2018.

[12] JÚNIOR, JOAB SILAS DA SILVA. "Lançamento oblíquo"; Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/lancamento-obliquo.htm>. Acesso em: 26 de maio de 2018;

[13] LIBÂNEO, J. C. Didática. Coleção Magistério: 2º Grau. São Paulo: Cortez, 1990;

[14] LIMA, ELON LAGES, Números e Funções Reais/ Elon Lages Lima. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013;

[15] LOBATO, ANDERSON CEZAR. Contextualização: um conceito em debate. Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/educacao/0173.html> Acesso em: 09 de janeiro de 2018;

[16] LUCHETTA, VALERIA OSTETE JANNIS. Resolução de Equação do 2º Grau. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/requacoes.html>. Acesso em: 01 de outubro de 2017;

[17] MACIEL, PAULO ROBERTO CASTOR. A Construção do Conceito de Função Através da História da Matemática. Dissertação de Mestrado. Centro Federal de Educação e Tecnologia Celson Suckow da Fonseca. Rio de Janeiro, 2011;

[18] PEDROSO, HERMES ANTONIO. Uma Breve Historia da Equação do 2º Grau. Disponível em: <http://matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/eq2grau.pdf>. Acesso em: 22 de Fevereiro de 2018;

[19] RICARDO, E.C. Implementação dos PCN em sala de aula: dificuldades e possibilidades. Caderno Brasileiro de Ensino de Física. Florianópolis, v. 4, n. 1, 2003;

[20] ROGÉRIO. História da Equação do Segundo Grau. Disponível em: <http://profrogeriomat.blogspot.com.br/2009/10/historia-da-equacao-de-segundo-grau.html> Acesso em: 22 de Fevereiro de 2018;

[21] SILVA, LUIZ PAULO MOREIRA. "Método de completar quadrados"; Brasil Escola. Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/metodo-completar-quadrados.htm>. Acesso em: 03 de maio de 2018.

APÊNDICE

Estado do Maranhão

Secretaria Municipal de São José de Ribamar

Escola Municipal Professora Maria Elisa Almeida Silva

AUTORIZAÇÃO PARA PARTICIPAÇÃO DE PESQUISA

Senhores pais ou responsáveis pelo aluno(a)____

Venho solicitar a autorização da participação do seu(sua) filho(a), aluno do 9º Ano A da Escola Municipal Professora Maria Elisa Almeida Silva para participar da pesquisa que estou realizando para minha dissertação do Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, realizado pela Universidade Estadual do Maranhão – UEMA.

A pesquisa acontecerá no horário das aulas de Matemática, através da realização de uma manhã da prática do esporte olímpico de TIRO COM ARCO, no dia 06/12/2017 no horário das 08:30 às 09:30, na área lateral da escola, sendo o(a) aluno(a) acompanhado(a) por um instrutor de tiro com arco e uma assistente de instrutor de tiro com arco.

Durante essa atividade, o(a) aluno(a) irá disparar uma flecha com um arco de cano de PVC, onde após o disparo, ele medir a distância atingida pela flecha, e em sala de aula, irá calcular a altura máxima atingida e velocidade do disparo, representado esses dados em gráficos.

Informo que o nome do(a) aluno(a) não será mencionado na pesquisa, mas peço que autorize a publicação das fotografias ilustrativas que serão necessárias, sem que se identifique diretamente o(a) aluno(a).

Aguardo sua compreensão e autorização.

Atenciosamente,

Profº Erivelton Mendes Corrêa

Contato (98) 98892-6236

São Luís, 29 de novembro de 2017

( ) Autorizo ( ) Não Autorizo

____

Assinatura do pai ou responsável