



Uema
UNIVERSIDADE ESTADUAL
DO MARANHÃO

CAMPUS BALSAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

**COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO NUMÉRICO DE QUARTA
ORDEM DE RUNGE-KUTTA E A SOLUÇÃO ANALÍTICA DA
EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDENADA RELATIVA À LEI DE
RESFRIAMENTO DE NEWTON, APLICANDO A LINGUAGEM DE
PROGRAMAÇÃO PYTHON: ESTUDO DA VARIAÇÃO DE TEMPERATURA
DE UM SILO DE ARMAZENAGEM DE GRÃO**

ESTER DOS SANTOS RODRIGUES

**BALSAS - MA
2025**

COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO NUMÉRICO DE QUARTA ORDEM DE
RUNGE-KUTTA E A SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL
ORDENADA RELATIVA À LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON,
APLICANDO A LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO PYTHON: ESTUDO DA
VARIAÇÃO DE TEMPERATURA DE UM SILO DE ARMAZENAGEM DE GRÃO

ESTER DOS SANTOS RODRIGUES

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), Campus Balsas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Noleto Turibus.

Balsas - MA
2025

R696c

Rodrigues, Ester dos Santos

Comparação entre o método numérico de quarta ordem de runge-kutta e a solução analítica da equação diferencial ordenada relativa à lei de resfriamento de newton, aplicando a linguagem de programação python: estudo da variação de temperatura de um silo de armazenagem de grão. Ester dos Santos Rodrigues/. – Balsas, 2025.

44f.

Monografia (Graduação em Matemática) (Universidade Estadual do Maranhão – UEMA / Balsas, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Noleto Turibus

1. Lei de Resfriamento de Newton. 2. Runge-Kutta. 3. Python I.
Título.

CDU: 51 (07)

COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO NUMÉRICO DE
QUARTA ORDEM DE RUNGE-KUTTA E A SOLUÇÃO
ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL
ORDENADA RELATIVA À LEI DE RESFRIAMENTO
DE NEWTON, APLICANDO A LINGUAGEM DE
PROGRAMAÇÃO PYTHON: ESTUDO DA VARIAÇÃO DE
TEMPERATURA DE UM SILO DE ARMAZENAGEM DE GRÃO

ESTER DOS SANTOS RODRIGUES

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), Campus Balsas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Noleto Turibus.

Aprovada em: 14 de Julho de 2025.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Sérgio Noleto Turibus - UEMA
Orientador



Prof. Dr. Paulo Cristiano Queiroz Moraes - UFMA



Prof. Dr. Raibel De Jesus Arias Cantillo - UFMA

Balsas - MA
2025

Dedico esse trabalho a Deus que fez todas as coisas
e me permitiu chegar até aqui.

Agradecimentos

A Deus, porque Ele é bom, porque sua misericórdia dura para sempre, pela dádiva da vida e por me proporcionar esses anos de muito aprendizado e amadurecimento.

Ao meu orientador Dr. Sergio Nolêto Turibus, essa pessoa incrível por quem tenho muito respeito e admiração. Sou grata por todos os ensinamentos e pela oportunidade que me foi concedida. Obrigada também, pelas palavras de apoio e os incentivos durante o desenvolvimento desse projeto.

Agradeço aos meus pais, Rodrigo da Silva Rodrigues e Margareth Carmem dos Santos Rodrigues, pelos ensinamentos e pela dedicação. Serei eternamente grata pela criação que me proporcionaram e pela infância que hoje guardo com carinho em minhas memórias. Obrigada, senhor meu pai, pelos esforços para me proporcionar o estudo, mesmo não tendo tido a mesma oportunidade no passado. Obrigada, senhora minha mãe, por ser meu exemplo de superação, força, determinação e fé. **Amo vocês até onde o infinito puder me levar.**

Aos meus irmãos, Bruno dos Santos Rodrigues, Thiago dos Santos Rodrigues e Alan Janes Rodrigues Do Nascimento, por quem tenho profunda admiração e respeito. Agradeço, em especial, ao meu irmão mais velho, por me oferecer amparo diante das dificuldades e por ser um porto seguro em quem sei que posso confiar. Amo vocês.

Em nome da matriarca Maria das Graças Rodrigues dos Santos, agradeço a toda a minha família pela confiança e pelo carinho.

A todos os professores da UEMA e demais funcionários, por colaborarem para o sucesso de minha jornada acadêmica. Sei que vocês ainda farão um trabalho incrível na vida dos demais estudantes que ocuparam as cadeiras da universidade.

Agradeço pelos meus irmãos de fé que estiveram intercedendo pela minha vida durante a realização dessa pesquisa. Sou grata pela confiança e pelas palavras de apoio. Obrigada por compreenderem minhas ausências.

Agradeço a querida Aline Oliveira. Digo que sem essa pessoa jamais teria chegado onde estou hoje, pois foi ela um instrumento de Deus que me ajudou a ingressar nesse curso. Obrigada Aline por me levar ao local de realização da prova (PAES) no ano de 2021, me lembrei com carinho do seu rosto por longos anos.

À Universidade Estadual do Maranhão pelo suporte durante a pesquisa, tendo disponibilizado o laboratório e outras instalações do campus para o desenvolvimento dessa pesquisa.

A Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão (FAPEMA) por ter me dado a oportunidade de realizar essa pesquisa e aproveito esse espaço para enaltecer esse trabalho lindo de incentivo aos programas de

iniciação científica que proporcionam experiências enriquecedoras a diversos estudantes.

Agradecimento especial a equipe responsável pelo relatório de termometria da Agro Maranata que não mediu esforços em contribuir com a pesquisa. Sem o apoio desses profissionais não seria possível realizar o experimento. Evidenciando que suas contribuições foram essenciais para construção deste trabalho.

*“Como você pode estar atrasado na vida se a vida
é só sua?” - Autor Desconhecido*

RESUMO

A temperatura e a umidade são fatores determinantes para a preservação da qualidade dos grãos durante o armazenamento. Em silos, o controle rigoroso dessas variáveis é essencial para garantir a integridade do produto final. Este trabalho tem como objetivo geral realizar uma análise comparativa entre a solução analítica e a solução numérica — por meio do método de Runge-Kutta de quarta ordem — da equação diferencial que representa a Lei de Resfriamento de Newton, aplicada ao contexto do resfriamento ou aquecimento de grãos armazenados em silos. Especificamente, busca-se compreender o conceito de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), modelar o comportamento térmico dos grãos com base na referida lei, desenvolver uma rotina computacional em Python para resolver a equação de forma analítica e numérica, e comparar os resultados por meio de gráficos. Também se objetiva evidenciar a aplicabilidade prática e pedagógica das EDOs em contextos cotidianos, como o resfriamento de alimentos e o armazenamento de grãos. A metodologia adotada envolve a coleta de dados térmicos em silos do grupo de agronegócio Maranata, sua inserção em uma rotina desenvolvida no editor VS Code, e a análise gráfica dos resultados gerados pela simulação computacional.

Palavras Chave: Lei de resfriamento de Newton; Runge-Kutta; Python..

ABSTRACT

Temperature and humidity are key factors in preserving the quality of grains during storage. In silos, strict control of these variables is essential to ensure the integrity of the final product. This study aims to perform a comparative analysis between the analytical and numerical solutions — using the fourth-order Runge-Kutta method — of the differential equation representing Newton's Law of Cooling, applied to the context of heating or cooling grains stored in silos. Specifically, the objectives include understanding the concept of Ordinary Differential Equations (ODEs), modeling the thermal behavior of grains based on Newton's Law, developing a Python-based computational routine to solve the equation analytically and numerically, and comparing the results through graphical analysis. The study also seeks to highlight the practical and pedagogical applicability of ODEs in everyday contexts, such as food cooling and grain storage. The methodology involves collecting thermal data from silos operated by the Maranata agribusiness group, processing the data in a custom routine developed in the VS Code editor, and analyzing the results through simulation-generated graphs.

Keywords: Newton's Law of Cooling; Runge-Kutta; Python.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
2.1	SILOS E OS GRÃOS	17
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: A HISTÓRIA	19
2.2.1	Equações Diferenciais	20
2.2.2	Equações Diferenciais Ordinárias	21
2.2.3	EDOs e Suas Aplicações	21
2.3	LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON	25
2.4	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM	26
3	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	27
4	RESULTADOS E IMPLICAÇÕES PRÁTICAS	32
4.1	Resultados da Apresentação Pública	40
5	ANÁLISE CONCLUSIVA	41
	REFERÊNCIAS	42
	ANEXOS	44

Lista de Figuras

1	Silo de armazenagem de grãos	27
2	Disposição dos pêndulos no silo	28
3	Temperaturas registradas pelos sensores as 08:00, 9:00 e 11:00 da manhã .	29
4	Temperaturas registradas pelos sensores as 13:00, 15:00 horas	30
5	Temperaturas registradas pelos sensores as 17:00 horas	30
6	Comparação (considerando o período das 08:00 às 11:00 da manhã) entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton.	34
7	Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (1T).	35
8	Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (2T).	36
9	Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (5T).	37
10	Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (3T).	38
11	Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (4T).	39
12	Apresentação da pesquisa no stande da Uema – Evento Agrobalsas	44

Lista de Tabelas

1	Média dos sensores de temperatura nos cabos (1T), (2T) e (5T).	35
2	Média dos sensores de temperatura nos cabos (3T) e (4T).	37
3	Valores das temperaturas reais comparadas às temperaturas previstas pela equação Analítica e o método de Runge-Kutta no cabo (4T).	40

1 INTRODUÇÃO

A temperatura e umidade são condições que influenciam na qualidade dos grãos no seu processo de armazenamento. Por isso, nos silos de armazenagem de grãos é feito um controle rigoroso que se dá em função da umidade e temperatura, pois, esses dois parâmetros podem determinar a qualidade final do produto.

Para evitar os danos aos grãos armazenados nos silos é preciso que haja um monitoramento constante para verificar as condições internas, como níveis de gases tóxicos, umidade e temperatura. Esse monitoramento pode ser feito através de simulações matemáticas para validar modelos de transferência de calor e de massa nos grãos armazenados.

Sobre isso, nessa pesquisa são apresentadas duas equações diferenciais ordinárias que servirão como parâmetro para o desenvolvimento dessa pesquisa, são elas: o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de Newton. Como base para reflexão levanta-se o seguinte questionamento: Qual dentre os dois métodos – numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de Newton – oferece maior precisão na previsão de temperaturas registradas no interior de um silo de armazenagem de grãos?

Desse modo, com o desenvolvimento dessa pesquisa espera-se que a rotina programada em python forneça um conjunto de resultados gráficos, ao manipular as soluções numéricas e analíticas, que permitirá identificar qual dentre os dois métodos resultam em temperaturas mais próximas das temperaturas reais registradas no interior do silo de armazenagem de grãos. Outra hipótese é que o método numérico, por ser mais adaptável a situações de mudanças na variável do problema, se aproxime mais das temperaturas reais registradas no silo.

Assim sendo, esse trabalho tem como objetivo geral realizar uma análise comparativa entre os resultados obtidos pela solução numérica, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, e os resultados da solução analítica para a equação diferencial da lei de resfriamento de Newton, no contexto do resfriamento ou aquecimento dos grãos armazenados em um silo.

Para isso, busca-se especificamente: descrever o conceito de Equação Diferencial Ordinária (EDO) e sua aplicação no estudo de processos de resfriamento/aquecimento. Manipular a Lei de Resfriamento de Newton analiticamente e numericamente; analisar o comportamento térmico dos grãos no interior de um silo, modelando o processo de resfriamento/aquecimento com a lei de resfriamento de Newton; desenvolver uma rotina em Python capaz de resolver a equação diferencial da lei de resfriamento de Newton tanto de forma analítica quanto numericamente, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, e realizar a comparação entre os resultados através de gráficos e explorar a aplicabilidade das Equações Diferenciais Ordinárias por meio de situações reais, como o resfriamento de grãos em silos e o resfriamento de alimentos, a fim de evidenciar sua relevância prática e potencial pedagógico.

Como justificativa para elaboração desse trabalho, pode-se destacar a necessidade de continuação de um projeto de iniciação científica (PIBIC/UEMA) experimental que foi desenvolvido em 2018/2019, o qual teve como objetivo caracterizar a temperatura dentro dos silos de armazenamento de grãos da região de Balsas. Para caracterizar a temperatura dentro dos silos de armazenamento eram usados sensores dos quais se coletavam os parâmetros para gerar as curvas de resfriamento dentro dos silos. Nesse projeto experimental, foram determinados vários parâmetros os quais serviram de base para gerar as curvas de resfriamento para cada sensor de temperatura.

Ressalta-se também que o monitoramento preciso da temperatura e umidade no interior dos silos é o que garante o sucesso na armazenagem dos grãos. Apesar disso, em desacordo com a era da tecnologia, parte dos produtores de grãos ainda utilizam o monitoramento não automatizado para determinar a variação de temperatura nos silos.

As consequências dessa escolha podem ser observadas nas perdas de produção ocasionadas pela má administração da temperatura e umidade no interior dos silos de armazenagem de grãos. Ponderando que isso pode comprometer a qualidade dos grãos promovendo a proliferação de microrganismos, fungos e prejudicar a durabilidade do estoque.

Pensando nisso, essa pesquisa tem como justificativa o aperfeiçoamento do controle de temperatura no silo. Considerando que esse trabalho se desenvolve no município de Balsas, que por sua vez é uma cidade que tem como principal fonte de renda o agro-negócio, o impacto social se evidencia na forma como essa pesquisa pode contribuir para os produtores locais ajudando-os a entender e controlar as condições de temperatura nos silos.

Os estudos voltados para o controle de temperatura nos silos, em sua maioria, são teóricos e pouco explorados na prática principalmente quando se trata de regiões rurais em que a tecnologia ainda não alcançou todos os âmbitos de produção. Essa pesquisa tem como proposta ampliar os estudos acerca dos conhecimentos práticos obtidos através da manipulação das EDOs para o monitoramento mais preciso no interior dos silos. E com base nisso, propor mudanças no controle de temperatura nos silos.

Além disso, ressalta-se que a matemática é uma ciência exata, que tem como primazia gerar resultados precisos considerando os diversos métodos existentes e por isso pode ser facilmente aplicada a situações cotidianas e é uma ferramenta capaz de solucionar desde problemas simples até os mais complexos. Logo, as contribuições dessa pesquisa não se limitam apenas a prática dos produtores, mas também oferece uma nova abordagem ao aplicar técnicas numéricas de fácil manipulação, comprovando, assim, a eficácia e a aplicabilidade da matemática.

A seguir, discorre-se sobre o armazenamento de grãos nos silos, uma contextualização da história das equações diferenciais, definição de ED e algumas de suas aplicações, além de apresentar as duas EDOs em que esse estudo se baseia. Tudo isso, dialogando com teóricos que investigam as temáticas citadas (D' AMBRÓSIO, 1986; DEVILLA, 2004; BRONSON e COSTA, 2008; BOYCE e DIPRIMA, 2015, 2024). Na sequência são apresentadas três seções, incluindo as conclusões finais, que delimitam o que pode ser analisado durante o desenvolvimento dessa pesquisa.

Na primeira seção intitulada “Procedimentos Metodológicos” ressalta-se o percurso metodológico dessa pesquisa baseando-se nos autores que lidam com as pesquisas de cunho bibliográfico e de análise e coleta de dados, além disso, é feita a descrição das atividades desenvolvidas durante o período disposto para pesquisa em questão. As atividades práticas foram divididas em duas partes, sendo a primeira voltada para o desenvolvimento da rotina em Python que será responsável por manipular (através das duas EDOs) os dados coletados no silo. A segunda parte voltou-se para a coleta de dados no silo. A observação da variação de temperatura foi realizada no dia 15 de janeiro de 2024. Um relatório de termometria emitido pelo grupo de agronegócios Maranata nesse dia foi usado como fonte da coleta de dados.

Na segunda seção — Resultados e Implicações Práticas — são apresentados e discutidos os resultados da pesquisa, com o intuito de esclarecer as potencialidades do objeto de estudo. Nessa seção são apresentados os gráficos que auxiliaram nas considerações

finais dessa pesquisa, além disso são exibidas duas tabelas com as médias das temperaturas registradas ao longo do dia de observação e uma terceira tabela que apresenta as temperaturas previstas pelas duas EDOs partindo da temperatura inicial do silo.

Por fim, na terceira seção, retoma-se o objetivo geral e problemática, buscando refletir sobre as considerações finais dessa pesquisa.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Essa seção está destinada a fundamentação teórica da pesquisa realizada. Ela conversa diretamente com as ideias dos seguintes autores: D' AMBRÓSIO (1986); DEVILLA (2004); BRONSON e COSTA (2008); BOYCE e DIPRIMA (2015/2024).

2.1 SILOS E OS GRÃOS

Preservar a qualidade do grão é uma etapa do meio agrícola que consiste em proteger o produto dos fatores externos e internos que contribuem para sua deterioração. Ou seja, “a manutenção da qualidade de grãos agrícolas armazenados por longos períodos depende do controle de insetos, fungos e bactérias, que se reproduzem e se desenvolvem no meio” (SUN; WOODS, 1997). Assim, com o intuito de preservar os grãos, os produtores optam pela utilização de silos para o armazenamento seguro desses produtos.

Um silo, também conhecido como armazém de grãos, é uma estrutura projetada para armazenar grandes quantidades de grãos como milho, trigo, arroz e soja, entre outros. O funcionamento de um silo é essencial para preservar a qualidade dos grãos armazenados, garantindo sua utilidade e valor comercial por um período prolongado.

A importância de um silo na manutenção da qualidade dos grãos é imensurável. Além de evitar perdas financeiras para os produtores, garantir a qualidade dos grãos é essencial para atender às exigências do mercado e assegurar alimentos seguros para o consumo humano e animal. Um armazenamento adequado também contribui para a estabilidade de preços, uma vez que possibilita o abastecimento contínuo do mercado, mesmo em períodos de escassez de safra.

Em resumo, um silo é uma estrutura essencial para a conservação da qualidade dos grãos. Através de um processo cuidadoso de limpeza, seleção, armazenamento e monitoramento contínuo, é possível garantir a preservação das características nutricionais e organolépticas dos grãos, bem como a valorização do produto final a ser comercializado.

Primeiramente, o processo pode iniciar na fase de colheita, na qual os grãos são retirados das lavouras e transportados para o silo. Ao chegar ao armazém, os grãos são descarregados em uma área específica, chamada de camada branca, onde ocorrerá a seleção e limpeza dos mesmos. De acordo com Devilla:

[...] recomenda-se a secagem e limpeza do produto antes do seu armazenamento, pois esses procedimentos diminuem a ação da microflora na massa de grãos, retardando a velocidade das trocas gasosas e o processo de deterioração natural. (DEVILLA et al., 2004, p. 285)

Logo após a limpeza, os grãos são transportados para a área de armazenamento propriamente dita. Essa área pode ser composta por diversos compartimentos, cada qual destinado a um tipo específico de grão. É necessário ter cuidado para evitar a mistura de diferentes variedades, pois isso pode levar à perda da qualidade e da especificidade dos grãos.

Nos compartimentos, os grãos são armazenados em pilhas verticais, sendo a altura determinada com base nas propriedades físicas dos grãos, como peso específico e capacidade de compactação. É importante garantir que não haja movimentação excessiva dos grãos durante o armazenamento, pois isso pode causar danos à qualidade, como quebra, amassados ou até mesmo a fermentação. Outro fator importante para preservação do grão é o controle da umidade, pois, o teor de umidade de um produto exerce grande influência

na variação de temperatura de uma massa de grãos durante a armazenagem (ABBOUDA et al., 1992)

Por essa razão, no interior do silo, são instalados sistemas de ventilação que possibilitam o controle da temperatura e umidade do ambiente. Isso é primordial para prevenir a proliferação de fungos, pragas e insetos que podem comprometer a qualidade dos grãos. Caso seja necessário, pode ser utilizado o controle de temperatura através do resfriamento ou aquecimento do ar insuflado nas pilhas de grãos.

Além disso, o silo deve possuir um sistema de monitoramento constante para verificar as condições internas, como níveis de gases tóxicos, umidade e temperatura. Dessa forma, é possível identificar qualquer problema que possa afetar os grãos armazenados e tomar as medidas necessárias para preservar sua qualidade.

Portanto, o conhecimento da variação de temperatura e de umidade em diferentes locais de uma massa de grãos, ao longo de um processo de aeração, pode ser uma ferramenta importante no desenvolvimento e na avaliação de estratégias de controle da aeração para manter os grãos sadios e reduzir os custos com tratamento químico, direcionado para insetos e fungos. Este conhecimento pode, também, ser usado em simulações matemáticas para validar modelos de transferência de calor e de massa em grãos armazenados. (DEVILLA et al., 2004, p. 285)

Dentre essas simulações matemáticas destacam-se, nesse relato, o uso das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) para conhecer a variação de temperatura dentro dos silos. Sobre essas equações, discorre-se a seguir na seção intitulada “Equações Diferenciais : Contextualizando Historicamente”.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: A HISTÓRIA

A matemática foi criada para solucionar problemas da vida humana, desde o cotidiano em que se observa o uso dessa ciência para determinar idade, horas, quantidade, volume, ocupação de espaço, até problemas mais robustos como o crescimento de uma população, financeiro de juros compostos e até mesmo a variação de temperatura de um corpo. Os últimos citados podem ser determinados pelas, dentre muitas áreas da matemática, Equações diferenciais Ordinárias.

Quando vemos nas primeiras disciplinas voltadas para o Cálculo Numérico, notamos que as demonstrações na maioria das vezes se limitam a parte teórica das EDOs. Uma explicação para esse fato pode ser a limitação de tempo das aulas o que limita o conhecimento adquirido pelos estudantes. Entretanto, é importante lembrar que as EDOs possuem diversas aplicações nas mais diferentes áreas do conhecimento, como por exemplo na física, economia, engenharia, química, dentre muitas outras. Ou seja, essas equações não devem ser desvinculadas de suas aplicações, pois, se feito, elas ganham o teor meramente de cálculos manipuláveis sem utilidade prática. O que não é verdade, hora, prova disso é que essa foi inventada por estudiosos que procuravam resolver os problemas que em sua época não tinham solução.

Historicamente o cálculo diferencial foi inventado no século XVII por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz o que foi uma importante descoberta para a matemática. Antes de Newton e Leibniz se dedicarem ao estudo do processo de diferenciação houveram outros estudiosos que contribuíram para a descoberta e o aprimoramento do método diferencial. Dentre eles se destacam Fermat, que por volta de 1629 que através do estudo do comportamento das tangentes em determinadas funções resultou em funções que auxiliariam o cálculo das equações diferenciais (ALVES, 2022).

Outro destaque vai para os antecessores de Newton e Leibniz que foram John Wallis e Isaac Barrow que também contribuíram para o estudo das EDOs. Wallis em especial reservou parte de sua vida para o compreender e desenvolver teorias no campo da integração. Barrow por outro lado escreveu o livro “Triangulo diferencial”, nessa obra continha ideias muito semelhantes as ideias de diferenciação. Barrow também foi responsável por desenvolver o teorema fundamental do cálculo (EVES, 2011). Vale salientar que o nesse período já se conhecia tanto o cálculo numérico quanto a integração, entretanto era difícil definir suas nomenclaturas e padronizar seu modo de uso. E é nesse momento que Newton e Leibniz contribuem para as definições das EDOs.

Isso aconteceu porque esses dois matemáticos fizeram com que as Edos fossem fáceis de manipular. Boyce, DiPrima e Meade (2024, p. 19) afirma que isso se deve ao fato de que Newton definiu as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as fórmulas

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(y), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = f(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$$

Por outro lado, enquanto Leibniz estudava energia cinética descobriu o método de separação de variáveis e o método de redução de equações homogêneas e equações separáveis (BOYER, 2012). Depois disso, os estudos a cerca desse tema perduraram por longos anos, tendo contribuições de nomes importantes para matemática como destaca-se a participação dos irmãos Jakob e Johann Bernoulli que implementaram métodos de resolução para aumentar o campo de aplicação das Edos e solucionarem problemas que pertencem a mecânica.

Além deles, Leonard Euler “empregou a ideia de fator integrante na resolução de

equações diferenciais, deu-nos o método sistemático usado hoje para resolver equações diferenciais lineares com coeficientes constantes e distinguiu entre equações diferenciais lineares homogêneas e não-homogêneas” (EVES, 2011, p. 473). Suas aplicações foram voltadas para a hidráulica, teoria lunar e mecânica, que serviria também para aplicar na “ciência do movimento”.

Salienta-se ainda a participação de Lagrange e Laplace. Esse último “criou teoremas e métodos para solucionar equações diferenciais, que contribuíram grandemente no desenvolvimento do cálculo para ser aplicado em vários estudos, como por exemplo em Elasticidade, Fluídos e Dinâmica entre outras áreas” (ALVES, 2022, p. 17-19).

Diante desse contexto, destaca-se que a descoberta das Equações Diferenciais foi extremamente importante para o desenvolvimento não só da matemática mas também para demais áreas do conhecimento, visto que, precisam de equações matemáticas que expliquem e descrevam seus comportamentos. Assim, a seguir aborda-se as definições de uma ED e seus principais conceitos

2.2.1 Equações Diferenciais

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED) (ALVES, 2022). De acordo com Yartey e Ribeiro (2017, p. 8) a equação diferencial pode ser inscrita da seguinte forma:

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$$

De maneira geral, as equações algébricas comuns possuem variáveis denominadas incógnitas. Por outro lado, nas equações diferenciais, essa incógnita, em vez de ser apenas uma variável, assume a forma de uma função $y(x)$, sendo que x é sua variável independente.

Outro exemplo de ED:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Na maioria dos casos o principal objetivo da equação é encontrar quem é a função $y = f(x)$ que satisfaça a equação, essa função é chamada solução da equação.

Dito isso, uma equação diferencial pode ser classificada, com relação ao tipo, de duas formas, são elas: Equação Diferencial Ordinária (EDO) e Equação Diferencial Parcial (EDP). Elas se diferenciam pois enquanto uma possui somente uma variável independente a outra tem mais de uma variável independente respectivamente. Corrobora Yartey e Ribeiro (2017):

Definição 1.1.2. Quanto ao número de variáveis independentes, as equações diferenciais podem ser ordinárias ou parciais. Uma equação diferencial é ordinária (EDO) se a função incógnita for uma função de apenas uma variável. Neste caso, as derivadas que aparecem na equação diferencial são apenas derivadas ordinárias, simples. Caso contrário, as derivadas serão derivadas parciais e aí teremos uma equação diferencial parcial (EDP). (2017, p.11)

Entretanto, esse estudo se limita ao estudo e manipulação das Equações diferenciais ordinárias. Dessa forma, o próximo tópico volta-se para essas equações, buscando conhecer as suas definições, ordens, soluções e seus principais tipos.

2.2.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma EDO é considerada ordinária quando envolve apenas uma variável independente. Portanto, ela possui apenas uma derivada em relação a essa variável (ÁVILA, 2019). Essas equações podem ser classificadas com relação ao tipo (como visto anteriormente), ordem, solução e métodos de soluções.

Assim, a ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que a equação apresenta.

- i. No caso da equação geral $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ a ordem é n , pois esse é a ordem da mais alta derivada dessa equação.
- ii. No exemplo $e^x y' = e^{-y} + e^{-2x-y}$, é de 1º ordem pois essa é a ordem da maior derivada dessa equação.

Já como solução, uma EDO admite a solução geral ou solução particular. A solução geral acontece quando envolve uma constante real arbitrária. “Enquanto uma solução particular de uma equação diferencial é a que se obtém quando se dão, para as constantes arbitrárias que aparecem na primitiva, valores definidos” (MOTTA, 2009, p. 40).

Além disso, existem diversas técnicas e métodos para resolver EDOs, dependendo da natureza da equação. Alguns métodos comuns incluem a separação de variáveis, o método do fator integrante, a substituição de variáveis e as séries de potências. Na lei de resfriamento de Newton, por exemplo, usa o método de separação de variáveis.

Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias. Muitas vezes é fácil permitir a variação dos parâmetros no modelo matemático em um amplo intervalo, enquanto isso poderia levar muito tempo ou ser muito caro, se não impossível, em um ambiente experimental. (BOYCE; DIPRIMA, 2015, p. 42)

Segundo Boyce e DiPrima (2015), as Equações Diferenciais têm inúmeras formas de aplicação, e devido a sua importância podem ser usadas em diversas áreas das ciências, partindo de cálculos simples até atividades mais elaboradas e complexas. Serão vistas, a seguir, algumas das aplicações das EDOs como solução de impasses do mundo real com um exemplo prático para o caso da dinâmica populacional.

2.2.3 EDOs e Suas Aplicações

O próprio ensino da matemática, curiosamente, pode se tornar um dos principais responsáveis pela rejeição dessa disciplina entre os estudantes. Essa afirmação parece contraditória à primeira vista, já que o ensino, por definição, deveria facilitar o aprendizado. Segundo D’Ambrosio (1986, p. 37), trata-se de “uma ação pedagógica que visa o aprimoramento, mediante uma multiplicidade de enfoques, uma ação educativa exercida no sistema educacional de maneira mais direta e característica.” Ou seja, espera-se que o ensino medie o conhecimento de forma a promover o desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

Diante disso, não faria sentido que o próprio ensino contribuísse para a formação de uma visão negativa sobre a matemática — e, no entanto, é exatamente o que frequentemente ocorre. Isso se deve, em grande parte, aos métodos pelos quais a matemática é tradicionalmente apresentada no sistema educacional brasileiro. Embora esse sistema

tenha passado por aprimoramentos ao longo dos anos, o ensino da matemática ainda se baseia, majoritariamente, em abordagens excessivamente teóricas.

É inegável que os fundamentos teóricos são essenciais para o desenvolvimento intelectual do estudante. No entanto, é igualmente importante reconhecer que a matemática é uma ciência altamente aplicável. Reduzir seu ensino apenas à teoria e ao ambiente restrito da sala de aula significa desconsiderar sua riqueza e funcionalidade. Por isso, torna-se urgente desmistificar a ideia de que se trata de uma disciplina abstrata e distante da realidade. Como afirmam Alves e Silva (2016, p. 386), “a Matemática é simples e cotidiana, pois foi construída a partir da necessidade humana de sobreviver e dessa forma deve ser tratada pelos professores e transmitida aos alunos”.

Reforçar a matemática como uma ciência com múltiplas possibilidades de aplicação pode contribuir para uma maior valorização e engajamento dos estudantes. Afinal, é natural que se torne desmotivador estudar algo que parece não ter utilidade prática — o que definitivamente não é o caso da matemática. Nesse sentido, D’Ambrosio (1986, p. 36) destaca:

[...] Isto nos conduz a atribuir à Matemática o caráter de uma atividade inerente ao ser humano, praticada com plena espontaneidade, resultante de seu ambiente sociocultural e consequentemente determinada pela realidade material em que o indivíduo está inserido. Portanto, a Educação Matemática é uma atividade social muito específica, visando o aprimoramento dessa atividade. (1986, p.36)

Dentro desse contexto, as Equações Diferenciais Ordinárias se destacam como exemplo concreto de matemática aplicada, pois estão presentes, ainda que de forma discreta, em diversos aspectos do cotidiano. Um exemplo interessante — e muitas vezes inesperado — é a aplicação desse conteúdo no preparo de um bolo. A princípio, pode parecer improvável associar matemática avançada a uma atividade tão comum. Afinal, quem pode deduzir que há a possibilidade de se trabalhar equações diferenciais no preparo de um bolo? Mas essa relação é real e fundamentada na física térmica.

A Lei de Resfriamento de Newton, sobre a qual esta pesquisa se apoia, é um modelo clássico descrito por uma equação diferencial. Embora sua fórmula possa parecer complexa à primeira vista, ela representa um fenômeno simples e observável: a troca de calor entre um corpo e o meio ambiente.

Ao retirar um bolo quente do forno e colocá-lo sobre a pia, por exemplo, percebe-se que sua temperatura diminui gradualmente até se aproximar da temperatura ambiente. Esse comportamento é descrito pela referida lei, que estabelece que a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do ambiente. Em outras palavras, se a temperatura do corpo é maior que a do ambiente, ocorre um processo de resfriamento; se for menor, há aquecimento (BRONSON; COSTA, 2008).

Esse tipo de situação mostra como conceitos matemáticos aparentemente abstratos podem — e devem — ser contextualizados de forma prática, tornando a aprendizagem mais significativa e próxima da realidade dos alunos.

Observa-se que o cenário em que as EDOs foram criadas refletem sua aplicabilidade prática, visto que, possuem potencial para solucionar situações reais que afetam áreas que tramitam desde a economia até a engenharia. Assim, salienta-se para a aplicabilidade desse tipo de equação em situações como dinâmica populacional, juros compostos, variação de temperatura e dentre outras, sendo que, essa última citada trata-se do enfoque da parte prática desse estudo.

Na dinâmica populacional, por exemplo, as equações diferenciais ordinárias são capazes de estimar o crescimento de uma população. As equações diferenciais ordinárias (EDOs) podem ser utilizadas para modelar o crescimento populacional ao longo do tempo, considerando variáveis como taxas de natalidade e mortalidade. Por meio dessas equações, é possível realizar previsões demográficas e analisar as dinâmicas complexas das populações (ROSA, 2024).

Trata-se de um modelo desenvolvido por Malthus aproximadamente no ano de 1766. Ele pensou que, dada uma população pequena (a) e uma população grande (b), com o passar do tempo a população b vai crescer mais que a população a . Vale ressaltar que, em condições atípicas como guerra e pandemia, esse modelo não se aplicará. (ROSA, 2024, p.14-18)

Dessa forma, o modelo malthusiano estabelece que a taxa de crescimento populacional em um determinado momento é proporcional à população total nesse momento. Matematicamente, se $P(t)$ representa a população total no instante t , o modelo contínuo de Malthus é expresso por:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

A aplicação dessa equação pode ser demonstrada através do exemplo a seguir:

Exemplo 01: Uma pequena cidade, tem uma população inicial de 1.000 habitantes. A população dessa cidade cresce de acordo com o modelo malthusiano, que assume que a taxa de crescimento populacional é proporcional à população existente. Neste caso, a taxa de crescimento anual é de 5% ao ano. Sabendo disso, quantos habitantes a cidade terá em 10 anos?

P é a população,

k é a taxa de crescimento populacional (neste caso $k = 0,05$),

t é o tempo em anos.

Separando as variáveis :

$$\frac{dP}{P} = k dt$$

Integrando os lados e aplicando a exponencial:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt$$

$$\ln P = kt + C$$

$$P = e^{kt+C}$$

$$P = e^C \cdot e^{kt}$$

Considerando que e^C é uma constante e pode ser substituída pelo valor da população inicial. Assim, $e^C = 1000$:

$$P = 1000 \cdot e^{0,05t}$$

Após 10 anos ($t = 10$):

$$P = 1000 \cdot e^{0,05 \cdot 10}$$

$$P = 1000 \cdot e^{0,5}$$

$$P = 1000 \cdot 1,6487$$

$$P = 1648,7$$

Dessa forma, após 10 anos a cidade possuirá aproximadamente 1.649 habitantes.

Além da solução analítica, também é possível estimar numericamente o crescimento da população utilizando métodos numéricos, como o método de Euler. Neste caso, considera-se um passo de 1 ano e aplica-se a fórmula:

$$P_{n+1} = P_n(1 + hk)$$

Com $P_0 = 1000$, $h = 1$ e $k = 0,05$, temos:

$$P_1 = 1000 \cdot 1,05 = 1050,00$$

$$P_2 = 1050 \cdot 1,05 = 1102,50$$

$$P_3 = 1102,50 \cdot 1,05 = 1157,63$$

⋮

$$P_{10} = 1551,34 \cdot 1,05 = 1628,91$$

A resposta numérica aproxima-se bastante do valor analítico, o que reforça a validade dos métodos computacionais para estimativas quando a solução exata não está facilmente disponível.

Então, como demonstrado no exemplo anterior, as equações diferenciais podem e devem ser usadas para solucionar problemas dos mais diversos campos. Portanto, são apresentadas e utilizadas nessa pesquisa as EDOs da Lei de Resfriamento de Newton e o método de Runge-Kutta de quarta ordem aplicados ao controle de temperatura dentro dos silos de armazenagem de grãos.

2.3 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

A lei de resfriamento de Newton, formulada em 1701, foi uma significativa contribuição para o estudo e comprovação das equações diferenciais. Sobre isso, corroboram Bronson e Costa:

A Lei de Resfriamento de Newton, igualmente aplicável ao aquecimento, determina que a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio circundante. Seja T a temperatura do corpo e T_m a temperatura do meio circundante. Então, a taxa de variação da temperatura do corpo em relação ao tempo é $\frac{dT}{dt}$, e a Lei de Resfriamento de Newton pode ser formulada como $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$, onde k é uma constante positiva de proporcionalidade. (BRONSON; COSTA, 2008, p. 64)

A lei basicamente afirma que quando a temperatura do corpo é maior que a temperatura do ambiente acontece o processo de resfriamento do corpo, e quando a temperatura do corpo é menor que a temperatura do ambiente acontece o processo inverso, ou seja, o aquecimento do corpo. Desse modo, as temperaturas tendem a se igualar pela lei de resfriamento de Newton.

Assim, a lei do resfriamento de Newton é uma EDO que mostra a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio. Assim essa equação diferencial pode ser expressa pela fórmula (BASSANEZI et al., 1998).

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m) \quad (1)$$

O processo de resolução dessa equação diferencial é feito utilizando o método analítico de separação de variável. O método numérico para resolução dessa equação diferencial, o qual é proposto nessa pesquisa é o Método de Runge-Kutta de quarta ordem que consiste em resolver essa EDO (Equação Diferencial Ordinária) através de cálculos numéricos. Sobre esse método discorre-se a seção a seguir (Método de Runge-Kutta de quarta ordem).

2.4 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

Kutta era um matemático alemão que trabalhava com aerodinâmica e é, também, muito conhecido por suas contribuições importantes à teoria clássica de aerofólio (VALLE, 2012, p. 26).

De maneira simples a ideia por trás desse método é dividir o intervalo de tempo em pequenos incrementos e usar uma combinação ponderada das derivadas em diferentes pontos, para obter uma estimativa mais precisa do valor da função desconhecida em cada ponto. Isso é feito através de um processo iterativo que utiliza uma série de equações de atualização dos valores da função.

Primeiramente, são calculadas as derivadas da função em diferentes pontos do intervalo de tempo e, em seguida, são combinadas ponderadamente para obter uma estimativa do valor da função em um ponto específico. Essa combinação é calculada usando uma fórmula que envolve coeficientes específicos conforme descritos abaixo (3).

O método de Runge-Kutta é considerado um dos mais populares, com destaque no método de Runge-Kutta de quarta ordem que é provavelmente um dos mais precisos para se obter soluções com valores próximos ao valor inicial (que mais se aproximam da realidade).

O método de Runge-Kutta de quarta é descrito pelas equações abaixo relacionadas:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (3)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (4)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (5)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (6)$$

O processo de resolução consiste em encontrar os valores de k_1 , k_2 , k_3 e k_4 e substituí-los na equação (1). Assim, é preciso ter cuidado pois analisando as fórmulas é possível perceber que o valor de k_2 depende de k_1 , k_3 depende de k_2 e k_4 depende de k_3 , dessa forma, k_1 torna-se a única variável independente da equação. Além disso, envolvem aproximações das inclinações no ponto médio do intervalo entre x_n e x_{n+1} . Devido ao grau de complexidade é recomendado que “os procedimentos numéricos sejam executados, em computadores e, também, em algumas calculadoras” (VALLE, 2012, p. 13). Seguindo essa recomendação os cálculos desse trabalho serão desenvolvidos por um algoritmo em *python*, conforme descrito nos procedimentos metodológicos a seguir.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Segundo escreveu Minayo (2002, p. 16) a “Metodologia é o caminho do pensamento e a prática exercida na abordagem da realidade, incluída de concepções teóricas de abordagem, o conjunto de técnicas que possibilitam a construção da realidade e o sopro divino do potencial criativo do investigador”. Com base nisso, para escolha da metodologia dessa pesquisa observou-se que para comparar o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da Lei de Resfriamento de Newton foi preciso conhecer essa lei e método.

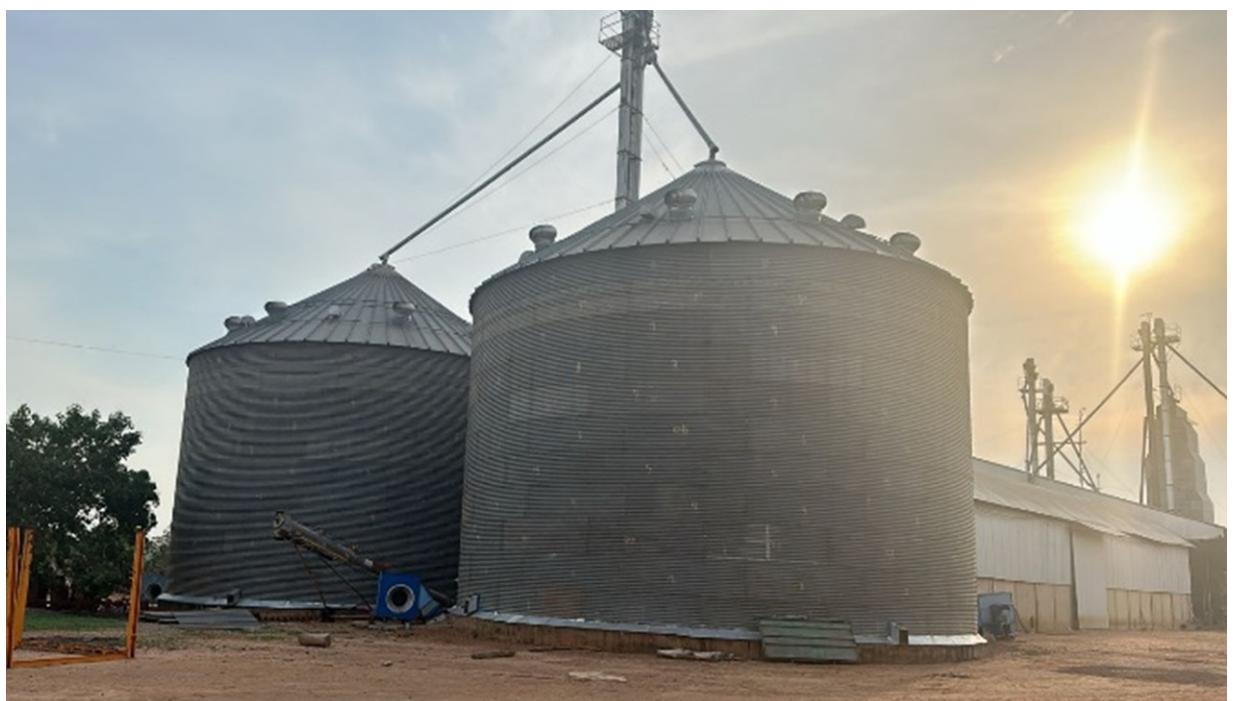
Nesse sentido, para atender os objetivos e a discussão proposta nesta pesquisa, o estudo planejado foi realizado em âmbito de revisão bibliográfica e de análise de coleta de dados de pesquisas empíricas.

A escolha pelo método de pesquisa bibliográfica deu-se pela necessidade de investigar o que já foi estudado sobre as questões relacionadas a ambos os métodos e o processo de implementação do código em Python. Sobre esse tipo de pesquisa Gil (2002, p. 44) corrobora dizendo:

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho dessa natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas.

Assim, a pesquisa foi dividida em três partes, sendo a primeira destinada a revisão bibliográfica acerca do tema, a segunda ao desenvolvimento do código que executa os procedimentos numéricos e na terceira parte foi realizada a coleta de dados no grupo de agronegócio em que os silos foram observados.

Figura 1: Silo de armazenagem de grãos



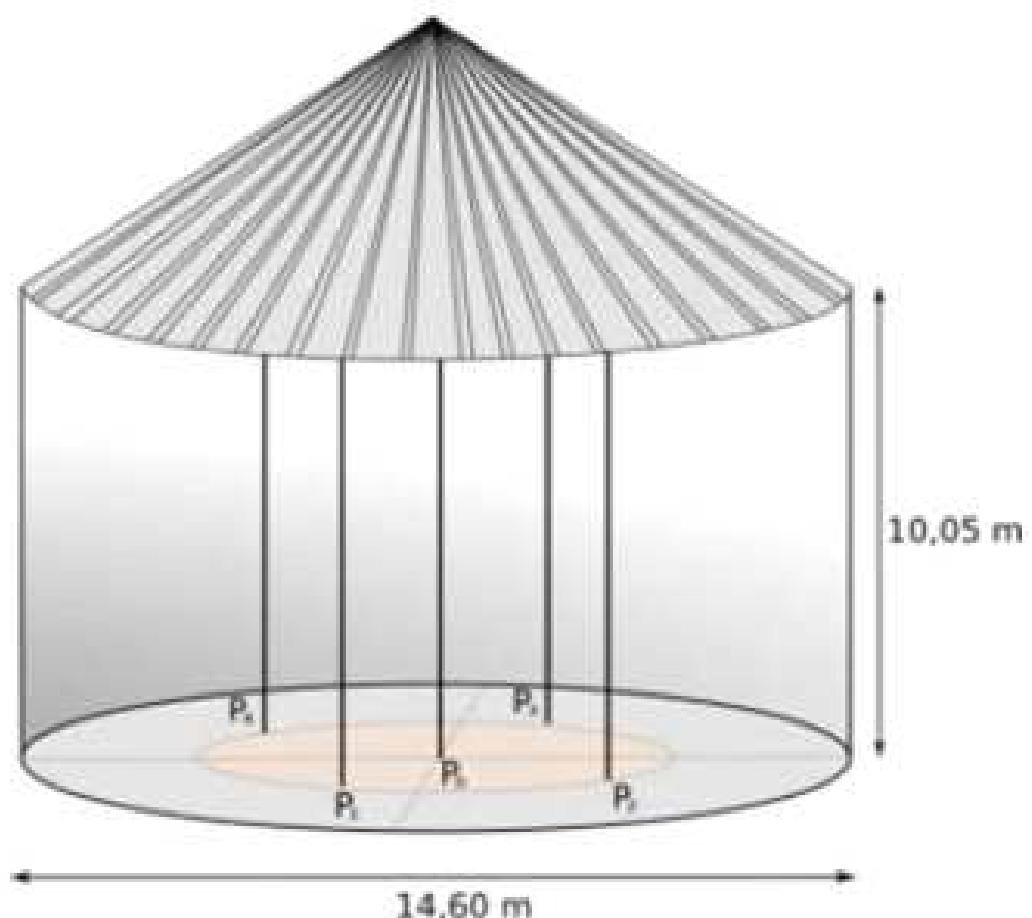
Fonte: Autor, 2024

Realizada a pesquisa na literatura, o estudo se direcionou ao desenvolvimento do código que executa o método numérico de quarta ordem de Runge-Kutta e a solução analítica da lei de resfriamento de Newton.

Com a implementação do código, foi realizado os cálculos comparativos entre os dois métodos para gerar os resultados que serão avaliados quanto a eficiência e os possíveis erros produzidos em cada método. A coleta de dados dos silos foi realizada no grupo de agronegócio Maranata, de posse de todas essas informações, será rodado um comparativo em ambos os métodos relacionando sua eficácia.

A coleta de dados foi realizada no dia 15 de janeiro de 2024. O silo em que houve a coleta de dados servia para o armazenamento de milho, ele contém em sua estrutura interna cinco pêndulos, esses cabos de metal são compostos por seis sensores de temperatura organizados de dois em dois metros contando de baixo para cima. Esses pêndulos vão medir a temperatura ao longo dos silos, possibilitando o monitoramento mais preciso. Conforme ilustra a imagem a seguir:

Figura 2: Disposição dos pêndulos no silo



Fonte: Oliveira, 2019

Usando os sensores, as primeiras temperaturas do dia são registradas e classificadas às 08:00 horas. Esse processo é repetido em outras horas do dia, são elas: 09:00, 11:00, 13:00, 15:00 e 17:00. Conforme mostrado na figura abaixo:

Figura 3: Temperaturas registradas pelos sensores as 08:00, 9:00 e 11:00 da manhã

Unidade: SILO-1												Data: 15/01/2024			
Média T(°C): 31 33 35												Hora: 08:00:00			
Cabo	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15
1 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
2 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
3 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
4 T	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	36	37	36	35	34
5 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33

Unidade: SILO-1												Data: 15/01/2024			
Média T(°C): 31 33 43												Hora: 09:00:00			
Cabo	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15
1 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
2 T	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	36	37	36	35	34
3 T	33	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
4 T	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	36	37	36	35	34
5 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33

Unidade: SILO-1												Data: 15/01/2024			
Média T(°C): 31 34 48												Hora: 11:00:00			
Cabo	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15
1 T	32	33	32	33	34	35	34	35	36	35	36	37	36	35	34
2 T	33	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
3 T	33	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33
4 T	32	33	32	33	34	35	34	35	36	35	36	37	36	35	34
5 T	31	32	33	32	33	34	33	34	35	34	35	36	35	34	33

Fonte: Sistema de Controle de Termometria – Agro: Maranata, 2024

A análise termométrica realizada no Silo-1, em 15/01/2024 às 08:00, evidenciou temperaturas médias elevadas, variando entre 31°C e 35°C. Observa-se que os cabos 3T a 5T apresentam sensores com temperaturas superiores a 34°C, alcançando até 36°C em S6. Esses dados indicam um possível início de aquecimento localizado. Essas observações foram consideradas para elaboração dos dados reais apresentados nos gráficos.

A seguir serão exibidas as temperaturas registradas pelos sensores no período de 13:00 horas até as 15:00 horas da tarde.

Figura 4: Temperaturas registradas pelos sensores as 13:00, 15:00 horas

Unidade: SILO-1												Data: 15/01/2024				
Média T(°C): 31 34 48												Hora: 13:00:00				
Cabo	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
1 T	32	31	33	33	33	34										
2 T	34	33	33	33	33	33	33									
3 T	33	33	33	33	33	33	33	33								
4 T	33	33	33	33	33	33	33	33	33							
5 T	34	33	33	33	33	33	33	33	33	33						

Unidade: SILO-1												Data: 15/01/2024				
Média T(°C): 31 32 34												Hora: 15:00:00				
Cabo	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
1 T	33	33	33	33	33	33	33									
2 T	33	33	33	33	33	33	33	40								
3 T	33	33	33	33	33	33	33	33	33							
4 T	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33						
5 T	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	45					

Fonte: Sistema de Controle de Termometria – Agro: Maranata, 2024

Por fim, na Figura 5, são apresentadas as temperaturas registradas pelos sensores as 17:00 horas da tarde, finalizando o dia e as observações do silo.

Figura 5: Temperaturas registradas pelos sensores as 17:00 horas

Unidade: SILO-1												Data: 15/01/2024				
Média T(°C): 31 32 34												Hora: 17:00:00				
Cabo	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	S11	S12	S13	S14	S15	S16
1 T	31	30	32	33	33	33	33									
2 T	31	30	32	32	33	33	37									
3 T	33	32	32	32	33	33	33									
4 T	32	30	31	32	33	33	33									
5 T	31	32	32	33	34	34	45									

Fonte: Sistema de Controle de Termometria – Agro: Maranata, 2024

Essa coleta de dados fomentará a comparação entre as EDOs mencionadas nessa pesquisa. De posse das temperaturas medidas dentro do silo e seus respectivos horários, foi possível calcular a constante de proporcionalidade “k” (1) descrita pela equação que rege a lei de resfriamento de Newton.

Além da coleta de dados e do desenvolvimento da rotina computacional, este trabalho foi apresentado a um grupo de estudantes dos cursos de Matemática Licenciatura e Agronomia da Universidade Estadual do Maranhão. A apresentação teve como objetivo evidenciar a aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo da formação, destacando sua importância para a compreensão de fenômenos reais e para o desenvolvimento econômico e social do município.

A exposição foi realizada no dia 14 de maio de 2025, durante a feira de agro-negócios Agrobalsas, na Fazenda Sol Nascente, localizada no município de Balsas-MA. Reconhecida como o maior evento de agronegócio do estado do Maranhão, a feira tem como objetivo promover o desenvolvimento sustentável, integrando tecnologia, inovação e responsabilidade ambiental ao setor agroindustrial.

Dada essas informações, a seguir, na seção “Resultados e Implicações Práticas” serão apresentados os gráficos e demais resultados que puderam ser analisados durante essa pesquisa.

4 RESULTADOS E IMPLICAÇÕES PRÁTICAS

Em decorrência da quantidade de dados a serem manipulados para que haja a simulação da temperatura dentro dos silos, foi desenvolvida uma rotina no Vscode (Visual Studio Code) usando os dados coletados no silo durante a visita ao grupo de agronegócio Maranata.

A rotina desenvolvida mediante a modelagem matemática e através do método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e dos resultados obtidos da solução analítica para da Lei de resfriamento de Newton, tem como objetivo analisar precisamente a temperatura no interior dos silos, além disso, através da análise será possível determinar qual dos dois métodos resultam em valores mais próximos da realidade.

Essa comparação será possível através da construção de gráficos que apresentem de forma simples os resultados obtidos nos dois métodos utilizados. A construção desses gráficos foi possível com o uso da biblioteca “matplotlib” na própria rotina desenvolvida.

Manipular todos os dados torna-se um trabalho complexo para uma pessoa já que é necessária muita atenção, pois as variáveis dependem uma das outras. Assim como já foi relatado no desenvolvimento desse trabalho as equações diferenciais ordinárias tem como principal característica o uso de apenas uma variável independente. Por essa razão, a biblioteca Numpy foi utilizada para manipulação dos dados numéricos do código.

A rotina desenvolvida.

```
1 import numpy as np
2 from matplotlib import pyplot as plt
3
4 xt = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
5 yT = [31, 31, 32, 32, 31, 31]
6
7 Tm = 36
8 c = -5
9 k = 0.0744
10 Temp = []
11
12 for t in range(1, 7, 1):
13     T = Tm + c*np.exp(-k*t)
14     Temp.append(T)
15 tempo = np.arange(1, 7, 1)
16
17 k = 0.0744
18 xT = 31
19 yTm = 36
20 h = 1
21 Temp_Kutta = []
22
23 def kutta(xT, yTm):
24     RK = -k*(xT - yTm)
25     return RK
26
27 for n in range(1, 7, 1):
28     k1 = kutta(xT, yTm)
29     k2 = kutta(xT+(h/2), yTm+(h/2)*k1)
30     k3 = kutta(xT+(h/2), yTm+(h/2)*k2)
```

```

31     k4 = kutta(xT+h, yTm+(h*k3))
32     xT = xT + ((h/6)*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4))
33     Temp_Kutta.append(xT)
34
35 plt.plot(xT,yT,'*-',label='Dados reais',color='c')
36 plt.plot(tempo, Temp,'*-', label='Equa o Anal tica', color='b')
37 plt.plot(tempo, Temp_Kutta,'*-', label='M todo de Runge-Kutta',
38           color='r')
39 plt.xlabel('Horas')
40 plt.ylabel('Temperatura ( C )')
41 plt.legend(loc = 5)
42 plt.grid()
43 plt.show()

```

Listing 1: Rotina Python para comparação da equação analítica e método de Runge-Kutta

A variável denominada “yT” no código recebe as temperaturas registradas pelos sensores dentro do silo. Enquanto, “Tm” recebe a temperatura ambiente e “xT” recebe a temperatura inicial do corpo. Já os parâmetros “k” e “C” são previamente calculados (7) e utilizados na equação diferencial do resfriamento de Newton pelo método analista e pelo numérico de Runge-Kutta.

Analizando as temperaturas registradas pelos sensores nas primeiras horas do dia, tem-se que 31° graus foi a primeira temperatura registrada no sensor um (figura 3). Portanto essa foi considerada a temperatura do corpo. Ademais, são 36° graus para temperatura ambiente, e considerando o tempo de 3 horas (que equivale ao período das 08:00 horas até as 11:00 horas) tem-se o valor de k igual a 0,0744. Conforme demonstra o cálculo a seguir:

$$T = T_m + C e^{-kt} \quad (7)$$

Sabemos que a temperatura inicial é $T(0) = 31^\circ\text{C}$ e a temperatura do meio é $T_m = 36^\circ\text{C}$. Assim:

$$\begin{aligned} T &= T_m + C e^{-kt} \\ 31 &= 36 + C \\ C &= -5 \end{aligned}$$

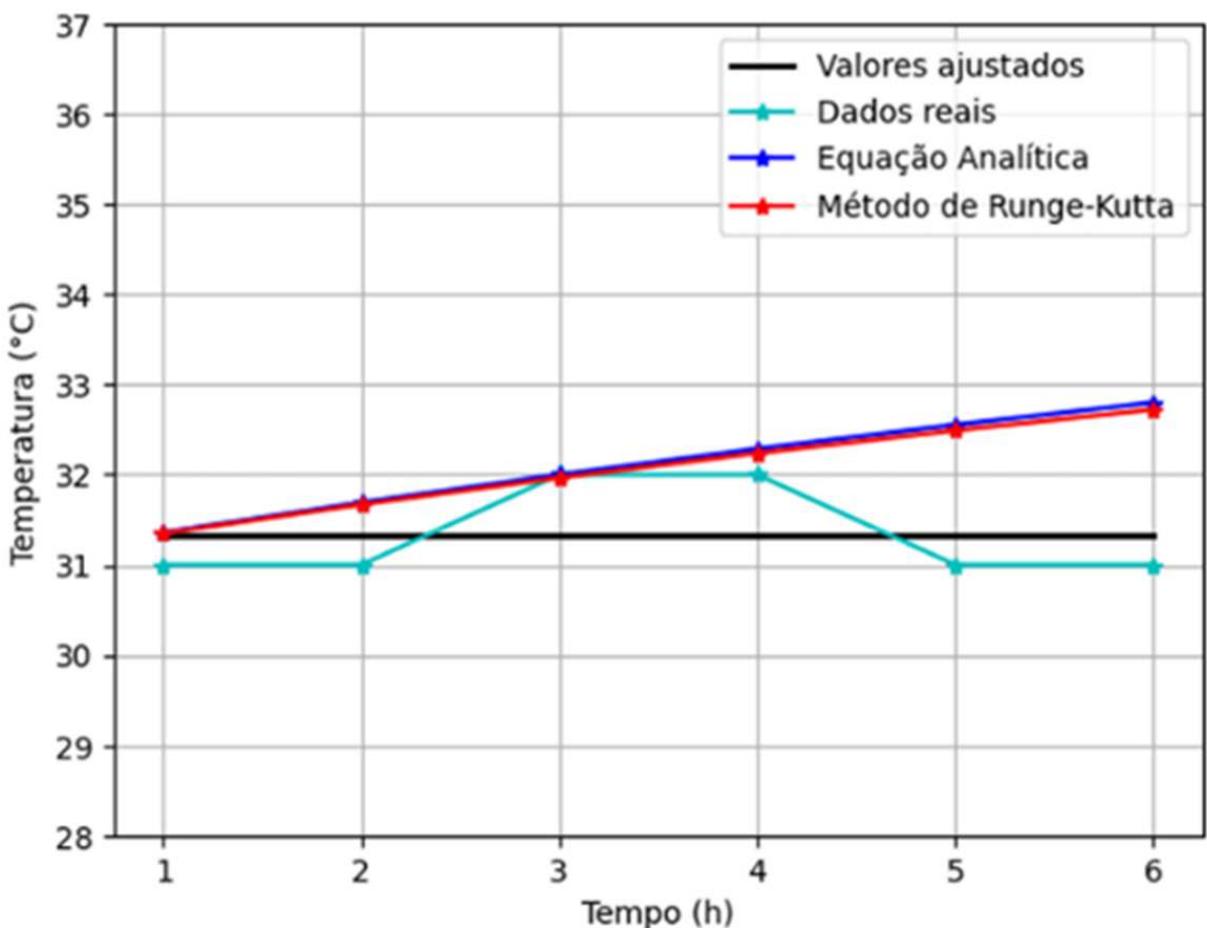
Após 3 horas:

$$\begin{aligned} T(3) &= 36 - 5e^{-3k} = 32 \\ 32 &= 36 - 5e^{-3k} \\ -4 &= -5e^{-3k} \\ \frac{4}{5} &= e^{-3k} \\ -3k &= \ln\left(\frac{4}{5}\right) \\ k &= \frac{\ln(0,8)}{-3} \\ k &= 0,0744 \end{aligned}$$

$$k = 0,0744 \quad (8)$$

A partir dos dados de temperatura obtidos de cada sensor através do dispositivo instalado no silo, foram calculados os parâmetros “C” e “k”, que são utilizados na equação diferencial do resfriamento de Newton (1). Esse valor de “k” e os demais dados são adicionados a rotina programada em python, para que assim possam ser rodados e resolvidos, tanto com a solução analítica para lei de resfriamento de Newton quanto com método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem. Dessa forma, os resultados da comparação podem ser vistos no gráfico a seguir:

Figura 6: Comparação (considerando o período das 08:00 às 11:00 da manhã) entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton.



Fonte: Autor, 2024

Dito isso, inicialmente foram considerados três cabos com sensores de temperatura, foram eles: (1T), (2T) e (5T). A média das temperaturas registradas pelos seis sensores em cada um dos cabos serviram de parâmetro para construção dos gráficos que vão comparar os dois métodos. Desse modo, na tabela abaixo estão as médias dos sensores da temperatura do Cabos (1T), (2T) e (5T) nos períodos do dia: 08:00, 09:00, 11:00, 13:00, 15:00, 17:00.

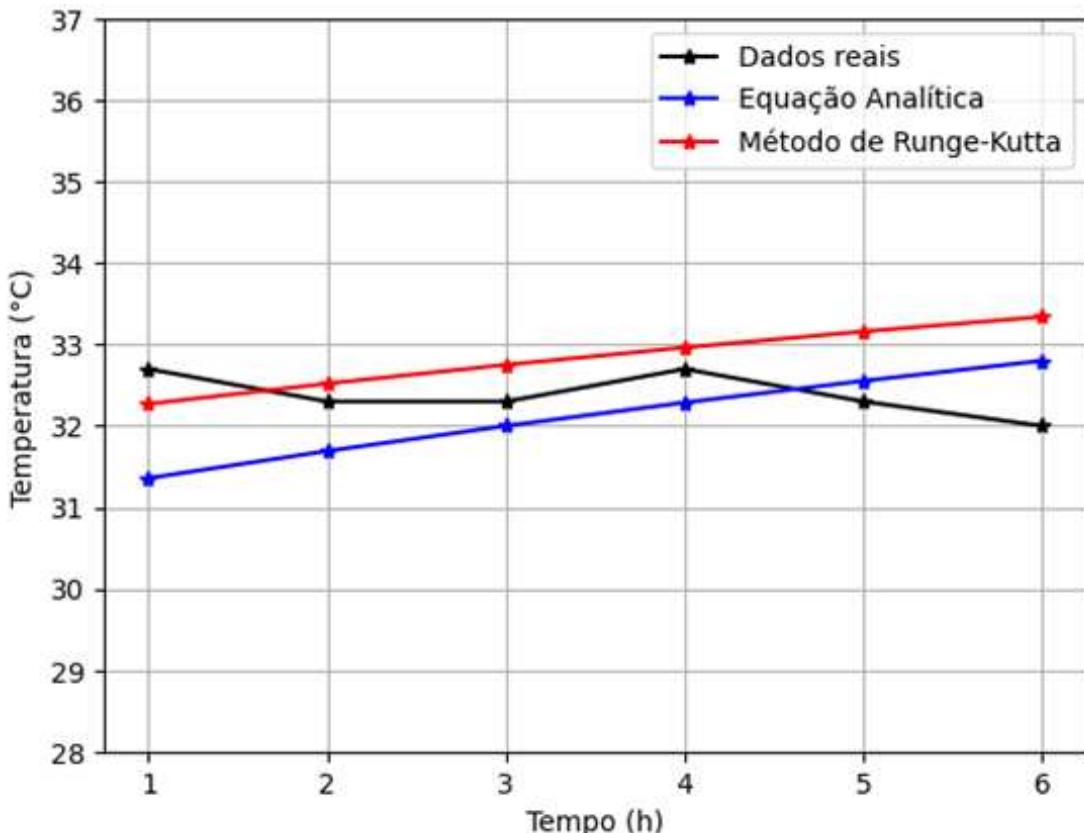
Tabela 1: Média dos sensores de temperatura nos cabos (1T), (2T) e (5T).

Horas	Temperatura		
	1T	2T	5T
08:00 h	32.7	33.2	33.7
09:00 h	32.3	34.2	35.2
11:00 h	32.3	35.0	36.3
13:00 h	32.7	35.0	37.0
15:00 h	32.3	33.2	35.5
17:00 h	32.0	32.5	35.5

Fonte: Autor, 2024.

Ao examinar as temperaturas registradas pelos sensores no cabo (1T), observou-se que a temperatura inicial do corpo foi de 32,7°C (veja tabela 1). Além disso, a temperatura ambiente foi de 36°C, e dessa vez foi considerado o intervalo de 3 horas equivalente ao terceiro tempo/ dado da tabela. Dados os valores de k e C , o gráfico resultante da comparação pode ser visto a seguir:

Figura 7: Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (1T).



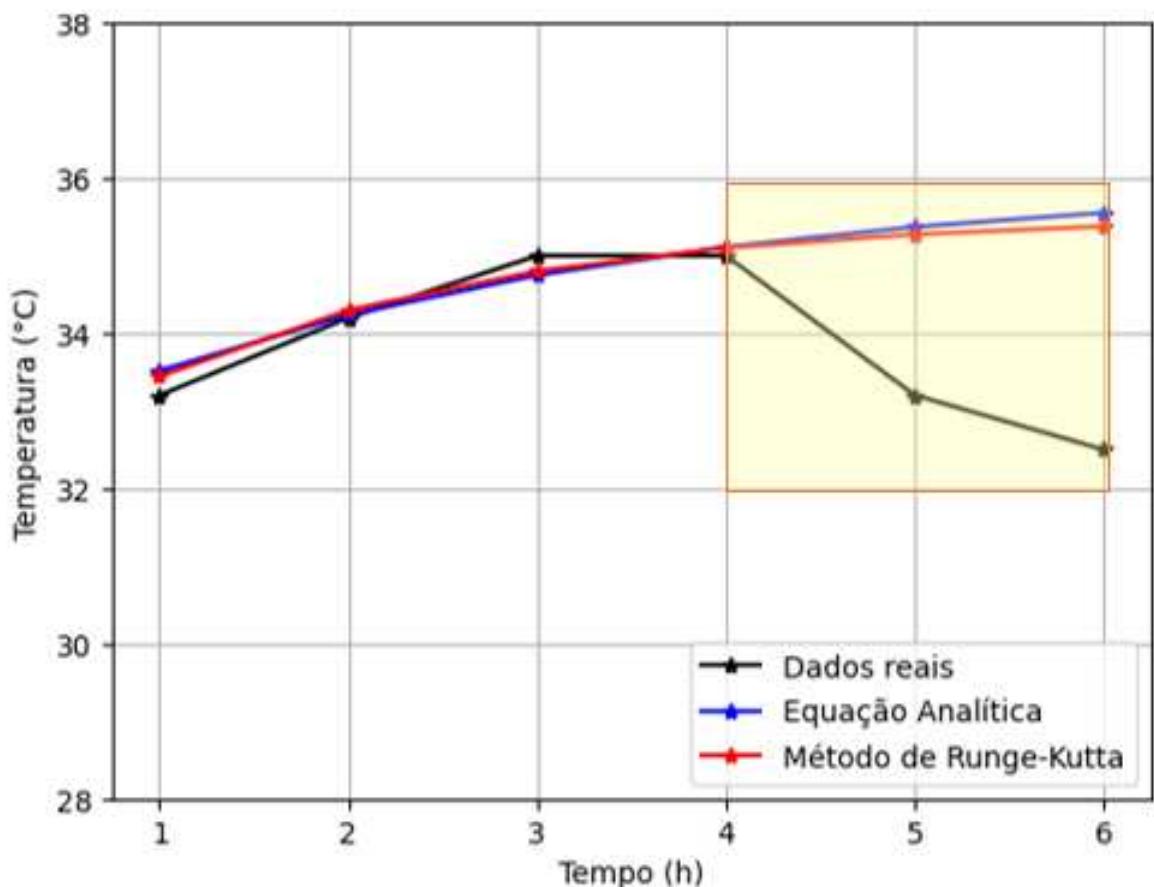
Fonte: Autor, 2024

Os gráficos apresentados demonstram que a diferença entre os dois métodos é mínima, entretanto não há dúvidas que o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem resultou em valores mais próximos as temperaturas reais captadas pelos sensores.

Nos sensores do cabo 2T a temperatura inicial do corpo era de 33,2°C (conforme mostrado na tabela 1) e a temperatura ambiente permanece medindo 36°C. O intervalo considerado foi de 3 horas, correspondente ao terceiro tempo da tabela, o valor calculado para “k” foi 0,3405, enquanto “C” vale -2,8.

Observa-se que a variação na temperatura nos dados reais acontece porque os dispositivos de resfriamento nos silos são ativados para resfriar os grãos. Dessa forma, os dados mostram uma diminuição na temperatura registrada pelos sensores, como demonstra a área sinalizada pela cor amarela no gráfico das médias das temperaturas registradas pelos sensores do cabo 2T. Os dados são apresentados a seguir:

Figura 8: Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (2T).

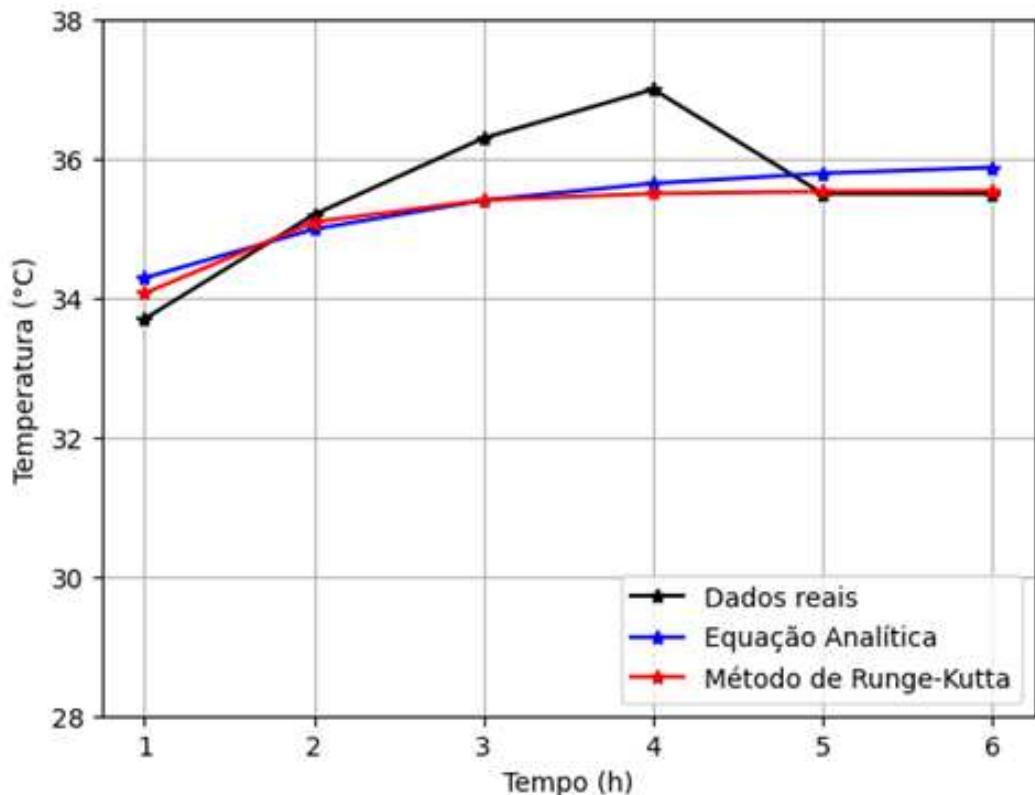


Fonte: Autor, 2024

No cabo 5T as temperaturas voltaram a subir. O que se observa é que o método de resolução analítico, está mais próximo dos dados reais quando a temperatura alcança o nível mais alto. Apesar disso, o método numérico de Runge-Kutta chega mais

perto nos outros momentos, chegando a medir precisamente as últimas duas temperaturas registradas pelos sensores.

Figura 9: Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (5T).



Fonte: Autor, 2024

Na tabela a seguir foram considerados os cabos (3T) e (4T) . As médias das temperaturas registradas pelos seis sensores de cada cabo foram utilizadas como base para a elaboração dos gráficos que irão comparar os dois métodos. Conforme a tabela ilustra:

Tabela 2: Média dos sensores de temperatura nos cabos (3T) e (4T).

Horas	Temperatura	
	3T	4T
08:00 h	33.0	32.8
09:00 h	32.7	32.5
11:00 h	32.5	32.0
13:00 h	32.8	32.7
15:00 h	32.3	32.0
17:00 h	32.5	31.8

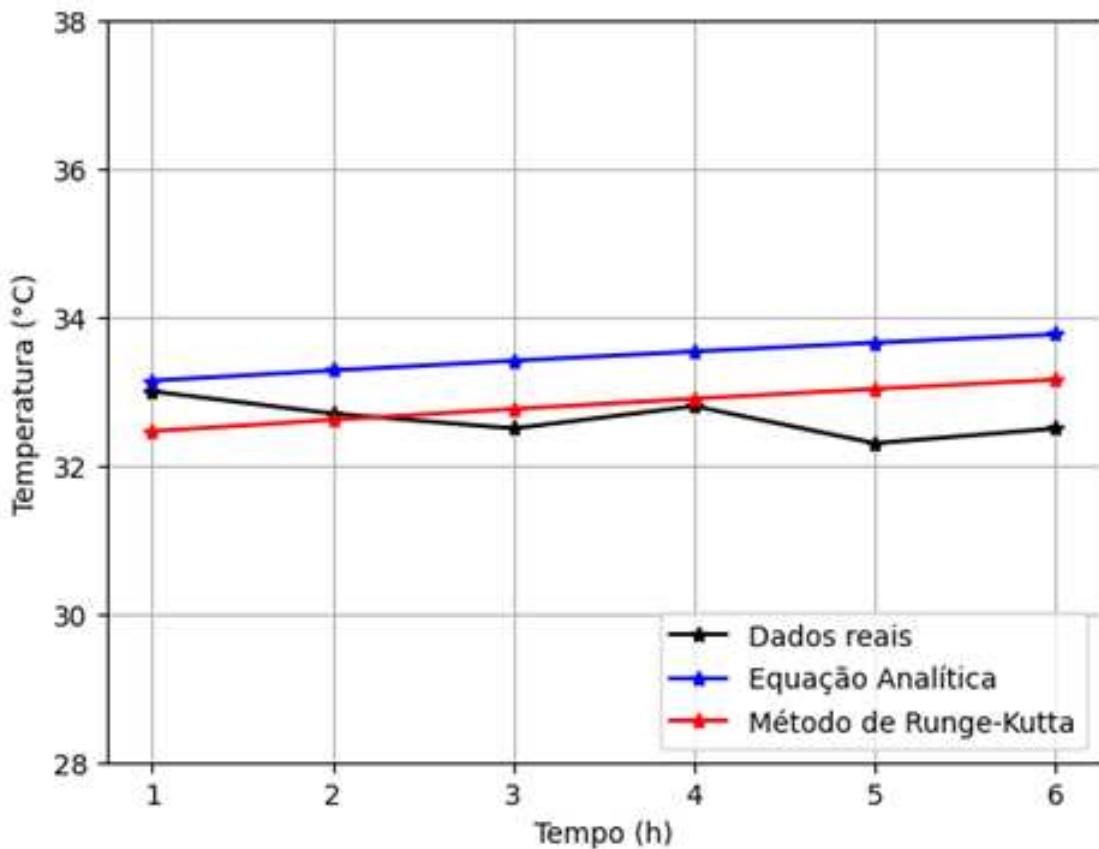
Fonte: Autor, 2024.

No cabo 3T a temperatura inicial foi de exatamente 33° C, de posse dessa informação os valores de c e k foram encontrados, sendo respectivamente -3 e aproximadamente 0,0494.

Ambos os métodos, analítico e numérico, demonstraram excelente aderência aos dados reais até a quarta hora. A partir da quinta hora, pequenas divergências começam a ser observadas, mas ainda assim os métodos mantêm comportamento semelhante, acompanhando a tendência de queda apresentada pelos dados medidos.

Nota-se ainda que o método de Runge-Kutta apresenta uma aproximação muito próxima da solução analítica, validando sua eficácia para a modelagem da variação de temperatura no silo de grãos. O gráfico resultante da análise da variação de temperatura através das EDOs pode ser visto a seguir:

Figura 10: Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (3T).



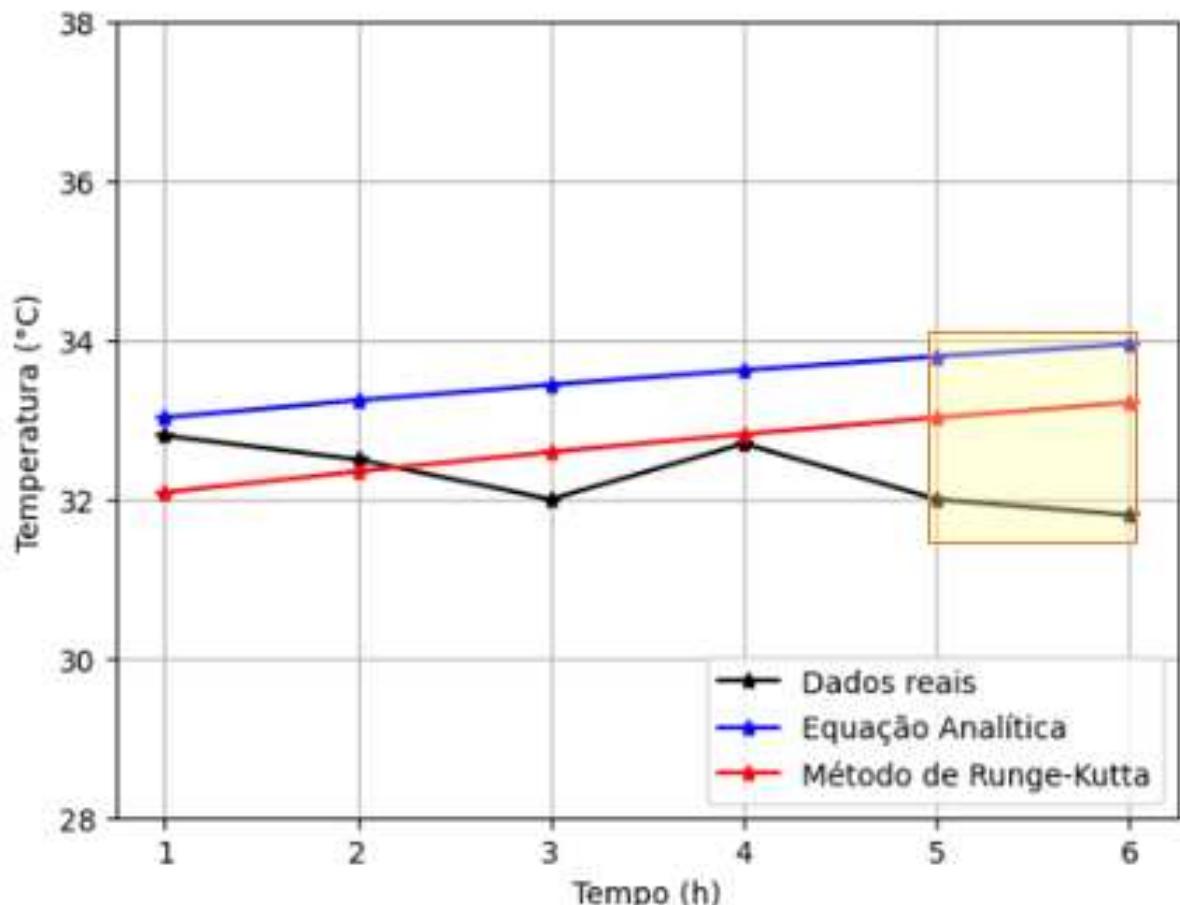
Fonte: Autor, 2024

O próximo gráfico apresenta a comparação entre os dados reais de temperatura coletados no cabo 4T, os valores obtidos por meio da equação analítica da Lei de Resfriamento de Newton e os resultados gerados pelo método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem.

Observa-se que a média das temperaturas iniciais no cabo 4T foi ligeiramente inferior à do cabo 3T, com uma diferença de aproximadamente 0,2°C, sendo a temperatura

inicial considerada $32,8^{\circ}\text{C}$. A partir dessa condição inicial, obteve-se o valor de $C = -3,2$, e o coeficiente de resfriamento foi calculado como $k \approx 0,0744$.

Figura 11: Comparação entre o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e a solução analítica para a EDO da lei de resfriamento de newton, considerando as médias de temperatura do cabo (4T).



Fonte: Autor, 2024

Nota-se que, ao longo do tempo, ambas as abordagens apresentam comportamento semelhante à curva real, especialmente entre as três primeiras medições.

Entretanto, nas duas últimas observações (referentes às temperaturas de **31,8°C** a **33,9°C**), observa-se um desvio significativo entre os modelos teóricos e os dados empíricos. Essa discrepância pode ser atribuída a fatores externos que influenciam a dinâmica térmica no interior do silo, como variações ambientais (temperatura externa, incidência solar, fluxo de ar ou umidade), que não são considerados na rotina python adotada.

Além disso, o acionamento de sensores e possíveis oscilações operacionais no sistema de termometria durante esses horários podem ter impactado a leitura. Cabe destacar que os modelos utilizados assumem condições ideais e uniformes, enquanto o ambiente real do armazenamento é complexo e sujeito a interferências físicas não modeladas.

Em função disso, o gráfico evidencia a limitação dos modelos analíticos e numéricos quando aplicados a sistemas reais sem ajuste dinâmico de parâmetros ou inclusão de variáveis ambientais.

Ainda assim, o método de *Runge-Kutta* mostrou maior aproximação ao comportamento real na maioria dos pontos, reforçando sua eficácia em simulações de curto prazo. Dito isso, na tabela a seguir os valores aproximados obtidos pelas EDOs podem ser comparados com os dados reais do relatório de termometria.

Tabela 3: Valores das temperaturas reais comparadas às temperaturas previstas pela equação Analítica e o método de Runge-Kutta no cabo (4T).

Dados reais	Equação analítica	Método de Runge-Kutta
32.8	33.0	32.0
32.5	33.2	32.3
32.0	33.4	32.5
32.7	33.6	32.75
32.0	33.8	33.0
31.8	33.9	33.2

Fonte: Autor, 2024.

Os resultados demonstram que, ao aplicar a equação diferencial da Lei do Resfriamento de Newton, é possível determinar as temperaturas no interior dos silos. Além disso, o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem revelou-se mais preciso do que o método analítico, uma vez que se aproximou mais dos dados reais.

4.1 Resultados da Apresentação Pública

Durante a exposição da pesquisa na feira Agrobalsas, o trabalho foi apresentado a discentes dos cursos de Matemática Licenciatura e Agronomia da Universidade Estadual do Maranhão. A recepção foi surpreendentemente positiva, principalmente por parte dos alunos de Matemática, que se mostraram espantados ao perceber como a matemática está diretamente relacionada ao setor do agronegócio, um campo até então considerado distante da sua área de formação.

Muitos estudantes relataram entusiasmo em compartilhar a experiência com seus futuros alunos, enxergando na proposta uma oportunidade concreta de ensinar conteúdos matemáticos de forma prática e contextualizada. Uma das perguntas feitas por um aluno do quinto período de Matemática evidencia essa descoberta: *“Como você se inspirou a estudar isso? Tipo, como descobriu que a matemática estava escondida no silo?”*.

Essa indagação revelou que, mesmo entre graduandos em Matemática, ainda existe uma limitação quanto à percepção das aplicações práticas da ciência matemática. A ideia predominante ainda está centrada na utilização de fórmulas para resolução de provas e exames, em vez da exploração de contextos reais e interdisciplinares.

A apresentação gerou um debate produtivo, no qual muitos participantes expressaram surpresa ao descobrir que equações diferenciais ordinárias podem ser aplicadas à medição da temperatura em silos de grãos. O seminário cumpriu seu propósito de demonstrar a aplicabilidade da matemática em problemas reais, promovendo reflexões sobre o ensino tradicional e reforçando o papel da modelagem matemática como ferramenta educativa e tecnológica. Após a experiência, tornou-se evidente que a pesquisa representa não apenas uma contribuição acadêmica, mas também um avanço significativo para o município e para a modernização das metodologias de ensino da matemática.

5 ANÁLISE CONCLUSIVA

Compreender como a temperatura e a umidade variam em diferentes regiões de uma massa de grãos durante o armazenamento é fundamental para desenvolver estratégias eficazes de controle da aeração. Esse conhecimento contribui para a conservação da qualidade dos grãos e para a redução dos custos com tratamentos químicos destinados ao combate de insetos e fungos.

Neste contexto, esta pesquisa teve como objetivo geral realizar uma análise comparativa entre os resultados obtidos pelo método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem e pela solução analítica da equação diferencial que expressa a Lei de Resfriamento de Newton. Por meio da análise dos dados termométricos captados em um silo de grãos e da simulação computacional desenvolvida em Python, foi possível avaliar o desempenho de ambos os métodos na estimativa da temperatura interna do silo.

Os resultados demonstram que o método analítico apresenta uma solução direta e exata, porém depende da possibilidade de resolução explícita da equação diferencial. Já o método de Runge-Kutta, embora mais complexo e computacionalmente mais exigente, mostrou-se mais flexível e aplicável a uma variedade maior de problemas, inclusive aqueles em que a solução analítica não é viável.

No presente estudo, observou-se que o método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem produziu estimativas mais próximas dos dados reais obtidos pelos sensores no silo, apresentando, portanto, maior precisão. Isso evidencia a eficácia do método numérico em situações práticas, onde perturbações no modelo ou variações não previstas podem comprometer a aplicação da solução analítica.

Adicionalmente, o bom funcionamento da rotina computacional desenvolvida no Visual Studio Code confirma que o algoritmo implementado é eficiente, apresentando execução estável e resultados confiáveis. A simulação realizada permitiu ainda identificar os períodos mais adequados para o acionamento dos exaustores, contribuindo para um melhor controle da temperatura e, consequentemente, para a preservação da qualidade dos grãos armazenados.

Assim, conclui-se que a modelagem matemática, aliada ao uso de métodos numéricos e ferramentas computacionais, constitui uma estratégia poderosa para a resolução de problemas reais no setor agroindustrial, evidenciando a relevância da matemática aplicada para o desenvolvimento tecnológico e econômico do município e da região.

Referências

- ABBOUDA, S. et al. Heat and mass transfer in stored milo. part i. heat transfer model. *Transactions of the ASAE*, v. 35, n. 5, p. 1569–1573, 1992.
- ALVES, L. A. M. *Estudo sobre EDOs de primeira ordem e suas aplicações nas diversas áreas do conhecimento*. [S.l.: s.n.], 2022.
- ALVES, L. F. B.; SILVA, J. G. Descaprirotizando a matemática em dez tempos. In: *Leituras e escritas: tecendo saberes em educação matemática*. Natal, RN: EDUFRN, 2016. p. 384–392. ISBN 978-85-425-0646-4. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/jspui>>.
- BASSANEZI, R. B. et al. Effects of bean line pattern mosaic virus on the monocyclic components of rust and angular leaf spot of phaseolus bean at different temperatures. *Plant Pathology*, v. 47, n. 3, p. 289–298, 1998.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. 42 p.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.; MEADE, D. B. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2024. E-book. ISBN 9788521638841. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521638841>>.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Editora Blucher, 2012. E-book. ISBN 9788521216117. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788521216117>>.
- BRONSON, R.; COSTA, G. *Equações diferenciais*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2008. 64 p.
- D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Summus Editorial, 1986.
- DEVILLA, I. A. et al. Variação da temperatura e umidade de grãos armazenados em silos com aeração. *Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental*, Campina Grande, v. 8, n. 2-3, 2004.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Recurso online. ISBN 85-268-0657-2.
- GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.
- MINAYO, M. C. d. S. *Pesquisa Social: Teoria, método e criatividade*. 18. ed. Petrópolis: Vozes, 2002. (Org.).
- MOTTA, A. *Equações diferenciais: introdução*. Florianópolis: Publicação do IF-SC, 2009. 136 p. ISBN 978-85-62798-02-3.
- ROSA, G. H. C. Equações diferenciais: aplicada em crescimento populacional, decaimento radioativo e solubilidade de substâncias em solventes. *Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática*, v. 4, n. 1, 2024.

SUN, D.; WOODS, J. Deep bed simulation of the cooling of stored grain with ambient air: A test bed for ventilation control strategies. *Journal of Stored Products Research*, London, v. 33, p. 299–312, 1997.

VALLE, K. N. F. D. *Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta*. 2012. Trabalho acadêmico.

YARTEY, J. N. A.; RIBEIRO, S. S. *Equações diferenciais*. Salvador: UFBA, Instituto de Matemática e Estatística; Superintendência de Educação a Distância, 2017.

ÁVILA, S. L. *Cálculo numérico aplicado à engenharia elétrica com MATLAB*. Florianópolis: Publicações do IFSC, 2019. Recurso eletrônico, 137 p., il. color.

ANEXOS

Figura 12: Apresentação da pesquisa no stande da Uema – Evento Agrobalsas



Fonte: Autor, 2025