UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

ANA LICIA COSTA OLIVEIRA

# Problema da Difusão em Meio Poroso Via Cálculo Fracionário

São Luís - MA

2024

**Ana Licia Costa Oliveira**

# Problema da Difusão em Meio Poroso Via Cálculo Fracionário

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Estadual do Maranhão como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Engenharia Aeroespacial.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

Coorientador: Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pela aluna Ana Licia Costa Oliveira e orientada pelo Prof. Dr. Felix Silva Costa.

São Luís - MA

2024

Oliveira, Ana Licia Costa
Problema da difusão em meio poroso via cálculo fracionário / Ana Licia Costa Oliveira. – São Luis, MA, 2024.
71 f

Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeroespacial) - Universidade Estadual do Maranhão, 2024.

Orientador: Prof. Dr Felix Silva Costa
Coorientador: Prof. Dr. José Vanterler da Costa Sousa

1.Difusão Anômala. 2.Cálculo Fracionário. 3.Difusão Fracionária em Meios Porosos. 4.Pontos de Lie. I.Titulo.

CDU:519.217.4

**Elaborado por Cássia Diniz - CRB 13/910**

ANA LICIA COSTA OLIVEIRA

**PROBLEMA DA DIFUSÃO EM MEIO POROSO VIA CÁLCULO FRACIONÁRIO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Estadual do Maranhão como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Aeroespacial.

Aprovado em: 06/11/2024

**BANCA EXAMINADORA**

Documento assinado digitalmente
FELIX SILVA COSTA
Data: 19/11/2024 10:40:54-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof. Dr. Felix Silva Costa**

Doutor em matemática

Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Documento assinado digitalmente
EDVAN MOREIRA
Data: 19/11/2024 13:11:42-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof. Dr. Edvan Moreira**

Doutor em física

Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Documento assinado digitalmente
JUNIOR CESAR ALVES SOARES
Data: 19/11/2024 13:42:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

**Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares**

Doutor em matemática

Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT)

*Ao meu filho e aos meus pais, por todo os incentivos dados.*
*Dedico.*

# Agradecimentos

Acredito que independente de qualquer circunstancias, devemos sempre carrega a gratidão em nossos corações. Agradeço primeiramente a Deus por ter me segurado nas horas mais triste e por não ter permitido que eu deste trabalho.

Àqueles que se dedicaram a me orientar: Prof. Dr. Felix Silva Costa por aceitar este compromisso de me orientar, pela paciência, dedicação e principalmente por nunca ter desistido de mim. Muito Obrigada, Prof. Felix!

Pelas palavras de incentivo do Prof. Dr. J. Vanterler da C. Sousa, pelo vasto conhecimento oferecido, pela descontração, pela paciência e por ser Palmeirense. AVANTI PALESTRA!

À minha família, meus pais Dona Maria e seu João Paulo, pelo apoio e amor. Aos meus irmãos, em especial, ao meu irmão Sérgio por todas as chamadas de atenção para nunca desistir. E principalmente ao meu filho, Felipe João, por ter vindo ao mundo para me ensinar varias e varias formar de amar. Te Amo, meu JanJão!

Aos meu companheiros de turma, Francisca Moreira, Marcus Vinícius, Luana Roberta e Liangela Arouche, que permaneceram junto a mim, compreendendo a minha ausência em alguns momentos durante nossa trajetória.

À Universidade Estadual do Maranhão- UEMA, pela bolsa de estudo e por ser minha casa desde 2008. Ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Aeroespacial e todo seu corpo docente, pela contribuição ao meu desenvolvimento pessoal e profissional.

À banca examinadora por ter aceitado fazer parte deste trabalho.

E a todos que fizeram parte desta história, Muito Obrigada a todos!

*“Se eu não acreditasse que*
*a resposta podia ser encontrada*
*não teria trabalhado nela”*
*(Dra. Florence Sabin)*

# Resumo

Ao longo da história, pesquisadores renomados dedicaram e dedicam seus estudos para investigar, entender e descrever os processos difusivos não lineares, onde utilizam-se de ferramentas analíticas, numéricas e computacionais. Apresentamos aqui um problema de difusão anômala não linear em meio poroso e temos como objetivo apresentar os grupos de transformações de simetrias de Lie como alternativa para a resolução do problema da difusão. Inicialmente foi realizado um estudo sobre o cálculo fracionário e seus principais operadores onde apontamos definições, teoremas, propriedades e aplicações. O cálculo fracionário nos permite uma descrição mais fina dos fenômenos naturais, assim obtemos uma quantidade maior de informações atrelados aos operadores não locais, então denominado efeito de memória. Foi realizada uma analise da difusão fracionária anômala em meio poroso, onde foi abordado o problema da difusão fracionária não linear no tempo-espaço. Outro ponto importante apresentado aqui formam os grupos de transformações de pontos de Lie, que utilizamos como uma alternativa para o problema da difusão, pois as simetrias de Lie demostram ser uma ferramenta importantíssima, pois permite a transformação de uma EDP em EDO. Aplicamos as simetrias de Lie na equação da difusão em meio poroso fracionária em termos da derivada de Riesz, considerando a derivada de Weyl. E demonstramos que os resultados podem ser entendidos para a derivada fracionária em termos da função $\psi$. Destacamos que o estudo da difusão anômala vem sendo cada dia mais aprofundado e seu conceito aplicado em diversos campos como difusão em plasmas, difusão em fluidos turbulentos, transporte de fluidos em meios porosos, difusão em fractais, difusão anômala em superfícies líquidas e análise de histogramas de batidas do coração em indivíduos saudáveis, entre outros sistemas físicos.

**Palavras-chave**: Difusão Anômala, Cálculo Fracionário, Difusão Fracionária em Meios Porosos, Pontos de Lie.

# Abstract

Throughout history, renowned researchers have dedicated themselves and their studies to investigate, understand and describe nonlinear diffusion processes, using analytical, numerical and computational tools. In this work, we present a problem of nonlinear anomalous diffusion in porous media and aim to present Lie symmetry transformation groups as an alternative to solving the diffusion problem. Initially, a study was carried out on fractional calculus and its main operators, where we point out definitions, theorems, properties and applications. Fractional calculus allows us to describe natural characteristics more precisely, thus obtaining a greater amount of information linked to nonlocal operators, then called the memory effect. An analysis of anomalous fractional diffusion in porous media was carried out, where the problem of nonlinear fractional diffusion in time-space was addressed. Another important point presented here is the Lie point transformation groups, which we use as an alternative to the diffusion problem, since Lie symmetries prove to be a very important tool as it allows the transformation of a PDE into an ODE. We apply Lie symmetries to the discovery of diffusion in fractional porous media in terms of Riesz derivatives, including the Weyl derivative. And we demonstrate that the results can be understood for the fractional derivative in terms of the function $\psi$. We emphasize that the study of anomalous diffusion has been increasingly deepened and its concept applied in several fields such as diffusion in plasmas, diffusion in turbulent fluids, fluid transport in porous media, diffusion in fractals, anomalous diffusion on liquid surfaces and analysis of heartbeat histograms in healthy individuals, among other physical systems. Keywords: Anomalous Diffusion, Fractional Calculus, Fractional Diffusion in Porous Media, Lie Points.

**Keywords**: Anomalous Diffusion, Fractional Calculus, Fractional Diffusion in Porous Media, Lie Symmetries.

# Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|---|---|
| ${}^{RL}I^{\alpha}_{a^+}$ | Integral Fracionária de $\psi$- Riemann-Liouville a direita |
| ${}^{RL}I^{\alpha}_{a^-}$ | Integral Fracionária de $\psi$- Riemann-Liouville a esquerda |
| ${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a^+}$ | Derivada Fracionária de $\psi$-Hilfer a direita |
| ${}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a^-}$ | Derivada Fracionária de $\psi$-Hilfer a esquerda |
| ${}^{C}D^{\alpha,\psi}_{a^+}$ | Derivada Fracionária de $\psi$-Caputo a direita |
| ${}^{C}D^{\alpha,\psi}_{a^-}$ | Derivada Fracionária de $\psi$-Caputo a esquerda |
| $D^{\alpha}_{x}$ | Derivada Fracionária de Riesz |
| ${}_{\pm}\partial^{\alpha}_{x}$ | Derivadas fracionárias de Weyl |
| $AC^n[a,b]$ | Espaço das funções absolutamente contínuas n-vezes |
| $C^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ | Espaço ponderado |
| $\mathscr{L}_{\psi}\{f(t)\}$ | Transformada de Laplace |
| $[\mathcal{F}](k)$ | Transformada de Fourier clássica |
| $(-\Delta)^s$ | Laplaciano Fracionário |
| $x^* = X(x;\epsilon)$ | Grupo de transformações de pontos de Lie. |
| $u(x,t)$ | Função não negativa |
| ${}^{[\cdot]}\eta^{(\gamma)}_{[x]}$ | Infinitesimal estendido |
| $\nabla$ | Taxa de Variação Espacial |

# Sumário

# 1 Introdução

A difusão tem por principal característica a expansão o espalhamento, em movimentos aleatórios das partículas em um determinado sistema. Na intenção de obter o equilíbrio, este movimento é independente e não colisantes entre si. Os problemas de difusão podem ser encontrados em diversas áreas, a saber: na física, biologia, estatística, química, medicina, psicologia, dentre outras. Quando ocorre um processo de difusão, cada elemento de um conjunto, seja energia, momento linear, átomos, moléculas, produtos químicos, células, animais etc, se movem de forma aleatória, ou seja, em uma trajetória "randômica"(PEDRON, 2003). Na história temos grandes trabalhos relacionados ao processo difusivos, como Joseph Fourier (1768-1830), Thomas Graham (1805-1869), Adolf Eugen Fick (1852-1937) e Lewis Fry Richardson (1879-1830). Destes, destacamos Fick, pois a maioria dos processos difusivos obedecem a sua lei que é escrita da seguinte forma:

$$J = -D\nabla\rho, \tag{1.1}$$

onde $\rho$ é a densidade do elemento difuso com $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\nabla$ a taxa de variação espacial, $J$ a densidade da corrente, ou seja, quantidade de substância que atravessa uma unidade de área normal na direção do fluxo, por unidade de tempo, $D$ é o coeficiente de difusão que depende das propriedades do meio, isto é, ele nos informa a velocidade com que a quantidade medida por $\rho$ se difunde de regiões com altas concentrações para regiões com baixas concentrações (PEDRON, 2003).

Em geral, classificamos a equação da difusão como sendo linear, não linear ou quase-linear, e o comportamento como padrão ou anômala. O foco deste estudo está voltado para a difusão anômala, onde o precursor é L. F. Richardson com seu estudo sobre difusão turbulenta (TATEISHI, 2010). A difusão anômala tem como característica o crescimento não linear da variância no decorrer do tempo. O interessante para fenômenos de transporte é que a difusão anômala vem sendo amplamente estudada e seu conceito é aplicado em diversos campos como: difusão em plasmas, difusão em fluidos turbulentos, transporte de fluidos em meios porosos, difusão em fractais, difusão anômala em superfícies líquidas e análise de histogramas de batidas do coração em indivíduos saudáveis, dentre outros sistemas físicos (PEDRON, 2003).

Por outro lado, uma abordagem para o processo da difusão é o uso do cálculo fracionário por meio das integrais e derivadas fracionárias. A principal vantagem do uso do cálculo fracionário é o refinamento das descrições dos fenômenos naturais, haja vista que as derivadas fracionárias possuem uma descrição associada ao efeito de memória e propriedades de diversos materiais (PEREIRA, 2018). Apesar de sua grande vantagem, o cálculo fracionário possui diversas definições que aumenta o grau de dificuldade e a melhor escolha para discutir tal problema. Neste presente trabalho, vamos utilizar as derivadas fracionárias de $\psi$-Riemann-Liouville, $\psi$-Caputo, $\psi$-Weyl e $\psi$-Riesz-Feller. Existem outras na literatura que podem ser consultadas em (SOUSA; OLIVEIRA, 2018).

Modelos matemáticos que descrevem fenômenos naturais, são geralmente descritos por equações parciais diferenciais (PDEs) não lineares. Em comparação com suas contrapartes lineares simplificadas, esses EDPs não lineares em geral não possuem representação explícita das soluções em termos de condições iniciais e/ou de contorno (HUANG, 2014). Para solucionar tais equações, podemos usar os métodos numéricos e computacionais, ou, em nosso caso, usar as simetrias de Lie, que em geral faz uma redução da ordem na EDP não linear e leva a uma EDP linear. Em alguns casos as simetrias levam as EDP a uma EDO. Ao estudar problemas envolvendo equações diferenciais não lineares, umas das metodologias com muita relevância entre os matemáticos é a teoria dos grupos de Lie. Essa teoria foi desenvolvida pelo matemático Sophus Lie (1842-1899) e tem sido amplamente aplicada em problemas não lineares de ordem inteira. Um dos primeiros trabalhos conectando os grupos de Lie é o artigo de Buckwar e Luchkd (BUCKWAR; LUCHKO, 1998) o qual obtém a solução invariante para a equação da difusão.

Uma das abordagens mais importantes para estudar as propriedades qualitativas e quantitativas das EDP's são suas soluções auto-similares onde quer que existam. Soluções desse tipo, estão associadas a grupos de EDP's com escala simétrica, resultando em equações diferenciais transformadas em variáveis de similaridade invariantes à escala. Após a redução das variáveis de similaridade, as equações diferenciais de perfis auto-similares, denominadas perfis de Barenblatt, ainda herdam algumas das simetrias de escala restantes (VÁZQUEZ, 2007), devido à auto-similaridade do primeiro tipo, os expoentes de escala podem ser determinados a priori e perfis claros de Barenblatt podem frequentemente ser obtidos. Devido a outro tipo de auto-similaridade, também chamada de escala anômala, os perfis de Barenblatt geralmente não estão disponíveis devido a expoentes de anomalia desconhecidos. Outro forma de auto-similaridade pode ser mostrado no modo de difusão rápida de EMP $u_t = \Delta u^m$, onde as soluções podem desaparecer em tempo finito. Embora um perfil de Barenblatt claro não seja esperado neste caso, a simetria de escala restante da equação reduzida permite uma análise detalhada do plano de fase para investigar a existência, unicidade e monotonicidade dos perfis (HUANG, 2014).

As simetrias são excelentes ferramentas para estudas propriedades da natureza, por exemplo, reprodução de experimentos em diferentes locais e momentos, dependem da invariância das leis, tais como translações de espaço e/ou do tempo, rotações, dentre outros, que aparecem no desenvolvimento do evento. Em outras palavras, ao modificar a posição ou tempo em um determinado experimento, por exemplo, este não altera o seu funcionamento. Estas observações permitem a criação de leis associadas a tais propriedades observadas, possibilitando o estudo e a produção experimentos. Entretanto, a abordagem de Lie para equações diferenciais não foi explorada por meio século e apenas a teoria abstrata dos grupos de Lie cresceu (o termo grupo de Lie foi cunhado em 1928 por Hermann Weyl). Foi nos anos quarenta do século passado, com o trabalho de G. Birkhoff e I. Sedov sobre análise dimensional, que a teoria deu resultados relevantes em problemas concretos aplicados. Além disso, foi a escola russa com L. V. Ovsiannikov que desde 1960 começou a explorar sistematicamente o métodos de análise de simetria de equações diferenciais na construção explícita de soluções de qualquer problemas, mesmo complicados da física matemática. Durante as últimas décadas, um renascimento do interesse na teoria de Lie e um progresso significativo foi feito a partir de um ponto de vista aplicado. Muitas monografias e livros didáticos estão agora disponíveis, e número de trabalhos de pesquisa publicados atualmente. Ainda hoje, temos acesso a diversos sistemas de álgebra computacional (CAS), como Mapler e Mathematica (comercial), Maxima e Reduce (código aberto) que facilitam o cálculo das simetrias de uma equação diferencial. Resumidamente, a ideia chave da teoria de Lie da análise de simetria de equações diferenciais baseia-se na invariância sob uma transformação de variáveis independentes e dependentes. Esta transformação forma um grupo local de transformações pontuais estabelecendo um difeomorfismo no espaço de variáveis dependentes, mapeando soluções das equações para outras soluções.

Por outro lado, vale destacar o importante trabalho pioneiro (GAZIZOV; KASATKIN; LUKASHCHUK, 2007), desenvolvido por Gazizov et al. em 2007, cujo título "Grupos de transformação contínua de equações diferenciais fracionárias", apresenta todos os detalhes para aplicar simetrias Lie para encontrar soluções exatas no caso de equações diferenciais fracionárias. Além do anterior em 2009, Gazizov et al. (GAZIZOV; KASATKIN; LUKASHCHUK, 2009) considerou a equação de difusão fracionária o qual são calculadas as simetrias discutindo as soluções invariantes para o problema. Um compêndio das suas contribuições podem ser vistas na referência (GAZIZOV; KASATKIN; LUKASHCHUK, 2019), em que apresenta um ampla discussão sobre o uso das simetrias de Lie envolvendo as derivadas fracionárias e, consequentemente suas aplicações. Outro relevante trabalho, é sobre o estudo das simetrias de Lie envolvendo equações diferenciais de evolução (BAKKYARAJ, 2020), onde os autores apresentam o prolongamento infinitesimal para a derivada parcial fracionária de Caputo e aplicam no cálculo das simetrias de um sistema de equações diferenciais fracionárias. Na referência (ZHANG; ZHENG, 2021) os autores estudam as simetrias de Lie de algumas equações de evolução fracionárias, por exemplo, a equação de difusão em meio poroso, além de uma nova metodologia para o cálculo de simetrias simplificando e facilitando o cálculo das equações governantes.

Atualmente, Soares et al. (SOARES; COSTA; SOUSA, 2024a), desenvolveram uma fórmula explícita do prolongamento infinitesimal para a derivada fracionária de Riemann-Liouville em termos de outra função apresentando como aplicação a discussão das simetrias de Lie da equação fracionária de evolução, que tem como caso particular, as simetrias de Lie da equação de difusão em meio poroso. Outro importante resultado aparece na obtenção da fórmula explícita do prolongamento infinitesimal da derivada fracionária de Caputo em termos de uma outra função de ordem variável e sua respectiva aplicação no cálculo das simetrias de Lie na equação fracionária (SOARES; COSTA; SOUSA, 2024a). Destacamos que estes resultados são de grande importância para o emprego da teoria iniciada por Sophus Lie e atualmente aplicada no estudo das equações diferenciais fracionárias.

O principal objetivo do presente trabalho, é apresentar uma expressão explicita para o calculo do prolongamento infinitesimal para derivadas fracionárias em termos de outra função denominada $\psi(\cdot)$ e aplicamos na equação de difusão fracionária de meio poroso, o qual calculamos as simetrias e suas respectivas soluções invariantes.

A fim de tornar claro o trabalho, a seguir detalhamos o que foi realizado em cada Capítulo.

No Capítulo 2, estamos interessados em apresentar os espaços de funções $p$-integráveis e contínuas por partes com peso e, suas respectivas normas. Nesse sentido, os conceitos das transformadas de Laplace e Laplace generalizada, são apresentadas, bem como algumas propriedades e resultados das mesmas. Por outro lado, uma vez que estamos interessados em trabalhar com problemas de difusão via cálculo fracionário de meio poroso, apresentamos uma versão da transformada de Fourier com respeito a função $\psi(\cdot)$ e propriedades interessantes. Nesse sentido, motivados pela transformada de Fourier com respeito a função $\psi$, apresentamos o espaço de Schwartz e o conceito de Laplaciano fracionário generalizado. Outras propriedades envolvendo a transformada de Fourier, são apresentadas. Para finalizar o Capítulo, apresentamos o conceito de simetrias de Lie e algumas propriedades fundamentais no estudo de equações diferenciais, em particular, fracionárias.

No Capítulo 3, estamos interessados em apresentar um breve estudo sobre problemas de difusão, desde seu contexto histórico até aplicações, em particular, envolvendo meio poroso. Nesse sentido, buscaremos explicar o efeito da temperatura na combustão e suas consequências para a poluição, dando ênfase na importância do meio poroso e suas principais vantagens, bem como suas aplicações.

O Capítulo 4, dedicamos a realizar um detalhamento sobre a teoria de integrais e derivadas fracionárias que envolvem o núcleo implícito, o qual denotamos pela função $\psi(\cdot)$. O natural de discutir tais definições, é que é possível obter uma ampla classe de possíveis casos particulares, a partir da escolha dos parâmetros $\alpha, \beta$ e da função $\psi(\cdot)$. Nesse sentido, apresentamos parte dos resultados oriundos das integrais e derivadas fracionárias abordadas.

No Capítulo 5, é direcionado a apresentar a aplicabilidade do cálculo fracionário para linearização e solução da equação de difusão espaço-fracionária com as ferramentas do cálculo fracionário e das simetrias de Lie. Traremos aqui a equação da difusão espaço fracionária e as simetrias de Lie da equação da difusão. Nesse capítulo, apresentaremos a principal contribuição desse trabalho.

Por fim, concluímos o trabalho com comentários e os passos para a próxima etapa.

# 2 Preliminares

Nesta primeiro momento, apresentamos espaços ponderados, alguns conceitos fundamentais como transformada generalizada de Fourier e Laplace, Simetrias de Lie e propriedades e o conceito de laplaciano fracionário que estarão relacionados às integrais fracionárias e derivadas utilizadas neste trabalho.

## 2.1. Espaços das funções

Seja $\Omega$ um conjunto mensurável com $1 \leqslant p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções $p$-integráveis no sentido de Lebesgue, dado por (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006)

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \ : \ \Omega \to \mathbb{R} \ : \ \int_{\Omega} |f(t)|^p dt < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado, o espaço $L^{\infty}(\Omega)$ das funções reais mensuráveis limitadas, é dado por (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006)

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ f; \Omega \to \mathbb{R} : \ \sup_{t \in \Omega} |f(t)|^p < \infty \right\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|^p.$$

Sejam $[a, b]$ $(0 < a < b < \infty)$ um intervalo finito sobre o eixo $\mathbb{R}^+$ e $C([a, b])$, $AC^n([a, b], \mathbb{R})$, $C^n([a, b]), \ \mathbb{R})$, os espaços das funções contínuas, absolutamente contínuas $n$-vezes, diferencialmente contínuas $n$-vezes sobre $[a, b]$, respectivamente.

O espaço das funções contínuas $f$ sobre $[a, b]$ tem norma definida por (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006)

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|.$$

Por outro lado, o espaço das funções absolutamente contínuas $n$-vezes é dado

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} : f^{n-1} \in AC([a, b]) \right\}$$

O espaço ponderado $C_{\gamma,\psi}([a, b], \mathbb{R})$ das funções $f$ sobre $(a, b]$ é definido por:

$$C_{\gamma,\psi}([a, b], \mathbb{R}) = \{ f : (a, b] \to \mathbb{R}; (\psi(t) - \psi(a))^{\gamma} f(t) \in C[a, b] \}, \ 0 \leqslant \gamma < 1,$$

com a norma,

$$\|f\|_{C_{\gamma;\psi}[a,b]} = \|(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma} f(t)\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma} f(t)|.$$

O espaço ponderado $C^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ das funções $f$ sobre $(a,b]$ é definido por,

$$C^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R}) = \{f : (a,b] \to \mathbb{R}; f(t) \in C^{n-1}[a,b]; f^{(n)}(t) \in C_{\gamma;\psi}[a,b]\},\ 0 \leqslant \gamma < 1$$

com a norma

$$\|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \|f^{(k)}\|_{C[a,b]} + \|f^{(n)}\|_{C_{\gamma;\psi}[a,b]}.$$

Para $n = 0$, temos, $C^0_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R}) = C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$.

Note que, $C^n_{\gamma,\psi}(a,b) \subset AC^n[a,b]$ e $C^n_{\gamma_1;\psi}[a,b] \subset C^n_{\gamma_2;\psi}[a,b]$ com $0 \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 < 1$.

**Definição 2.1.** (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) *Sejam $0 < \alpha < 1$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. O espaço ponderado $C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R}$ é definido por*

$$C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}([a,b],\mathbb{R} = \left\{ f \in C_{\gamma;\psi}[a,b] : {}^{H}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f \in C_{\gamma;\psi}[a,b] \right\},$$

*com $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$.*

**Definição 2.2.** (SOUSA, 2018) *Seja $0 \leqslant \gamma < 1$. O espaço ponderado $C^{1-\gamma}_{\gamma;\psi}[a,b]$ é definido por*

$$C^{1-\gamma}_{\gamma;\psi}[a,b] = \left\{ f \in C_{\gamma;\psi}[a,b] : {}^{H}\mathbb{D}^{1-\gamma;\psi}_{a+} f \in C_{\gamma;\psi}[a,b] \right\},$$

*com $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$.*

Note que, das definições (2.1) e (2.2) concluímos $C^{1-\gamma}_{\gamma;\psi}[a,b] \subset C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}[a,b]$.

Seja $g : \Lambda \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $p > 1$. Considere o espaço (veja (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021a))

$$\mathscr{L}^p(\Lambda, gd\xi_1) = \left\{ f : \Lambda \to \mathbb{R} \text{ é mensurável } \mid \int_{\Lambda} |f(\xi_1)|^p g(\xi_1) d\xi_1 < \infty \right\},$$

que é dotado da norma $f \mapsto \left( \int_{\Lambda} |f(\xi_1)|^p g(\xi_1) d\xi_1 \right)^{\frac{1}{p}}$. Para $\alpha \in (0,2)$ fixo, considere o conjunto

$$\mathscr{L}_{\alpha}(\Lambda, d\psi) = \left\{ f : \Lambda \to \mathbb{R} \text{ é mensurável } \mid \int_{\Lambda} \frac{|f(\xi_1)|}{(1+|\psi(\xi_1)|)^{n+\alpha}} |J\psi(\xi_1)| d\xi_1 < \infty \right\},$$

onde $\psi \colon \Lambda \to \Lambda$ é uma função dada e $|J\psi|$ é o determinante Jacobiano de $\psi$.

## 2.2. Transformadas Integrais

### 2.2.1. Transformadas Integrais Laplace

**Definição 2.3.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Seja* $f, \psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *e* $\psi$ *uma função crescente não negativa tal que* $\psi(0) = 0$. *Então a transformada de Laplace de* $f$ *em relação a função* $\psi$ *é definida por*

$$\mathscr{L}_\psi\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-s\psi(t)}\psi'(t)f(t)dt \tag{2.1}$$

*para todo* $s \in \mathbb{C}$ *tal que esta integral converge. Aqui* $\mathscr{L}_\psi$ *denota a transformada de Laplace em relação a* $\psi$, *que chamamos de transformada de Laplace generalizada.*

**Teorema 2.1.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Sejam* $f, \psi : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *funções tais que* $\psi(t)$ *é contínua e* $\psi'(t) > 0$ *em* $[0, \infty)$ *e tal que a transformada generalizada de Laplace de* $f$ *existe. Então*

$$\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) = \mathscr{L}\{f\left(\psi^{-1}(t + \psi(a))\right)\}(s), \tag{2.2}$$

*onde* $\mathscr{L}\{f\}$ *é a transformada de Laplace usual de* $f$.

**Definição 2.4.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Uma função* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *é considerada de ordem* $\psi(t)$*-exponencial se existirem constantes não negativas* $M, c, T$ *tais que* $|f(t)| \leqslant Me^{c\psi(t)}$ *para* $t \geqslant T$.

**Teorema 2.2.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Se* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua por partes e é de* $\psi(t)$*-ordem exponencial, então sua transformada generalizada de Laplace existe para* $s > c$.

**Teorema 2.3.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Se a transformada generalizada de Laplace de* $f_1 : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *existe para* $s > c_1$ *e a transformada generalizada de Laplace de* $f_2 : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *existe para* $s > c_2$. *Então, para quaisquer constantes* $a_1$ *e* $a_2$, *a transformada generalizada de Laplace de* $a_1f_1 + a_2f_2$, *onde* $a_1$ *e* $a_2$ *são constantes, existe e*

$$\mathscr{L}_\psi\{a_1f_1(t) + a_2f_2(t)\}(s) = a_1\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) + a_2\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) \text{ para } s > max\{c_1, c_2\}. \tag{2.3}$$

As transformadas generalizadas de Laplace de algumas funções elementares são dadas pelo seguinte lema.

**Lema 2.1.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020)

1.
$$\mathscr{L}_\psi\{1\}(s) = \frac{1}{s}, s > 0;$$

2.
$$\mathscr{L}_\psi\{(\psi(t) - \psi(a))^\beta\}(s) = \frac{\Gamma(\beta)}{s^\beta}, \mathbb{R}(\beta) > 0, s > 0;$$

*3.*

$$\mathscr{L}_\psi\{e^{\lambda\psi(t)}\}(s) = \frac{e^{\lambda\psi(a)}}{s-\lambda}, \ s > \lambda.$$

**Teorema 2.4.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Seja a função $f \in C_\psi[a,b]$ e de $\psi$-ordem exponencial tal que $f^{[1]}(t)$ é contínuo por partes em cada intervalo finito $[a,b]$. Então existe a transformada generalizada de Laplace de $f'(t)$,*

$$\mathscr{L}_\psi\left\{f'(t)\right\}(s) = s\mathscr{L}_\psi\left\{f(t)\right\}(s)f(a). \tag{2.4}$$

**Teorema 2.5.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Seja a função $f \in C_\psi[a,b]$ e de $\psi$-ordem exponencial tal que $f^{[1]}(t)$ é contínua por partes ao longo de um intervalo finito $[a,b]$. Então, a transformada generalizada de Laplace de $f^{[1]}(t)$ existe*

$$\mathscr{L}\{f^{[1]}(t)\}(s) = s\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) - f(a). \tag{2.5}$$

**Corolário 2.1.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Seja $f \in C_\psi^{n-1}[a,t)$ tal que $f^{[i]}, i = 0,1,2,...,n-1$ são ordem $\psi$-exponencial. Seja $f^{[n]}$ uma função contínua por partes no intervalo $[a,b]$. Então, a transformada de Laplace generalizada de $f^{[n]}(t)$ existe e,*

$$\mathscr{L}_\psi\{f^{[n]}(t)\}(s) = s^n\mathscr{L}_\psi\{f(t)\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}(f^{[k]})(a). \tag{2.6}$$

**Definição 2.5.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Sejam $f$ e $h$ duas funções contínuas por partes em cada intervalo $[a,b]$ e de ordem exponencial. Definimos a convolução generalizada de $f$ e $h$ por:*

$$(f *_\psi h)(t) = \int_a^t f(\tau)h\left(\psi^{-1}(\psi(t)+\psi(a)-\psi(\tau))\right)\psi'(\tau)d\tau. \tag{2.7}$$

**Lema 2.2.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Sejam $f$ e $h$ duas funções contínuas por partes em cada intervalo $[a,b]$ e de ordem exponencial. Então,*

$$f *_\psi h = h *_\psi f. \tag{2.8}$$

**Teorema 2.6.** (JARAD; ABDELJAWAD, 2020) *Sejam $f$ e $h$ duas funções contínuas por partes em cada intervalo $[a,T]$ e de ordem exponencial. Então,*

$$\mathscr{L}_\psi\{f *_\psi h\} = \mathscr{L}_\psi\{f\}\mathscr{L}_\psi\{h\}. \tag{2.9}$$

### 2.2.2. Transformada de Fourier generalizada

Aqui, traremos o conceito da transformada de Fourier generalizada, ou também, conhecida como, transformada de Fourier com respeito a outra função, neste caso, $\psi$. A transformada de Fourier generalizada, é uma ferramenta importante em diversos aspectos, desde na discussão de solução analítica e introdução de operadores fracionários, de modo particular, o Laplaciano fracionário (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b).

#### 2.2.2.1. Unidimensional

**Definição 2.6.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável com $\psi' > 0$ em quase todos os pontos e $\psi(x) \to \pm\infty$ com $x \pm \infty$, respectivamente. A transformada de Fourier com relação a $\psi$, de uma função $f$ tal que esta integral exista, é definida por*

$$[\mathcal{F}](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\psi(x)} f(x)\psi'(x)dx, \tag{2.10}$$

*onde $k \in \mathbb{R}$ é a variável do domínio de Fourier.*

**Proposição 2.1.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier em relação a uma função está relacionada com a transformada de Fourier clássica pela seguinte relação entre os operadores*

$$\mathcal{F}_\psi = \mathcal{F} \circ Q_\psi^{-1} \tag{2.11}$$

*onde $Q_\psi$ é o operador de composição correta com $\psi$.*

**Proposição 2.2.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier inversa em relação a $\psi$ é dada por:*

$$[\mathcal{F}_\psi^{-1} g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int -\infty^{\infty} e^{-ik\psi(x)} g(k)dk$$

*em outras palavras, temos $g = \mathcal{F}_\psi f$ se e, somente se, $f = \mathcal{F}\psi^{-1} g$.*

**Teorema 2.7.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier com relação a $\psi$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R}, d\psi)$ para $L^\infty(\mathbb{R})$.*

Considere $Q_\psi$ é o operador de composição com a função $\psi$ dada por

$$Q_\psi(f) = f \circ \psi, \ \ i.e. \ (Q_\psi f)(x) = f(\psi(x)). \tag{2.12}$$

**Proposição 2.3.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi$ um função como na* Definição (2.6) *e $Q_\psi$ definido em* Eq.(2.12) *como a operação para a composição de $\psi$. Para qualquer $p \in [1, \infty]$, a aplicação de*

$$Q_\psi : L^p(\mathbb{R}, d\psi)$$

*é uma isometria linear. Para $p = 2$ especificamente, esta aplicação também é uma isometria entre os espaços de produtos internos, onde o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ no espaço ponderado $L^2$ é definido de maneira usual por*

$$\langle f, g \rangle_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\psi'(x)dx$$

*e a conjugação complexa pode ser ignorada se assumirmos funções de valores reais $f$ e $g$.*

**Teorema 2.8.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}, d\psi) \cap L^2(\mathbb{R}, d\psi)$, então $\mathcal{F}_\psi f \in L^2(\mathbb{R})$ e*

$$\|\mathcal{F}_\psi f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(R,d\psi)}.$$

*Além disso, se $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\psi) \cap L^2(\mathbb{R}, d\psi)$, então*

$$\langle \mathcal{F}_\psi f, \mathcal{F}_\psi g\rangle = \langle f, g\rangle_\psi.$$

**Corolário 2.2.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier com relação a $\phi$ pode se estender continuamente para uma isometria do espaço $L^2(\mathbb{R}, d\psi)$ para o espaço $L^2(\mathbb{R})$.*

**Definição 2.7.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave com $\psi'(x) > 0$ em quase todo ponto e $\psi(x) \to \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ respectivamente. O espaço de Schwartz é definido por*

$$\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ tal que } \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \psi(x)^k \left(\frac{d}{d\psi(x)}\right)^l f(x) \right| < \infty \text{ para todo } k, l \in \mathbb{N} \right\}$$

*onde* $\dfrac{d}{d\psi(x)} = \dfrac{1}{\psi'(x)} \dfrac{d}{dx}$ *é o operador de diferenciação com relação a $\psi(x)$.*

Neste espaço podemos definir as seminormas como

$$p_{N,\psi}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} (1 + |\psi(x)|)^N \sum_{l=0}^{N} \left| \left(\frac{d}{d\psi(x)}\right) f(x) \right|, f \in \mathcal{S}_\psi(\mathbb{R}^n)$$

onde $N$ pode tomar qualquer valor em $\mathbb{Z}_0^+$.

**Teorema 2.9.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Se $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave com $\psi' > 0$ em quase todo ponto e $\psi(x) \to \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$, respectivamente, então a aplicação*

$$Q_\psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_\psi(\mathbb{R})$$

*é uma isometria linear.*

**Corolário 2.3.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi$ uma função suave com $\psi'(x) > 0$ em quase todos os pontos e $\psi(x) \to \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ respectivamente. Para qualquer $p \in [0, 1)$ o espaço Schwartz $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R})$ é denso no espaço $L^p(\mathbb{R}, d\psi)$.*

**Observação 2.1.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Também esta claro que o espaço das funções teste em $\mathbb{R}$ está contido no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em relação a qualquer função bijetiva suave $\psi$.*

**Teorema 2.10.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi$ uma função suave com $\psi' > 0$ em quase todo ponto e $\psi(x) \to \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ respectivamente. A transformada de Fourier com relação a $\psi$ é um isomorfismo linear de $\mathcal{S}_\psi(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

**Definição 2.8.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi$ uma função suave com $\psi' > 0$ em quase todo ponto e $\psi(x) \to \pm\infty$ com $x \to \pm\infty$ respectivamente. A convolução $\psi$-Fourier para as funções $f$ e $g$ no espaço $L^1(\mathbb{R}, d\psi)$ é definida por*

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi^{-1}(\psi(x) - \psi(y)))g(y)\psi'(y)dy.$$

**Proposição 2.4.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Para qualquer $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\psi)$, temos*

$$f *_\psi g = Q_\psi((Q_\psi^{-1} f) * (Q_\psi^{-1} g))$$

*onde é o operador de convolução usual do tipo Fourier. Em outras palavras, tratando e $_\psi$ como operações binárias em pares de funções, temos*

$$\psi = (Q_\psi) \circ (*) \circ \left(Q_\psi^{-1}, Q_\psi^{-1}\right).$$

**Proposição 2.5.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b)(Desigualdade de Young). *Se $p, q, r \in [1, \infty]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ e $f \in L^p(\mathbb{R}, d\psi)$, então $f_\psi^* g \in L^r(\mathbb{R}, d\psi)$ com*

$$\|f *_\psi g\|_{L^r(\mathbb{R},d\psi)} \leqslant \|f\|_{L^p(\mathbb{R},d\psi)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R},d\psi)}.$$

**Proposição 2.6.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b)(Teorema da convolução de Fourier). *A transformada de Fourier em relação a $\psi$ transforma a convolução em relação a $\psi$ em multiplicação*

$$\mathcal{F}_\psi(f *_\psi g) = (\mathcal{F}_\psi f)(\mathcal{F}_\psi g)$$

*para $f, g \in L^1(\mathbb{R}, d\psi)$.*

#### 2.2.2.2. Para caso $n$-dimensional

**Definição 2.9.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função bijetora cujo a derivada parcial de primeira ordem existe em quase todo ponto. A transformada de Fourier $n$-dimensional com respeito a $\psi$, de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que a integral exista, e definida por*

$$[\mathcal{F}_\psi f](\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\psi(\boldsymbol{x})} f(\boldsymbol{x})|J\psi(\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{x},$$

*onde $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$ é uma variável do domínio de Fourier, e $|J\psi|$ é o determinante jacobiano para a função $\psi$.*

**Proposição 2.7.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier $n$-dimensional com relação a uma função está relacionada à transformada de Fourier clássica pela seguinte relação entre os operadores*

$$\mathcal{F}_\psi = \mathcal{F} \circ Q_\psi^{-1}, \tag{2.13}$$

*onde $Q_\psi$ é o operador de composição à direita com $\psi$, conforme definido em* Eq.(2.12)*, mas desta vez atuando no espaço de funções definido em $\mathbb{R}$.*

**Proposição 2.8.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b)*A transformada inversa de Fourier em n-dimensão com relação a $\psi$ é dada por*

$$[\mathcal{F}_{\psi}^{-1}g](\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\psi(\boldsymbol{x})} g(\boldsymbol{k}) d\boldsymbol{k};$$

*em outras palavras, temos que $g = \mathcal{F}_{\psi} f$ se, e somente se, $f = \mathcal{F}_{\psi}^{-1} g$.*

**Teorema 2.11.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier em n-dimensão com relação a $\psi$ é um operador limitado de $L^1(\mathbb{R}, d\psi)$ em $L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

**Definição 2.10.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021a) *Seja $\psi : \Lambda \to \Lambda$ uma bijeção tal que todas as derivadas parciais de primeira ordem existem, a.e. em todos os lugares em $\Lambda$. O Laplaciano fracionário n-dimensional em relação a $\psi$ de $f$ é definido por*

$$(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{\frac{\alpha}{2}}_{\psi(\xi_1)} f(\xi_1) := C_{n,\alpha/2} P.V. \int_{\Lambda} \frac{f(\xi_1) - f(\xi_2)}{|\psi(\xi_1) - \psi(\xi_2)|^{n+\alpha}} |J\psi(\xi_2)| \, d\xi_2, \tag{2.14}$$

*onde $0 < \alpha < 2$, $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$ e*

$$C_{n,\alpha/2} = \frac{\alpha 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha+n}{2}\right)}{\pi^{n/2} \Gamma(1-\alpha/2)}. \tag{2.15}$$

Pode-se ver que $(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{\frac{\alpha}{2}}_{\psi(\xi_1)}$ está bem definido em $\mathscr{L}(\Lambda, d\psi) \cap C^{1,1}_{loc}(\Lambda)$ e na Definição 2.10 que é não-local. Mesmo $f$ é identicamente zero em uma vizinhança de um ponto $\xi$, $(-\Delta_{\mathbb{R}^n})^{\frac{\alpha}{2}}_{\psi(\xi_1)} f(\cdot)$ ainda não desapareceu.

Um caso especial, do Laplaciano fracionário generalizado, é quando escolhemos a função $\psi(\xi_1) = \xi_1$ na Eq.(2.15), e obtemos o Laplaciano fracionário clássico.

**Proposição 2.9.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função com* Definição 2.9 *e com $Q_{\psi}$ definido em* Eq.(2.12) *como a operação de composição com $\psi$. Para qualquer $p \in [1, \infty)$, a aplicação*

$$Q_{\psi} : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R}, d\psi)$$

*é uma isometria linear. Para $p = 2$ especificamente, esta aplicação também é uma isometria entre o produto dos espaços internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\psi}$ no espaço ponderado $L^2$ é definida de forma natural por*

$$\langle f, g \rangle_{\psi} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \overline{g(\boldsymbol{x})} \, |J\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}$$

*e a conjugação complexa pode ser ignorada se assumirmos funções de valores reais $f$ e $g$.*

**Teorema 2.12.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) (Teorema de Plancherel $n$-dimensional) *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n, d\psi) \cap L^2(\mathbb{R}, d\psi)$ então $\mathcal{F}_{\psi} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|\mathcal{F}_{\psi} f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n, d\psi)}.$$

*Mais genericamente, se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, d\psi) \cap L^2(\mathbb{R}^n, d\psi)$, então*

$$\langle \mathcal{F}_{\psi} f, \mathcal{F}_{\psi} g \rangle = \langle f, g \rangle_{\psi}.$$

**Corolário 2.4.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *A transformada de Fourier com relação a $\psi$ pode ser estendida continuamente para uma isometria do espaço $L^2(\mathbb{R}, d\psi)$ ao espaço $L^2(\mathbb{R})$.*

**Definição 2.11.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função como na* Definição 2.9. *A $\psi$ convolução tipo Fourier de duas funções $f$ e $g$ no espaço $L^1(\mathbb{R}^n, d\psi)$ é definida a seguir*

$$h(\boldsymbol{x}) = (f *_\psi g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\psi^{-1}(\psi(\boldsymbol{x}) - \psi(\boldsymbol{y})))g(\boldsymbol{y})|J\psi(\boldsymbol{y})|d\boldsymbol{y}.$$

**Proposição 2.10.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) *Para qualquer $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n, d\psi)$ temos*

$$f *_\psi g = Q_\psi((Q_\psi^{-1} f) * (Q_\psi^{-1} g))$$

*onde é o operador de convolução usual do tipo Fourier. Em outras palavras, tratando e $_\psi$ como operações binárias em pares de funções, temos*

$$\psi = (Q_\psi) \circ (*) \circ \left(Q_\psi^{-1}, Q_\psi^{-1}\right).$$

**Proposição 2.11.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) (Desigualdade de Young). *Se $p, q, r \in [1, \infty]$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, e $f \in L^p(\mathbb{R}^n, d\psi)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n, d\psi)$ então $f *_\psi g \in L^r(\mathbb{R}^n, d\psi)$*

$$\|f *_\psi g\|_{L^r(\mathbb{R}^n, d\psi)} \leqslant \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n, d\psi)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n, d\psi)}.$$

**Proposição 2.12.** (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b) (Teorema da convolução de Fourier). *A transformada de Fourier em relação a $\psi$ transforma a convolução em relação a $\psi$ em multiplicação*

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}_\psi f)(\mathcal{F}_\psi g).$$

**Definição 2.12.** *Para a função $f \in \mathcal{F}_\psi(\mathbb{R})$, $\psi'(t) > 0$ a transformada de Fourier fracionária de ordem $\alpha(0 < \alpha \leqslant 1)$, em relação às funções definidas por*

$$\mathscr{F}_{\alpha,\psi}(f(t)) = \mathscr{F}_{\alpha,\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e_{\alpha,\psi(t)}(\omega, \psi(t)) f(t)\psi'(t)dt, \quad \omega \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

*onde*

$$e_{\alpha,\psi(t)}(\omega, \psi(t)) = \begin{cases} e^{-i|\omega|^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t)}, & \omega \leqslant 0, \\ e^{+i|\omega|^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t)}, & \omega \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

*A transformada de Fourier fracionária $\mathscr{F}_{\alpha,\psi}$ em relação à função também pode ser definida por*

$$\mathscr{F}_{\alpha,\psi}(f(t)) = \mathscr{F}_{\alpha,\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isign|\omega|^{\frac{1}{\alpha}}\psi(t)} f(t)\psi'(t)dt, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{2.18}$$

**Proposição 2.13.** *A transformada de Fourier fracionária em relação a uma função está relacionada à relação do operador da transformada de Fourier fracionária*

$$\mathscr{F}_{\alpha,\psi} = \mathscr{F}_{\alpha} \circ \mathcal{Q}_{\psi}^{-1} \tag{2.19}$$

*onde* $\mathcal{Q}_{\psi}$ *é o operador de composição correta com* $\psi$*, definido como* $\mathcal{Q}_{\psi} = f \circ \psi = f(\psi(t))$.

**Teorema 2.13.** *Se* $f \in \mathcal{F}_{\psi}(\mathbb{R}), \psi'(t) > 0$ *então a relação entre a transformada de Fourier fracionária em relação a uma função e a transformada de Fourier em relação a uma função é dada por*

$$\mathscr{F}_{\alpha,\psi}(f)(\omega) = \mathscr{F}_{\psi}(f)(sign(\omega)|\omega|^{\frac{1}{\alpha}}), \tag{2.20}$$

*onde* $\omega \in \mathbb{R}$ *e* $0 < \alpha \leqslant 1$.

**Teorema 2.14.** *Seja* $\mathscr{F}_{\alpha,\psi}$ *a transformada de Fourier fracionária em relação à função, então*

$$\mathscr{F}_{\alpha,\psi}^{-1}\mathscr{F}_{\alpha,\psi}(f(t)) = f(t), \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.21}$$

## 2.3. Laplaciano Fracionário

As equações diferenciais parciais (EDP's) são ditas como um dos maiores e mais importantes campos da matemática, cujo seus problemas e tópicos estudados são utilizados em questões que vão desde resultados matemáticos abstratos até aplicações físicas diretas. Um dos operadores mais comumente usados em equações diferenciais parciais, é o operador de Laplace ou Laplaciano, que se cruza com análises complexas, teoria de coomologia, gravitação, eletromagnetismo e modelagem de difusão, este sendo objeto de estudo desta presente dissertação (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b).

Equações diferenciais fracionárias são frequentemente usadas para descrever sistemas com comportamentos não locais. Alguns dos métodos estabelecidos usados para equações diferenciais clássicas podem ser estendidos, com modificações, para o ajuste fracionário. Um operador importante para propor equações diferenciais parciais fracionárias (EDPF's) é o Laplaciano fracionário (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b).

Fernandez (2021) (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b), investigou o conceito de operador fracionário laplaciano em relação a uma função. No mesmo artigo demonstrou que existe uma conexão próxima com o conceito de transformada de Fourier em relação a uma função. Acontece que grande parte da análise funcional de tais operadores pode ocorrer em espaços $L^p$ ponderados.

Primeiramente, temos $0 < s < 1$ e $\alpha = 2s$. Rotula-se a ordem do Laplaciano fracionário e operadores relacionados como $s$ ou $\alpha/2$, sendo $n \in \mathbb{N}$ dimensão do domínio e com configuração $\mathbb{R}^n$.

Definições padrões de espaço de uma função para $\mathbb{R}^n$. Para qualquer $p \in [1, \infty)$, o espaço $L^p$ é definido por (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b)

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad mensurável\ tal\ que \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|^p d\boldsymbol{x} < \infty \right\}.$$

Para $p = \infty$ temos a seguinte definição

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad mensurável\ tal\ que \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \quad |f(\boldsymbol{x})| < \infty \right\}.$$

Os espaços $L^p$ podem ser ponderados alterando a medida de integração. Qualquer função mensurável em $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ resulta no espaço ponderado $L^p$ seguinte

$$L^p(\mathbb{R}^n, gd\boldsymbol{x} := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad mensurável\ tal\ que \int_{\mathbb{R}^n} |f(\boldsymbol{x})|^p g(x) d < \infty \right\}.$$

O espaço *Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço para funções suaves e com decrescimento rápido, ou seja,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) tal\ que \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} |\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \partial^{\boldsymbol{l}} f(\boldsymbol{x}| < \infty \quad para\ todo\ multi\text{-}índice \quad \boldsymbol{k}, \boldsymbol{l} \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

A topologia nestes espaços podem ser definidos pelas seguintes semi-normas:

$$p_N(f) = \sup_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N \sum_{|\boldsymbol{k}| \leqslant N} \left| \partial^{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{x}) \right|, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Onde $N$ Pode assumir qualquer valor em $\mathbb{Z}_0^+$. Os espaços $L^p$ e Schwartz formam um cenário natural para o Laplaciano Fracionário e seus operadores relacionados. (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b). Para nos dar uma definição rigorosa do Laplaciano Fracionário por meio da integral do valor principal, usaremos o espaço de função para $0 < s < 1$ e $n \in \mathbb{N}$

$$L_s^1(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ mensurável\ tal\ que \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\boldsymbol{x})|}{(1 + |\boldsymbol{x}|)^{n+2s}} d\boldsymbol{x} < \infty \right\}.$$

*Para* $f \in L_s^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\epsilon > 0$ *defini-se*

$$(-\Delta)_\epsilon^s f(x) := C_{n,s} \int_{\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| > \epsilon\}} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n+2s}} d\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde $C_{n,s}$ é uma constante de normalização. O Laplaciano Fracionário $(-\Delta)^s$ é então definido pela integral singular

$$(-\Delta)^s f(\boldsymbol{x}) := C_{n,s} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\boldsymbol{x}) - f\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{n+2s}} d\boldsymbol{y} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (-\Delta)_\epsilon^s f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.22}$$

Desde que o limite da função exista pra $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

A constante $C_{n,s}$ é escolhida para que a relação de Fourier $\widehat{(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f}\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{k}|^{\alpha}\widehat{f}(\boldsymbol{k})$ vale para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n$, onde $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$ é variável do domínio de de Fourier. A normalização explícita para a constante $C_{n,s}$ é dada por (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b)

$$C_{n,s} = C_{n,\alpha/2} := \frac{s2^{2s}\Gamma(s+\frac{n}{2}}{\pi^{n/2}\Gamma(1-s)} = \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma(\frac{\alpha+n}{2})}{\pi^{n/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}. \tag{2.23}$$

Ressalta-se que o Laplaciano Fracionário pode ser realizado pelo inverso do potencial de Riesz. O potencial de Riesz de ordem $\alpha \in (0,n)$ que denotamos por $J_\alpha$, é um operador pseudo-fracionário com multiplicador de Fourier $\boldsymbol{k} \mapsto |\boldsymbol{k}|^{-\alpha}$, ou seja, para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nós temos (FERNANDEZ; RESTREPO; DJIDA, 2021b)

$$J_\alpha u = C_{n,a}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{n-\alpha}} d\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

onde $C_{n,s}$ é dada em Eq.(2.23).

## 2.4. Simetrias de Lie e propriedades

Nesta sessão, apresentaremos os grupo de transformações de pontos de Lie e suas principais definições e propriedades que foram utilizadas no decorrer da dissertação.

**Definição 2.13.** (BLUMAN, 2010) *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, não-vazio, conexo. O conjunto de transformações $x^* = X(x;\epsilon)$ definido para cada $x = (x^1, x^2, ..., x^n) \in D$, dependendo de um parâmetro $\epsilon \in S \subset \mathbb{R}$ e munido de uma lei de composição de parâmetros*

$$\phi : S \times S \to S$$

*forma um grupo de transformação em $D$ se:*

1. *Para cada parâmetro $\epsilon$ em $S$ as transformações são injetivas em $D$, em particular $x^*$ pertence a $D$;*
2. *O par $(S,\phi)$ forma um grupo $G$;*
3. *Se $\epsilon$ denota o elemento neutro de $G$, então, para todo $x \in D$, temos $x^* = X(x;\epsilon) = x$;*
4. *Se $x^* = X(x;\epsilon)$ e $x^{**} = X(x^*;\delta)$, então, $x^{**} = X(x;\phi(\epsilon,\delta))$.*

**Definição 2.14.** (BLUMAN, 2010) *Um grupo de transformações define um grupo de pontos de Lie* (GTPL) *a 1-parâmetro se adicionarmos às propriedades anteriores às seguintes:*

1. *$\epsilon$ é um parâmetro contínuo, isto é, $S$ é um intervalo de $\mathbb{R}$. Sem perda de generalidade, $\epsilon = 0$ corresponde ao elemento identidade;*

2. *$X$ é infinitamente diferenciável com respeito a $x \in D$ e é uma função analítica de $\epsilon \in S$;*

3. *$\phi(\epsilon, \delta)$ é uma função analítica de $\epsilon$ e $\delta$, para todo $\epsilon, \delta \in S$.*

*Para as transformações infinitesimais, considere o grupo de Lie a 1-parâmetro*

$$x^* = X(x; \epsilon), \tag{2.24}$$

*com identidade $\epsilon = 0$ e lei de composição $\phi$. Fazendo a expansão de* (2.24) *em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$, temos*

$$\begin{aligned} x^* &= x + \epsilon \left( \frac{\partial X(x;\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= x + \epsilon \xi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{2.25}$$

*onde*

$$\xi(x) = \left( \frac{\partial X(x;\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=0}. \tag{2.26}$$

*A transformação*

$$x \mapsto x + \epsilon \xi(x) \tag{2.27}$$

*é chamada de transformação infinitesimal do* (GTPL) (2.24), *sendo $\xi(x) = (\xi^1(x), ..., \xi^n(x))$.*

**Lema 2.3.** (BLUMAN, 2010) *Seja $x^* = X(x; \epsilon)$ um grupo de transformações de pontos de Lie. Então, vale a seguinte igualdade*

$$X(x; \epsilon + \Delta\epsilon) = X(X(x;\epsilon); \phi(\epsilon^{-1}, \epsilon + \Delta\epsilon)), \tag{2.28}$$

*onde $\epsilon^{-1}$ e $\Delta\epsilon$ denotam, respectivamente, o elemento inverso de $\epsilon$ e um pequeno incremento em $\epsilon$.*

**Teorema 2.15.** (BLUMAN, 2010)*(Primeiro Teorema Fundamental de Lie). Existe uma parametrização $\tau(\epsilon)$ tal que a transformação do grupo de Lie* (2.24) *é equivalente à solução de um problema de valor inicial* (PVI) *para o sistema de equações diferenciais de primeira ordem*

$$\begin{cases} \dfrac{dx^*}{d\tau} = \xi(x^*), \\ x^*|_{\tau=0} = x. \end{cases} \tag{2.29}$$

*Em particular*

$$\tau(\epsilon) = \int_0^\epsilon \Gamma(\epsilon') d\epsilon' \tag{2.30}$$

*onde*

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{\partial \phi(a,b)}{\partial b}\Big|_{(a,b)=(\epsilon^{-1},\epsilon)} \tag{2.31}$$

*e $\Gamma(0) = 1$.*

**Definição 2.15.** (BLUMAN, 2010) *O operador diferencial*

$$X = X(x) = \xi(x).\nabla = \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.32}$$

*onde* $\nabla$ *é o operador gradiente*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \tag{2.33}$$

*que é chamado de gerador infinitesimal do* (GTPL) (2.24).

**Teorema 2.16.** (BLUMAN, 2010) *O* (GTPL) *a 1-parâmetro pode ser escrito da seguinte maneira:*

$$x^* = e^{\epsilon X}x = x + \epsilon X x + \frac{\epsilon^2}{2}X^2 x + ... = [1 + \epsilon X + \frac{\epsilon^2}{2}X^2 + ...]x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\epsilon^k}{k!}X^k x \tag{2.34}$$

*onde o operador* $X$ *é definido por* (2.24) *e o operador* $X^k = XX^{k-1}, k = 1, 2, ...,$ *sendo* $X^0F(x) = F(x)$ *para qualquer função diferenciável* $F(x)$.

**Corolário 2.5.** (BLUMAN, 2010) *Se* $F(x)$ *é uma função infinitamente diferenciável, então, para o* (GTPL) (2.24) *com gerador infinitesimal* (2.32), *temos* $F(x^*) = F(e^{\epsilon X}x = e^{\epsilon X}F(x)$.

**Definição 2.16.** (BLUMAN, 2010) *Uma função infinitamente diferenciável* $F(x)$ *é uma função invariante do* (GTPL) (2.24) *se, e somente se,*

$$F(x^*) \equiv F(x). \tag{2.35}$$

*Se* $F(x)$ *é uma função invariante por* (2.24), *então,* $F(x)$ *é chamada um invariante de* (2.24) *e é dita ser invariante por* (2.24).

**Teorema 2.17.** (BLUMAN, 2010) *Uma função* $F(x)$ *é invariante sob um* (GTPL) (2.24) *se, e somente se,*

$$XF(x) \equiv 0. \tag{2.36}$$

**Teorema 2.18.** (BLUMAN, 2010) *Para um* (GTPL) (2.24), *a identidade*

$$F(x^*) \equiv F(x) + \epsilon \tag{2.37}$$

*vale se, e somente se,* $F(x)$ *é tal que*

$$XF(x) \equiv 1. \tag{2.38}$$

**Teorema 2.19.** (BLUMAN, 2010) *Para um* (GTPL) (2.24), *a identidade*

$$F(x^*) \equiv F(x) + \epsilon \tag{2.39}$$

*vale se, e somente se,* $F(x)$ *é tal que*

$$XF(x) \equiv 1. \tag{2.40}$$

**Definição 2.17.** (BLUMAN, 2010) *Um ponto $x$ e uma superfície $F(x) = 0$ são ditos invariantes pelo* (GTPL) (2.24) *se, e somente se, $x^* = x$ sob* (2.24) *e $F(x^*) = 0$ quando $F(x) = 0$.*

**Definição 2.18.** (BLUMAN, 2010) *Uma curva $F(x, y) = 0$ é uma curva invariante por um* (GTPL)

$$x^* = X(x, y; \epsilon) = x + \epsilon\xi(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.41}$$

$$y^* = Y(x, y; \epsilon) = y + \epsilon\eta(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.42}$$

*com o gerador infinitesimal*

$$X = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{2.43}$$

*se, e somente se, $XF(x, y) = 0$ quando $F(x, y) = 0$.*

**Teorema 2.20.** (BLUMAN, 2010) *Uma superfície escrita na forma $F(x) = x^n - f(x^1, ..., x^{n-1}) = 0$, é uma superfície invariante sob* (2.24) *se, e somente se, $XF(x) = 0$ quando $F(x) = 0$.*

**Definição 2.19.** (BLUMAN, 2010) *A família de superfícies $\omega(x) = c$, onde $c$ é uma constante, é uma família de superfície invariantes sob* (2.24) *se, e somente se, $\omega(x^*) = c^*$ quando $\omega(x) = c$, onde $c$ e $c^*$ são constantes.*

**Definição 2.20.** (BLUMAN, 2010) *A família de superfície $\omega(x, y) = c$, onde $c$ é uma constante, é uma família de superfícies invariante sob* (2.41), (2.42) *se, e somente se, $\omega(x^*, y^*) = c^*$ quando $\omega(x, y) = c$, onde $c$ e $c^*$ são constantes.*

**Teorema 2.21.** (BLUMAN, 2010)

1. *Uma família de superfícies $\omega(x) = c$ é invariante sob a ação de* (2.24) *se, e somente se, $X\omega = \Omega(\omega)$ para alguma função $\Omega(\omega) \in C^\infty$.*

2. *Uma família de curva $\omega(x, y) = c$ é uma família de superfícies invariantes para* (2.41), (2.42) *se, e somente se,*

$$X\omega = \xi(x, y)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial\omega}{\partial y} = \Omega(\omega), \tag{2.44}$$

   *para alguma função $\Omega(\omega) \in C^\infty$.*

# 3 Equação de Difusão não-linear

A difusão é um fenômeno natural presente em diversos problemas físicos, por exemplo, em um sistema qualquer, o movimento aleatório das partículas sob determinadas condições iniciais, busca o equilíbrio. Uma vez introduzido o conceito de difusão, surge algumas questões fundamentais: o que é difusão? Qual a sua importância para as engenharias? As repostas para estas perguntas são respondidas através de problemas discutidos em diversas áreas do conhecimento, desde problemas oriundos da biologia, até problemas de medicina (sedimentação de eritrócitos), engenharias, química, física, dentre outras. Destacamos, o primeiro e interessante trabalho sobre difusão anômala realizado por Lewis Fry Richardson em 1926 (TATEISHI, 2010). Neste capítulo, estamos interessados em realizar uma abordagem sobre o fenômeno da difusão não linear, por meio de um rápido contexto histórico, formalismo matemático e suas equações.

## 3.1. Contexto Histórico

Ao longo dos anos o número de estudiosos que deram sua contribuição para o estudo da difusão são inúmeros, desde físicos, matemáticos, biólogos e até médicos. Dentre eles podemos citar alguns nomes importantes que tem suas contribuições descritas neste trabalho, como Jean Josph Baptiste Fourier (1768-1830), Thomas Graham(1805-1869), Adolph Eugen Fick (1852-1937) e Lewis Fry Richardson (1851-1953) (PEREIRA, 2018; VIEIRA, 2015).

### 3.1.1. Joseph Baptiste Fourier (1768-1830)

J. B. Fourier possui contribuições notáveis a ciência como a série de Fourier, os coeficientes de Fourier, análise de Fourier e, também, a transformada de Fourier, que possui uma gama de aplicabilidades, incluindo sua aplicação ímpar nas resoluções de equações diferenciais parciais (DUFRESNE, 2006). Porém, dentre esta gama de contribuições, uma das mais importantes foi no campo da física com o estudo da propagação de calor nos sólidos, descrito em sua obra *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides* ("Teoria da Propagação de Calor em Sólidos")(1807) (VIEIRA, 2015).

### 3.1.2. Thomas Graham (1805-1869)

Thomas Graham um químico, foi o primeiro a realizar um estudo organizado e sistemático sobre a difusão. O autor conceituou a dialise em 1854, definindo como um método de separação por difusão através de uma membrana, ou seja, fenômeno da retenção de substâncias de peso maior por membranas semipermeáveis, enquanto substâncias de peso menor têm livre passagem (TATEISHI, 2010). Sua pesquisa sobre a difusão dos gases ocorreu entres anos de 1828 a 1833 e publicados na *Philosophical Magazine* em 1833. A lei de Graham afirma que "os volumes de troca gasosa são inversamente proporcionais à raiz quadrada de suas massas. Combinada com a constante de Avogadro, esta lei permite a determinação das massas molares (em linguagem moderna)", ou seja, a velocidade de difusão dos gases, sob as mesmas condições de temperatura e pressão, são inversamente proporcionais as raízes quadradas de suas densidades, isto é (PEREIRA, 2018)

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{d_2}{d_1}}, \tag{3.1}$$

onde $V_1$ e $V_2$ são as velocidades dos gases 1 e 2, respectivamente, e $d_1$ e $d_2$ as densidades dos gases 1 e 2, respectivamente. Graham proporcionou, com este trabalho, a primeira medição confiável que permitiu a determinação de coeficientes de difusão. Em decorrência disso, vários pesquisadores posteriores como Adolf Eugen Fick (1821-1901), que falaremos sobre o seu trabalho no próximo tópico, e Maxweell (1831-1879) que calculou os coeficientes de difusão em gases a partir dos resultados numéricos de Graham (GONZÁLEZ, 2006).

Graham realizou diversos experimentos de difusão em líquidos e observou que a difusão em líquidos é três ordens de grandeza menor do que em gases e que a taxa de difusão diminui com o aumento do tempo (GONZÁLEZ, 2006).

### 3.1.3. Adolf Eugen Fick (1852-1937)

Adolf Fick, foi um renomado fisiologista e oftalmologista alemão, mas suas contribuições não se limitam ao campo da medicina, pois possui uma grande contribuição no campo da física, tendo leis fundamentais em seu nome. Seu trabalho na física teve grande influência de Graham e a difusão de sais em água. Fick faz analogias no sistema de difusão de sais em água a partir das teorias de Fourier sobre a condutividade de calor e da teoria de Ohm sobre a condutividade elétrica (VIEIRA, 2015). Ressaltemos que Fick realizou seus experimentos sobre condições ideais, ou seja, desprezando os efeitos da gravidade e considerando um recipiente vertical de forma arbitrária com solução salina (TATEISHI, 2010). Em Tateishi (2010) temos a descrição da lei de Fick: "Sendo $y$ a concentração inicial da solução salina situada em uma camada entre dois planos horizontais $x$ e $x + dx$, com $y = y(x)$. A limitação por ele feita é que a função $y$ deve diminuir conforme $x$ aumenta, ou seja, cada camada superior deve ser menos concentrada do que todas as subjacentes. Então a partir da camada entre $x$ e $x + dx$ (com concentração $y$), durante um elemento de tempo $dt$, passará para a camada imediatamente adjacente, $x + dx$ e $x + 2dx$, $\left(com\ concentração\ y + \dfrac{dy}{dx}dx\right)$ uma quantidade de sal $-Qk\dfrac{dy}{dx}dt$, na qual $Q$ é a superfície através da qual ocorre a difusão e $k$ é uma constante que Fick define como sendo dependente da natureza das substâncias. Ele também ressalta que é evidente que um volume de água igual ao de sal passa simultaneamente da camada superior para a inferior". Este é o enunciado da lei de Fick que também podemos escrever como:

***1 Lei de Fick****: a taxa de difusão para espécies químicos em uma solução aumenta com a diferença na concentração entre duas regiões adjacentes. Essa diferença atua como uma força motriz para o movimento espontâneo das partículas do soluto em direção da região de menor concentração* (TATEISHI, 2010).

Usando o modelo matemático desenvolvido por Fourier para a condução do calor, Fick, a partir da lei fundamental para a difusão citada acima, obteve a seguinte equação diferencial, (segundo as anotações do próprio Fick em seu artigo) quando a seção $Q$ do recipiente é uma função da altura do mesmo acima do fundo (TATEISHI, 2010),

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -k\left(\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dx}\frac{dy}{dx}\right). \tag{3.2}$$

*Sendo assim enunciada a* ***2° Lei de Fick*** (TATEISHI, 2010).

*Para $Q$ contante (recipiente cilíndrico ou prismático), a equação fica simplificada,*

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -k\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}. \tag{3.3}$$

### 3.1.4. Lewis Fry Richardson(1851-1953)

L. F ichardson realizou trabalhos em diversas áreas (dinâmica dos fluidos, em meteorologia e em análises numéricas, difusão turbulenta etc), e teve papel fundamental na ciência. Richardson introduziu várias das ideias nas quais se baseia a meteorologia moderna (VULPIANI, 2014).

Além da meteorologia, outra grande contribuição é o estudo da difusão anômala, estudo no qual ele mostrou "que a distância entre pares de partículas transportadas por um campo de velocidade (por exemplo, o vento) é uma variável não gaussiana com grandes desvios do valor médio. Este é um problema chave em muitas aplicações, por exemplo, a propagação de um agente poluente no mar ou de uma nuvem de poeira na atmosfera"(VULPIANI, 2014).

Usando a lei de Fick,

$$\frac{\delta y}{\delta t} = -k\frac{\delta^2 y}{\delta x^2},$$

onde $y$ a concentração do número de partículas por comprimento, deduz que a mesma não é adequada para descrever a difusão turbulenta. Lewis, reescreveu a equação considerando número de vizinhos por comprimento, $q$, como função da distância $l$ entre eles, obtendo a equação que ele denominou de *"Non-Fickian Diffusion"*, ou seja, equação da difusão "Não-Fickiana"(TATEISHI, 2010):

$$\frac{\partial}{\partial t}P(l,t) = \frac{\partial}{\partial l}\left(D(l)\frac{\partial}{\partial l}P(l,t)\right). \tag{3.4}$$

Sendo os estudos de Richardson o marco inicial pra difusão turbulenta, onde diversos pesquisadores experimentais e teóricos realizaram estudos nas áreas (PEREIRA, 2018).

## 3.2. Difusão Anômala

A difusão anômala ou não linear caracteriza-se pelo crescimento não linear da variância no decorrer do tempo, ou seja, variação no crescimento linear do deslocamento quadrático médio (PEREIRA, 2018). O estudo da difusão anômala iniciou com L. F. Richardson e seu estudo da difusão turbulenta, tema publicado em seu artigo intitulado: *Atmospheric Diffusion shown on a Distance Neighbour Graph (1926)* (TATEISHI, 2010).

Processos difusivos não lineares tem diversas aplicações nas mais diversas áreas, dentre as quais podemos citar algumas: difusão em plasma ou ambipolar, difusão e fluidos turbulentos, transporte dos fluidos em meio poroso, difusão em fractais, análise de histogramas de batidas do coração em indivíduos saudáveis, entres outros sistemas físicos (GONZÁLEZ, 2006).

O comportamento anômalo tem por descrição um desvio no crescimento da variância. Podemos escrever este comportamento em forma de uma lei de potência (PEREIRA, 2018):

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \propto t^{\beta}.$$

Podemos classificar a difusão anômala de acordo com o expoente $\beta$, sendo assim o processo pode ser:

- *sub-difusivo, se $\beta < 1$. Em processo sub-difusivo a mobilidade é menor que na difusão usual.*
- *difusão normal ou padrão quando $\beta = 1$.*
- *super-difusivo para $\beta > 1$, onde a mobilidade é maior que a difusão normal.*

A difusão anômala possui em seu sistema diversas características, por exemplo, pode não ter uma variância finita que é a do tipo Lévy, mas também pode apresentar um segundo momento finito, onde podemos citar a descrição dos transportes no meio poroso (PEREIRA, 2018).

Sabemos que a principal característica da difusão anômala é o crescimento não linear no tempo do deslocamento quadrático médio. Para descrever esse tipo de difusão vamos utilizar como modelagem as derivadas fracionárias na equação de difusão usual.

## 3.3. Equação da Difusão em Meio Poroso

A equação do meio poroso, segundo Vásquez (2007) é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \Delta(u^m(x,t)),\ m > 1$$

$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)$ é a derivada parcial da função $u(x,t)$, sendo uma função escalar não negativa do espaço $x \in \mathbb{R}^d$ e tempo $t \in \mathbb{R}$, a dimensão do espaço é $d > 1$ e $m > 1$ é uma constante, $\Delta = \Delta_x$ é o operador de Laplace atuando nas variáveis de espaço. Esta equação é um dos exemplos mais simples de equação de evolução não linear do tipo parabólica. Sendo que sua aparição é recorrente nas descrições de diferentes fenômenos naturais (VÁZQUEZ, 2007).

É grande o número de aplicações físicas em que este modelo simples surge de forma natural, principalmente para descrever processos envolvendo escoamento de fluidos, transferência de calor ou difusão. Outras importantes aplicações surgem a partir desta equação como a equação do fluxo de gás através do meio poroso (Equação de Darcy-Lubenzon-Muskai), modelo de transferência de calor não linear (Equação de Zeinovich-Raizer), fluxo de águas subterrâneas (modelo de Boussinesq), dentre outras (VÁZQUEZ, 2007). Podemos citar também mais aplicações que foram propostas nas áreas da biologia matemática, propagação de fluidos viscosos, teoria da camada limite e outros campos (VÁZQUEZ, 2007).

### 3.3.1. Fluxo de Gás através de um meio poroso

A equação do meio poroso foi batizada desta forma devido ao seu uso na descrição do fluxo de um gás ideal em um meio poroso homogêneo, que de acordo com o Leibenzon e Muskat, tal fluxo pode ser formulado a partir de uma visão macroscópica em termos da densidade das variáveis, representada por $\rho$; pressão, dada por $p$, e a velocidade, representada por $V$, todas funções do espaço x e do tempo t. Essas grandezas estão relacionadas pelas seguintes leis: (VÁZQUEZ, 2007).

- *Balanço de massa, também chamado de equação da continuidade na mecânica dos fluidos,*

  $$\epsilon\rho_t + \nabla.(\rho V) = 0 \tag{3.5}$$

  onde $\rho \in (0,1)$ representa a porosidade do meio e $\nabla$ é o operador de divergência.

- Lei de Darcy, uma lei empírica formulada em 1856 pelo engenheiro francês H. Darcy, que descreve a dinâmica de escoamentos através de meios porosos (VÁZQUEZ, 2007)

  $$\mu V = -K\nabla p. \tag{3.6}$$

- *Equação de estado perfeito, para gases perfeitos:*

$$p = p_0\rho^{\gamma} \tag{3.7}$$

onde $\gamma$ é chamado de expoente politrópico, onde pode assumir dois valores. Para $\gamma = 1$ temos processos isotérmicos e para valores de $\gamma > 1$ temos processos adiabáticos (VÁZQUEZ, 2007).

Os parâmetros $\mu$ (viscosidade do fluido), $\epsilon$ (porosidade, $k$ permeabilidade do meio e $p_0$ (pressão de referência) são consideradas constantes positivas. Assim podemos reduzir as equações (3.5) e (3.7) a forma:

$$\rho_t = c\Delta(p^m) \tag{3.8}$$

*com o expoente* $m = 1 + \gamma$

$$c = \frac{\rho k p_0}{(\gamma + 1)\epsilon\mu}. \tag{3.9}$$

Assim a constante $c$ pode escalonada, $t = ct$ deixando assim como uma equação do meio poroso (VÁZQUEZ, 2007).

Para os meios não homogêneos, considerando escoamentos onde $\epsilon, \mu, k$ não são constantes, mas sim funções do espaço ou/e do tempo, temos: (VÁZQUEZ, 2007)

$$\epsilon(x,t)\partial_t u = \nabla \cdot (c(x,t)\nabla u^m) \tag{3.10}$$

onde $\epsilon$ e $c$ funções positivas.

A equação da filtragem é obtida quando assumimos que a lei de estado não é do tipo potência, mas do tipo $p = p(\rho)$, como acontece em gases barotrópicos em geral, e também que $k$ e $\mu$ podem depender de $\rho$, assim a equação final para densidade fica:

$$\rho_t = \Delta\Phi(\rho) + f, \tag{3.11}$$

onde $\Phi$ é uma função monótono crescente de $\rho \leqslant 0$. Assim temos a equação da filtragem ou equação do meio poroso generalizado (VÁZQUEZ, 2007).

### 3.3.2. Transferência de Calor Não Linear

Uma importante aplicação está na teoria da propagação de calor com condutividade térmica dependente da temperatura. A descrição geral para tal processo, assume a forma

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(k\nabla T), \tag{3.12}$$

onde $T$ é a temperatura, $c$ o calor específico (a pressão constante), $\rho$ a densidade do meio e $k$ a condutividade. Em princípio as grandezas são funções de $x \in \mathbb{R}^3$ e $t \in \mathbb{R}$. Para as variações de $c$, $\rho$ e $k$ desprezíveis obtendo assim a clássica equação do calor (VÁZQUEZ, 2007).

- *Para coeficientes variáveis correspondente à constante $c$ e $\rho$, e a variável $k$ uma função da temperatura $k = \phi(T)$. Então reescrevemos a* Eq.(4.4) *da seguinte maneira*

$$\partial_t T = \varDelta \varPhi(T), \tag{3.13}$$

*e a função constitutiva de $\varPhi$ é dada por*

$$\varPhi(T) = \frac{1}{c\rho}\int_0^T k(s)ds \tag{3.14}$$

*(transformada de Kirchhoff)* (VÁZQUEZ, 2007).

- *Se $c\rho$ é variável, $c\rho = \psi(T)$, isso introduz uma nova variável $T$ pela formula*

$$T' = \varPsi(T) = \int_0^T \psi(s)ds \tag{3.15}$$

*obteremos a equação para $T$*

$$\partial_t \varPsi(T) = \varDelta \varPhi(T). \tag{3.16}$$

### 3.3.3. Fluxo de Calor Subterrâneo

Outra aplicação da equação do meio poroso em mecânica dos fluido (líquido) trata-se da filtração de um fluido incompressíveis (na maioria das vezes, água) através de um estrato poroso, principal problema na infiltração de águas subterrâneas. Modelo desenvolvido pro Boussinesq em 1903.

A equação de Boussinesq é dada por (VÁZQUEZ, 2007)

$$h_t = k(h^2)_{xx} \tag{3.17}$$

com a constante $k = \dfrac{\rho g k}{2m\mu}$. Quando $m = 2$ temos a equação fundamental na infiltração de águas subterrâneas. Uma vez calculado $h(x,t)$ podemos calcular a pressão e logo após a velocidade pela lei de Darcy (VÁZQUEZ, 2007).

A Eq.(3.17) é a equação para em uma dimensão, generalizada em varias dimensões fica:

$$h_t = k\varDelta(h^2) \tag{3.18}$$

sendo $h$ a altura da camada.

A equação assume a forma completa quando existe uma entrada de água no estrato poroso (recarga natural ou artificial), ou uma saída (sumidouros ou bombeamento). Sendo escrita da seguinte forma (VÁZQUEZ, 2007)

$$h_t = k\varDelta(h^2) + f \tag{3.19}$$

onde $f(x,z,t)$ é um reflexos desses efeitos como função fonte ou função absorvente (VÁZQUEZ, 2007).

### 3.3.4. Dinâmica Populacional

Outra aplicação muito interessante diz respeito a disseminação de populações biológicas. A lei mais simples de constituição de uma população de única especie é escrita da forma(VÁZQUEZ, 2007)

$$\partial_t u = div(k\nabla u) + f(u) \tag{3.20}$$

onde $u$ representa a densidade ou concentração da espécie, e o termo de reação $f(u)$, representa a interação simbiótica dentro da espécie. Segundo Gurtin e McCamy, quando as populações se comportam a evitar aglomerações é razoável assumir que a difusidade $k$ é uma função crescente de densidade populacional, sendo assim $k = \phi(u)$ com $\phi$ crescente (VÁZQUEZ, 2007).

## 3.4. Combustão em meio poroso

Atualmente, a busca por uma melhor eficiência e redução da poluição para qualquer sistema é uma meta em comum entre cientistas e ambientalistas. Pois os resultados podem oferecer um grande impacto na economia e no estilo de vida das futuras gerações. Somos dependentes, e ainda dependeremos por muitos anos, dos combustíveis fósseis, estes representam nossa maior matriz energética. Problemas que envolvem à combustão de chamas pré-misturadas e não pré-misturadas tem sido extensivamente estudados, entretanto a questão poluição e da eficiência precisam de mais esforços. A combustão de combustíveis fósseis produz $CO_2$ e não existe nenhuma forma viável de eliminar a formação deste no que diz respeito à combustão de hidrocarbonetos. A grande preocupação é a formação de outros poluentes, como $NO_x$, $SO_x$, $CO$ e $UHC$ (hidrocarbonetos não queimados). A formação destes produtos depende do tipo de combustível e dos mecanismos físicos e químicos da combustão. Diferentes estratégias foram desenvolvidas no controle da poluição, que podem ser classificadas em três categorias: pré, durante e pós-combustão. O tratamento do combustível antes da combustão, como a lavagem com enxofre, é chamado de pré-processamento. A remoção de poluentes dos gases de combustão, como o uso de um conversor catalítico ou purificador, é chamada de pós-processamento. o controle da poluição em processo durante a combustão é o objeto de estudo deste capítulo. Assim, a compreensão dos mecanismos de combustão pode levar ao controle e redução da formação desses poluentes principalmente, $NO_x$, $CO$ e $UHC$ (BEAR; CORAPCIOGLU, 2012).

A combustão em meios porosos vem a ser um meio alternativo para os mecanismos físicos e químicos da combustão. Uma das mecânicas essenciais da formação de $NO_x$ é a térmica, e esta depende da temperatura da chama e da disponibilidade de oxigênio. Portanto, controlar o processo físico de combustão, evitando altas temperaturas, é essencial para reduzir a formação de $NO_x$. Além disso, controlar o processo químico da combustão pela redistribuição de oxigênio pode ajudar, não somente na redução de formação de $NO_x$, como também a formação de $UHC$ e $CO$. A formação de $UHC$ e $CO$ está relacionada com a eficiência do processo de combustão. Portanto, para a eficiência da combustão deve escolher entre a formação de $NO_x$, por um lado, e a formação de $CO$ e $UHC$, por outro. A escolha final é minimizar a formação de $NO_x$ (BEAR; CORAPCIOGLU, 2012).

A combustão em meios porosos oferece muitas vantagens sobre a combustão em chama livre e supera a maioria das suas deficiências. Neste capítulo, o material poroso definido, é como um material com vazios conectados, onde o fluxo pode penetrar facilmente no meio. Para aplicações de combustão, o material poroso deve suportar altas temperaturas e, portanto, alumina, cerâmica, cordierita, carboneto de silício e zircônio são utilizados para aplicações de combustão (BEAR; CORAPCIOGLU, 2012).

### 3.4.1. Características da combustão em meio poroso

Para aprofundar o entendimento podemos levantar a questão: o que torna o material poroso especial na combustão? Para responder a esta questão, é necessário listar características únicas da combustão em meios porosos que podem ser resumidas da seguinte forma (BEAR; CORAPCIOGLU, 2012):

1. O fluxo se torna turbulento devido a pequenos vórtices gerados por uma matriz sólida porosa, que aumenta o momento de transferência de calor e massa e estabiliza a chama. Além disso, a área superficial por unidade de volume da matriz porosa é muito grande, da ordem de $10^4 m^{-1}$. Isto resulta numa extensa transferência de energia e momento entre fases fluida e sólida.

2. As propriedades termo-físicas do meio poroso, como condutividade e capacidade térmica, podem ser projetadas de acordo com a aplicação. Por exemplo, aumentando a temperatura e a condutividade do meio poroso, aumenta a condução de calor das zonas pré e pós-chama. Consequentemente, o $NO_x$ diminui devido à diminuição da temperatura da chama. Além disso, propriedades termo-físicas direcionais, como condutividade térmica, podem ser projetadas usando materiais anisotrópicos, como as fibras.

3. A transferência de calor radiativo dentro do meio poroso é muito maior que a dos gases. Consequentemente, a transferência de calor aumenta dentro de um meio poroso e reduz a temperatura da chama, ou seja, baixa formação de $NO_x$. Em outras palavras, a transferência de calor pode ser gerenciada para uma operação mais eficiente do combustível com menos poluição. Também propriedades radioativas do material, podem ser gerenciadas para o melhor desempenho do queimador.

4. A queda de pressão, através de um meio poroso, pode ser controlada alterando a permeabilidade do material poroso. Na maioria das aplicações, meios porosos altamente

permeáveis podem ser usados, onde a queda de pressão se torna insignificante.

5. O processo de adsorção/dessorção pode ocorrer nas superfícies sólidas, bem como efeitos catalíticos, que dependem do tipo de material sólido.

### 3.4.2. Queimadores porosos

A maior parcela de contribuição dos trabalhos realizados foi feita em queimadores de fluxo axial (planos), onde a mistura ar/combustível inflamado em uma camada porosa e a chama geralmente se estabiliza na saída. Portanto, o fluxo de radiação na saída do queimador é potencializado ao máximo. Tais queimadores são amplamente estudado em diferentes condições de operações, seja experimentalmente seja numericamente. Os materiais mais usados são a cerâmica ou material metálico poroso, onde a combustão ocorre nos poros da matriz sólida. A temperatura da superfície é de cerca de $1100°C$ e não é visível a chama, indicando que a combustão ocorre logo abaixo da superfície do queimador. Além disso, utiliza-se uma matriz porosa de camada dupla afim garantir uma ampla gama de chama estável; consequentemente, são utilizadas duas camadas com porosidades diferentes. Em geral, o material com baixa porosidade é usado para filtrar a mistura combustível/ar e a combustão ocorre em um ambiente com alta porosidade entre camadas. Portanto, as possibilidades de $flashback$ são reduzidas. Outro tipo de queimador poroso é um queimador de fluxo radial. Este tipo de queimador oferece amplos limites de estabilidade de chama e alta área superficial por unidade de volume.

### 3.4.3. Modelagem matemática

Temos três configurações de queimadores porosos, os de placa plana, os cilíndricos e esféricos. No queimador de placa plana, o ar flui axialmente através de um duto de área constante preenchido com um camada porosa de espessura $L$. Nos queimadores cilíndricos e esféricos, o ar flui radialmente através de uma matriz porosa anular. As propriedades termofísicas do ar (densidade, condutividade térmica e calor específico) são considerados funções da temperatura e concentração de espécies. Normalmente, a queda de pressão através do queimador poroso não é alta e seu efeito nas propriedades termofísicas podem ser desprezados. Em geral, as propriedades da fase sólida podem ser assumidas como constantes, e é considerado que existe um desequilíbrio térmico entre o gás e a fase sólida. Consequentemente, existem duas equações de energia para modelar o transporte de energia no sistema. O solido poroso presume-se que seja cinza e emita, absorva e espalhe energia radiante. O transporte de calor radiante é aproximado pela equação de difusão. A radiação gasosa é considerada insignificante em comparação à radiação sólida.

Equação da energia para a fase gasosa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_g c_{pg} T_g + \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}(\phi c_{pg} \rho_g r^n v T_g) =$$
$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(\phi k_g r^n \frac{\partial T_g}{\partial r}\right) - (1-\phi) h_v (T_g - T_s) + \phi \Delta H_c S_{fg}. \quad (3.21)$$

Equação da energia para a fase sólida:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_s c_s T_s) = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n \left[k_s + \frac{16\sigma T_s^3}{3\beta}\right]\frac{\partial T_s}{\partial r}\right) - h_v(T_s - T - g), \quad (3.22)$$

*onde:*

1. $\phi$ *é a porosidade.*
2. $\rho$ *é a densidade.*
3. $c_p$ *é o calor especifico.*
4. $T$ *temperatura.*
5. $v$ *significa a velocidade.*
6. $k$ *a condutividade térmica.*
7. $h_v$ *coeficiente volumétrico de calor transferido.*
8. $\Delta H_c$ *entalpia de combustão.*
9. $S_{fg}$ *constante de Stefan Boltzmann.*
10. $\sigma$ *e* $\beta$ *coeficientes de extinções.*

A equação de conservação para a fração mássica do combustível é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_g m_f) + \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}(\rho_g r^n v m_f) = \frac{1}{r^n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^n D_{AB} \rho_g \frac{\partial m_f}{\partial r}\right) - S_{fg}, \quad (3.23)$$

onde $m_f$ e $D_{AB}$ são a fração mássica de combustível e o coeficiente de combustão, respectivamente. Uma equação cinética química do tipo *Arrhenius* de etapa única é adotada na modelagem da combustão, ou seja, a seguinte equação é usada

$$S_{fg} = f \rho_g^2 m_f m_{O_2} exp\left(\frac{E}{RT_g}\right), \quad (3.24)$$

onde $f$, $m_{O_2}$, $E$, $R$ e $\rho$ referem-se ao fator pré-exponencial, fração mássica de oxigênio, energia de ativação, constante de gás e densidade, respectivamente.

# 4 Cálculo Fracionário

O cálculo fracionário, surgiu a partir de uma troca de cartas entre L'Hopital e Leibniz, na qual havia a seguinte pergunta: Qual o significado da derivada de ordem $D^n y = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ de uma função quando a ordem de derivação for um número fracionário. No caso, quando $n = 1/2$. Então, Leibniz respondeu a essa pergunta simples mas ao mesmo tempo complexa, que no futuro a resposta seria dada. Este é um aparente paradoxo do qual um dia importantes aplicações serão obtidas. Tal acontecimento ocorreu no ano de 1695, que é então considerado o ano de nascimento do cálculo fracionário (CAMARGO; CHIACCHIO; OLIVEIRA, 2008). No entanto, a história do cálculo fracionário passou por inúmeras discussões e até mesmo permaneceu sem muita atenção, por muitos anos desde suas primeiras discussões. Então, em um congresso internacional em 1974, na cidade de New Haven, o cálculo fracionário torna-se exposto e se consolida em inúmeras aplicações de diversas áreas, na matemática, na física, na biologia, na engenharia, entre outras.

Desde os primeiros passos até o presente momento,é possível trabalhar com cálculo fracionário em diversos áreas, desde aplicações até problemas teóricos. Ao longo dos anos percebeu-se que o cálculo fracionário pode ser considerado com um laboratório para funções especiais e transformadas integrais (MACHADO; KIRYAKOVA; MAINARDI, 2011). Seu início se deu apenas na área da matemática. Entretanto, Caputo aplicou o cálculo fracionário para solucionar problemas de viscoelasticidade e sismologia (CAMARGO; CHIACCHIO; OLIVEIRA, 2008). A partir de então, aplicou-se-o para descrever e modelar fenômenos da natureza de forma mais precisa e refinada. Hoje o cálculo fracionário é utilizado em diferentes áreas de estudos, tendo contribuído para o conhecimento em áreas como economia, probabilidade, física, química, engenharia, mecânica dos fluidos, fenômenos de transportes etc (CAMARGO; CHIACCHIO; OLIVEIRA, 2008).

Desde então inúmeras definições sobre integrais e derivadas fracionárias vem sendo introduzidas. Neste presente Capítulo, temos como objetivos apresentar um estudo sobre a derivada fracionária $\psi$-Riemann-Liouville, Caputo, Riesz e $\psi$-Hilfer e abordar propriedades importantes.

## 4.1. Integrais Fracionárias $\psi$-Riemann-Liouville

Define-se como integrais fracionárias de Riemann-Liouville com núcleo implícito e singular através de uma classe de funções $\psi(\cdot)$ e de um parâmetro $\alpha$ onde é denotado como a ordem da integral (PEREIRA, 2018). A partir da particular escolha da função $\psi(\cdot)$, é possível obter uma ampla classe de possíveis casos particulares. No entanto, como é sabido, ao longo dos anos, surgiu um grande número de operadores fracionários, sejam eles diferencial ou integral. Surgindo assim uma restrição a certos problemas, pois os estudos dos fenômenos naturais estão mais complexos e refinados.

**Definição 4.1.** (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) *Sejam* $(a, b)$, $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$ *um intervalo finito ou infinito da reta real* $\mathbb{R}$ *e* $\alpha > 0$. *Sejam* $\psi(\cdot)$ *uma função crescente e monótona positiva sobre* $(a, b]$, *com a derivada contínua* $\psi'(\cdot)$ *sobre* $(a, b)$. *A integral fracionária à esquerda de uma função* $f$ *de ordem* $\alpha$, *com respeito a outra função* $\psi$ *sobre* $[a, b]$ *é dada por*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \psi'(t)(\psi(t) - \psi(\tau))^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \tag{4.1}$$

*A integral fracionária* $\psi$*-Riemann-Liouville à direita define-se de modo análogo.*

A partir da escolha da função $\psi(t) = t$, obtemos a integral fracionária de Riemann-Liouville (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006).

**Definição 4.2.** (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006) *Seja* $[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ *um intervalo finito sobre o eixo real* $\mathbb{R}$. *A integral fracionária Riemann-Liouville à esquerda de ordem* $\alpha$ *com* $\alpha > 0$, *é definida por*

$$^{RL}I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > \alpha. \tag{4.2}$$

A integral Riemann-Liouville fracionária à direita define-se de modo análogo.

Com esta definição podemos mostrar os casos particulares (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006):

Escolhendo a função $\psi(t) = t$ e $a = -\infty$, substituindo ambas na Eq.(4.1), temos a integral fracionária de Liouville dada por (SOUSA, 2018)

$$_{L}I_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Agora, substituindo na Eq(4.1) a função $\psi(t) = t$ e $a = \xi$, temos a integral fracionária de Riemann dada por (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006)

$$_{R}I_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\xi}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > \xi.$$

Por outro lado, escolhendo a função $\psi(t) = \ln(t)$ e substituindo em Eq.(4.1), obtemos a integral fracionária de Hadamard dada por (SOUSA, 2018)

$$^{H}I_{+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{1}{\tau} \left( ln \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

A seguir, vamos apresentar alguns Teoremas e Propriedades para a integral fracionária $\psi$-Riemann-Liouville.

### 4.1.1. Teoremas e propriedades

**Propriedade 4.1.** *Sejam $f, g \in L^1([a,b], \mathbb{R})$ tais que existam as integrais fracionárias $I_{a+}^{\alpha;\psi} f(\cdot)$ e $I_{a+}^{\alpha;\psi} g(\cdot)$ com $\alpha > 0$. Se $\beta$, $\gamma \in \mathbb{R}$ com $\beta > 0$, $\gamma > 0$, então*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}(\beta f(t) + \lambda g(t)) = \beta I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) + \lambda I_{a+}^{\alpha;\psi} g(t). \tag{4.3}$$

*Demonstração.* Veja (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). □

Como listado anteriormente, temos os casos particulares:

1. *Para $\psi(t) = t$ e substituindo na* Eq.(4.3)*, temos a linearidade para a integral fracionária de Riemann-Liouville* (SOUSA, 2018).
2. *para $\psi(t) = \ln(t)$ e substituindo na* Eq.(4.3)*, temos a linearidade para a integral fracionária de Hadamard* (SOUSA, 2018).
3. *Seguindo a escolha da função $\psi(t)$ é possível obter a propriedade para sua respectiva integral fracionária* (SOUSA, 2018).

**Propriedade 4.2.** (Semigrupo) *Sejam $I_{a+}^{\alpha;\psi}(\cdot)$ e $I_{a+}^{\beta;\psi}(\cdot)$ integrais fracionárias $\psi$-Riemann-Liouville de ordem $\alpha$ e $\beta$, com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, assim*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} I_{a+}^{\beta;\psi} f(t) = I_{a+}^{\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = I_{a+}^{\beta+\alpha;\psi} f(t). \tag{4.4}$$

*Demonstração.* Veja (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). □

Alguns casos particulares da Propriedade 4.2.

- *Substituindo $\psi(t) = t$ na* Eq.(4.4)*, temos a propriedade de semigrupo para a integral fracionária de Riemann-Liouville* (SOUSA; OLIVEIRA, 2018).
- *Escolhendo $\psi(t) = t^p$ na* Eq.(4.4) *temos a propriedade de semigrupo para a integral fracionária de Katugampola* (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) *.*
- *Podemos escolher outras funções $\psi(t)$ e assim obter a propriedade de semigrupo para a sua respectiva integral fracionária* (SOUSA; OLIVEIRA, 2018).

Os teoremas que seguem adiante são exemplos de como podemos desenvolver a Eq.(4.1) e uma vasta classe de funções (SOUSA, 2018).

**Teorema 4.1.** *Sejam $f(t) \in L^1((a,\infty)\mathbb{R})$ e $\psi(t)$ uma função crescente e monótona positiva tal que exista o operador $I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t)$ com $a > 0$ e $t > a$, então*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi}[\psi(t) f(t)] = \psi(t) I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) - \alpha I_{a+}^{\alpha+1;\psi} f(t).$$

*Demonstração.* Considere o produto de funções dada por $\psi(\tau)f(\tau) = [\psi(t) - (\psi(t) - \psi(\tau))]f(\tau)$. Substituindo na integral fracionária de Riemann-Liouville Eq.(4.1), temos

$$\begin{aligned}
I_{a+}^{\alpha;\psi}[\psi(t)f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}[\psi(\tau)f(\tau)]d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}\psi(\tau)f(\tau)d\tau \\
&- \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(\tau))f(\tau)d\tau \\
&= \psi(t)I_{a+}^{\alpha;\psi}f(t) - \alpha I_{a+}^{\alpha;\psi}f(t).
\end{aligned}$$

□

O próximo passo, é calcular a transformada de Laplace da integral fracionária de Riemann-Liouville com respeito a função $\psi$.

**Teorema 4.2.** (TEODORO, 2014) *Seja $f \in L^1((0,\infty),\mathbb{R})$ tal que existe a integral fracionária $I_{0+}^{\alpha}f(\cdot)$ com $\alpha > 0$, então*

$$\mathscr{L}[I_{0+}^{\alpha}f(t)] = \frac{\mathscr{L}[F(s)]}{s^{\alpha}}$$

*onde $s > 0$ e $\mathscr{L}[F(s)]$ é a transformada de Laplace de função $f(t)$.*

*Demonstração.* Reescrevendo a Eq.(4.1) e aplicando a transformada de Laplace, segue que

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[I_{0+}^{\alpha}f(t)] &= \mathscr{L}[\phi_a(t)f(t)] \\
&= \mathscr{L}[\phi_a(t)]\mathscr{L}[f(t)] \\
&= \mathscr{L}[f(t)]\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-st}dt \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-st}dt \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)}\mathscr{L}[t^{\alpha-1}] \\
&= \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}.
\end{aligned}$$

□

**Teorema 4.3.** (SOUSA, 2018) *Suponha $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Então, a integral fracionária de Riemann-Liouville do produto de funções potência e de Mittag-Leffler é dada por*

$$I_{0+}^{\alpha}t^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\beta,\gamma}(bt^{\beta}) = t^{\alpha+\gamma-1}\mathbb{E}_{\beta,\alpha+\gamma}(bt^{\beta}) \tag{4.5}$$

*onde $\mathbb{E}_{p,q}(\cdot)$ é uma função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.*

*Em particular, se $b \neq 0$ e $\alpha = \beta$, temos*

$$I_{0+}^{\alpha}t^{\gamma-1}\mathbb{E}_{\beta,\gamma}(bt^{\beta}) = \frac{t^{\gamma-1}}{b}\left(\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(bt^{\alpha}) - \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right).$$

**Teorema 4.4.** (SOUSA, 2018) *Suponha $\beta - 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Então, a integral fracionária do produto de funções potência e de Wright é dada por*

$$I_{0+}^{\alpha} t^{\gamma-1} \mathbb{W}_{\beta,\gamma}(bt^{\beta}) = t^{\alpha+\gamma-1} \mathbb{W}_{\beta,\alpha+\gamma}(bt^{\beta}),$$

*onde $\mathbb{W}_{p,q}(\cdot)$ é a função de Wright.*

### 4.1.2. Caso particular: Potenciação

**Teorema 4.5.** (SOUSA, 2018) *Sejam $\alpha > 0$ e $\delta > 0$. Se $f(x) = (\psi(x) - \psi(a))^{\delta-1}$, então*

$$I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)} (\psi(t) - \psi(a))^{\alpha+\delta-1}.$$

Alguns casos particulares.

- *Para $\psi(t) = t$, temos $I_{0+}^{\alpha;\psi} f(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)} t^{\alpha+\delta-1}$.*
- *Para $\psi(t) = \ln(t)$, temos $I_{1+}^{\alpha;\psi} f(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\alpha+\delta)} \ln(t)^{\alpha+\delta-1}$.*

## 4.2. Derivada Fracionária $\psi$-Hilfer

**Definição 4.3.** (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) *Sejam $n-1 < \alpha < n$ com $n \in \mathbb{N}$, $I = [a,b]$ um intervalo tal que $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ e $f, \psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ duas funções tais que $\psi$ é crescente e $\psi'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. A derivada fracionária $\psi$-Hilfer à esquerda e a direita ${}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\beta;\psi}(\cdot)$ de ordem $\alpha$ e tipo $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, são definidas por*

$$^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = I_{a+}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left( \frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t) \tag{4.6}$$

*e*

$$^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = I_{b-}^{\beta(n-\alpha);\psi} \left( -\frac{1}{\psi'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t). \tag{4.7}$$

As derivadas fracionárias de $\psi$-Hilfer Eq.(4.6) e Eq.(4.7), podem ser escritas da seguinte forma

$$^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha;\beta;\psi} f(t) = I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(t) \tag{4.8}$$

*e*

$$^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha;\beta;\psi} f(t) = I_{b-}^{\gamma-\alpha;\psi} (-1)^n \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi} f(t) \tag{4.9}$$

com $\gamma = \alpha + \beta(n-\alpha)$, $I_{a+}^{\gamma-\alpha;\psi}(\cdot)$, $I_{b-}^{\gamma-\alpha;\psi}$, $\mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}(\cdot)$ e $D_{a+}^{\gamma;\psi}(\cdot)$, dado pela Eq.(4.1), e a derivada fracionária $\psi$-Riemann-Liouville (SOUSA; OLIVEIRA, 2018).

Tomando o limite $\alpha \to n^-, n \in \mathbb{N}$, em ambos os lados da Eq.(4.6), obtemos a enésima derivada

$$D^n f(t) = \lim_{\alpha \to n^-} {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t).$$

### 4.2.1. Teoremas e Propriedades

**Teorema 4.6.** *Sejam $f, \psi \in C^{n+1}[a,b]$. Então para todo $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, temos*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi}(a) + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{\gamma-\alpha} \frac{d}{d\tau} \mathcal{D}_{a+}^{\gamma;\psi} f(\tau) d\tau \tag{4.10}$$

*e*

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) &= \frac{(-1)^n(\psi(b)-\psi(t))^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi}(b) \\ &- \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} \int_t^b (\psi(\tau)-\psi(t))^{\gamma-\alpha} (-1)^n \frac{d}{d\tau} \mathcal{D}_{b-}^{\gamma;\psi} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{4.11}$$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) □

**Teorema 4.7.** *As derivadas fracionárias de $\psi$-Hilfer são operadores limitados para todo $n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, dados por*

$$ \left\| {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f \right\|_{C_{\gamma;\psi}} \leqslant K \|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}} \tag{4.12}$$

*e*

$$ \left\| {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f \right\|_{C_{\gamma;\psi}} \leqslant K \|f\|_{C^n_{\gamma;\psi}}, K = \frac{(\psi(b)-\psi(a))^{n-\alpha}}{(n-\gamma)(\gamma-\alpha)\Gamma(n-\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha)}. \tag{4.13}$$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) □

**Teorema 4.8.** (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) *Sejam $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Se $f \in C^n[a,b]$ então*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \mathcal{D}_{a+}^{n-\beta(n-\alpha);\psi} \left[ I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^k \mathcal{D}_{a+,k}^{\gamma;\psi} f(a)}{k!} \right]$$

*e*

$$ {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \mathcal{D}_{b-}^{n-\beta(n-\alpha);\psi} \left[ I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{((-1)^k \psi(b)-\psi(t))^k \mathcal{D}_{b-,k}^{\gamma;\psi} f(b)}{k!} \right]$$

$\gamma = \alpha + \beta(k-\alpha)$.

**Teorema 4.9.** (SOUSA; OLIVEIRA, 2018) *Se $f, \in C^n[a,b], n-1 < \alpha < n$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ então*

$$ I_{a+}^{\alpha;\psi}\, {}^{H}\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f_{\psi}^{[n-k]} I_{a+}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(a)$$

*e*

$$ I_{b-}^{\alpha;\psi}\, {}^{H}\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(\psi(b)-\psi(t))^{\gamma-k}}{\Gamma(\gamma-k+1)} f_{\psi}^{[n-k]} I_{b-}^{(1-\beta)(n-\alpha);\psi} f(b).$$

**Teorema 4.10.** *Sejam $f, g \in C^n[a,b], \alpha > 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Então*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(t) - \psi(a))^{\gamma-k} \tag{4.14} $$

*e*

$$ {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} g(t) \Leftrightarrow f(t) = g(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(\psi(b) - \psi(t))^{\gamma-k}. \tag{4.15} $$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Lema 4.1.** *Sejam $n - 1 \leqslant \gamma < n$ e $f(t) \in C_\gamma[a,b]$. Então*

$$ I_{a+}^{\alpha;\psi} f(a) = \lim_{x \to a+} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = 0, n - 1 \leqslant \gamma < \alpha. $$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Teorema 4.11.** *Sejam $f \in C^1[a,b], \alpha > 0$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Então, temos*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = f(t) \;\; e \;\; {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} I_{b-}^{\alpha;\psi} f(t) = f(t). $$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Teorema 4.12.** *Sejam $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ e $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. Se $f \in C^{m+n}[a,b], m, n \in \mathbb{N}$, então para todo $k \in \mathbb{N}$, temos*

$$ \left(I_{a+}^{\alpha;\psi}\right)^k \left({}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^m f(t) = \frac{\left({}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^m f(c)(\psi(t) - \psi(a))^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} $$

*e*

$$ \left(I_{b-}^{\alpha;\psi}\right)^k \left({}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^m f(t) = \frac{\left({}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi}\right)^m f(c)(\psi(b) - \psi(t))^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} $$

*para algum $c \in (a,t)$ e $b \in (x,b)$.*

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Lema 4.2.** *Dado $\delta \in \mathbb{R}$, considere as funções $f(t) = (\psi(t) - \psi(a))^{\delta-1}$ e $g(t) = (\psi(b) - \psi(t))^{\delta-1}$, onde $\delta > n$. Então, para $n - 1 < \alpha < n$ e $\leqslant \beta \leqslant 1$, temos*

$$ {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta - \alpha)}(\psi(t) - \psi(a))^{\delta-\alpha-1} $$

*e*

$$ {}^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\delta - \alpha)}(\psi(b) - \psi(t))^{\delta-\alpha-1}. $$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Lema 4.3.** *Dado* $\lambda > 0, n-1 < \alpha < n$ *e* $0 \leqslant \beta \leqslant 1$. *Considere as funções* $f(t) = \mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(t)-\psi(a))^\alpha)$ *e* $g(t) = \mathbb{E}_\alpha(\lambda(\psi(b)-\psi(t))^\alpha)$. *Então* $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ *é um função Mittag-Leffler com um parâmetro. Então*

$$^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \lambda f(t)$$

*e*

$$^H\mathbb{D}_{b-}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) = \lambda f(t).$$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Propriedade 4.3.** (Linearidade) *Sejam* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \beta \leqslant 1$ *e* $\lambda, \phi \in \mathbb{R}$. *Sejam* $f, g \in C^n([a,b])$ *tais que existam* $^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(\cdot)$ *e* $^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(\cdot)$. *A derivada fracionária* $\psi$*-Hilfer é um operador linear, isto é,*

$$^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi}[\lambda f(t) + \phi g(t)] = \lambda {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} f(t) + \phi {}^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} g(t). \tag{4.16}$$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

**Propriedade 4.4.** *Sejam* $n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \beta \leqslant 1, e f \in C^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ *temos*

$$^H\mathbb{D}_{a+}^{\alpha,\beta;\psi} I_{a+}^{\alpha;\psi} f(t) = f(t).$$

*Demonstração.* Veja (SOUSA; OLIVEIRA, 2018). □

### 4.2.2. Derivada Fracionária de $\psi$-Caputo

**Definição 4.4.** (ALMEIDA, 2017) *Seja* $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$, $I$ *o intervalo* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $f, \psi \in C^n(I)$ *duas funções tal que* $\psi$ *é crescente e* $\psi'(t) \neq 0$ *para todo* $t \in I$. *A derivada fracionária a esquerda de* $\psi$*-Caputo de* $f$ *de ordem* $\alpha$ *é dada por*

$$^C D_{a+}^{\alpha,\psi} f(t) := I_{a+}^{n-\alpha,\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n f(t)$$

*e a derivada fracionária de* $\psi$*-Caputo a direita é*

$$^C D_{b-}^{\alpha,\psi} f(t) := I_{b-}^{n-\alpha,\psi} \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n f(t).$$

**Teorema 4.13.** *Suponha que* $f, \psi \in C^{n+1}[a,b]$. *Então, para todo* $\alpha > 0$

$$^C D_{a+}^{\alpha,\psi} f(t) = \frac{(\psi(t)-\psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f_\psi^{[n]}(a) + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_a^t (\psi(t)-\psi(\tau))^{n-\alpha} \frac{d}{d\tau} f_\psi^{[n]}(\tau) d\tau$$

*e*

$$^C D_{b-}^{\alpha,\psi} f(t) = (-1)^n \frac{(\psi(b)-\psi(t))^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)} f_\psi^{[n]}(b) - \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha)} \int_t^b (\psi(\tau)-\psi(t))^{n-\alpha} (-1)^n \frac{d}{d\tau} f_\psi^{[n]}(\tau) d\tau.$$

*Demonstração.* Veja (ALMEIDA, 2017). □

**Teorema 4.14.** *As derivadas fracionárias de $\psi$-Caputo são operadores limitados. Para todo $\alpha > 0$, temos*

$$\|{}^C D_{a+}^{\alpha,\psi} f\|_C \leqslant K\|f\|_{C_\psi^{[n]}}$$

*e*

$$\|{}^C D_{b-}^{\alpha,\psi} f\|_C \leqslant K\|f\|_{C_\psi^{[n]}}$$

*onde*

$$K = \frac{(\psi(b) - \psi(a))^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}.$$

*Demonstração.* Veja (ALMEIDA, 2017). □

**Teorema 4.15.** *Se $f \in C^n[a,b]$ e $\alpha > 0$, então*

$${}^C D_{a+}^{\alpha,\psi} f(t) = D_{a+}^{\alpha,\psi}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}(\psi(t)-\psi(a))^k f_\psi^{[k]}(a)\right]$$

*e*

$${}^C D_{b-}^{\alpha,\psi} f(t) = D_{b-}^{\alpha,\psi}\left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!}(\psi(b)-\psi(t))^k f_\psi^{[k]}(b)\right].$$

*Demonstração.* Veja (ALMEIDA, 2017). □

## 4.3. Derivadas de Riesz

**Definição 4.5.** (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) *Seja a função $y$, com $0 < \alpha < 2$ e $\alpha \neq 1$. A derivada fracionária de Riesz de ordem $\alpha$ é definida por*

$$D_x^\alpha f(t) = -\frac{D_+^\alpha y(t) + D_-^\alpha y(t)}{2\cos(\alpha\pi/2)} \tag{4.17}$$

*onde as derivadas $D_\pm^\alpha y(t)$ são as derivadas fracionárias de Weyl.*

**Propriedade 4.5.** *Podemos definir a derivada de Riesz, através da transformada de Fourier sendo da pela expressão*

$$\mathcal{F}[D^\alpha t y(t)] = -|\omega|^\alpha \mathcal{F}(\omega)$$

*e*

$$D_t^\alpha y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^\alpha \mathcal{F}(\omega) e^{i\omega t} d(\omega).$$

*Demonstração.* Veja (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). □

Consideremos a integral a seguir com $0 < \alpha < 1$ (ATANACKOVIC et al., 2014)

$$D^{\alpha}y(t) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t-\zeta|^{1-\alpha}}y(\zeta), x \in \mathbb{R} \tag{4.18}$$

*e*

$$H^{\alpha}y(t) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\mathrm{sen}\frac{\alpha\pi}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(t-\zeta)}{|x-\zeta|^{1-\alpha}}y(\zeta), x \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Então $D^{\alpha}y$ é chamado de potencial de Riesz de $y$ de ordem $\alpha$ em $\mathbb{R}$. Denotamos por $H^{\alpha}y$, o conjugado do potencial de Riesz, com ordem $\alpha$ em $\mathbb{R}$ (ATANACKOVIC et al., 2014).

**Proposição 4.1.** *Para $t \in \mathbb{R}$, dizemos que a integral de Riemann-Liouville e o potencial de Riesz estão ligados da seguinte forma*

$$
\begin{aligned}
{}_{-\infty}I_t^{\alpha}y(t) &= \cos\frac{\alpha\pi}{2}D^{\alpha}y(t) + \mathrm{sen}\frac{\alpha\pi}{2}H^{\alpha}y(t),\\
{}_tI_{\infty}^{\alpha}y(t) &= \cos\frac{\alpha\pi}{2}D^{\alpha}y(t) + \mathrm{sen}\frac{\alpha\pi}{2}H^{\alpha}y(t),\\
D^{\alpha}y(t) &= \frac{1}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left({}_{-\infty}I_t^{\alpha}y(t) - {}_tI_{\infty}^{\alpha}y(t)\right),
\end{aligned}
$$

*e*

$$H^{\alpha}y(t) = \frac{1}{2\mathrm{sen}\frac{\alpha\pi}{2}}({-\infty}I_t^{\alpha}y(t) - {}_tI_{\infty}^{\alpha}y(t)). \tag{4.20}$$

*Demonstração.* Veja (ATANACKOVIC et al., 2014). □

Se $\alpha, \beta > 0, \alpha + \beta < 1$, temos

$$D^{\alpha}D^{\beta}y(t) = D^{\alpha+\beta}y(t)$$

e

$$H^{\alpha}H^{\beta}y(t) = -D^{\alpha+\beta}y(t).$$

**Teorema 4.16.** *Seja $h(t) = |t|^{\alpha-1}$, com $1 < \alpha < 2$. A derivada fracionária de Riesz pode ser escrita como a convolação de Fourier*

$$D_t^{\alpha} = d_{\alpha}(f * h)(t), \ \textit{com}\ d_{\alpha} = -\frac{1}{2\Gamma(-\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}} \tag{4.21}$$

*Demonstração.* Veja (PEREIRA, 2018). □

# 5 Aplicações da EMP fracionária

A equação do meio poroso (EMP) aparece em diversas aplicações, como pode ser visto em (VÁZQUEZ, 2007). Em geral, o modelo é descrito por

$$u_t = \Delta(u^m), \quad m > 1, \tag{5.1}$$

sendo $u(x,t)$ uma função não negativa, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$ e $\Delta$ representa o operador Laplaciano. No caso $m = 1$, a Eq.(5.1) é a conhecida equação do calor, discutida por Vazquez em (VÁZQUEZ, 2007). O presente trabalho, foi citado por muitas aplicações como transferência de calor, propagação de fluidos viscosos, fluxo de gás isotrópico através de um meio poroso, infiltração de águas subterrâneas.

Uma alternativa para generalizar a Eq.(5.1), é usar os operadores fracionários na EMP, gerando EMP espaço-fracionário, EMP fracionário-tempo e EMP espaço-tempo-fracionário. Na EMP espaço-fracionário é considerado o Laplaciano fracionário como pode ser visto em (VÁZQUEZ, 2007), os autores investigam as propriedades de existência e unicidade de soluções. Neste caso considera-se os efeitos de longa distância, ou seja, as interações de longo alcance do ponto de vista estocástico.

Em 2014 Biler et al. (BILER; IMBERT; KARCH, 2015), consideraram a equação do meio poroso espacial

$$\partial_t u = \nabla \left(|u|\nabla^{\alpha-1}\left(|u|^{m-2}u\right)\right) \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \; m > 1, \tag{5.2}$$

onde $\nabla^{\alpha-1}$ denota o operador integro-diferencial $\nabla(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}-1}$ com $\alpha \in (0,2)$. A Eq.(5.2) admite a pressão não local e constroem a solução de similaridade

$$u(x,t) = c\left(t^{-\frac{d}{d+\alpha}}\left(R^2 - |x|^2 t^{-\frac{2}{d+\alpha}}\right)_+^{\frac{\alpha}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{5.3}$$

nos dando como propriedade principal a velocidade de propagação finita em meio poroso.

Em (HUANG, 2014), os autores apresentam a construção das soluções explícitas para a equação do meio poroso fracionário dada pela Eq.(5.1). Na ocasião, os autores apresentaram algumas propriedades associadas aos perfis de Barenblatt. A solução explícita é dada pelo teorema a seguir correspondente ao EMP espaço-fracionário

$$u_t = \Delta^s\left(u^m\right). \tag{5.4}$$

**Teorema 5.1.** (HUANG, 2014) *Para todo $s \in (0,1)$, a* Eq.(5.4) *admite uma solução de similaridade*

$$u(x,t) = t^{-N\beta}\Phi(xt^{-\beta}), \tag{5.5}$$

*com o perfil especial* $\Phi(y) = \lambda\left(R^2 + |y|^2\right)^{-q}$, $q > 0$ *e* $\beta = \dfrac{1}{N(m-1)+2s}$ *onde* $m = \dfrac{N+2-2s}{N+2s}$. *A solução de similaridade correspondente é uma solução clássica em* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ *com* $u(x,t)\to M\delta(x)$ *quando* $t\to 0$ *para* $M>0$.

Em 2020 Belevtsov et al. (BELEVTSOV; LUKASHCHUK, 2020), discute um algoritmo com o objetivo de encontrar as simetrias de Lie de uma equação diferencial fracionária com potencial de Riesz. Mais precisamente, foi estudada a equação não linear do meio poroso espaço-fracionário. Além disso, foi estabelecida uma extensão do Teorema de Ibragimov para encontrar leis de conservação para equação com potencial de Riesz. Vale ressaltar a extensão do conceito de auto-adjunção não linear para equações diferenciais fracionárias com sentido do potencial de Riesz. A utilização de simetrias de Lie para investigação de equações fracionárias tem sido realizada, em geral, quando a derivada fracionária é no sentido de Riemann-Liouville e Caputo. Portanto, no trabalho (BELEVTSOV; LUKASHCHUK, 2018) foi a primeira vez que o Potencial de Riesz é considerado.

A EMP fracionária no tempo é discutida em (GAZIZOV; KASATKIN; LUKASHCHUK, 2009), na qual os autores utilizam a análise de simetria de Lie para obter diversas propriedades da difusão fracionária não linear no tempo como,

$$D_t^{\alpha} u = \left(K(u)u_x\right)_x,$$

em que $D_t^{\alpha}(\cdot)$ é a derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $0<\alpha<2$, e a EMP fracionária no tempo é investigada considerando $K(u) = u^m$. As simetrias de Lie são encontradas e as álgebras de Lie são classificadas.

Recentemente (LÓPEZ et al., 2024), consideraram um método numérico para investigar a EMP fracionária no tempo dada por

$$\begin{cases} \partial_t^{\alpha} u = \left(D(u)u_x\right)_x, \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = M. \end{cases}$$

Os autores estudam a existência e unicidade de soluções fracas através de solução de similaridade que reduz esta EDP fracionária em uma EDO fracionária em termos do operador Erldélyi-Kobe. Assim, apresentam um estudo numérico para derivadas fracionárias, em particular, aproximações numéricas para o operador Erdelyi-Kober, associado a modelos fracionários de difusão não linear no tempo. Por outro lado, Yang e Wang (YANG; WANG, 2022), discutiram a simetria do grupo de Lie e o sistema ótimo correspondente, eles constroem algumas soluções de similaridade e o cálculo das leis de conservação através do novo teorema de conservação. Na literatura existem trabalhos relevantes e de grande impacto envolvendo operadores fracionários e simetrias (SOARES; COSTA; SOUSA, 2024b; NASS, 2019; SOUSA et al., 2024; SOARES; COSTA; SOUSA, 2024c; PULIDO; SOUSA; OLIVEIRA, 2024; SOUSA et al., 2018; HASSANI et al., 2024; SOARES, 2011) e as referências neles contidas. Ao longo destes anos, vários autores motivados por operadores fracionários não locais e equações de meio poroso, têm discutido tanto na variável espacial como na variável temporal, questões de existência e unicidade (HASSANI et al., 2022; NIKAN et al., 2022; MARTINEZ et al., 2021; CARDOSO et al., 2021; VELLASCO-GOMES; CAMARGO; ALFONSO, 2020; SOARES, 2011). Contudo, não é uma tarefa simples e trivial trabalhar com a não localidade do operador fracionário e a não linearidade das equações ao mesmo tempo, o que dificulta ainda mais os objetivos. Podemos apontar também que ao trabalhar com operadores fracionários para discutir simetrias de Lie, existe a dificuldade em trabalhar com contas de ordem superior. Por exemplo, uma equação de evolução temporal fracionária com uma derivada espacial de ordem cinco ou mais. Também no caso de EDPF's lineares ou não lineares com dimensões maiores que dois.

Embora existam trabalhos na literatura sobre simetrias de Lie via operadores fracionários não locais e a equação de difusão, ainda é uma área muito restrita, especialmente quando se trata de operadores núcleos singulares implícitos. Nesse sentido, motivado pelos trabalhos destacados acima, em particular, envolvendo operadores fracionários e questões em aberto na literatura, no presente trabalho, temos como principais objetivos discutir novas extensões infinitesimais para operadores fracionários com núcleo singular para a equação da difusão.

## 5.1. Equações de Difusão Espaço-Fracionária

Um das formas de introduzir o Laplaciano fracionário, é por meio de derivadas fracionárias de Riesz, definidas pelos potenciais de Riesz . Os potenciais de Riesz, foram definidos pelo matemático austro-húngaro, Marcel Riesz (1886-1969). Já na Universidade de Buldapeste, realizou pesquisas relacionadas a problemas sobre a teoria da série de Lipót Fejér. O principal trabalho é na área de Análise Funcional a Equações Diferenciais Parciais, Física-Matemática, Teoria dos Números e Álgebra. Riesz propôs uma modificação no núcleo de uma transformação integral, ao estudar potenciais de energia, propondo assim uma transformação do tipo potência. Na ocasião, acreditava que em alguns fenômenos o comportamento (decaimento ou desatribuição) não era de ordem exponencial, no lugar do conhecido núcleo de Fourier (PEREIRA, 2018). Sua principal propriedade é descrita no Capítulo 2 desta dissertação.

Em 2014, Huang et al., discutiram as soluções de similaridade da equação fracionária espacial em meio poroso baseado na seguinte equação (HUANG, 2014)

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = (-\Delta)^s u^m(x,t) \tag{5.6}$$

com $1 < s < 2$. A definição e propriedades relacionadas ao Laplaciano fracionário $(-\Delta)^s$ estão apresentadas no Capítulo 2. Uma das abordagens mais importantes para o estudo das propriedades qualitativas e quantitativas de EDPs é examinar suas soluções de similaridade, chamadas perfis de Barenblatt, sempre que existirem. As soluções de similaridade estão relacionadas aos grupos de simetria de escala das EDPs, levando as equações transformadas em variáveis de similaridade. Após a redução usando variáveis de similaridade, as equações de similaridade resultantes, herdam algumas das simetrias de escalas remanescentes (HUANG, 2014). Os tipos especiais de similaridades, estão associadas as soluções da forma $\left(R^2 - |y|^2\right)^{+q}$ ou $\left(R^2 + |y|^2\right)^{-q}$ para $R > 0$ e $q > 0$. Com isso a equação fracionária em meio poroso descrita por meio da Eq.(5.6), tem como soluções da forma $(R^2 + |y|^2)^{\frac{-1}{m-1}}$ para $m \in \left(\dfrac{N-2}{N}, 1\right)$ ou $(R^2 + |y|^2)^{\frac{+1}{m-1}}$ para $m > 1$ (HUANG, 2014).

A função hipergeométrica (Gauss) prevalece na Física-Matemática porque representa muitas outras funções especiais comuns, porém importantes, e também surge em muitas integrais especiais. De fato, as funções $\left(R^2 - |y|^2\right)_+^q$ ou $\left(R^2 + |y|^2\right)^{-q}$ para $R > 0$ também são funções hipergeométricas especiais, que podem ser descritas da forma (HUANG, 2014)

$$\left(R^2 - |y|^2\right)^{+q} = R^{2q}{}_2F_1\left(-q, c; c; |y|^2/R^2\right) \tag{5.7}$$

$$\left(R^2 + |y|^2\right)^{-q} = R^{-2q}{}_2F_1\left(q, c; c; -|y|^2/R^2\right) \tag{5.8}$$

para qualquer numero complexo $\mathbb{C}$. Para os perfis explícitos de Barenblatt que encontramos para a Eq.(5.6), cujo a relação para o Laplaciano fracionário de funções hipergeométricas gerais é dada por

$$\begin{aligned} & (-\Delta)^s\left[{}_2F_1\left(\frac{N}{4} + \frac{\mu-\rho}{2}, \frac{N}{4} - \frac{\mu+\rho}{2}; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right)\right] \\ = \;& 2^{2s}R^{-2s}\frac{\Gamma(\frac{N}{4} + \frac{\mu-\rho}{2} + s)\Gamma(\frac{N}{4} - \frac{\mu+\rho}{2} + s)}{\Gamma(\frac{N}{4} + \frac{\mu-\rho}{2})\Gamma(\frac{N}{4} - \frac{\mu+\rho}{2})}{}_2 \\ \times \;& F_1\left(\frac{N}{4} + \frac{\mu-\rho}{2} + s, \frac{N}{4} - \frac{\mu+\rho}{2} + s; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right). \end{aligned}$$

Em particular, quando $\rho = -q$ e $\mu = \dfrac{N}{2} - q$, obtemos

$$\begin{aligned} (-\Delta)^s(R^2 + |y|^2)^{-q} &= R^{-2q}(-\Delta)^s\left[{}_2F_1\left(q; \frac{N}{2}; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right)\right] \\ = 2^{2s}R^{-2s-2q}&\frac{\Gamma(q+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(q)\Gamma(\frac{N}{2})}{}_2F_1\left(q+s, \frac{N}{2}+s; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

**Lema 5.1.** (HUANG, 2014) *Se as funções hipergeométricas não constantes* ${}_2F_1(a_1, b_1; c; x)$ *e* ${}_2F_1(a_2, b_2; c; x)$ *são idênticas para* $|x| < 1$, *então* $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ *ou* $a_1 = b_2, b_1 = a_2$.

Para derivar os perfis de similaridade utiliza-se algumas propriedades da função hipergeométricas e seus Laplaciano fracionários. Porém, utiliza-se também os princípios de conservação da massa para determinar os perfis de Barenblatt. Se $u(x,t)$ é a solução da Eq.(5.6), assim $T_\lambda u(x,t) = \lambda^{N\beta} u(\lambda^\beta x, \lambda y)$ com (HUANG, 2014; PEREIRA, 2018)

$$\beta = \frac{1}{N(m-1)+2s}. \tag{5.10}$$

Isso implica nas soluções de similaridade da forma $u(x,t) = t^{-N\beta}\Phi(y)$ com $y = xt^{-\beta}$, onde o perfil de similaridade $\Phi$ satisfaz a equação (HUANG, 2014)

$$(-\Delta)^\alpha \Phi^m = \beta \nabla \cdot (y\Phi). \tag{5.11}$$

**Teorema 5.2.** (HUANG, 2014) *Para cada* $s \in (0,1)$*, a* Eq.(5.11) *admite solução de similaridade* $u(x,t) = t^{-N\beta}\beta\Phi(xt^{-\beta})$ *com perfil especial* $\Phi(y) = \lambda(R^2+|y|^2)^{-q}(q>0)$ *e* $\beta = \dfrac{1}{N(m-1)+2s}$ *somente quando* $m = \dfrac{N+2-2s}{N-2s}$ *corresponde a solução de similaridade*

$$u(x,t) = \lambda t^{-N\beta}(R^2+|xt^{-\beta}|^2)^{-s-N/2}. \tag{5.12}$$

*Isso é um solução clássica em* $(0,\infty)\times\mathbb{R}^N$ *com* $u(x,t) \to M\delta(x)$ *como* $t \to 0$ *para algum* $M > 0$.

Para derivar o perfil de Barenblatt, substituindo $q$ por $mq$ em Eq.(5.9), temos (HUANG, 2014),

$$(-\Delta)^s\Phi(y)^m = \lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq}\frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} {}_2F_1\left(mq+s, \frac{N}{2}+s; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right).$$

Por outro lado, através de uma cálculo simples obtemos (HUANG, 2014)

$$\nabla\cdot(y\Phi(y)) = \lambda N R^{-2q} {}_2F_1\left(q, \frac{N}{2}+1; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right).$$

Como resultado, a Eq.(5.11) se reduz à identidade (HUANG, 2014)

$${}_2F_1\left(mq+s, \frac{N}{2}+s; \frac{N}{2}; -\frac{|y|^2}{R^2}\right). \tag{5.13}$$

A equação algébrica

$$\lambda^m 2^{2s} R^{-2s-2mq}\frac{\Gamma(mq+s)\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(mq)\Gamma(\frac{N}{2})} = \beta\lambda N R^{-2q}. \tag{5.14}$$

Desde que $\dfrac{N}{2}+s \neq \dfrac{N}{2}+1$ no Lema 5.13, o Lema 5.1 implica que

$$mq+s = \frac{N}{2}+1, \qquad \frac{N}{2}+s = q$$

ou

$$m = \frac{N+2-2s}{N+2s}, \qquad \frac{N}{2}+s. \tag{5.15}$$

Consequentemente, a identidade algébrica Eq.(5.14) pode ser simplificada como

$$\lambda^{1-m} R^{2-2s}\beta = 2^{2s-1}\frac{\Gamma(\frac{N}{2}+s)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+1-s\right)}. \tag{5.16}$$

Usando a condição de massa total, os dois parâmetros livres $\lambda$ e $R$ são determinados unicamente, então (HUANG, 2014)

$$M = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)dy = \lambda\pi^{\frac{N}{2}} R^{-2s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{N}{2}+s\right)}. \tag{5.17}$$

## 5.2. Simetrias de Lie da Equações de Difusão

Considere a equação diferencial parcial fracionária (EDPF) na forma

$$F\left(x, t, u(x,t), \cdots, \partial_t u(x,t), \ldots, {}_a\partial_x^{\gamma} u(x,t)\right) = 0 \tag{5.18}$$

onde $\gamma \in \mathbb{R}^+$, com $x$ e $t$ são variáveis independentes e $u(x,t)$ variável dependente. As notações $\partial_t u(x,t)$ significam a derivada parcial em relação ao tempo, ${}_a\partial_x^{\gamma} u(x,t)$ corresponde à derivada parcial fracionária de Riemann-Liouville, em relação ao espaço.

Suponha que a Eq.(5.18) seja invariante sob o seguinte parâmetro ($\epsilon > 0$), grupo de Lie de transformações de pontos contínuos

$$\begin{aligned} \overline{x} &\mapsto x + \epsilon\xi(x,t) + O(\epsilon^2), \\ \overline{u} &\mapsto u + \epsilon\eta(x,t) + O(\epsilon^2), \\ \overline{u}_{\overline{t}} &\mapsto u_t + \epsilon\eta_{[t]} + O(\epsilon^2), \\ {}_{\overline{a}}\partial_{\overline{x}}^{\gamma}\overline{u} &\mapsto {}_a\partial_x^{\gamma} u + \epsilon\ {}^{[\cdot]}\eta_{[x]}^{(\gamma)} + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{5.19}$$

onde ${}^{[\cdot]}\eta_{[x]}^{(\gamma)}$ representa a extensão infinitesimal associada como a derivada fracionária em relação a variável $x$. Aplicamos as transformações Eq.(5.19) em Eq.(5.18) e omitimos as potências superiores de $\epsilon$. Então, comparando os coeficientes de ambos os lados da equação resultante, obtemos

$$\left[\eta_{[t]}\frac{\partial F}{\partial u_t} + {}^{[\cdot]}\eta_{[x]}^{(\gamma)}\frac{\partial F}{\partial_a\partial_x^{\gamma} u} + \tau\frac{\partial F}{\partial t} + \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial u}\right]\Bigg|_{F=0} = 0. \tag{5.20}$$

A Eq.(5.20) torno o grupo (5.19) invariante, em outras palavras, a equação diferencial (5.19) é invariante para a expressão (5.21). Portanto, o gerador infinitesimal torna-se

$$X = \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{5.21}$$

tal como

$$\begin{aligned} \tau(x,t,u) &= \frac{d\overline{t}}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \\ \xi(x,t,u) &= \frac{d\overline{x}}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}, \\ \eta(x,t,u) &= \frac{d\overline{u}}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0}. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula de extensão para Eq.(5.18) pode ser escrita como

$$Pr^{(\gamma)}XF\big|_{F=0} = \left[\eta_{[t]}\frac{\partial}{\partial u_t} + {}^{[\cdot]}\eta^{(\gamma)}_{[x]}\frac{\partial F}{\partial_a \partial^{\gamma}_x} + XF\right]\Big|_{F=0} = 0. \tag{5.22}$$

[1]

### 5.2.1. Equação do meio poroso fracionário espacial

Nesta seção, encontramos as simetrias de Lie para a equação do meio poroso fracionário em termos da derivada fracionária de Riesz, considerando em princípio a derivada fracionária de Weyl e aplicando a relação entre para mostrar que as simetrias são equivalentes.

O caso a ser analisado neste trabalho é caso 1 + 1 dimensional, em que inicialmente invariante as simetrias de Lie, considerando a derivada fracionária de Weyl na variável espacial.

Considere a equação do meio poroso fracionário espacial

$$u_t = \lambda\ {}_{\pm}\partial^{\alpha+1}_x u^m, \tag{5.23}$$

onde ${}_{\pm}\partial^{\alpha}_x$ são as derivadas fracionárias de Weyl, com $0 < \alpha \leqslant 1$, $m > 0$ e $\lambda$ é uma constante.

O estudo da equação do meio poroso é realizado de dois modos distintos. No primeiro caso consideramos o caso linear que corresponde a $m = 1$. Em segundo, o caso $m > 0$ e $m \neq 1$. Calculamos as simetrias obtidas nos dois casos e suas soluções invariantes.

**(1) Caso linear m=1:** Neste caso, temos a equação linear

$$u_t = \lambda\ {}_{\pm}\partial^{\alpha+1}_x u. \tag{5.24}$$

A fórmula de extensão é dada por

$$Pr^{(\alpha)}X\left(F\right) = \eta_{[t]} - \lambda\ {}^{\pm}\eta^{(\alpha+1)}_{[x]} \tag{5.25}$$

onde $F = u_t - \lambda_{\pm}\partial^{\alpha}_x u$. Neste caso, tomando $\alpha \to 1$ obtemos $\eta^{(2)}_{[x]}$. Tomando $Pr^{(\alpha)}X\left(F\right) = 0$,

$$\eta_{[t]} = \lambda^{\pm}\eta^{(\alpha+1)}_{[x]}.$$

Os prolongamentos infinitesimais explícitos são dados por

$$\eta_{[t]} = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 \tag{5.26}$$

[1] ${}^{[\cdot]}\eta^{(\gamma)}_{[x]}$ representação do Infinitesimal estendido

e

$$
\begin{aligned}
{}^{\pm}\eta^{(\alpha)}_{[x]} =& {}_{\pm}\partial^{\alpha+1}\eta + (\eta_u - (\alpha+1)\xi_x)_{\pm}\partial^{\alpha+1}u - u_{\pm}\partial_u^{\alpha+1}\eta_u \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\binom{\alpha+1}{n}\frac{\partial^n}{\partial x}\eta_u - \binom{\alpha+1}{n+1}\xi^{(n+1)}\right]{}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1-n}u - \binom{p}{n}\frac{d^n}{dx^n}\tau\partial_{t\pm}\partial_x^{\alpha+1-n}u\right\}
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

onde obtemos a equação

$$
\begin{aligned}
\eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 =& \lambda({}_{\pm}\partial^{\alpha+1}\eta + (\eta_u - (\alpha+1)\xi_x)_{\pm}\partial^{\alpha+1}u - u_{\pm}\partial_u^{\alpha+1}\eta_u \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\binom{\alpha+1}{n}\frac{\partial^n}{\partial x}\eta_u - \binom{\alpha+1}{n+1}\xi^{(n+1)}\right]{}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1-n}u\right. \\
&\left. - \binom{p}{n}\frac{d^n}{dx^n}\tau\partial_{t\pm}\partial_x^{\alpha+1-n}u\right\}).
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Considerando $\eta$ linear, $\eta = p(x)u + q(x,t)$, $\tau = \tau(t)$ e $\xi = \xi(x)$, das equações acima segue que

$$
\begin{aligned}
& q_t + p(x)u_t + (p(x) - \tau')u_t \\
= \;& {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}(p(x)u) + {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}q(x,t) \\
+ \;& (p(x) - (\alpha+1)\xi_x)_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}u - u_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}p(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\binom{\alpha+1}{n}p^{(n)}(x)\right.\right. \\
- \;& \left.\left.\binom{\alpha+1}{n+1}\xi^{(n+1)}_{(x)}\right]\right\}{}_{\pm}\partial^{\alpha+1-n}u.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
{}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}(pu) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}p^{(n)}(x)_{\pm}\partial^{\alpha+1-n}u \\
&= p(x)_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}u + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}p^{(n)}(x)_{\pm}\partial^{\alpha+1-n}u.
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

Usando as Eq.(5.29) e Eq.(5.30), temos que as equações governantes são dadas por

$$
\begin{cases}
\tau' = (\alpha+1)\xi' \\
2(\alpha+1)p'(x) - \binom{\alpha+1}{2}\xi'' = 0 \\
q_t = {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}q(x,t).
\end{cases}
\tag{5.31}
$$

Encontramos as seguintes funções

$$\begin{aligned}
p(x) &= c_0,\\
\xi(x) &= c_1 x + c_2,\\
\tau(t) &= (\alpha+1)c_1 t + c_3,\\
\eta &= c_0 u + \tilde{q},
\end{aligned}$$

com $\tilde{q}$ solução da última equação da Eq.(5.31), sendo o gerador infinitesimal dado por

$$X = ((\alpha+1)c_1 t + c_3)\frac{\partial}{\partial t} + (c_1 x + c_2)\frac{\partial}{\partial x} + (c_0 u + \tilde{q})\frac{\partial}{\partial u}$$

em que as simetrias de Lie são

$$X_1 = (\alpha+1)t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t};\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x};\ X_4 = u\frac{\partial}{\partial u} \quad e \quad X_\infty = \tilde{q}\frac{\partial}{\partial u}.$$

Um dos principais resultados são os prologamentos obtidos em termos de somente as variáveis independentes correspondentes, caracterizando um sistema autônomo. Este resultado já é consolidado tanto no caso de ordem inteira (Ibragmov) como também no caso fracionário (Gaziov) para equações de evolução. É importante observamos que simetrias não são recuperados quando fazemos $\alpha \to 1$.

**(2) Caso não linear,** $m > 0$ **e** $m \neq 1$**:** Neste caso, temos a equação não linear dada por

$$u_t = \lambda\ {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}(u^m). \tag{5.32}$$

A metodologia para encontrar as simetrias da equação é usar a mudança das variáveis $v = u^m$ e $k = \dfrac{1}{m}$ na Eq.(5.32), temos

$$kv^{k-1}v_t = \lambda\ {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}v. \tag{5.33}$$

Considerando $\Delta_1 = kv^{k-1}v_t - \lambda\ {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}v$, o cálculo da extensão da Eq.(5.33) é

$$\begin{aligned}
Pr^{(\alpha+1)}X(\Delta_1) &= X\Delta_1 + \eta_{[t]}\frac{\partial}{\partial v_t}\Delta_1 + \lambda\eta_{[\ {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}]}\frac{\partial}{\partial\ {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}v}\Delta_1\\
&= \eta k(k-1)v^{k-2}v_t + \eta_{[t]}kv^{k-1} - \lambda\eta_{[\ {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}]}\\
&= \eta k(k-1)v^{k-2}v_t + (\eta_t - \xi_t v_x + (\eta_v - \tau_t - \xi_v v_x)v_t - \tau_v v_t^2)kv^{k-1}\\
&\quad - ({}_{\pm}D_x^{\alpha+1}(\eta - \xi v_x - \tau v_t) + \tau\,{}_{\pm}D_x^{\alpha+1}v_t + \xi\,{}_{\pm}D_x^{\alpha+1}v)\lambda.
\end{aligned}$$

Novamente, temos $\tau = \tau(t), \xi = \xi(x)$ e $\eta = p(x)v + q(x,t)$, aplicando a simplificação, resulta

$$\begin{aligned}
&k(k-1)\left[p(x)v + q(x,t)\right]v^{k-2}v_t + (p(x)v_t + q_t(x,t) + (p(x) - \tau')v_t)kv^{k-1}\\
&= ({}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}(p(x)v) + {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}q(x,t) + (p(x) - (\alpha+1)\xi_x)\,{}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}v - v\,{}_{\pm}\partial^{\alpha+1}p(x)\\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha+1}{n}p^{(n)}(x) - \binom{\alpha+1}{n+1}\xi(x)^{(n+1)}\right]{}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}v)\lambda.
\end{aligned}$$

Usando também a relação

$$
\begin{aligned}
{}_\pm\partial_x^{\alpha+1}(pv) &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}p^{(n)}(x)_\pm\partial^{\alpha+1-n}v \\
&= p(x)_\pm\partial_x^{\alpha+1}v + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}p^{(n)}(x)_\pm\partial^{\alpha+1-n}v,
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

obtemos as equações governantes

$$
\left\{
\begin{aligned}
(k-1)p(x) - \tau' &= -(\alpha+1)\xi' \\
p'(x)_\pm\partial_x^{\alpha}v &= 0 \\
2(\alpha+1)p'(x) - \binom{\alpha+1}{2}\xi'' &= 0 \\
q(x,t)v^{k-2}v_t &= 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$
\left\{
\begin{aligned}
p(x) &= c_0, \\
\xi(x) &= c_1x + c_2, \\
\tau(t) &= [(k-1)c_0 + (\alpha+1)c_1]t + c_3, \\
\eta &= c_0v.
\end{aligned}
\right.
$$

O gerador infinitesimal é dado por

$$
X = (((k-1)c_0 + (\alpha+1)c_1)\, t + c_3)\frac{d}{dt} + (c_1x + c_2)\frac{d}{dx} + c_0v\frac{d}{dv}
$$

em que é obtida as simetrias são

$$
X_1 = \frac{\partial}{\partial t};\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x}\ X_3 = (k-1)t\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial v} \quad e \quad X_4 = (\alpha+1)t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}.
$$

É importante observar que no caso 2, temos $q = 0$ é consequentemente a simetria $X_\infty$.

### 5.2.2. Simetrias para EMP fracionário espacial

As simetrias para EMP com a derivada fracionária na variável espacial, são obtidas substituindo $v \to u^m$ não satisfaz a condição de invariância para o problema não linear no gerador infinitesimal $X$, obtendo

$$
Y_1 = \frac{\partial}{\partial x}; Y_2 = \frac{\partial}{\partial t}; Y_3 = (k-1)t\frac{\partial}{\partial x} + ku\frac{\partial}{\partial u}; \quad e \quad Y_4 = (\alpha+1)t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x},
$$

*onde* $k = \dfrac{1}{m}$.

### 5.2.3. Solução de similaridade

Tomando a combinação linear

$$\tilde{Y} = (\beta(k-1)+\alpha+1)t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + \beta k u\frac{\partial}{\partial u},$$

temos a equação característica, dada por

$$\frac{dt}{(\beta(k-1)+1+\alpha)t} = \frac{dx}{x} = \frac{du}{\beta k u}.$$

Então, obtemos

$$xt^{-\frac{1}{\beta(k-1)+1+\alpha}} = k_1 \tag{5.35}$$

e

$$ut^{\frac{\beta k}{\beta(k-1)+1+\alpha}} = k_2. \tag{5.36}$$

Usando as Eq.(5.35) e Eq.(5.36), temos a solução de similaridade

$$u(x,t) = t^{\frac{\beta k}{\beta(k-1)+1+\alpha}}G(z)$$

*com* $z = xt^{-\frac{1}{\beta(k-1)+1+\alpha}}$. Escolhendo $\beta = {}^{-}\beta_1 m$, temos a nova relação

$$u(x,t) = t^{-\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}G(z) \tag{5.37}$$

com $z = xt^{-\frac{1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}$ e $\beta_1 \in \mathbb{R}$. Substituindo a Eq.(5.37) na EMP espaço-fracionária dada para a Eq.(5.32), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}G(z)\right) = {}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}\left(t^{-\frac{\beta_1 m}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}G^m(z)\right). \tag{5.38}$$

Depois de alguns cálculos, obtemos as seguintes relações

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(t^{-\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}G(z)\right)\\ &= -t^{-\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+\alpha+1}-1}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+\alpha+1} + \frac{1}{\beta_1(m-1)+\alpha+1}z\frac{d}{dz}\right)G(z)\end{aligned} \tag{5.39}$$

e

$$_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}\left(t^{-\frac{\beta_1 m}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}G^m(z)\right) = t^{-\frac{\alpha+1+\beta_1 m}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}{}_{\pm}\partial_x^{\alpha+1}G^m(z). \tag{5.40}$$

Assim, substituindo a Eq.(5.39) e a Eq.(5.40) na Eq.(5.38), obtemos a equação de similaridade

$$-\left(\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha} + \left(\frac{1}{\beta_1(m-1)+\alpha+1}\right)z\frac{d}{dz}\right)G(z) = {}_{\pm}\partial_z^{\alpha+1}G^m(z). \tag{5.41}$$

Se $\beta_1 = 1$ a Eq.(5.41) é reduzido na expressão

$$-\frac{d}{dz}(zG(z)) = \lambda_{\pm}\partial_z^{\alpha+1}G^m(z). \tag{5.42}$$

### 5.2.4. Solução de similaridade para EMP fracionária espacial

Definimos o EMP fracionário espacial na forma

$$u_t = \partial_x^{\alpha+1} u^m \tag{5.43}$$

com $0 < \alpha \leqslant 1$ e a derivada fracionária de Riesz $\partial_x^{\alpha+1}$ introduzida para

$$\partial_x^{\alpha+1} = -\frac{{}_{+}\partial_x^{\alpha+1} + {}_{-}\partial_x^{\alpha+1}}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2}+1)}.$$

A seguir, mostramos as soluções de similaridade dadas pela Eq.(5.37). Para simplificação, suponhamos o caso $\beta_1 = 1$ e $\lambda = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{(\alpha+1)\pi}{2}\right)}$. Neste caso, usando a Eq.(5.42) temos

$$-\frac{d}{dz}(zG(z)) = \lambda \; {}_{+}\partial_z^{\alpha+1} G^m(z) \tag{5.44}$$

e

$$-\frac{d}{dz}(zG(z)) = \lambda \; {}_{-}\partial_z^{\alpha+1} G^m(z). \tag{5.45}$$

Somando essas equações, segue que

$$\frac{d}{dz}\left(zG(z)\right) = \partial_z^{\alpha+1} G^m(z).$$

Portanto, as simetrias e as soluções de similaridade encontradas para a EMP fracionária espacial em termos da derivada fracionária de Weyl também são invariantes quando a EMP fracionária espacial em termos da derivada fracionária de Riesz. A solução de similaridade está na forma $u(x,t) = t^{-\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}} G(z)$.

**Teorema 5.3.** *A transformação infinitesimal para a derivada fracionária $\psi$-Hilfer, induzida pela transformação do grupo de Lie é dada por*

$${}^{H}_{\overline{a}}\partial^{\alpha,\beta;\psi\overline{x}} \; \overline{u}(\overline{x},\overline{t}) = {}^{H}_{a}\partial^{\alpha,\beta;\psi(x)} \; u(x,t) + \epsilon\eta_H^{\alpha,\beta;\psi(x)} + O(\epsilon^2) \tag{5.46}$$

*onde $\eta_H^{\alpha,\beta;\psi(x)}$ é a extensão infinitesimal da derivada fracionária $\psi$-Hilfer*

$$\begin{aligned} \eta_H^{\alpha,\beta;\psi(x)} = {} & {}^{H}_{a}\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi(x)}(\eta - \xi u_x + \tau u_t) + \tau\, {}^{H}_{a}D^{\alpha,\beta;\psi(x)} u_t + \xi D_x \, {}^{H}_{a}D^{\alpha,\beta;\psi(x)} u \\ & - \xi[a]\psi'(a)(D_x^{\psi(x)}\, {}^{H}_{a}D^{\alpha,\beta;\psi(x)} - {}^{H}_{a}D^{\alpha,\beta;\psi(x)} D_x^{1;\psi(x)})u. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Note que

$${}^{H}_{\overline{a}}\partial^{\alpha,\beta;\psi\overline{x}} \overline{u}(\overline{x},\overline{t}) = Q_\psi \circ {}^{H}\partial_{\overline{x}}^{\alpha,\beta;\psi\overline{a}} \circ Q_\psi^{-1} u(\overline{x},\overline{t}).$$

Usando a notação

$$\overline{g}(\overline{x},\overline{t}) = Q_\psi^{-1}\overline{u}(\overline{x},\overline{t})$$

temos

$$
\begin{aligned}
{}^{H}\partial_{\overline{x}}^{\alpha,\beta;\psi(\overline{a})}\overline{g} &= {}^{H}\partial_{\overline{x}}^{\alpha,\beta;\psi(a)}g(x,t) + \epsilon\eta_{H}^{\alpha,\beta} \\
\eta_{H}^{\alpha,\beta} &= {}^{H}\mathbb{D}_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)}(\eta - \xi g_x - \tau g_t) + \tau\, {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} g_t \\
&+ \xi D_x\, {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} g - \xi[a](D_x\, {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} D_x) g.
\end{aligned} \tag{5.47}
$$

Aplicando a composição $Q_\psi$ na Eq.(5.47), resulta

$$
Q_\psi \circ {}^{H}\partial_{\overline{x}}^{\alpha,\beta;\psi(\overline{a})}\overline{g}(\overline{x},\overline{t}) = Q_\psi \circ {}^{H}\partial_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)}g(x,t) + \epsilon Q_\psi \circ \eta_{H}^{\alpha,\beta}
$$

e

$$
\begin{aligned}
Q_\psi \circ \eta_{H}^{\alpha,\beta} &= Q_\psi \circ {}^{H}\mathbb{D}_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)}(\eta - \xi g_x - \tau g_t) + Q_\psi \circ \left(\tau\, {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)}\right) \\
&+ Q_\psi \circ \left(\xi D_x\, {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)}\right) g - Q_\psi \circ \xi[a]\left(D_x\, {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} - {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta} D_x\right) \\
&= Q_\psi \circ {}^{H}\mathbb{D}_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} \circ Q_\psi^{-1}(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \tau Q_\psi \circ {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} Q_\psi^{-1} u_t \\
&+ (\xi[x]\psi'(a))(D_{x}^{1;\psi(x)} D_\psi \circ D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} \circ Q_\psi^{-1} u(x,t)) \\
&- \xi[a]\psi'(a)(D_{x}^{1;\psi(x)}\ {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta;\psi(a)} \circ Q_\psi^{-1} - {}^{H}D_{x}^{\alpha,\beta} D_{x}^{1;\psi(x)}) u(x,t) \\
&= {}^{H}\mathbb{D}_{x}^{\alpha,\beta;\psi(x)}(\eta - \xi u_x - \tau u_t) + \tau\, {}_{x}^{H}D^{\alpha,\beta;\psi(x)} ut \\
&+ \xi[x]\psi'(x)(D_{x}^{1;\psi(x)}\,{}^{H}D_{a}^{\alpha,\beta;\psi(x)} - {}^{H}D_{a}^{\alpha,\beta;\psi(x)} D^{1;\psi(x)}) u(x,t).
\end{aligned}
$$

□

**Observação 5.1.** *Este teorema estabelece uma conexão entre equações diferenciais fracionárias em termos das derivadas fracionárias clássicas e as mesmas equações descritas para operadores fracionários $\psi$ como segue.*

**Teorema 5.4.** *Considere as equações fracionárias*

$$
F(t;\psi(x), u(t;\psi(x)), \frac{\partial}{\partial t}u(t;\psi(t)), \partial^{\alpha;\psi(x)}u(x,t)) = 0
$$

*e*

$$
G(t,x,u(t,x), \frac{\partial}{\partial t}u(t,x), \partial_{x}^{\alpha}Q_{\psi^{-1}}u(t,x)) = 0
$$

*onde $F = Q_\psi \circ G$ e $\partial^{\alpha;\psi(x)}(\cdot)$, $\partial_{x}^{\alpha}(\cdot)$ são $\psi$-Derivadas fracionárias de Riesz e Riesz, respectivamente. Sendo $G$ é invariante em relação à transformação do grupo de Lie* Eq.(5.48)*, então $F$ também é invariante em relação à transformação do grupo de Lie* Eq.(5.49)

$$
X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.48}
$$

*e*

$$
Y = \tilde{\xi}\frac{\partial}{\partial x} + \tilde{\tau}\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\eta}\frac{\partial}{\partial u} \tag{5.49}
$$

*com $\tilde{\xi} = \psi'\xi$, $\tilde{\tau} = Q_\psi \circ \tau$ e $\tilde{\eta} = Q_\psi \circ \eta$.*

*Demonstração.* Supondo $G$ invariante em relação à simetria Eq.(5.48), então

$$G(\overline{x}, \overline{u}(\overline{t}, \overline{x}), \frac{\partial}{\partial t} u(\overline{t}, \overline{x}), \partial_{\overline{x}}^{\alpha} Q_{\psi^{-1}} \overline{u}(\overline{t}, \overline{x})) = 0.$$

Aplicando a mudança da variável, $x \to \psi(x)$ via composição

$$Q_{\psi} \circ G(\overline{x}, \overline{t}, \overline{u}(\overline{t}, \overline{x}), \frac{\partial}{\partial t} \overline{u}(\overline{t}, \overline{x}), \partial_{\overline{x}}^{\alpha} Q_{\psi^{-1}} \overline{u}(\overline{t}, \overline{x})) = 0,$$

e

$$F(\psi(\overline{x}), \overline{t}, \overline{u}(\psi(\overline{x}), \overline{t}), \frac{\partial}{\partial t} \overline{u}(\overline{t}, \psi(\overline{x}), \partial^{\alpha;\psi(\overline{x})} \overline{u}(\overline{t}, \overline{x}))) = 0.$$

□

Este teorema possibilita o cálculo das simetrias e soluções invariantes para EMP espaço-fracionária via $\psi(x)$-Riesz, aplicando a composição $Q_{\psi}$ nas simetrias e soluções invariantes em EMP fracionária clássica em termos da derivada de Riesz, como apresentamos a seguir.

**Teorema 5.5.** *Dado a EMP fracionária espacial em termos da derivada fracionária $\psi(x)$-Riesz,*

$$\partial_t u(x,t) = \partial^{1+\alpha;\psi(x)} u^m(x,t), m > 0. \tag{5.50}$$

*com $\partial^{1+\alpha;\psi(x)}$ é $\psi(x)$-Riesz derivada fracionária, $0 < \alpha \leqslant 1$. A solução de similaridade da* Eq.(5.50) *é dada por*

$$u(x,t) = t^{-\frac{\beta_1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}} G(\psi(x) t^{-\frac{1}{\beta_1(m-1)+1+\alpha}}), \tag{5.51}$$

*para o caso $\beta_1 = 1$* Eq.(5.51) *reduz* Eq.(5.20) *na seguinte equação de similaridade*

$$\frac{d}{dz}(zG(z)) = \partial_z^{\alpha+1;\psi(x)} G^m(z).$$

# 6 Considerações Finais

Nessa primeira etapa do trabalho, apresentamos um estudo detalhado sobre espaços de funções e propriedades de suma importância utilizadas no decorrer do trabalho. Além do anterior, uma abordagem sobre equação de difusão e suas aplicações, destacaram os inúmeros caminhos que proporciona tal equação. Por outro lado, uma vez que o principal objetivo deste trabalho, é utilizar derivadas fracionárias e equações de difusão, é necessário e suficiente apresentar uma breve introdução de definições de integrais e derivadas fracionárias e resultados oriundos de tais operadores, em particular, envolvendo questões sobre simetrias de Lie. Nesse sentido, apresentamos uma formula explícita para a extensão infinitesimal para as derivadas fracionárias $\psi$-Hilfer na variável espacial, na qual obtemos em casos particulares as extensões infinitesimais para derivadas de Caputo e Weyl fracionárias na variável espacial. Encontramos as simetrias de Lie e as soluções de similaridade para a equação da difusão em meio poroso fracionária em termos da derivada de Riesz, considerando a derivada de Weyl e aplicamos a relação entre elas para mostrar que as simetrias são equivalentes.

Por outro lado, a fim de validar as ferramentas apresentadas e discutidas anteriormente, aplicamos o resultado do cálculo de simetrias ao PME espaço-fracionário, para obter uma solução invariante semelhante ao teorema para o caso unidimensional. Mostramos que estes resultados podem ser estendidos ao caso da derivada fracionária em termos da função $\psi$. Desta forma, podemos obter as simetrias da PME $\psi$-espacial-fracionária calculando a PME espacial-fracionária.

Como principal contribuição deste trabalho apresentamos novos teoremas a literatura onde mostramos que as simetrias e as soluções de similaridade encontradas para a EMP fracionária espacial em termos da derivada fracionária de Weyl também são invariantes quando a EMP fracionária espacial em termos da derivada fracionária de Riesz. Alem disso, provamos a existencia de uma conexão entre equações diferenciais fraci- onárias em termos das derivadas fracionárias clássicas para operadores fracionários $\psi$. E por fim, calculamos as simetrias e soluções invariantes para EMP espaço-fracionária via $\psi$(x)-Riesz, onde realizamos a aplicação na composição $Q_\psi$ nas simetrias e so- luções invariantes em EMP fracionária clássica em termos da derivada de Riesz.

# Referências


*ALMEIDA, R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Elsevier, v. 44, p. 460–481, 2017. 50, 51*

*ATANACKOVIC, T. M. et al.* Fractional calculus with applications in mechanics: wave propagation, impact and variational principles*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2014. 52*

*BAKKYARAJ, T. Lie symmetry analysis of system of nonlinear fractional partial differential equations with Caputo fractional derivative.* The European Phys. J. Plus*, Springer, v. 135, n. 1, p. 126, 2020. 14*

*BEAR, J.; CORAPCIOGLU, M. Y.* Fundamentals of transport phenomena in porous media*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 82. 39, 40*

*BELEVTSOV, N. S.; LUKASHCHUK, S. Y. Lie group analysis of 2-dimensional space-fractional model for flow in porous media.* Math. Meth. Appl. Sci.*, Wiley Online Library, v. 41, n. 18, p. 9123–9133, 2018. 54*

*BELEVTSOV, N. S.; LUKASHCHUK, S. Y. Symmetry group classification and conservation laws of the nonlinear fractional diffusion equation with the Riesz potential.* Symmetry*, MDPI, v. 12, n. 1, p. 178, 2020. 54*

*BILER, P.; IMBERT, C.; KARCH, G. The nonlocal porous medium equation: Barenblatt profiles and other weak solutions.* Arch. Rational Mech. Anal.*, Springer, v. 215, p. 497–529, 2015. 53*

*BLUMAN, G. W.* Applications of symmetry methods to partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2010. 28, 29, 30, 31*

*BUCKWAR, E.; LUCHKO, Y. Invariance of a partial differential equation of fractional order under the Lie group of scaling transformations.* J. Math. Anal. Appl.*, Elsevier, v. 227, n. 1, p. 81–97, 1998. 13*

*CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; OLIVEIRA, E. Capelas de. Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation.* J. Math. Phys.*, American Institute of Physics, v. 49, n. 3, p. 033505, 2008. 43*

*CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. Capelas de. Cálculo fracionário.* Livraria da Fısica, Sao Paulo*, 2015. 51, 52*

*CARDOSO, L. C. et al. Global stability analysis of a fractional differential system in hepatitis b.* Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 143, p. 110619, 2021. 55*

*DUFRESNE, J.-L. Jean-Baptiste Joseph Fourier et la découverte de l'effet de serre.* La Météorologie*, v. 53, p. 42–46, 2006. 32*

*FERNANDEZ, A.; RESTREPO, J. E.; DJIDA, J.-D. On the fractional Laplacian of a function with respect to another function. 2021. 18, 24*

*FERNANDEZ, A.; RESTREPO, J. E.; DJIDA, J.-D. On the fractional Laplacian of a function with respect to another function. 2021.* 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28

*GAZIZOV, R. K.; KASATKIN, A. A.; LUKASHCHUK, S. Y. Continuous transformation groups of fractional differential equations.* Vestnik Usatu, *v. 9, n. 3, p. 21, 2007.* 14

*GAZIZOV, R. K.; KASATKIN, A. A.; LUKASHCHUK, S. Y. Symmetry properties of fractional diffusion equations.* Phys. Scripta, *IOP Publishing, v. 2009, n. T136, p. 014016, 2009.* 14, 54

*GAZIZOV, R. K.; KASATKIN, A. A.; LUKASHCHUK, S. Y. Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs.* Frac. Diff. Equ., *Walter de Gruyter Berlin–Munich–Boston, v. 2, p. 353–382, 2019.* 14

*GONZÁLEZ, R. S.* Difusão anômala: Transição entre os regimes localizado e estendido na caminhada do turista unidimensional. *Tese (Doutorado) — Universidade de Sao Paulo, 2006.* 33, 35

*HASSANI, H. et al. Optimal solution of a fractional epidemic model of COVID-19.* Nonlinear Studies, *v. 31, n. 1, 2024.* 54, 55

*HASSANI, H. et al. Optimal solution of a fractional HIV/AIDS epidemic mathematical model.* J. Comput. Biol., *Mary Ann Liebert, Inc., publishers 140 Huguenot Street, 3rd Floor New . . . , v. 29, n. 3, p. 276–291, 2022.* 55

*HUANG, Y. Explicit Barenblatt profiles for fractional porous medium equations.* Bull. London Math. Soc., *Oxford University Press, v. 46, n. 4, p. 857–869, 2014.* 13, 53, 55, 56, 57, 58

*JARAD, F.; ABDELJAWAD, T. Generalized fractional derivatives and Laplace transform. 2020.* 19, 20

*KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. *[S.l.]: elsevier, 2006. v. 204.* 17, 44, 45

*LÓPEZ, B. et al. Time-fractional porous medium equation: Erdélyi–Kober integral equations, compactly supported solutions, and numerical methods.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., *Elsevier, v. 128, p. 107692, 2024.* 54

*MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., *Elsevier, v. 16, n. 3, p. 1140–1153, 2011.* 43

*MARTINEZ, V. M. et al. A fractional calculus model for HIV dynamics: real data, parameter estimation and computational strategies.* Chaos, Solitons & Fractals, *Elsevier, v. 152, p. 111398, 2021.* 55

*NASS, A. M. Lie symmetry analysis and exact solutions of fractional ordinary differential equations with neutral delay.* Appl. Math. Comput., *Elsevier, v. 347, p. 370–380, 2019.* 54, 55

*NIKAN, O. et al. Numerical approximation of the time fractional cable model arising in neuronal dynamics.* Engine. Comput., *Springer, v. 38, n. 1, p. 155–173, 2022.* 55

*PEDRON, I. T.* Estudos em difusao anômala. *[S.l.]: UEM/UEL, Marigá-PR, 2003.* 12

*PEREIRA, M. R. A. Métodos numéricos e analítico para o problema de difusão não-linear fracionário associados aos fenômenos de convecção e reação.* Disertação de Mestrado, CTT-UEMA, SAO LUIS-MA, *2018.* 12, 32, 33, 35, 43, 52, 55, 57

*PULIDO, M. A. P.; SOUSA, J. V. C.; OLIVEIRA, E. Capelas de. New discretization of $\psi$-Caputo fractional derivative and applications.* Math. Comput. Simul., *Elsevier, 2024.* 54, 55

*SOARES, J. C. A.* Simetrias de Lie da equação de Burgers generalizada. *Tese (Doutorado) — [sn], 2011.* 54, 55

*SOARES, J. C. A.; COSTA, F. S.; SOUSA, J. V. C. Lie symmetry analysis for fractional evolution equation with $\zeta$-Riemann–Liouville derivative.* Comput. Appl. Math., *Springer, v. 43, n. 4, p. 159, 2024.* 14, 15

*SOARES, J. C. A.; COSTA, F. S.; SOUSA, J. V. C. Lie symmetry analysis for fractional evolution equation with $\zeta$-Riemann–Liouville derivative.* Comput. Appl. Math., *Springer, v. 43, n. 4, p. 159, 2024.* 54, 55

*SOARES, J. C. A.; COSTA, F. S.; SOUSA, J. V. C. Lie symmetry analysis for fractional evolution equation with $\zeta$-Riemann–Liouville derivative.* Comput. Appl. Math., *Springer, v. 43, n. 4, p. 159, 2024.* 54, 55

*SOUSA, J. Vanterler da C.* Equação de difusão tempo-fracionária (Taxa de Sedimentação de Eritrócitos). *Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Unicamp, Campinas, 2018.* 18, 44, 45, 46, 47

*SOUSA, J. Vanterler da C. et al. Multiplicity of solutions for fractional $\kappa(x)$-Laplacian equations.* J. Appl. Anal. Comput., *J. Appl. Anal. Comput., v. 14, n. 3, p. 1543–1578, 2024.* 54, 55

*SOUSA, J. Vanterler da C.; OLIVEIRA, E. Capelas de. On the $\psi$-Hilfer fractional derivative.* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., *Elsevier, v. 60, p. 72–91, 2018.* 13, 18, 45, 47, 48, 49, 50

*SOUSA, J. Vanterler da C. et al. Validation of a fractional model for erythrocyte sedimentation rate.* Comput. Appl. Math., *Springer, v. 37, p. 6903–6919, 2018.* 54, 55

*TATEISHI, A. A.* Desenvolvimento do conceito de difusão: de Fourier ao Modelo de Pente. *Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2010.* 12, 32, 33, 34, 35

*TEODORO, G. S. Cálculo fracionário e as funções de Mittag-Leffler.* Disertação de Mestrado, Imecc-Unicamp, Campinas, *2014.* 46

*VÁZQUEZ, J. L.* The porous medium equation: mathematical theory. *[S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2007.* 13, 36, 37, 38, 39, 53

*VELLASCO-GOMES, A.; CAMARGO, R. F.; ALFONSO, A. B. Energy bands and wannier functions of the fractional Kronig-penney model.* Appl. Math. Comput., *Elsevier, v. 380, p. 125266, 2020.* 55

*VIEIRA, D. S.* Equações de difusão e o cálculo fracionário. *Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2015.* 32, 33

*VULPIANI, A. Lewis fry Richardson: scientist, visionary and pacifist.* Lettera Matematica*, Springer, v. 2, p. 121–128, 2014.* 34

*YANG, Y.; WANG, L. Lie symmetry analysis, conservation laws and separation variable type solutions of the time-fractional porous medium equation.* Waves in Random and Complex Media*, Taylor & Francis, v. 32, n. 2, p. 980–999, 2022.* 54

*ZHANG, Z.-Y.; ZHENG, J. Symmetry structure of multi-dimensional time-fractional partial differential equations.* Nonlinearity*, IOP Publishing, v. 34, n. 8, p. 5186, 2021.* 14