

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

CLAUDIONOR SILVA JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA O DIMENSIONAMENTO E
DETALHAMENTO DE LAJES MACIÇAS RETANGULARES DE CONCRETO
ARMADO**

São Luís

2016

CLAUDIONOR SILVA JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA O DIMENSIONAMENTO E
DETALHAMENTO DE LAJES MACIÇAS RETANGULARES DE CONCRETO
ARMADO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia Civil
da Universidade Estadual do Maranhão
como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Msc. Clodoaldo Cesar
Malheiros Ferreira

São Luís

2016

Silva Júnior, Claudionor.

Desenvolvimento de um software para o dimensionamento e detalhamento de lajes maciças retangulares de concreto armado / Claudionor Silva Júnior. – São Luís, 2016.

114 f.

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Maranhão, 2016.

Orientador: Prof. Me. Clodoaldo César Malheiros Ferreira.

1. Lajes maciças. 2. Automatização. 3. Teoria das charneiras plásticas
I. Título.

CDU 624.073:004.4

CLAUDIONOR SILVA JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UM SOFTWARE PARA O DIMENSIONAMENTO E
DETALHAMENTO DE LAJES MACIÇAS RETANGULARES DE CONCRETO
ARMADO**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia Civil
da Universidade Estadual do Maranhão
como requisito parcial para a obtenção do
título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovado em: 13 /12/2016

O candidato foi arguido pela Banca Examinadora composta pelos professores
abaixo listados. Após deliberação, a Banca Examinadora considerou o trabalho
aprovado.

Prof. Msc. Clodoaldo Cesar Malheiros Ferreira
Prof. Orientador
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dr. Eduardo Aurélio Barros Aguiar
Membro titular
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Msc. Ivar Ribeiro Hortegal
Membro titular
Universidade Estadual do Maranhão

Dedico este trabalho a todos (família, amigos, colegas e professores) que me ajudaram a chegar até esse momento da minha vida. Nunca chegaria a este ponto sem a colaboração de várias pessoas.

AGRADECIMENTOS

Certamente estes parágrafos não irão atender a todas as pessoas que fizeram parte dessa importante fase de minha vida. Portanto, desde já peço desculpas àquelas que não estão presentes entre essas palavras, mas elas podem estar certas de que fazem parte do meu pensamento e de minha gratidão.

Agradeço ao meu orientador, o professor Clodoaldo, por aceitar orientar um trabalho do meu particular interesse e também por todos os ensinamentos transmitidos ao longo desses últimos dois anos. Sou muito grato!

Agradeço aos meus amigos de sempre, Ederson, Tiago e Arthur, que estiveram mais presentes na minha fase final do curso. Agradeço também aos meus amigos hoje formados, mas que entraram junto comigo na Engenharia Civil. A saber, Thasso Colins Gonçalves, Denilton de Jesus Colins Sousa e Thales Eugenio Nunes Coelho. Também tenho outros amigos que fiz na longa jornada de curso, mas esses foram os mais próximos.

Agradeço aos meus pais, que me trouxeram à existência e me apoiaram sempre e de forma incondicional, mesmo nos momentos mais difíceis da vida. Aos meus irmãos que também sempre me ajudaram e me compreenderam (o que não é nada fácil).

Agradeço a Deus por me dar o dom da vida e por dar sentido à minha existência. A Ele seja dada toda a glória e honra, para sempre. E sempre.

Agradeço às pessoas que me admiram, mas que nunca foram próximas de mim, é legal saber que alguém valoriza o que eu faço, faz bem à autoestima.

Agradeço à Letícia Silva Mota, por toda a inspiração que me deu ao longo dos meses de elaboração deste trabalho. Nada como estar apaixonado por alguém tão especial e por quem tenho e sempre terei na mais alta consideração para me motivar a seguir em frente.

Agradeço a todos os que alguma vez lerem ou estudarem esse trabalho, minha maior motivação foi fazer algo que servisse aos atuais e futuros estudantes do curso de Engenharia Civil.

*Não quero pregar a doutrina do ócio
ignóbil, e sim a doutrina da vida árdua, a
vida trabalhosa e esforçada, vida de
labuta e labuta; quero pregar a mais
elevada forma de êxito, que visita não o
indivíduo que apenas almeja uma
tranquilidade fácil, mas o que não se furta
ao perigo, não teme privações nem
sacrifícios, aquele, enfim, que consegue,
a despeito de tudo, a vitória final.*

Franklin Delano Roosevelt,
32º presidente dos Estados Unidos.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal a elaboração de um programa que efetue a determinação dos esforços em lajes maciças de geometria retangular ou quadrada e também o dimensionamento e detalhamento das mesmas. O uso da linguagem Visual Basic permite a elaboração de um software em ambiente Windows com interface gráfica bastante prática e simples de aprender. Paralelamente à elaboração do software apresentado, foi realizada uma revisão bibliográfica para encontrar meios para automatizar os cálculos necessários e embasar teoricamente toda a solução computacional proposta. As lajes, segundo a ABNT NBR 6118:2014, devem ser verificadas no estado limite último e no estado limite de serviço. Para a verificação do estado limite último, foi usada a Teoria das Charneiras Plásticas para lajes armadas em duas direções. Para as lajes armadas em uma direção, o cálculo é feito por analogia a uma viga, supondo uma faixa de largura unitária. Exemplos de dimensionamento foram elaborados para validar o software criado. Tais exemplos também foram resolvidos pelo cálculo manual e estão expostos no presente trabalho.

Palavras-chave: Lajes maciças. Automatização. Teoria das Charneiras Plásticas. Concreto Armado.

ABSTRACT

This work has as main objective the development of a program to make the determination of efforts on massive slabs of rectangular or square geometry and also the dimensioning and detailing. The use of Visual Basic language enables the development of a software in Windows environment with enough practice and simple graphical interface to learn. Parallel to the development of the software presented, was conducted a literature review to find ways to automate the necessary calculations and support theoretically the whole computational solution proposal. Slabs, according to ABNT NBR 6118:2014, should be checked in the State and limit the service limit State. For the verification of the limit State last, was used the theory of Plastic Hinges for armed slabs in two directions. For armed slabs in one direction, the calculation is made by analogy to a beam, assuming a unitary width range. Sizing examples were designed to validate the software. Such examples have also been resolved by manual calculation and are exposed in this work.

Keywords: Massive slabs. Automation. Theory of Plastic Hinges. Reinforced Concrete.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Dimensões usadas no cálculo dos vãos efetivos	19
Figura 2 - Vãos efetivos L_x (menor vão) e L_y (maior vão)	20
Figura 3 - Laje com borda acompanhada por outra laje parcialmente	21
Figura 4 - Parede paralela à direção da laje armada em uma direção	25
Figura 5 - Parede perpendicular à direção principal da laje	26
Figura 6 - Altura total e altura útil de laje maciça.....	29
Figura 7 - Reações em lajes com bordas engastadas e apoiadas	30
Figura 8 - Fases de comportamento de lajes subarmadas.....	42
Figura 9 - Momentos de engastamento	46
Figura 10 - Vãos reduzidos	47
Figura 11 - Comprimento de ancoragem necessário nos apoios	55
Figura 12 - Comprimento mínimo das barras da armadura positiva com as quatro bordas engastadas.....	59
Figura 13 - Alternativas para as armaduras negativas	60
Figura 14 - Janela do software: Sobre o programa	62
Figura 15 - Fluxograma do programa desenvolvido	63
Figura 16 - Janela de Opções	64
Figura 17 - Dados de Entrada: Tela Inicial	65
Figura 18 - Aviso para laje com espessura abaixo do permitido	66
Figura 19 - Janela de Carregamentos	67
Figura 20 - Janela Largura das vigas	68
Figura 21 - Aba Esforços.....	69
Figura 22 - Aba Compatibilização / Armadura negativa	70
Figura 23 - Aba Armadura positiva.....	71
Figura 24 - Aba Detalhamento	72
Figura 25 - Relatório gerado pelo programa.....	73
Figura 26 - Exemplo 1: Laje armada em uma direção.....	75
Figura 27 - Exemplo 1: Detalhamento	75
Figura 28 - Exemplo 1: Relatório.....	76
Figura 29 - Exemplo 2: Laje isótropa.....	77
Figura 30 - Exemplo 2: Detalhamento	77
Figura 31 - Exemplo 2: Relatório.....	78
Figura 32 - Exemplo 3: Laje ortótropa	79
Figura 33 - Exemplo 3: Detalhamento	79
Figura 34 - Exemplo 3: Relatório.....	80
Figura 35 - Exemplo 1: Reações de apoio	88
Figura 36 - Exemplo 2: Reações de apoio	93
Figura 37 - Exemplo 3: Reações de apoio	100
Figura 38 - Instalação do programa: Pré-requisito	107

Figura 39 - Instalação do programa: Início	108
Figura 40 - Instalação do programa: Continuação	108
Figura 41 - Instalação do programa: Final	109

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Classes de agressividade ambiental	27
Quadro 2 - Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para $\Delta c = 10 \text{ mm}$	28
Quadro 3 - Valores de κ para lajes armadas em duas direções	36
Quadro 4 - Valores de κ para lajes armadas em uma direção	37
Quadro 5 - Momentos em laje armada em uma direção	40
Quadro 6 - Valores mínimos para as armaduras	57
Quadro 7 - Taxas mínimas ($\rho_{\text{mín}}$ - %) da armadura de flexão para lajes	57
Quadro 8 - Valores de α para o cálculo do momento de serviço na verificação da flecha	111
Quadro 9 - Área da seção de armadura por metro de largura (cm^2/m)	112
Quadro 10 - Comprimento de ancoragem básico com e sem gancho	113
Quadro 11 - Massa nominal para cada bitola de aço disponível no Flash Lajes	114

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
2 DIRETRIZES DA PESQUISA.....	15
2.1 QUESTÃO DE PESQUISA	15
2.2 OBJETIVOS.....	15
2.2.1 Objetivo Geral	15
2.2.2 Objetivo Específico	15
2.3 JUSTIFICATIVA.....	16
2.4 DELIMITAÇÃO.....	17
2.5 METODOLOGIA	17
3 LAJE MACIÇA	18
3.1 VÃO LIVRE E VÃO EFETIVO.....	18
3.2 CLASSIFICAÇÃO QUANTO À DIREÇÃO	19
3.3 VINCULAÇÃO NAS BORDAS	20
3.4 AÇÕES A CONSIDERAR	22
3.4.1 Cargas das Paredes nas Lajes Armadas em Duas Direções	23
3.4.2 Cargas das Paredes nas Lajes Armadas em Uma Direção	24
3.5 ESPESSURA MÍNIMA	26
3.6 COBRIMENTOS MÍNIMOS.....	27
3.7 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA ALTURA ÚTIL E DA ESPESSURA.....	29
3.8 REAÇÕES DE APOIO	30
3.9 FLECHAS	32
3.9.1 Flechas Máximas Admitidas	37
4 DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES SOLICITANTES.....	39
4.1 LAJE ARMADA EM UMA DIREÇÃO.....	39
4.2 LAJE ARMADA EM DUAS DIREÇÕES: TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS.....	40
4.2.1 Fases de Comportamento.....	41
4.2.2 Hipóteses de Cálculo	43
4.2.3 Configuração das Charneiras	43
4.2.4 Processos de Cálculo	44
4.2.4.1 Processo do Equilíbrio	44
4.2.4.2 Processo da Energia.....	44
4.2.5 Fórmulas para o Cálculo de Lajes Retangulares	45
4.2.5.1 Lajes isótropas.....	47
4.2.5.2 Lajes ortótropas	48
4.3 MOMENTOS VOLVENTES	49
4.4 COMPATIBILIZAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES	49
5 DIMENSIONAMENTO	51
5.1 FLEXÃO.....	51

5.2 FORÇA CORTANTE.....	53
5.2.1 Lajes sem Armadura para Força Cortante	53
5.2.2 Lajes com Armadura para Força Cortante	55
6 DETALHAMENTO DAS ARMADURAS	56
6.1 ARMADURAS LONGITUDINAIS MÁXIMAS E MÍNIMAS	56
6.2 DIÂMETRO MÁXIMO.....	57
6.3 ESPAÇAMENTO MÁXIMO E MÍNIMO	58
6.4 COMPRIMENTO DAS ARMADURAS POSITIVAS.....	58
6.5 COMPRIMENTO DAS ARMADURAS NEGATIVAS	59
7 PROGRAMA ELABORADO PARA O PROJETO DE LAJES MACIÇAS	62
7.1 ENTRADA DE DADOS	65
7.2 CÁLCULO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES.....	68
7.3 DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS	70
7.4 DETALHAMENTO.....	72
7.5 RELATÓRIO	73
7.6 EXEMPLOS	74
7.6.1 Exemplo 1 (Laje armada em uma direção)	74
7.6.2 Exemplo 2 (Laje isótropa)	76
7.6.3 Exemplo 3 (Laje ortótropa).....	79
8 CONCLUSÃO.....	81
8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	82
REFERÊNCIAS.....	83
APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS EXEMPLOS 1, 2 E 3 ATRAVÉS DO CÁLCULO MANUAL.....	86
APÊNDICE B – INSTALAÇÃO DO FLASH LAJES	107
ANEXO A – VALORES DE ALFA	111
ANEXO B – VALORES PARA O DETALHAMENTO DAS ARMADURAS.....	112
ANEXO C – VALORES PARA LB.....	113
ANEXO D – VALORES PARA MASSA NOMINAL DAS BITOLAS DE AÇO	114

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, ocorreu uma verdadeira revolução na área da informática. Novas e diferentes tecnologias são introduzidas a cada dia de uma forma avassaladora. O acesso às informações globalizadas por meio da internet, a comunicação por meio de e-mails, a produção de processadores cada vez mais velozes, o desenvolvimento de sistemas computacionais cada vez mais robustos, são apenas alguns exemplos dessa grande evolução.

Esse grande avanço teve um papel significativo na Engenharia de Estruturas, influenciando de forma direta e significativa como os projetos estruturais de edifícios de concreto são elaborados.

Kimura (2007, p.24) relata que:

Há décadas, as réguas de cálculo (que hoje mais parecem objetos pré-históricos perante as máquinas atuais), os computadores que ocupavam uma sala inteira e as calculadoras programáveis auxiliaram, e muito, os Engenheiros a automatizar simples contas e tarefas isoladas menos complexas. Nessa época, os cálculos levavam dias para serem processados, havia uma enorme limitação de memória e somente modelos mais simples podiam ser analisados.

Ao permitir cálculos cada vez mais complexos em tempo cada vez mais reduzido, o computador tem, muitas vezes, o seu papel confundido na Engenharia de Estruturas. A informática veio para aperfeiçoar a Engenharia de Estruturas, e não para substituí-la.

O estudante de engenharia civil precisa ser preparado para usar a ferramenta computacional e aliá-la ao conhecimento técnico obtido durante os anos de curso. Os softwares comerciais existentes para o projeto de lajes maciças em geral são complexos por envolver a análise da edificação como um todo.

O presente trabalho se propõe a apresentar uma ferramenta computacional ao mesmo tempo simples e eficaz para o projeto de lajes maciças retangulares de concreto armado, submetidas a cargas uniformemente distribuídas. Para isso, foi realizada uma revisão bibliográfica dos conceitos necessários ao projeto de lajes maciças, envolvendo desde o pré-dimensionamento, passando pelo dimensionamento e, por fim, o detalhamento. Toda a realização do trabalho levou em conta a recente alteração na NBR 6118, feita em 2014.

Para o cálculo dos esforços, há basicamente dois métodos: o elástico e o plástico. O método elástico, fundado na teoria da elasticidade, admite que o material

é homogêneo, isótropo e tem comportamento linear. O método plástico, baseado na teoria da plasticidade, pressupõe que o material tenha comportamento rígido-plástico. (PINHEIRO, 1988).

Para o dimensionamento de lajes de edifícios, Pinheiro (1988, p.286) afirma que “Não há dúvidas de que o cálculo pela teoria das charneiras plásticas é mais adequado do que o cálculo elástico. Porém, para se conseguir informações relativas à fase de utilização, o cálculo elástico é imprescindível.”

Na ocasião da ruína, a laje apresenta um comportamento plástico, contrariando as hipóteses da teoria da elasticidade. Assim sendo, este trabalho propõe a utilização da Teoria das Charneiras Plásticas para o dimensionamento das lajes e do método elástico para a verificação da flecha, de modo a garantir a utilização das mesmas.

A divisão do presente trabalho foi feita em 8 capítulos, sendo este, referente à introdução, o primeiro deles. O capítulo 2 traz as diretrizes da pesquisa, incluindo a questão de pesquisa, os objetivos, a justificativa, a delimitação do tema e a metodologia. O capítulo 3 traz uma revisão bibliográfica sobre lajes maciças de concreto armado, abordando conceitos como ações a considerar, vinculação das lajes, cobrimento, reações de apoio, flechas, dentre outros. O capítulo 4 aborda a determinação dos momentos fletores solicitantes, mostrando a teoria usada na elaboração do software para determinação dos momentos nas lajes maciças. O capítulo 5 mostra como é feito o dimensionamento à flexão e traz os cálculos prescritos pela ABNT:NBR 6118:2014 para dispensa da armadura para força cortante. O capítulo 6 traz informações sobre o detalhamento das armaduras, envolvendo diâmetro máximo, armadura mínima e máxima, espaçamento e outros aspectos envolvidos. O capítulo 7, por sua vez, traz o programa desenvolvido, apresentando o passo a passo para utilização do mesmo e exemplos de dimensionamento elaborados. O capítulo 8, por fim, traz as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

2 DIRETRIZES DA PESQUISA

2.1 QUESTÃO DE PESQUISA

O estudante de graduação em engenharia civil e o próprio engenheiro civil necessitam cada vez mais agilizar suas tarefas, sem comprometimento dos resultados obtidos. O dimensionamento de lajes maciças feito de forma manual, envolvendo todas as etapas desde a determinação dos esforços solicitantes até o detalhamento final, é um processo consideravelmente dispendioso e maçante.

Tendo em vista que os programas disponíveis em escritórios de projeto são bem complexos, por envolver o projeto do edifício em sua totalidade, questiona-se: como automatizar o projeto de lajes maciças de concreto armado de uma forma, ao mesmo tempo, simples e funcional?

2.2 OBJETIVOS

2.2.1 Objetivo Geral

Desenvolver um software para o projeto de lajes maciças retangulares de concreto armado, que execute as verificações preconizadas pela ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de Estruturas de Concreto: Procedimento quanto ao estado limite de serviço (ELS) e o estado limite último (ELU) e realize o detalhamento dessas lajes já referidas.

2.2.2 Objetivo Específico

- Fazer uma revisão bibliográfica sobre lajes maciças de concreto armado, com ênfase nos processos realizados para determinação dos esforços solicitantes, no dimensionamento e detalhamento;
- Descrever o método usado para cálculo dos esforços solicitantes pelo software a ser elaborado;

- Apresentação do software elaborado, através de exemplos de dimensionamento e verificação dos resultados obtidos usando o software através do cálculo manual;
- Fornecer uma ferramenta que terá utilidade a todos os alunos de graduação em engenharia civil e profissionais da área.

2.3 JUSTIFICATIVA

O pesquisador selecionou o tema por entender que, apesar do método manual ensinado em Estruturas de Concreto I ter grande validade para efeitos didáticos, no sentido de se saber como fazer o projeto de lajes maciças sem auxílio computacional, tal processo envolve um tempo considerável que poderia ser otimizado, se os cálculos que envolvem o projeto de lajes maciças de edificações pudessem ser automatizados através de um software, minimizando a chance de erros durante o processo e otimizando o tempo do estudante de graduação e até mesmo do engenheiro civil.

As lajes maciças de concreto armado são projetadas para diversos tipos de construções, tais como muros de arrimo, escolas, indústrias, hospitais, pontes, etc. Nos edifícios de múltiplos pavimentos e construções de grande porte, as lajes maciças são as que prevalecem sobre os outros tipos de lajes existentes. (BASTOS, 2015). Assim sendo, o projeto de lajes maciças possui grande presença na vida profissional do engenheiro civil.

Cabe mencionar que o enfoque principal do presente trabalho é o aluno de graduação em engenharia civil, o qual, ainda no início da sua atividade profissional, encontra dificuldades para obter e lidar com os programas comerciais existentes para o projeto de lajes maciças. Apesar disso, nada impede que seja utilizado também no âmbito profissional, como parâmetro para comparação de resultados obtidos com outros softwares.

2.4 DELIMITAÇÃO

Estudo e desenvolvimento de um software que determine os esforços solicitantes e realize o dimensionamento e detalhamento de lajes maciças retangulares de concreto armado. Análise apenas de lajes sob carregamento uniformemente distribuído e de lajes sem bordas livres.

2.5 METODOLOGIA

O presente trabalho possui importância didática, já que propicia uma maior familiaridade com a questão do dimensionamento de lajes maciças de concreto armado. A fim de alcançar os objetivos estipulados, o estudo será pautado em pesquisas bibliográficas, como trabalhos acadêmicos, revisão de literatura especializada e utilização de meios eletrônicos.

No que tange ao dimensionamento, levou-se em consideração a recente atualização da NBR 6118, que aconteceu em 2014. As verificações serão feitas segundo a norma outrora citada. Os procedimentos de cálculo levarão em conta o estado limite último e o estado limite de serviço.

A etapa seguinte, seguindo o proposto por Foletto (2011), cujo trabalho possui os enfoques semelhantes a este, é a análise do problema, que consiste na compreensão e posterior identificação dos fatores envolvidos na resolução do mesmo.

Posteriormente, segundo Foletto (2011), é feito o desenvolvimento dos modelos de cálculo. Nesta etapa, as informações colhidas nas fases anteriores serão organizadas de forma a facilitar e otimizar o software a ser desenvolvido.

Paralelamente ao desenvolvimento dos modelos de cálculo, será feito o desenvolvimento do software propriamente dito, quando será criada a interface gráfica e os algoritmos que serão adequados à linguagem Visual Basic.

Por fim, será realizada a verificação dos resultados obtidos pelo software, através da comparação de resultados obtidos pelo software e os obtidos pelo método manual. As conclusões serão relatadas, encerrando o presente trabalho de conclusão de curso.

3 LAJE MACIÇA

As lajes são elementos planos bidimensionais, classificação dada aos elementos estruturais cujas duas dimensões, a largura e o comprimento no caso ora analisado, são de mesma ordem de grandeza, enquanto a sua espessura é muito menor que as outras duas dimensões.

As lajes também são denominadas de placas ou elementos de superfície. As ações predominantes são perpendiculares ao plano da laje, podendo ser classificadas em distribuídas na área, distribuídas linearmente ou forças concentradas. Apesar de menos comum, também podem ocorrer solicitações de momentos fletores, geralmente ocasionados nas bordas das lajes. (BASTOS, 2015).

Os pisos de edificações podem ser executados com diversos tipos de lajes existentes, podendo ser lajes lisas, lajes cogumelo, nervuradas e também os variados tipos de lajes pré-moldadas. Tal escolha se baseia em critérios econômicos e de segurança, avaliados conforme as necessidades de cada projeto.

As lajes maciças, que constituem o enfoque principal do presente trabalho, são definidas como “placas de espessura uniforme, apoiadas por vigas em seu contorno. Os apoios podem ser constituídos por vigas ou alvenarias.” (ARAÚJO, 2010, p.2). Lajes com borda(s) livre(s) são casos particulares de lajes apoiadas e também são denominadas lajes maciças.

Dentre as várias aplicações das lajes maciças, destacam-se as pontes, edifícios de múltiplos pavimentos e construções de grande porte. Também são muito usadas em muros de arrimo, reservatórios, escadas, indústrias, etc. (BASTOS, 2015).

Cabe frisar que as lajes maciças podem ser de Concreto Armado ou de Concreto Protendido, mas este trabalho está restrito às lajes maciças retangulares ou quadradas de Concreto Armado.

3.1 VÃO LIVRE E VÃO EFETIVO

O vão livre é a distância entre as faces dos apoios. Considerando que os apoios são suficientemente rígidos na direção vertical (item 14.7.2.2 da ABNT NBR 6118:2014), o vão efetivo (l_{ef}) pode ser calculado conforme a seguinte expressão:

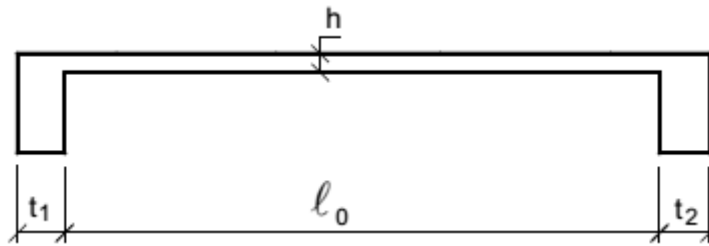
$$l_{ef} = l_o + a_1 + a_2 \quad (3.1)$$

Com:

$$a_1 \leq \begin{cases} t_1/2 \\ 0,3 h \end{cases} \text{ e } a_2 \leq \begin{cases} t_2/2 \\ 0,3 h \end{cases} \quad (3.2)$$

As dimensões l_o , t_1 e t_2 e h estão indicadas na figura 1.

Figura 1 - Dimensões usadas no cálculo dos vãos efetivos



Fonte: Bastos (2015)

Segundo Pinheiro, Muzardo e Santos (2003), usualmente, os vãos efetivos são calculados considerando apenas a distância entre os centros dos apoios. Desconsiderando-se, assim, a redução nos vãos efetivos dependendo da espessura da laje. Prática que será adotada neste trabalho.

3.2 CLASSIFICAÇÃO QUANTO À DIREÇÃO

Essa classificação se refere à direção da armadura principal da laje maciça, que pode ser de dois tipos:

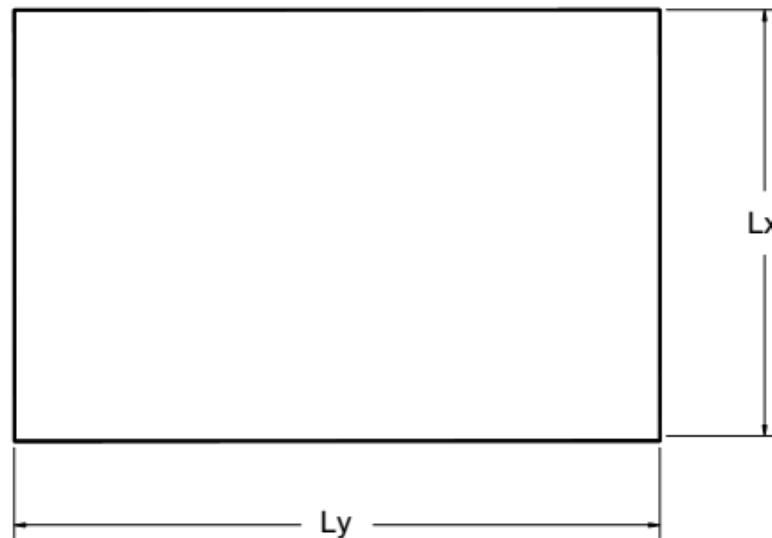
a) Laje armada em uma direção: são aquelas em que a relação entre o maior e o menor vão efetivo é maior que 2. Os esforços solicitantes são maiores na direção do menor vão, chamado de vão principal, em relação ao maior vão, chamado secundário. Por isso, apenas os esforços na direção principal são considerados nos cálculos.

b) Laje armada em duas direções: são aquelas em que a relação entre o maior e o menor vão efetivo é menor que ou igual a 2. Nesse caso, os esforços solicitantes são importantes nas duas direções principais.

Seja L_x o menor vão efetivo; L_y , o maior e $\lambda = L_y/L_x$ (Figura 2), temos:

- Se $\lambda > 2$ – laje armada em uma direção;
- Se $\lambda \leq 2$ – laje armada em duas direções.

Figura 2 - Vãos efetivos L_x (menor vão) e L_y (maior vão)



Fonte: Autor (2016)

3.3 VINCULAÇÃO NAS BORDAS

Usualmente, são três os tipos de apoios das lajes: paredes de concreto ou de alvenaria, vigas ou pilares. Dos três, o mais utilizado são as vigas. Para determinar os deslocamentos e os esforços solicitantes, torna-se imprescindível determinar os vínculos dos apoios às lajes.

Para simplificação do problema e permitir que seja feito o dimensionamento de lajes manualmente, os tipos de apoios foram simplificados. Com isso, são considerados os vínculos das lajes como o apoio simples e o engaste perfeito.

Apoio simples ocorre na borda quando não existe ou não se admite a continuidade da laje com outras lajes próximas. Deve-se ter cuidado com as vigas com grande rigidez à torção, neste caso, convém considerar o apoio como engaste

perfeito. No dimensionamento de uma viga desse tipo deve-se levar em conta a torção.

O engaste perfeito ocorre quando há continuidade das lajes ou quando a laje está em balanço, como ocorre em marquises, por exemplo. Em relação a esse tipo de vínculo, Bastos (2015, p.4) menciona que:

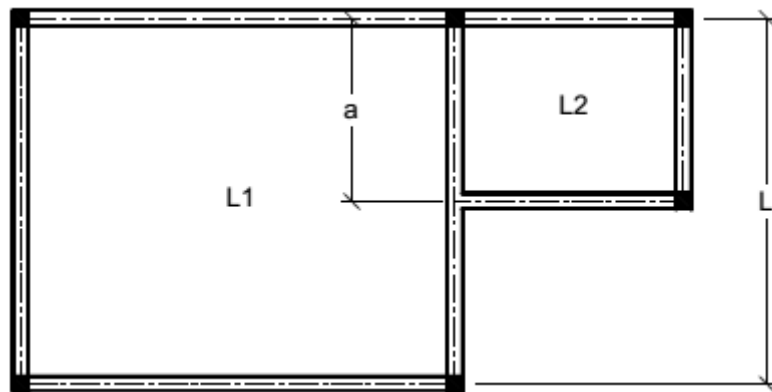
Quando duas lajes contínuas têm espessuras muito diferentes, [...], pode ser mais adequado considerar a laje de menor espessura engastada na de maior espessura, mas a laje com maior espessura pode ser considerada apenas apoiada na borda comum das lajes.

O critério para determinar se há engaste perfeito ou apoio simples, ainda segundo Bastos (2015), é o seguinte (Figura 3):

Se $a \geq \frac{2}{3}L \rightarrow$ a Laje L1 pode ser considerada com a borda engastada na Laje L2;

Se $a < \frac{2}{3}L \rightarrow$ a laje L1 fica com a borda simplesmente apoiada (apoio simples).

Figura 3 - Laje com borda acompanhada por outra laje parcialmente



Fonte: Bastos (2015)

Segundo Campos Filho (2014), quando uma laje tiver uma espessura 2 cm ou mais menor que outra, esta última laje não pode ser considerada engastada naquela de menor espessura. Nesse caso, considera-se que a laje está com apoio simples apenas.

3.4 AÇÕES A CONSIDERAR

As ações (também chamadas de carregamentos) nas lajes são as mais variadas, desde pessoas a máquinas, móveis, revestimentos, etc. É função da laje receber todas essas ações e transmiti-las aos seus apoios que, em geral, são as vigas. São considerados nas lajes os carregamentos permanentes e os variáveis, segundo a ABNT NBR 6118:2014. São carregamentos permanentes os que atuam de forma permanente na laje, como o seu peso próprio, revestimento, etc. Os carregamentos variáveis são os que atuam de forma variável, como o peso das pessoas, por exemplo.

O carregamento total a se considerar para dimensionamento das lajes é dado pela equação:

$$p = g + q \quad (3.3)$$

Onde:

p = carregamento total;

g = carregamento permanente;

q = carregamento variável.

Os valores dos carregamentos usuais em edifícios residenciais são encontrados na ABNT NBR 6120:1980.

Cargas de uso constante, algumas extraídas da ABNT NBR 6120:1980, anteriormente mencionada, e outras de CAMPOS FILHO (2014), estão relacionadas abaixo:

- a) Peso específico do concreto armado = 25 kN/m³;
- b) Reboco (1 cm) = 0,2 kN/m²;
- c) Revestimentos de tacos ou tabuões de madeira = 0,7 kN/m²;
- d) Revestimento de material cerâmico = 0,85 kN/m²;
- e) Argamassa de cal, cimento e areia (Usada como revestimento do teto) = 19 kN/m³;
- f) Argamassa de cimento e areia (Usada como contrapiso) = 21 kN/m³;
- g) Forro falso = 0,5 kN/m²;
- h) Carga variável em salas, dormitórios, cozinhas, banheiros = 1,5 kN/m²;

- i) Carga variável em despensa, lavanderia, área de serviço = 2,0 kN/m²;
- j) Carga variável em corredores sem acesso ao público = 2 kN/m²;
- k) Carga variável em escadas sem acesso ao público = 2,5 kN/m².

Para a carga total do revestimento de uma laje, considerando os revestimentos superior e inferior, segundo Ferreira (2015), na falta de especificação dos materiais de acabamento que serão utilizados, pode-se adotar o valor de 1,0 kN/m².

3.4.1 Cargas das Paredes nas Lajes Armadas em Duas Direções

No caso das lajes armadas em duas direções, de forma simplificada, considera-se a carga da parede como uniformemente distribuída em torno da área da laje, através da seguinte equação:

$$g_{par} = \frac{P_{par}}{A_{laje}} = \frac{\gamma_{alv} \cdot e \cdot h \cdot l}{A_{laje}} \quad (3.4)$$

Onde:

γ_{alv} = peso específico da unidade de alvenaria que compõe a parede (kN/m³);

g_{par} = carga uniforme da parede (kN/m²);

e = espessura total da parede (m);

h = altura da parede (m);

A_{laje} = área da laje (m²) = $L_x \cdot L_y$;

l = comprimento da parede sobre a laje.

No entanto, como a parede não é uniforme, ou seja, constituída apenas de tijolos ou outro material isoladamente, é necessário adotar outra equação para um cálculo mais preciso da carga da parede numa laje. Para isso, calcula-se primeiramente o peso específico da parede, considerando os pesos específicos da alvenaria e do revestimento usado em cada situação, tal como mostrado na equação 3.5.

$$\gamma_{par} = \gamma_{alv} \cdot e_{alv} + \gamma_{arg} \cdot e_{arg} \quad (3.5)$$

Onde:

γ_{par} = peso específico da parede (kN/m²);

γ_{alv} = peso específico da unidade de alvenaria (kN/m³);

e_{alv} = espessura da unidade de alvenaria que resulta na espessura da parede (m);

γ_{arg} = peso específico da argamassa do revestimento (kN/m³);

e_{arg} = espessura do revestimento considerando os dois lados da parede (m).

A carga da parede sobre a laje é:

$$g_{par} = \frac{\gamma_{par} \cdot h \cdot l}{A_{laje}} \quad (3.6)$$

Onde:

g_{par} = carga uniforme da parede (kN/m²);

h = altura da parede (m);

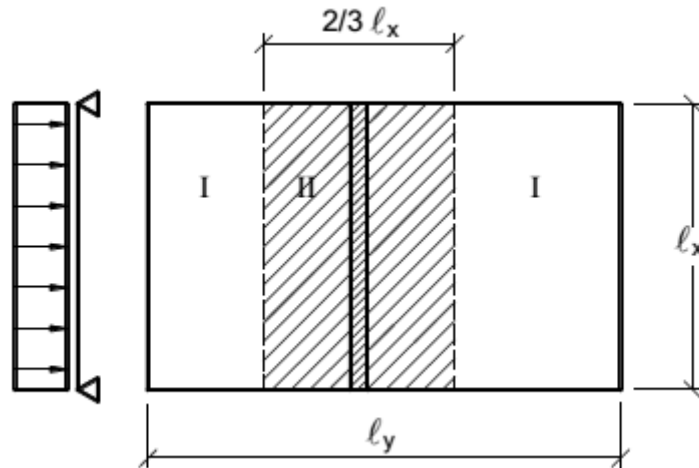
l = comprimento da parede sobre a laje (m);

A_{laje} = área da laje (m²) = $l_x \cdot l_y$

3.4.2 Cargas das Paredes nas Lajes Armadas em Uma Direção

Há dois casos a se considerar quando há parede sobre uma laje armada em uma direção. Se a parede está na direção do menor vão da laje, o carregamento da parede na laje se limita a uma área adjacente à parede da laje de largura de 2/3 de l_x (Figura 4).

Figura 4 - Parede paralela à direção da laje armada em uma direção



Fonte: Bastos (2015)

Ocorre que a laje fica com duas regiões sob carregamentos diferentes. O carregamento da parede só atua na região II. Logo, dois cálculos de esforços solicitantes são necessários (BASTOS, 2015).

A carga uniformemente distribuída devida à parede é:

$$g_{par} = \frac{P_{par}}{\frac{2}{3} \cdot l_x \cdot l_x} = \frac{3 \cdot P_{par}}{2 \cdot l_x^2} \quad (3.7)$$

Onde:

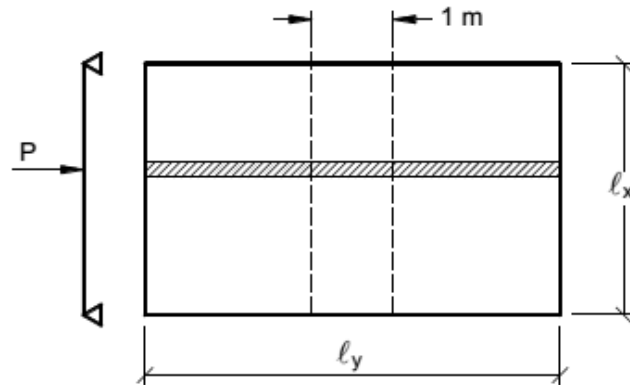
g_{par} = carga uniforme da parede na laje (kN/m²);

P_{par} = peso da parede (kN);

l_x = menor vão da laje (m).

Quando a parede está na direção perpendicular à direção principal (direção do menor vão), a carga da parede deve ser considerada como uma carga concentrada na viga que representa a laje, tal como mostrado na Figura 5.

Figura 5 - Parede perpendicular à direção principal da laje



Fonte: Bastos (2015)

Assim, o valor da força concentrada referente à carga da parede é:

$$P = \gamma_{alv} \cdot e \cdot h \cdot 1 = \gamma_{alv} \cdot e \cdot h \quad (3.8)$$

Com:

P = força concentrada representativa da parede (kN);

γ_{alv} = peso específico da parede (kN/m³);

e = espessura da parede (m);

h = altura da parede (m).

3.5 ESPESSURA MÍNIMA

A ABNT NBR 6118:2014, no seu item 13.2.4.1, prescreve as seguintes espessuras mínimas que devem ser consideradas nos projetos de lajes maciças:

- a) 7 cm para lajes de cobertura não em balanço;
- b) 8 cm para lajes de piso não em balanço;
- c) 10 cm para lajes em balanço;
- d) 10 cm para lajes que suportem veículos de peso total menor ou igual a 30 kN;
- e) 12 cm para lajes que suportem veículos de peso total maior que 30 kN.

3.6 COBRIMENTOS MÍNIMOS

Araújo (2010, p.167-168) pondera que:

Para garantir a durabilidade das armaduras, deve-se empregar um concreto de boa qualidade, bem compactado e com baixa permeabilidade. Além disso, as aberturas das fissuras devem ser limitadas a valores compatíveis com a agressividade do meio. Por último, as armaduras devem estar protegidas por uma camada de cobrimento de concreto com uma espessura adequada.

Os valores para o cobrimento nominal para as armaduras das lajes estão prescritos na ABNT NBR 6118:2014 (item 7.4.7.2). A agressividade ambiental deve ser classificada segundo o apresentado no quadro 1, podendo ser avaliada, de acordo com Bastos (2015, p.10), “segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes”.

Quadro 1 - Classes de agressividade ambiental

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural	Insignificante
		Submersa	
II	Moderada	Urbana ^{a, b}	Pequeno
III	Forte	Marinha ^a	Grande
		Industrial ^{a, b}	
IV	Muito forte	Industrial ^{a, c}	Elevado
		Respingos de maré	

^a Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

^b Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.

^c Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

Fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2014)

A fim de garantir o cobrimento mínimo ($c_{\min}$), faz-se necessário adotar o cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δ_c).

$$c_{nom} = c_{mín} + \Delta_c \quad (3.9)$$

De maneira geral, o valor de Δ_c não pode ser inferior a 10 mm, podendo ser reduzido para 5 mm quando houver um controle rígido na execução da obra, tanto no controle da qualidade do concreto quanto na tolerância às variações das medidas das peças estruturais construídas.

Importante ressaltar que a dimensão máxima do agregado graúdo ($d_{máx}$) não pode ser superior a 120% da espessura do cobrimento nominal, quer dizer:

$$d_{máx} \leq 1,2c_{nom} \quad (3.10)$$

Os valores para o cobrimento nominal de acordo com a classe de agressividade ambiental estão discriminados no quadro 2.

Quadro 2 - Correspondência entre classe de agressividade ambiental e cobrimento nominal para $\Delta_c = 10$ mm

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV ^c
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje ^b	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo ^d	30		40	50
Concreto protendido ^a	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

^a Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.

^b Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal ≥ 15 mm.

^c Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

^d No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal ≥ 45 mm.

Fonte: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2014)

3.7 PRÉ-DIMENSIONAMENTO DA ALTURA ÚTIL E DA ESPESSURA

Altura útil (d) é a distância do centro de gravidade da armadura tracionada até a borda comprimida. Para o cálculo das lajes, é necessário ter previamente um valor para a altura útil e também para a altura da laje, através de um pré-dimensionamento.

Os métodos de pré-dimensionamento são variados, de modo que se usará neste trabalho apenas um dos existentes, válido para lajes retangulares com bordas apoiadas ou engastadas, através da equação seguinte:

$$d \cong (2,5 - 0,1n) \cdot l^* \quad (3.11)$$

Onde:

d = altura útil da laje (cm);

n = número de bordas engastadas da laje;

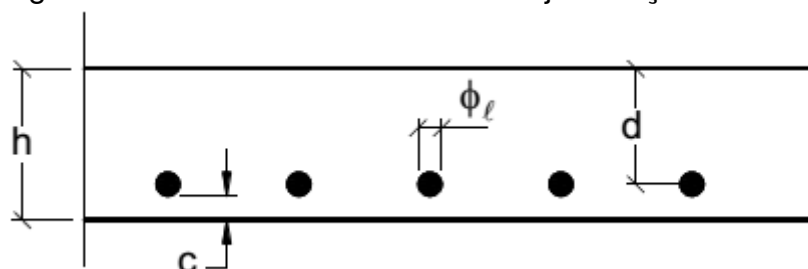
l^* = menor vão entre L_x e $0,7 \cdot L_y$, em metro.

Após obter a altura útil da laje, a altura total (também denominada espessura) da laje é dada por (Figura 6):

$$h = d + \frac{\phi_l}{2} + c \quad (3.12)$$

Onde ϕ_l é o diâmetro da barra longitudinal da laje, o qual deverá ser estimado na equação 3.12. Inicialmente, pode-se estimar ϕ_l com diâmetro de 10 mm.

Figura 6 - Altura total e altura útil de laje maciça



Fonte: Bastos (2015)

3.8 REAÇÕES DE APOIO

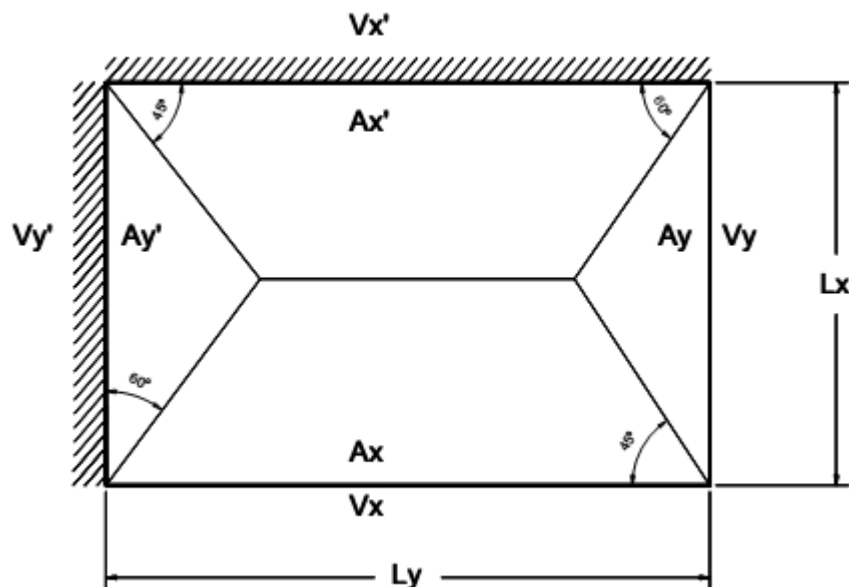
Segundo a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.96):

Para o cálculo das reações de apoio das lajes maciças retangulares com carga uniforme podem ser feitas as seguintes aproximações:

- a) as reações em cada apoio são as correspondentes às cargas atuantes nos triângulos ou trapézios determinados através das charneiras plásticas correspondentes à análise efetivada com os critérios de 14.7.4, sendo que essas reações podem ser, de maneira aproximada, consideradas uniformemente distribuídas sobre os elementos estruturais que lhes servem de apoio;
- b) quando a análise plástica não for efetuada, as charneiras podem ser aproximadas por retas inclinadas, a partir dos vértices, com os seguintes ângulos: -45° entre dois apoios do mesmo tipo; -60° a partir do apoio considerado engastado, se o outro for considerado simplesmente apoiado; 90° a partir do apoio, quando a borda vizinha for livre.

Considerando a figura 7, as seguintes fórmulas podem ser usadas para o cálculo das reações de apoio:

Figura 7 - Reações em lajes com bordas engastadas e apoiadas



Fonte: Autor (2016)

$$V_x = \frac{P \cdot A_x}{l_y} \quad (3.13)$$

$$V_y = \frac{P \cdot A_y}{l_x} \quad (3.14)$$

$$V_{x'} = \frac{P \cdot A_{x'}}{l_y} \quad (3.15)$$

$$V_{y'} = \frac{P \cdot A_{y'}}{l_x} \quad (3.16)$$

Onde:

V_x e V_y são as reações (em kN/m) nas bordas L_y e L_x , respectivamente, não engastadas;

$V_{x'}$ e $V_{y'}$ são as reações (em kN/m) nas bordas L_y e L_x , respectivamente, engastadas;

P é a carga total distribuída (em kN/m²) aplicada na laje;

A_x e A_y são as áreas (em m²) dos triângulos ou trapézios adjacentes a L_y e L_x , respectivamente, não engastadas;

$A_{x'}$ e $A_{y'}$ são as áreas (em m²) dos triângulos ou trapézios adjacentes a L_y e L_x , respectivamente, engastadas.

De modo simplificado, as reações de apoio podem ser calculadas através do uso de tabelas, como as encontradas em Carvalho e Filho (2014), através das seguintes equações:

a) Reações nas direções x e y nas vigas em bordas simplesmente apoiadas (q_x , por exemplo, refere-se a uma viga perpendicular ao eixo x):

$$q_x = k_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{10} \quad (3.17)$$

$$q_y = k_y \cdot p \cdot \frac{l_x}{10} \quad (3.18)$$

b) Reações nas direções x e y nas vigas em bordas engastadas:

$$q'_x = k'_x \cdot p \cdot \frac{l_x}{10} \quad (3.19)$$

$$q'_y = k'_y \cdot p \cdot \frac{l_x}{10} \quad (3.20)$$

Os coeficiente k_x , k_y , k'_x e k'_y encontram-se tabelados em função dos diversos casos de apoio das lajes e de λ (Já definido na seção 3.1). Tais tabelas, como já mencionado, são encontradas em Carvalho e Filho (2014).

3.9 FLECHAS

Segundo Bastos (2015, p.20-21, grifo nosso):

Assim como nas vigas, o 'estado-limite de deformações excessivas' (ELS-DEF), definido pela NBR 6118 (item 3.2.4) como o 'estado em que as deformações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal, dados em 13.3.', deve ser também verificado nas lajes de concreto. No item 19.3.1, a NBR 6118 recomenda que sejam usados os critérios propostos no item 17.3.2, considerando a possibilidade de fissuração (estádio II). As prescrições contidas no item 17.3.2 tratam dos deslocamentos (flechas) nas vigas de Concreto Armado, **o que implica que a norma recomenda que as flechas nas lajes sejam tratadas do mesmo modo como nas vigas.**

O procedimento adotado no presente trabalho para verificação da flecha é o proposto por Campos Filho (2014). Inicialmente, adota-se a espessura mínima permitida pela ABNT NBR 6118:2014 para a laje em estudo ou a espessura determinada através de alguma fórmula para o pré-dimensionamento. Em seguida, é feito o levantamento das cargas.

O próximo passo consiste em determinar o valor da carga de serviço, correspondente à combinação quase permanente de serviço, dado pela seguinte expressão:

$$p_{d,ser} = \sum g_{ik} + \sum \psi_{2j} q_{jk} \quad (3.21)$$

Onde:

g_{ik} = ações permanentes características;

ψ_{2j} = fator de redução de combinação quase permanente para Estado Limite de Serviço (ELS), cujos valores constam na tabela 11.2 da ABNT NBR 6118:2014;

q_{jk} = ações variáveis características.

Como a armadura a ser colocada na laje ainda não é conhecida, não é possível determinar sua rigidez. O momento de inércia da seção, I_{eq} , pode ser estimado através da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Se } m_a \leq m_r &\rightarrow I_{eq} = I_c \\ \text{Se } m_a > m_r &\rightarrow I_{eq} = 0,30 \cdot I_c \end{aligned} \quad (3.22)$$

Onde:

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

m_a é o momento fletor na seção crítica, momento máximo no vão para lajes biapoiadas ou contínuas e momento no apoio para lajes em balanço, para a combinação quase permanente de serviço. Para o caso de laje armada em duas direções, é calculado por:

$$m_a = \alpha \cdot p_{d,ser} \cdot lx^2 \quad (3.23)$$

Onde α é um valor tabelado em função da relação entre vãos e da vinculação da laje e pode ser consultado no Anexo A do presente trabalho. Para o caso de lajes armadas em uma direção, as fórmulas são dadas na seção 4.1 do presente trabalho, considerando o regime elástico.

m_r é o momento de fissuração da laje, calculado por:

$$m_r = 0,25 \cdot f_{ct,m} \cdot b \cdot h^2 \quad (3.24)$$

O valor da resistência à tração direta ($f_{ct,m}$) pode ser estimado pelas seguintes equações, na falta de ensaios:

a) Para concretos de classe até C50:

$$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (3.25)$$

b) Para concretos de classes de C55 até C90:

$$f_{ct,m} = 2,12 \ln(1 + 0,11 f_{ck}) \quad (3.26)$$

F_{ck} é a resistência à compressão característica do concreto. Nestas duas últimas equações, $f_{ct,m}$ e f_{ck} são expressos em MPa.

A flecha imediata deve ser calculada utilizando o módulo de elasticidade secante do concreto (E_{cs}), dado por:

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \quad (3.27)$$

Sendo:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (3.28)$$

Onde, E_{ci} , o módulo de deformação tangente inicial, pode ser calculado pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} E_{ci} &= \alpha_e \cdot 5600 \cdot f_{ck}^{1/2}, \text{ para } f_{ck} \text{ de } 20 \text{ MPa a } 50 \text{ MPa} \\ E_{ci} &= 21,5 \cdot 10^3 \cdot \alpha_e \cdot (f_{ck}/10 + 1,25)^{1/3}, \text{ para } f_{ck} \text{ de } 55 \text{ MPa a } 90 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Onde E_{ci} e f_{ck} são dados em MPa.

Sendo:

$\alpha_e = 1,2$ para basalto e diabásio;

$\alpha_e = 1,0$ para granito e gnaiss;

$\alpha_e = 0,9$ para calcário;

$\alpha_e = 0,7$ para arenito.

A expressão para o cálculo da flecha imediata é a seguinte:

$$f(t = 0) = \kappa \cdot \frac{p_{d,ser} \cdot l_x^4}{E_{cs} \cdot I_{eq}} \quad (3.30)$$

Onde:

κ = coeficiente que depende da vinculação e da relação entre os vãos da laje (Quadros 3 e 4).

Após o cálculo da flecha imediata, é necessário calcular a flecha de longa duração, levando em conta as deformações por fluência do concreto, pela seguinte equação:

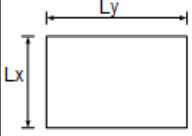
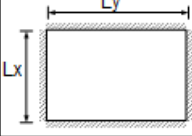
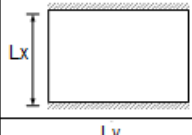
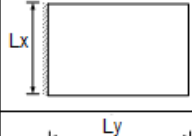
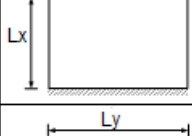
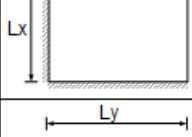
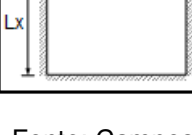
$$f(t = \infty) = (1 + \alpha_f) \cdot f(t = 0) \quad (3.31)$$

Considerando-se que as lajes não têm armadura de compressão e, a favor da segurança, tomando-se $t = \infty$ e $t_0 = 1$ mês, tem-se:

$$\alpha_f = \Delta\xi = \xi(t = \infty) - \xi(t_0 = 1 \text{ mês}) = 2 - 0,68 = 1,32 \quad (3.32)$$

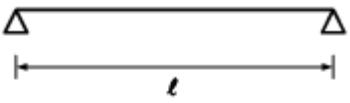
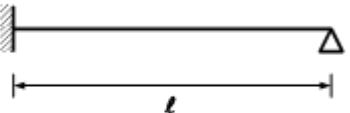
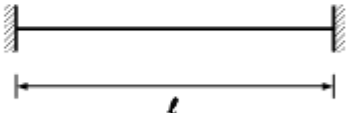
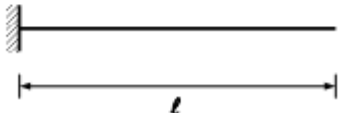
Por fim, deve-se comparar o valor obtido para a flecha de longa duração com o valor da flecha máxima admitida (que será abordada na seção 3.9.1). Caso a flecha de longa duração seja superior à flecha admissível, deve-se incrementar a espessura da laje em 1 centímetro e reiniciar o processo aqui descrito. Caso contrário, adota-se a espessura corrente para a laje.

Quadro 3 - Valores de κ para lajes armadas em duas direções

L_x/L_y	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	0,99	0,85	0,71	0,59	0,48	0,40
	0,25	0,23	0,21	0,18	0,15	0,13
	0,46	0,41	0,36	0,30	0,25	0,21
	0,83	0,63	0,48	0,35	0,26	0,19
	0,25	0,25	0,24	0,23	0,21	0,19
	0,91	0,73	0,58	0,46	0,35	0,28
	0,48	0,44	0,41	0,36	0,31	0,28
	0,24	0,24	0,23	0,20	0,18	0,16
	0,44	0,38	0,32	0,25	0,20	0,16

Fonte: Campos Filho (2014), adaptado pelo Autor (2016)

Quadro 4 - Valores de κ para lajes armadas em uma direção

	1,30
	0,53
	0,26
	12,5

Fonte: Campos Filho (2014)

3.9.1 Flechas Máximas Admitidas

As flechas máximas admitidas ou deslocamentos-limites, são definidos pela NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.76) como “valores práticos utilizados para verificação em serviço do estado-limite de deformações excessivas da estrutura”.

Ainda segundo a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.76-77) os deslocamentos-limites são classificados em quatro grupos, a saber:

- aceitabilidade sensorial: o limite é caracterizado por vibrações indesejáveis ou efeito visual desagradável. A limitação da flecha para prevenir essas vibrações, em situações especiais de utilização, deve ser realizada como estabelecido na Seção 23;
- efeitos específicos: os deslocamentos podem impedir a utilização adequada da construção;
- efeitos em elementos não estruturais: deslocamentos estruturais podem ocasionar o mau funcionamento de elementos que, apesar de não fazerem parte da estrutura, estão a ela ligados;
- efeitos em elementos estruturais: os deslocamentos podem afetar o comportamento do elemento estrutural, provocando afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas. Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado, seus efeitos sobre as tensões ou sobre a

estabilidade da estrutura devem ser considerados, incorporando-as ao modelo estrutural adotado.

A tabela 13.3 da ABNT NBR 6118:2014 traz os valores-limites para deslocamentos que visam garantir um adequado comportamento da estrutura em serviço.

4 DETERMINAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES SOLICITANTES

Conforme a laje seja armada em uma ou duas direções, o procedimento para o cálculo dos momentos fletores varia. As lajes armadas em uma direção são calculadas como se fossem vigas segundo a sua direção principal, a de menor vão, já que o momento na outra direção é desprezado. Lajes armadas em duas direções, por sua vez, podem ser calculadas de diversas formas, como, por exemplo, por meio da Teoria das Placas ou por meio da Teoria das Charneiras Plásticas. Sobre os vários métodos para o cálculo de lajes armadas em duas direções, Araújo (2010, p.36-37, grifo nosso) traz, em linhas gerais, os principais métodos existentes:

Teoria das Grelhas [-] É um método simplificado bastante útil para o projeto das lajes de concreto armado. Nesse método admite-se um comportamento elástico linear do material da laje. [...]

Teoria das linhas de ruptura [-] Nessa teoria, admite-se que o material apresenta um comportamento rígido-plástico. O equilíbrio é garantido pela aplicação dos princípios dos trabalhos virtuais, desprezando-se totalmente a contribuição das deformações elásticas.

Teoria de flexão de placas [-] Esta é a teoria "exata" dentro dos princípios da teoria da elasticidade. A solução do problema é obtida resolvendo-se uma equação de quarta ordem, juntamente com as condições de contorno. Admite-se que o material apresenta um comportamento elástico linear.

Analogia da grelha equivalente [-] É um dos métodos numéricos mais utilizados para análise de lajes de concreto armado [...]. O método pode ser utilizado para a análise de lajes poligonais de formas diversas, incluindo também as vigas de apoio. A laje é associada a uma grelha equivalente, a qual é analisada com um programa baseado no método da rigidez. [...]

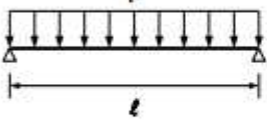
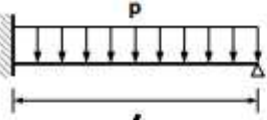
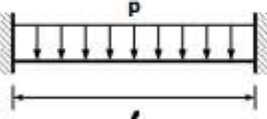
Método dos elementos finitos [-] É um método numérico muito empregado atualmente. Nesse método, podem-se considerar as não linearidades física e geométrica, as diferentes condições de contorno e de carregamento, formas diversificadas, etc. Entretanto, a formulação não é tão simples e o trabalho computacional pode se tornar exaustivo.

4.1 LAJE ARMADA EM UMA DIREÇÃO

No caso das lajes armadas em uma direção, considera-se que o momento fletor na direção do menor vão é preponderante, com isso, a laje é calculada como uma viga de largura de um metro. Na direção secundária, despreza-se o momento fletor.

O quadro 5 traz as equações para determinar os momentos conforme o regime de cálculo adotado e a vinculação nos apoios na direção do menor vão.

Quadro 5 - Momentos em laje armada em uma direção

vinculação	regime elástico	regime rígido-plástico
	$m_v = p\ell^2/8$	$m_v = p\ell^2/8$
	$m_E = -p\ell^2/8$ $m_v = 9p\ell^2/128$	$m_E = -p\ell^2/8,88$ $m_v = p\ell^2/13,32$
	$m_E = -p\ell^2/12$ $m_v = p\ell^2/24$	$m_E = -3p\ell^2/40$ $m_v = p\ell^2/20$

Fonte: CAMPOS FILHO (2014), adaptado pelo AUTOR (2016)

No quadro 5 acima, m_e é o momento no engaste e m_v é o momento máximo no vão.

4.2 LAJE ARMADA EM DUAS DIREÇÕES: TEORIA DAS CHARNEIRAS PLÁSTICAS

Segundo Duarte (1998 apud FOLETTTO, 2011):

Na análise plástica, admite-se um comportamento rígido-plástico perfeito [...] para o concreto armado, permitindo uma determinação adequada do valor da carga máxima (carga de ruína ou carga última) a qual ele pode ser submetido numa solicitação. Entretanto, para o caso de lajes, o cálculo exato pela teoria da plasticidade não é possível, uma vez que o grau de indeterminação estática das mesmas é infinito. Logo, ao invés de se obter o valor exato da carga última, determinam-se um limite superior pelo teorema cinemático e um limite inferior pelo teorema estático.

O teorema estático estabelece que todo o carregamento para o qual houver a possibilidade de se achar uma distribuição de esforços estaticamente possível e segura é menor ou igual ao que provoca a ruína. O teorema estático fornece um limite inferior para a carga de ruína, já que a carga efetiva de ruína é maior ou igual ao valor obtido através do mesmo.

O teorema cinemático, por sua vez, estabelece que todo carregamento que corresponder a um mecanismo é igual ou superior ao que provoca a ruína. Um mecanismo equivale a qualquer configuração de ruína cinematicamente admissível e caracteriza-se pela situação na qual não é possível adicionar mais carregamentos à estrutura. A carga obtida através desse teorema é, em geral, contra a segurança, sendo então, um limite superior.

Segundo Gonzalez (1997, p.13):

A Teoria das Charneiras Plásticas consiste da aplicação às placas do teorema do limite superior do cálculo plástico e fornece, portanto, um valor de carga igual ou superior à carga de ruína, o que poderia sugerir que a teoria é contra a segurança; contudo, resultados experimentais demonstram que a carga de ruína é, em geral, maior que a obtida pela TCP (Teoria das Charneiras Plásticas), devido à reserva de resistência, [...].

De acordo com a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.96), “Para a consideração do estado-limite último, a análise de esforços pode ser realizada através da teoria das charneiras plásticas.”

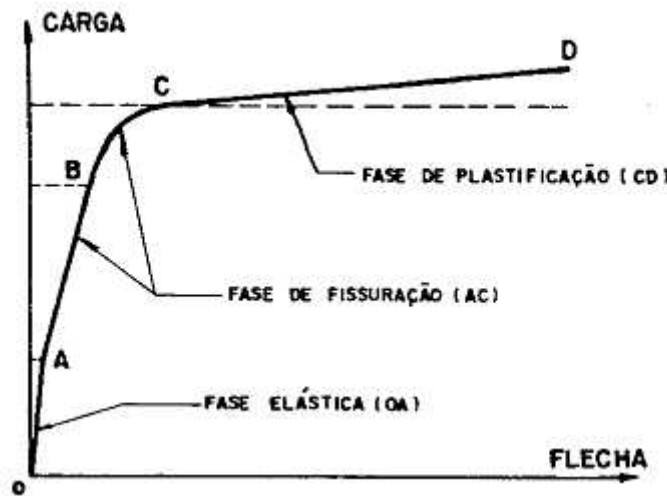
Para a garantia de condições de ductilidade, a ABNT NBR 6118:2014 prevê que a posição da linha neutra esteja em certos valores quando é utilizada a Teoria das Charneiras Plásticas, que serão mostrados na seção 5.1 do presente trabalho.

4.2.1 Fases de Comportamento

Considerando-se uma laje de concreto armado submetida a um carregamento que evolui ao longo do tempo. Tal laje se comporta como mostrado na figura 8 abaixo.

No início, tem-se o regime elástico, onde a laje se comporta de acordo com a teoria de flexão de placas. Conforme o carregamento aumenta, a laje entra na fase de fissuração, na qual a resistência à tração do concreto é ultrapassada nas regiões de maiores momentos. A formação de fissuras acarreta em mais fissuras, uma vez que há um crescimento mais rápido dos momentos fletores nas seções que não se encontram fissuradas.

Figura 8 - Fases de comportamento de lajes subarmadas



Fonte: Pinheiro (1988)

Enquanto as armaduras se mantêm em regime elástico linear, a laje ainda se comporta conforme a teoria da flexão de placas. Nessa fase, o crescimento dos deslocamentos é mais acentuado que na fase anterior. Com o crescimento dos momentos fletores nas regiões mais solicitadas, as armaduras entram em escoamento, iniciando a fase de plastificação, a qual tem como característica grandes deformações. As seções plastificadas definem as linhas de plastificação, nas quais os momentos fletores permanecem praticamente constantes, crescendo nas seções vizinhas até que estas se plastifiquem e esse fenômeno ocorre de forma sucessiva.

Uma vez plenamente desenvolvidas as linhas de plastificação, a laje se torna um mecanismo. Alcançado o mecanismo, os deslocamentos podem aumentar mesmo com a diminuição do carregamento. A laje não suporta mais qualquer elevação da carga, ocorrendo o colapso da mesma. A máxima carga atuante na laje é denominada carga de ruína.

Pinheiro (1988, p.59) descreve que:

Pelo fato de as linhas de plastificação funcionarem como eixos de rotação para as regiões não plastificadas, elas são denominadas charneiras plásticas. A configuração com que as charneiras se apresentam é chamada de configuração de ruína.

4.2.2 Hipóteses de Cálculo

De acordo com Pinheiro (1988, p.65), as hipóteses de cálculo são as seguintes:

- a) as lajes devem ser subarmadas, isto é, as taxas de armadura devem ser pequenas o suficiente para que não ocorra ruptura do concreto comprimido antes do escoamento das armaduras, permitindo o completo desenvolvimento das linhas de plastificação e, conseqüentemente, do mecanismo de colapso;
- b) não deverá ocorrer ruína prematura por cisalhamento ou por punção;
- c) o material é considerado rígido-plástico, ou seja, desprezam-se as deformações elásticas em face das deformações plásticas; [...];
- d) ainda decorrente da consideração rígido-plástica, os momentos fletores m nos vãos e m' nos apoios, correspondentes à plastificação das charneiras e denominados momentos de plastificação, são admitidos constantes ao longo dessas charneiras;
- e) desprezam-se as influências dos esforços de membrana, provenientes do impedimento dos deslocamentos no plano da laje.

4.2.3 Configuração das Charneiras

As configurações das charneiras dependem da natureza e da distribuição das cargas, além da disposição das armaduras. A cada configuração das charneiras corresponde uma determinada intensidade de carga que fornece a energia consumida na formação das linhas de plastificação. Pelo teorema cinemático da teoria da plasticidade, a carga efetiva de ruína corresponde a menor entre todas as cargas correspondentes às configurações possíveis. A configuração à qual corresponde a carga de ruína é denominada configuração de ruína. (PINHEIRO, 1988).

Para fins de dimensionamento, quando a carga já é conhecida, a configuração associada ao maior momento de plastificação é a configuração de ruína. É para este maior momento que deve ser dimensionada a laje.

Pinheiro (1988, p.66-67) define as seguintes regras para determinação das configurações possíveis:

- a) cargas distribuídas geralmente dão origem a charneiras retilíneas, embora nem sempre a configuração definida por elas seja a mais desfavorável;
- b) ao longo dos contornos engastados, formam-se charneiras superiores, também chamadas de charneiras negativas, pois são correspondentes aos momentos considerados negativos [...];
- c) cada charneira passa pelo ponto de interseção dos eixos de rotação das regiões delimitadas por essas charneiras negativas;

d) os eixos de rotação das diversas regiões coincidem com lados simplesmente apoiados [...] com lados engastados [...] ou passam pelos pontos de apoio isolados [...].

4.2.4 Processos de Cálculo

Existem dois processos de cálculo na Teoria das Charneiras Plásticas: o processo do equilíbrio ou das forças nodais e o processo da energia, os quais serão apresentados a seguir.

4.2.4.1 Processo do Equilíbrio

Segundo Pinheiro (1981, p.2-10), "o processo das forças nodais utiliza as condições de equilíbrio, aplicando-as a cada região da laje delimitada pelo seu contorno e pelas charneiras plásticas". Os momentos de torção e esforços cortantes são substituídos por forças denominadas forças nodais, por se situarem nos nós das charneiras ou nos nós destas com o contorno. (PINHEIRO, 1981).

Ainda segundo Pinheiro (1981, p.2-10);

Cada região da laje encontra-se então em equilíbrio sob a ação dessas forças, dos momentos ao longo das charneiras e das cargas externas aplicadas. Desde que as forças nodais sejam conhecidas, as equações de equilíbrio são suficientes para determinar qualquer variável desconhecida que defina a configuração de ruína, ou para determinar a carga de ruína ou o momento de plastificação de uma dada configuração.

4.2.4.2 Processo da Energia

Duarte (1998 apud FOLETTO, 2011, p.41) define o processo de energia como uma aplicação dos trabalhos virtuais à teoria das charneiras. Para tanto, assume-se que não há perda de energia na laje no deslocamento devido a um determinado carregamento. O processo de energia resulta num cálculo prático, já que permite que as equações de equilíbrio sejam escritas de forma sucinta.

A equação de trabalho é obtida igualando-se o trabalho das forças externas (T_e) ao trabalho das forças internas (T_i). Com isso, a energia gasta pelas forças externas durante a deformação virtual da laje equivale à energia consumida pelas charneiras nessa mesma deformação. (RIOS, 1991 apud FOLETTO, 2011, p.41).

De acordo com Pinheiro (1981, p. 2-12-2-13), a energia absorvida pelas charneiras (T_i) e a energia desenvolvida pelas cargas (T_e) são fornecidas pelas seguintes equações:

$$T_i = \Sigma m_i l_i \theta_i + \Sigma m'_i l'_i \theta'_i \quad (4.1)$$

Onde:

m_i = momento de plastificação positivo por unidade de comprimento;

l_i = comprimento das charneiras positivas;

θ_i = ângulo de rotação das charneiras positivas;

m'_i = momento de plastificação negativo por unidade de comprimento;

l'_i = comprimento das charneiras negativas;

θ'_i = ângulo de rotação das charneiras negativas.

$$T_e = \Sigma P_j f_j + \int_A p f dA \quad (4.2)$$

Onde:

P_j = cargas concentradas;

f_j = deslocamento das cargas concentradas;

p = cargas distribuídas;

f = deslocamento das cargas distribuídas;

dA = elemento de área da laje.

4.2.5 Fórmulas para o Cálculo de Lajes Retangulares

As formulações adotadas no presente trabalho são as encontradas em Campos Filho (2014). Para uma laje com bordas engastadas, o momento fletor negativo m' nos engastes será:

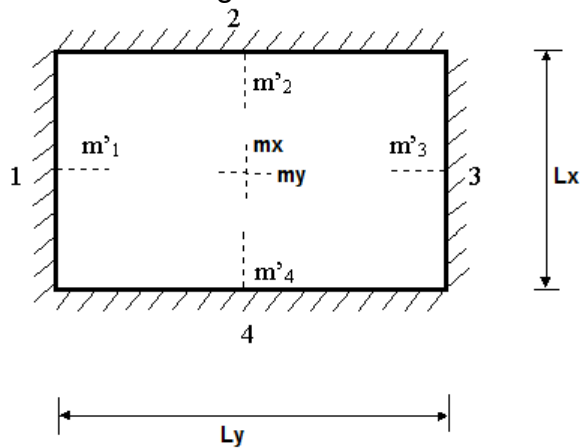
$$m' = -i.m \quad (4.3)$$

Onde:

i = grau de engastamento;
 m = momento fletor no vão.

Chamando-se 1, 2, 3 e 4 os lados da laje (Figura 10); começando a numeração sempre por uma borda de menor comprimento, os graus de engastamento serão i_1 , i_2 , i_3 e i_4 . Acerca dos graus de engastamento, a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.96) menciona que “deve ser adotada razão mínima de 1,5:1 entre momentos de borda (com continuidade e apoio indeslocável) e momentos no vão.” Assim, adota-se $i = 0$ quando as bordas forem apoiadas e $i = 1,5$ quando as bordas forem engastadas.

Figura 9 - Momentos de engastamento



Fonte: Campos Filho (2014), adaptado pelo Autor (2016)

Sendo:

m_x = momento correspondente à armadura As_x , paralela ao vão " L_x ";

m_y = o momento correspondente à armadura As_y , paralela ao vão " L_y ".

Os momentos negativos serão:

$$m'_1 = -i_1 \cdot m_y \quad (4.4)$$

$$m'_2 = -i_2 \cdot m_x \quad (4.5)$$

$$m'_3 = -i_3 \cdot m_y \quad (4.6)$$

$$m'_4 = -i_4 \cdot m_x \quad (4.7)$$

A formulação necessária para o cálculo das lajes isotrópicas e ortótropas é apresentada a seguir.

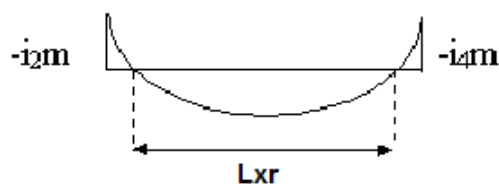
4.2.5.1 Lajes isotrópicas

Lajes isotrópicas são aquelas cujo momento de plastificação e, por consequência, as armaduras são iguais nas duas direções. Para tanto, a relação entre o lado menor (L_x) e o lado maior (L_y) deve ser $0,8 \leq L_x/L_y \leq 1$. Para o caso de laje com carga uniformemente distribuída, o momento no vão será calculado por:

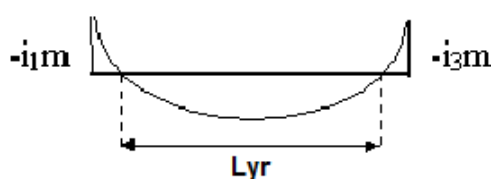
$$m = \frac{p \cdot L_{xr} \cdot L_{yr}}{8 \left(1 + \frac{L_{xr}}{L_{yr}} + \frac{L_{yr}}{L_{xr}} \right)} \quad (4.8)$$

Onde p é a carga superficial e L_{xr} e L_{yr} são os vãos reduzidos (Figura 11), que dependem dos graus de engastamento i_1 , i_2 , i_3 e i_4 .

Figura 10 - Vãos reduzidos



$$L_{xr} = \frac{2 \cdot l_x}{\sqrt{1 + i_2} + \sqrt{1 + i_4}}$$



$$L_{yr} = \frac{2 \cdot l_y}{\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_3}}$$

4.2.5.2 Lajes ortótropas

Lajes ortótropas são aquelas cujos momentos de plastificação e, por consequência, as armaduras não são iguais, porém há uma relação idêntica entre os momentos de plastificação positivos e negativos. (PINHEIRO, 1988). Para tanto, segundo Campos Filho (2014), a relação entre os vãos deve ser $0,5 \leq L_x/L_y < 0,8$.

O coeficiente de ortotropia é definido por:

$$\varphi = \frac{m_y}{m_x} \quad (4.9)$$

Podendo ser calculado por:

$$\varphi = \frac{12 - i_2 - i_4}{12 - i_1 - i_3} \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^{1,7} \quad (4.10)$$

A laje ortótropa é calculada pelas mesmas fórmulas da laje isótropa, considerando-se que o lado maior L_y tem um comprimento $L_y/\sqrt{\varphi}$.

Assim,

$$L_{yr}^* = \frac{L_{yr}}{\sqrt{\varphi}} \quad (4.11)$$

$$m = \frac{p \cdot L_{xr} \cdot L_{yr}^*}{8 \cdot \left(1 + \frac{L_{xr}}{L_{yr}^*} + \frac{L_{yr}^*}{L_{xr}} \right)} \quad (4.12)$$

Com:

$$L_{xr} = \frac{2 \cdot l_x}{\sqrt{1 + i_2} + \sqrt{1 + i_4}} \quad (4.13)$$

$$L_{yr} = \frac{2 \cdot l_y}{\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_3}} \quad (4.14)$$

Com o momento na direção do menor vão $m_x = m$ e o momento na direção do maior vão $m_y = \phi \cdot m$.

4.3 MOMENTOS VOLVENTES

Em cantos de lajes com bordas apoiadas surgem os momentos fletores, chamados de momentos volventes ou momentos de torção, e recebem a notação de M_{xy} .

Os momentos volventes causam tração no lado superior da laje na direção da diagonal e no lado inferior da laje, na direção perpendicular à diagonal. Para os momentos volventes devem ser dispostas armaduras convenientemente calculadas. (BASTOS, 2015).

4.4 COMPATIBILIZAÇÃO DOS MOMENTOS FLETORES

Ao calcular cada laje isoladamente, resulta que o momento nas bordas comuns às outras lajes são geralmente diferentes. Em outras palavras, para cada laje calculada acha-se um valor distinto do momento fletor nas bordas que apresentam continuidade.

A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.97, grifo nosso) permite que seja feita uma compatibilização dos momentos fletores:

Quando houver predominância de cargas permanentes, as lajes vizinhas podem ser consideradas isoladas, realizando-se a compatibilização dos momentos sobre os apoios de forma aproximada. No caso de análise plástica, a compatibilização pode ser realizada mediante alteração das razões entre momentos de borda e vão, em procedimento iterativo, até a obtenção de valores equilibrados nas bordas. **Permite-se, simplificadamente, a adoção do maior valor de momento negativo em vez de equilibrar os momentos de lajes diferentes sobre uma borda comum.**

Há muitos anos é feito na prática brasileira um método de compatibilização, onde o momento fletor negativo (X) entre duas bordas é dado por:

$$X \geq \begin{cases} 0,8 \cdot X_1 \\ \frac{X_1 + X_2}{2}, \text{ com } X_1 \geq X_2 \end{cases} \quad (4.15)$$

Em relação aos momentos positivos, segundo Araújo (2010, p.13), “em geral, não é necessário fazer nenhuma correção nos momentos positivos no centro das lajes.”

5 DIMENSIONAMENTO

5.1 FLEXÃO

Conhecidos os momentos fletores máximos atuantes na laje, esta poderá ser dimensionada à flexão simples de forma semelhante às vigas, supondo faixas com largura de um metro.

Caso a laje seja armada em uma direção ou isotrópica e para a armadura na direção do menor vão das lajes ortótropas, calcula-se a altura útil (d) da seguinte forma:

$$d = h - c - 0,5 \text{ cm} \quad (5.1)$$

Onde:

c = cobrimento adotado.

Para as lajes ortótropas, a altura útil, no cálculo da armadura na direção do maior vão, é dada por (CAMPOS FILHO, 2014):

$$d = h - c - 1 \text{ cm} \quad (5.2)$$

Ou seja, admite-se no caso de lajes ortótropas que a altura útil na direção do menor vão difere da altura útil na direção do maior vão cerca de 0,5 mm.

O dimensionamento da armadura à flexão simples é feito calculando primeiramente a posição da linha neutra (x):

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d^2}} \right) \quad (5.3)$$

Onde:

m_d = momento solicitante de cálculo (kN.cm);

f_{cd} = resistência de cálculo do concreto à compressão (kN/cm²);

d = altura útil (cm);

$b_w = 100 \text{ cm.}$

O parâmetro λ' pode ser tomado igual a:

$$\begin{aligned} \lambda' &= 0,8 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa; ou} \\ \lambda' &= 0,8 - \frac{(f_{ck} - 50)}{400} \text{ para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.4)$$

E α_c é definido como:

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 0,85 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ \alpha_c &= 0,85 \left[1,0 - \frac{(f_{ck} - 50)}{200} \right] \text{ para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Quando as solicitações forem determinadas no estado limite último através do regime rígido-plástico, a posição da linha neutra (x) deve ficar limitada em:

$$\begin{aligned} x/d &\leq 0,25, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ x/d &\leq 0,15, \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Quando as solicitações forem determinadas no estado limite último através do regime elástico, a posição da linha neutra (x) deve ficar limitada em:

$$\begin{aligned} x/d &\leq 0,45, \text{ se } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ x/d &\leq 0,35, \text{ se } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Com:

f_{ck} = resistência característica do concreto à compressão.

Em seguida, é calculada a área de armadura necessária, por meio da seguinte expressão:

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} \quad (5.8)$$

Com:

f_{yd} = resistência de cálculo de escoamento do aço (kN/cm²).

Para o cálculo das armaduras nas bordas consideradas engastadas, deve-se calcular uma armadura única de continuidade, realizando antes a compatibilização dos momentos nas bordas. Para o cálculo dessa armadura, deve-se considerar a menor das alturas úteis.

5.2 FORÇA CORTANTE

A ABNT NBR 6118:2014, no seu item 19.4, faz distinção entre as lajes com e sem armadura transversal para a força cortante.

5.2.1 Lajes sem Armadura para Força Cortante

As lajes maciças ou nervuradas, conforme 17.4.1.1.2-b), podem prescindir de armadura transversal para resistir as forças de tração oriundas da força cortante, quando a força cortante de cálculo, a uma distância d da face do apoio, obedecer à expressão: (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.158)

$$V_{Sd} \leq V_{Rd1} \quad (5.9)$$

Onde V_{Sd} é a força cortante de cálculo e a força cortante máxima V_{Rd1} é:

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} k(1,2 + 40\rho_1) + 0,15\sigma_{cp}].bw.d \quad (5.10)$$

Onde:

$$\sigma_{cp} = N_{sd}/A_c \quad (5.11)$$

N_{sd} = força longitudinal na seção devida à compressão ou carregamento (compressão com sinal positivo).

Não existindo a protensão ou força normal que cause a compressão, a equação 5.10 torna-se:

$$V_{Rd1} = [\tau_{Rd} k(1,2 + 40\rho_1)]. b_w . d \quad (5.12)$$

Onde:

$$\tau_{Rd} = 0,25 . f_{ctd} \quad (5.13)$$

$$f_{ctd} = 0,7 . f_{ct,m} / \gamma_c \quad (5.14)$$

$$\rho_1 = A_{s1} / b_w . d , \text{ não maior que } 0,02 \quad (5.15)$$

K = coeficiente que tem os seguintes valores:

a) Para os elementos onde 50 % da armadura inferior não chega até o apoio: $k = |1|$;

b) Para os demais casos: $k = |1,6 - d|$, não menor que $|1|$, com d em metros.

τ_{Rd} é a tensão resistente de cálculo do concreto ao cisalhamento. A_{s1} é a área da armadura de tração que se estende até não menos que $d + l_{b,nec}$ além da seção considerada (Figura 12), com $l_{b,nec}$ definido como:

$$l_{b,nec} = \alpha . l_b . \frac{A_{s,calc}}{A_{s,ef}} \geq l_{b,min} \quad (5.16)$$

Onde:

$\alpha = 1,0$ para barras sem gancho;

$\alpha = 0,7$ para barras tracionadas com gancho, com cobrimento no plano normal ao do gancho $\geq 3\phi$;

$\alpha = 0,7$ quando houver barras transversais soldadas conforme o item 9.4.2.2 da norma;

$\alpha = 0,7$ quando houver barras transversais soldadas conforme o item 9.4.2.2 da norma e gancho com cobrimento normal ao plano normal ao do gancho $\geq 3\phi$;

l_b = comprimento de ancoragem básico;

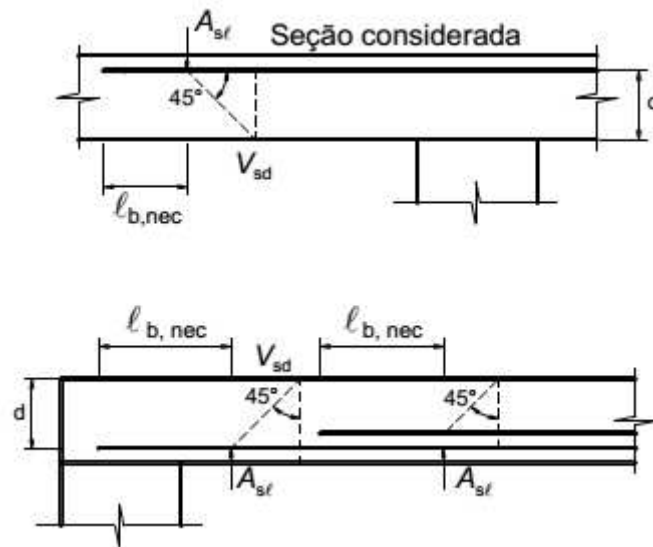
$A_{s,calc}$ = área da armadura calculada;

$A_{s,ef}$ = área da armadura efetiva.

$$l_{b,min} \geq \begin{cases} 0,3l_b \\ 10\phi \\ 100\text{ mm} \end{cases} \quad (5.17)$$

b_w = largura mínima da seção ao longo da altura útil d .

Figura 11 - Comprimento de ancoragem necessário nos apoios



Fonte: Bastos (2015)

5.2.2 Lajes com Armadura para Força Cortante

Para os casos em que a laje apresenta armadura para força cortante, deve-se seguir o prescrito na ABNT NBR 6118:2014, no seu item 17.4.2, que trata das vigas dimensionadas ao esforço cortante.

Segundo Campos Filho (2014, p.12):

Em lajes de estruturas de edifícios correntes, as cargas atuantes são relativamente baixas e não é necessária a verificação das tensões devidas às forças cortantes e nem o dimensionamento de armadura transversal.

6 DETALHAMENTO DAS ARMADURAS

Após o cálculo dos carregamentos, dos esforços e da área das armaduras, faz-se o detalhamento das armaduras, seguindo o disposto na ABNT NBR 6118:2014 em termos de armadura longitudinal máxima e mínima, áreas máxima e mínima de armadura, dentre outras prescrições descritas na referida norma.

6.1 ARMADURAS LONGITUDINAIS MÁXIMAS E MÍNIMAS

Sobre a armadura máxima, a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.132) relata que “A soma das armaduras de tração e de compressão ($A_s + A'_s$) não pode ter valor maior que 4% A_c , calculada na região fora da zona de emendas [...]”.

Acerca da armadura mínima, a NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.130) diz que:

A armadura mínima de tração, em elementos estruturais armados [...] deve ser determinada pelo dimensionamento da seção a um momento fletor mínimo dado pela expressão a seguir, respeitada a taxa mínima absoluta de 0,15%:

$$M_{d,min} = 0,8 \cdot W_0 \cdot f_{ctk,sup} \quad (6.1)$$

Onde:

W_0 = módulo de resistência da seção transversal bruta de concreto, relativo à fibra mais tracionada;

$f_{ctk,sup}$ = resistência característica superior do concreto à tração, dada por:

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (6.2)$$

As equações para encontrar o valor de $f_{ct,m}$ já foram mostradas na seção 3.9 deste trabalho.

Os valores mínimos para as armaduras são apresentados no quadro 6. Alternativamente ao cálculo do momento fletor mínimo, pode ser considerada atendida a armadura mínima se forem respeitadas as taxas de armaduras mínimas (ρ_{min}),

classificadas de acordo com o tipo de concreto usado, encontradas no quadro 7.

Quadro 6 - Valores mínimos para as armaduras

Armadura	Elementos estruturais sem armaduras ativas
Armaduras negativas	$\rho_s \geq \rho_{\min}$
Armaduras negativas de bordas sem continuidade	$\rho_s \geq 0,67 \rho_{\min}$
Armaduras positivas de lajes armadas nas duas direções	$\rho_s \geq 0,67 \rho_{\min}$
Armadura positiva (principal) de lajes armadas em uma direção	$\rho_s \geq \rho_{\min}$
Armadura positiva (secundária) de lajes armadas em uma direção	$A_s/s \geq 20\%$ da armadura principal $A_s/s \geq 0,9 \text{ cm}^2/\text{m}$ $\rho_s \geq 0,5 \rho_{\min}$
$\rho_s = A_s/(b_w h)$	

Fonte: Bastos (2015), adaptado pelo Autor (2016)

Quadro 7 - Taxas mínimas ($\rho_{\min}$ - %) da armadura de flexão para lajes

Forma da seção	Valores de $\rho_{\min}^{(a)}$ (%)														
	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
Retangular	0,150	0,150	0,150	0,164	0,179	0,194	0,208	0,211	0,219	0,226	0,233	0,239	0,245	0,251	0,256
(a) Os valores de $\rho_{\min}$ estabelecidos nesta Tabela pressupõem o uso de aço CA-50, $d/h = 0,8$, $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$. Caso esses fatores sejam diferentes, $\rho_{\min}$ deve ser recalculado. $\rho_{\min} = A_{s,\min}/A_c$															

Fonte: Bastos (2015), adaptado pelo Autor (2016)

A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.157) também menciona que:

Nos apoios de lajes que não apresentem continuidade com planos de lajes adjacentes e que tenham ligação com os elementos de apoio deve-se dispor de armadura negativa de borda [...]. Essa armadura deve se estender até pelo menos 0,15 do vão menor da laje a partir da face do apoio.

6.2 DIÂMETRO MÁXIMO

O diâmetro máximo permitido pela ABNT NBR 6118:2014 para qualquer barra de uma armadura de flexão é $h/8$, ou seja, um oitavo da espessura da laje.

6.3 ESPAÇAMENTO MÁXIMO E MÍNIMO

“As barras de armadura principal de flexão devem apresentar espaçamento no máximo igual a $2h$ ou 20 cm, prevalecendo o menor desses dois valores na região dos maiores momentos fletores.” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.169).

“A armadura secundária de flexão deve ser igual ou superior a 20 % da armadura principal, mantendo-se, ainda, um espaçamento entre barras de no máximo 33 cm.” (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.169).

A norma não contém informações sobre o espaçamento mínimo a ser considerado. Segundo Bastos (2015, p.32):

O espaçamento mínimo deve ser aquele que não dificulte a disposição e amarração das barras da armadura, o completo preenchimento da peça pelo concreto e o envolvimento das barras pelo concreto. De modo geral, na prática adotam-se espaçamentos entre barras superiores a 7 ou 8 cm.

6.4 COMPRIMENTO DAS ARMADURAS POSITIVAS

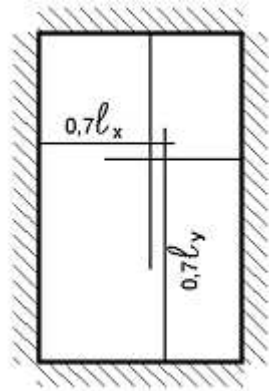
A NBR 6118 (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014, p.169) menciona que:

Nas lajes armadas em uma ou em duas direções, em que seja dispensada armadura transversal de acordo com 19.4.1, e quando não houver avaliação explícita dos acréscimos das armaduras decorrentes da presença dos momentos volventes nas lajes, toda a armadura positiva deve ser levada até os apoios, não se permitindo escalonamento desta armadura. A armadura deve ser prolongada no mínimo 4 cm além do eixo teórico do apoio.

Segundo Pinheiro, Muzardo e Santos (2003, p.11.25), “Considera-se que as barras inferiores estejam adequadamente ancoradas, desde que se estendam, pelo menos, de um valor igual a 10ϕ a partir da face dos apoios.”

Nas lajes com as quatro bordas engastadas, situação onde não ocorrem momentos volventes, pode-se adotar o comprimento e a distribuição mostrada na figura 13.

Figura 12 - Comprimento mínimo das barras da armadura positiva com as quatro bordas engastadas



Fonte: Pinheiro, Muzardo e Santos (2003), adaptado pelo Autor (2016)

6.5 COMPRIMENTO DAS ARMADURAS NEGATIVAS

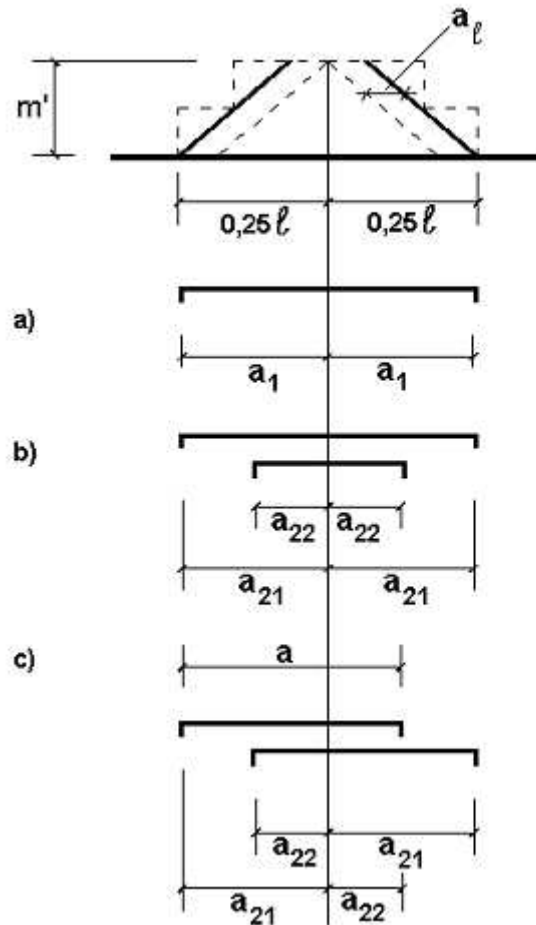
Pinheiro, Muzardo e Santos (2003, p.11.22-11.23) mencionam que:

O comprimento das barras negativas nos apoios deve ser determinado com base no diagrama de momentos fletores na região dos apoios. Em edifícios usuais, em apoios de lajes retangulares que não apresentem bordas livres, os comprimentos das barras podem ser determinados de forma aproximada, com base no diagrama trapezoidal [...] adotando-se para l um dos valores:

- o maior entre os menores vãos das lajes adjacentes, quando ambas forem engastadas nesse apoio;
- o menor vão da laje admitida engastada, quando a outra foi suposta simplesmente apoiada nesse vínculo.

Com base nesse procedimento acima referido, são possíveis três comprimentos para as armaduras negativas, que constam nas figuras 14a, 14b e 14c. O diagrama trapezoidal está representado na figura 14.

Figura 13 - Alternativas para as armaduras negativas



Fonte: Pinheiro, Muzardo e Santos (2003)

a) Um só tipo de barra (Figura 14a)

Todas as barras possuem o comprimento a_1 , dado por:

$$a_1 \geq \begin{cases} a_l + l_b \\ 0,25\ell + 10\phi \text{ (em geral, o maior valor)} \end{cases} \quad (6.3)$$

Onde:

$a_l = 1,5 d$ (deslocamento do diagrama);

l_b = comprimento de ancoragem com gancho (Valores do comprimento de ancoragem com gancho podem ser encontrados no Anexo C);

ϕ = Diâmetro da barra.

b) Dois tipos de barras (Figura 14b)

Consideram-se dois comprimentos, a_{21} e a_{22} , dados por:

$$a_{21} \geq \begin{cases} \frac{0,25l+a_l}{2} + l_b \\ 0,25l+10\phi \text{ (em geral, o maior valor)} \end{cases} \quad (6.4)$$

$$a_{22} \geq \begin{cases} \frac{0,25l+a_l}{2} + 10\phi \text{ (em geral, o maior valor)} \\ a_l + l_b \end{cases} \quad (6.5)$$

c) Barras alternadas, com mesmo comprimento (Figura 14c)

Adotando barras de mesmo comprimento e considerando as equações que geralmente resultam nos maiores valores, tem-se que:

$$a = a_{21} + a_{22} = 0,25l+10\phi + \frac{0,25l+a_l}{2} + 10\phi \quad (6.6)$$

$$a = \frac{3}{8}l + 20\phi + 0,75d \quad (6.7)$$

Com a equação 6.7, pode-se estimar o comprimento das barras. Seu posicionamento é feito com os seguintes valores:

$$a_{21} = \frac{2}{3}a \qquad a_{22} = \frac{1}{3}a \quad (6.8)$$

Tais comprimentos são usualmente arredondados para múltiplos de 5 cm.

7 PROGRAMA ELABORADO PARA O PROJETO DE LAJES MACIÇAS

Este capítulo tem como objetivo apresentar o programa desenvolvido pelo autor para o dimensionamento e detalhamento de lajes maciças retangulares de concreto armado. O software elaborado contempla as várias fases de projeto necessárias para o projeto de lajes, fazendo desde a determinação dos esforços até o cálculo das armaduras e, por fim, o detalhamento.

O programa, denominado como Flash Lajes (Figura 15), foi integralmente desenvolvido no Visual Studio 2012 Versão Ultimate, usando como linguagem de programação o Visual Basic. Foi escolhida essa linguagem de programação pela facilidade de aprendizado da mesma e de implementar uma interface gráfica de qualidade que torne mais simples e rápida a utilização de todo o potencial do programa desenvolvido.

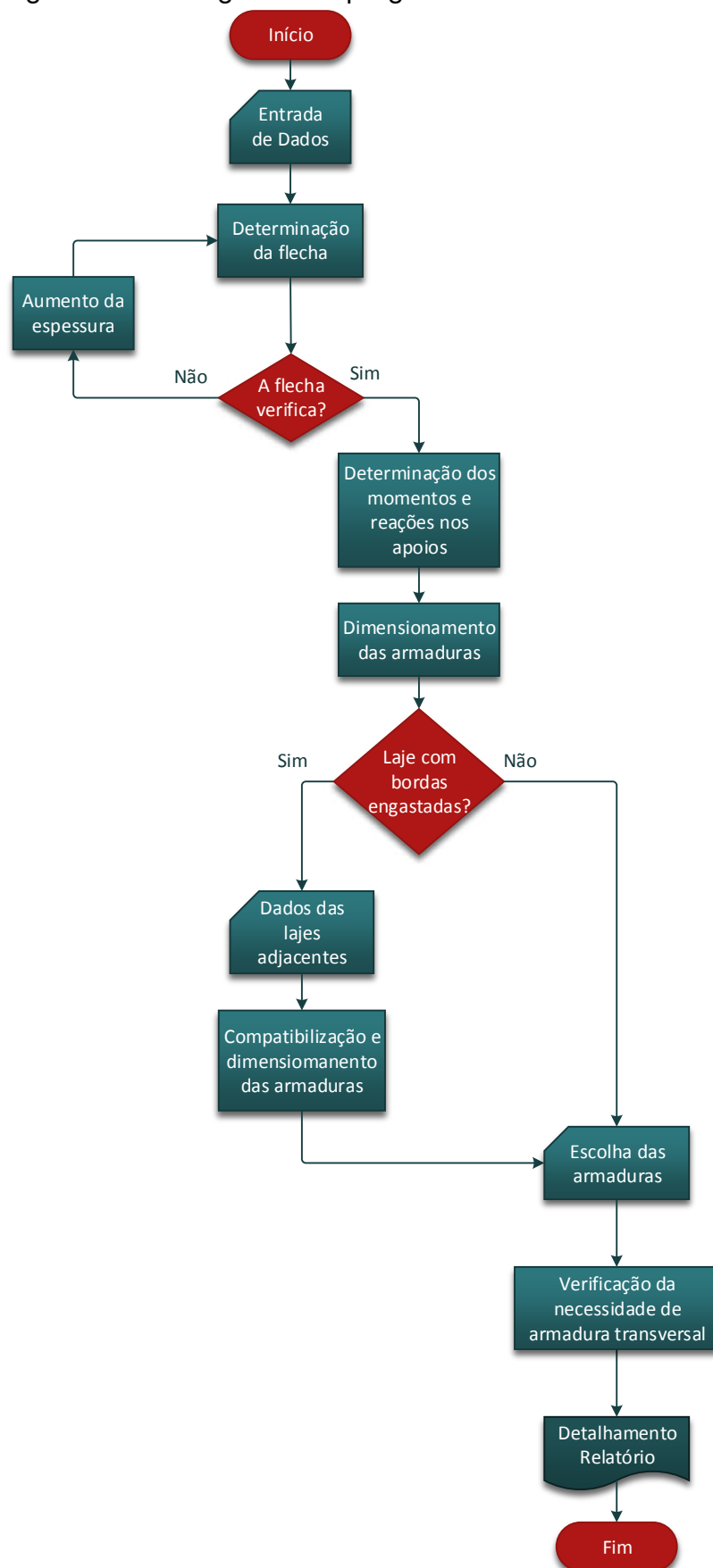
Figura 14 - Janela do software: Sobre o programa



Fonte: Autor (2016)

O fluxograma do programa é mostrado na figura 16.

Figura 15 - Fluxograma do programa desenvolvido

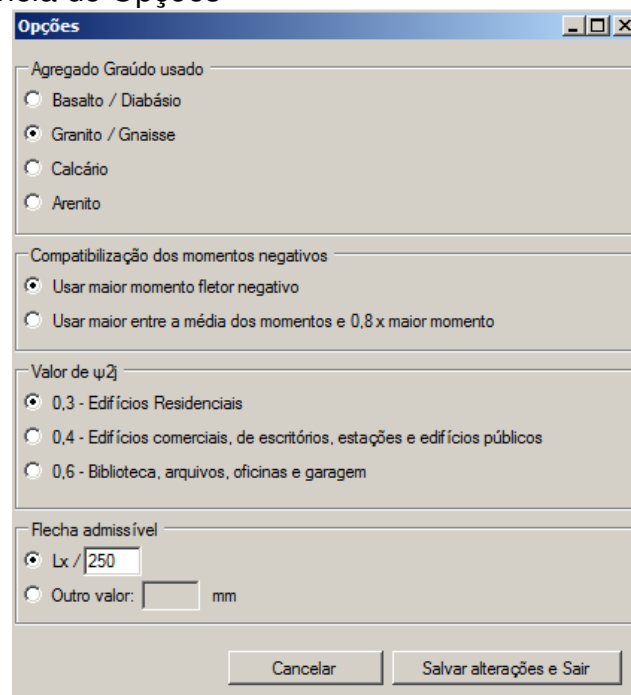


Fonte: Autor (2016)

A barra de menu é composta por três menus: Arquivo, Ferramentas e Ajuda. Através do menu Arquivo se pode sair da aplicação. O menu Ferramentas possibilita fazer o pré-dimensionamento da laje usando o método proposto na seção 3.7 do presente trabalho. Além disso, é possível acessar a calculadora do sistema operacional Windows e também uma janela com opções (Figura 17) para o usuário escolher.

As opções disponíveis, que podem ser editadas, referem-se ao cálculo das flechas, ao escolher o agregado graúdo usado na elaboração do concreto, ao definir o valor de ψ_{2j} para a determinação da carga de serviço e também ao definir a flecha admissível. Há também a possibilidade de definir o método para compatibilização dos momentos negativos nas bordas das lajes, sendo o método padrão do programa o de usar os maiores momentos nas bordas entre duas lajes.

Figura 16 - Janela de Opções



Fonte: Autor (2016)

O programa é dividido em seis abas, as quais, uma vez completadas, realizam todo o processo de projeto de lajes maciças. As abas são as seguintes:

1. Dados de entrada;
2. Esforços;
3. Compatibilização / Armadura negativa;

4. Armadura positiva;
5. Detalhamento;
6. Resultados.

Além destas abas, o programa possui ainda outras janelas. Uma destas é a janela de Carregamentos, onde o usuário define as cargas presentes na laje e, em seguida, é calculada a carga total na laje e também a carga de serviço para verificação da flecha.

A outra janela disponível serve para o usuário entrar com as larguras das vigas nas bordas da laje que deseja projetar. Essas medidas das vigas não são úteis para o dimensionamento da laje pelo método utilizado no programa, mas servem para tornar mais precisos o consumo de aço e a quantidade de barras nas armações que serão calculadas pelo software elaborado. A seguir, será melhor explicado o passo a passo para utilização do Flash Lajes.

7.1 ENTRADA DE DADOS

A instalação do programa é simples e rápida, sendo mostrada no Apêndice B. Uma vez instalado o programa; o usuário, ao abri-lo, se depara com uma tela tal como mostrada na figura 18.

Figura 17 - Dados de Entrada: Tela Inicial

A imagem mostra a interface gráfica do software 'Flash Lajes'. A janela possui uma barra de menu com 'Arquivo', 'Ferramentas' e 'Ajuda'. Abaixo, há uma barra de abas com 'Dados de entrada' (selecionada), 'Esforços', 'Compatibilização / Armadura negativa', 'Armadura positiva', 'Detalhamento' e 'Resultados'.
 Na aba 'Dados de entrada', há os seguintes campos e controles:
 - **Vinculação:** Um diagrama de uma laje retangular com hachuras nas bordas. Abaixo dele, dois menus suspensos: 'Na direção de Lx:' e 'Na direção de Ly:', ambos com a opção 'Engaste - Engaste' selecionada.
 - **Tipos de materiais:** 'Tipo de Concreto:' com o menu suspenso 'C90' e 'Tipo de Aço:' com o menu suspenso 'CA-50'.
 - **Dados de identificação:** Campos para 'Projeto:' (contendo 'TCC') e 'Laje:' (contendo 'L0').
 - **Vãos efetivos:** Campos para 'Lx (Menor vão):' (contendo '3') e 'Ly (Maior vão):' (contendo '4'), ambos seguidos da unidade 'm'.
 - **Cobrimento:** Um menu suspenso com a opção '2.5 cm - CAA2' selecionada.
 - **Utilização da laje:** Um grupo de botões de opção com 'Piso' selecionado. As outras opções são 'Cobertura', 'Passagem de veículos com peso total ≤ 30 kN' e 'Passagem de veículos com peso total > 30 kN'.
 - **Método de cálculo:** Um grupo de botões de opção com 'Plástico' selecionado. A outra opção é 'Elástico'.
 - **Espeçura da laje:** Um campo numérico contendo '10' seguido da unidade 'cm'.
 - **Botões de ação:** 'Carregamentos' e 'Largura das vigas' no centro; e 'Continuar' no canto inferior direito.

Fonte: Autor (2016)

O primeiro grupo de informações, denominado **Vinculação**, serve para o usuário entrar com as condições de vinculação da laje. Conforme mencionado no capítulo 2 deste trabalho, o programa não dimensiona lajes com bordas livres, sendo admitido apenas que a laje esteja com a borda apoiada ou engastada.

Em **Tipo de Concreto** o usuário deverá escolher qual concreto será usado para fazer o dimensionamento da laje. O programa admite tanto os concretos do grupo I de resistência (De 20 MPa até 50 Mpa) quanto os do grupo II de resistência (De 55 MPa até 90 Mpa).

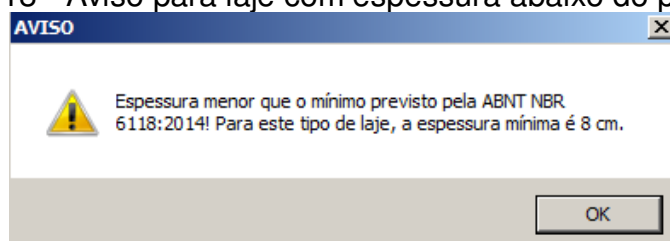
Em **Tipo de Aço**, o usuário define qual o tipo de aço que usará, podendo ser CA-25, CA-50 e CA-60. Outro grupo de informações disponível é o **Dados de identificação**, de preenchimento opcional, que serve para identificação do projeto e da laje dimensionada posteriormente pelo engenheiro ou estudante de engenharia civil. Tais informações serão exibidas num relatório a ser elaborado na última etapa do programa.

Em **Cobrimento**, o usuário pode escolher entre 4 opções de cobrimento de acordo com a Classe de Agressividade Ambiental, mostrados no quadro 2 deste trabalho. Adicionalmente, também é possível entrar com valores de cobrimento diferentes do proposto pela ABNT NBR 6118:2014.

No grupo de informações **Vãos efetivos**, define-se o maior e o menor vão teórico, respectivamente L_y e L_x , determinados conforme descrito na seção 3.1 do presente trabalho. Em **Espessura da laje**, se preenche o valor da espessura da laje usada para o dimensionamento da mesma.

Em **Utilização da laje**, define-se qual o tipo de laje maciça a ser dimensionada. É importante preencher corretamente este item, pois o programa não realiza o dimensionamento se a espessura adotada for menor que o mínimo previsto pela ABNT NBR 6118:2014 de acordo com a utilização da laje (Figura 19).

Figura 18 - Aviso para laje com espessura abaixo do permitido



Fonte: Autor (2016)

Em **Método de cálculo** é possível escolher se a laje será dimensionada em regime elástico ou plástico. Na atual versão do software elaborado, apenas as lajes armadas em uma direção podem ser calculadas em regime elástico, através das equações mostradas na seção 4.1 deste trabalho. As lajes armadas em duas direções somente podem ser calculadas em regime plástico, usando a Teoria das Charneiras Plásticas.

Na janela secundária **Carregamento** (Figura 20) há uma lista de carregamentos previamente definidos para a carga variável da laje. Além da carga variável, é preciso determinar a carga devido aos revestimentos inferior e superior da laje e, eventualmente, de outros carregamentos existentes.

Figura 19 - Janela de Carregamentos

Carregamentos

Tipo de Ambiente (Carga variável)

- ☐ Edifícios residenciais: dormitórios, sala, copa, cozinha e banheiro
- ☒ Edifícios residenciais: despensa, área de serviço e lavanderia
- ☐ Escritórios: salas de uso geral e banheiro
- ☐ Corredores: com acesso ao público
- ☐ Corredores: sem acesso ao público
- ☐ Forros: sem acesso a pessoas
- ☐ Garagens e estacionamentos: para veículos com carga máxima de 25 kN por veículo.
- ☐ Outro: kN/m² **2,00 kN/m²**

Revestimento Superior e Inferior (Contrapiso, piso e revestimento do teto)

- ☒ 1 kN/m²
- ☐ Outro: kN/m² **1,00 kN/m²**

Outros carregamentos

- ☐ Especifique: kN/m² **0,00 kN/m²**

Carregamento total:
5,50 kN/m²

Calcular carregamento total

Sair

Fonte: Autor (2016)

Após definir os carregamentos, o usuário deve clicar em <Calcular carregamento total> e depois em <Sair>.

Para correta determinação do número de barras para o detalhamento das armaduras, é necessário acessar a janela secundária **Largura das Vigas** (Figura 21). Nesta janela, o utilizador deve se orientar pela informação preenchida no grupo de informações **Vinculação**, começando por um dos menores vãos (L_x), denominado lado a, em seguida têm-se os lados b, c e d. A mesma orientação usada para determinar as bordas engatadas ou apoiadas é a que está representada nesta janela para preencher a largura das vigas. Após preencher todas as larguras, deve-se clicar no botão <Ok> para voltar à janela principal do programa.

Figura 20 - Janela Largura das vigas

Fonte: Autor (2016)

7.2 CÁLCULO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

A segunda etapa do programa consiste na determinação dos esforços solicitantes. Inicialmente, o programa calcula a flecha, para verificação do estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF). Caso a flecha calculada seja superior à flecha admissível para a laje em análise, o programa automaticamente aumenta a espessura da laje de 1 em 1 cm até que a flecha calculada seja inferior à admissível. A aba Esforços (Figura 22), traz os valores dos momentos, flechas e reações nos apoios.

Verificado que a flecha admissível não é ultrapassada pela flecha de cálculo, o programa segue na determinação dos esforços solicitantes, calculando os momentos fletores e as reações nos apoios

Figura 21 - Aba Esforços

The screenshot shows the 'Flash Lajes' software window with the 'Esforços' tab selected. The interface is organized into several sections:

- Momentos Positivos:** Input fields for $M_x = 1,07$ kN.m/m and $M_y = 1,07$ kN.m/m.
- Momentos Negativos:** Input fields for $M_x' = 1,60$ kN.m/m and $M_y' = 1,60$ kN.m/m.
- Reações nos apoios:** Input fields for $V_x = 0,00$ kN/m, $V_x' = 5,16$ kN/m, $V_y = 0,00$ kN/m, and $V_y' = 4,12$ kN/m.
- Esquema da Laje:** A diagram of a rectangular slab with sides labeled 'Lado a', 'Lado b', 'Lado c', and 'Lado d'. The slab is surrounded by a dashed line representing the support boundary.
- Flecha:** A section for deflection with input fields for 'Calculada' (0,035 cm) and 'Admissível' (1,200 cm).
- Buttons:** A 'Continuar' button is located at the bottom right.

Fonte: Autor (2016)

Os momentos têm a seguinte notação:

- ✓ M_x – momento positivo no vão na direção de L_x ;
- ✓ M_y – momento positivo no vão na direção de L_y ;
- ✓ M_x' – momento negativo na direção de L_x ;
- ✓ M_y' – momento negativo na direção de L_y .

As reações nos apoios têm a notação já expressa na seção 3.8 do presente trabalho. As reações não terão uso para o dimensionamento da laje, mas servirão numa fase posterior, a do dimensionamento das vigas que sustentam as lajes.

O programa também realiza a verificação se a laje precisa de armadura para combater o esforço cortante. Caso seja preciso, uma mensagem é exibida ao usuário para fazer o cálculo da armadura. Para a maioria dos casos de lajes de edifícios não é necessária armadura para força cortante, como já mencionado anteriormente neste trabalho.

7.3 DIMENSIONAMENTO DAS ARMADURAS

Determinados os esforços solicitantes, a próxima etapa consiste na determinação das armaduras. Inicialmente, são determinadas as armaduras negativas (situadas junto à face superior da laje). A figura 23 mostra a aba **Compatibilização / Armadura negativa** do programa.

Figura 22 - Aba Compatibilização / Armadura negativa

The screenshot displays the 'Flash Lajes' software window with the 'Compatibilização / Armadura negativa' tab selected. The interface is organized into four vertical panels, one for each side (Lado a, Lado b, Lado c, Lado d). Each panel contains the following elements:

- Input fields:**
 - Momento da laje adjacente: 2 kN.m/m
 - Altura da laje adjacente: 10 cm
 - Menor vão laje adjacente: 3 m
- Calculated values:**
 - As = 2,56 cm²/m
- Buttons:** A green 'Recalcular As' button.
- Selection options:** Radio buttons for 'Diâmetro da barra' (selected) and 'Espaçamento'.
- Dropdown menu:** A menu showing '6,3 mm'.
- Final results:**
 - As = 2,60 cm²/m
 - 24 Ø6,3 c/12 cm c = 174 cm

A 'Continuar' button is located at the bottom right of the interface.

Fonte: Autor (2016)

Nesta aba, o usuário define as armaduras negativas, usando os dados das lajes adjacentes. O momento da laje adjacente em cada borda engastada é usado para fazer a compatibilização dos momentos, a fim de haver uma única armadura negativa na borda entre duas lajes. A altura da laje adjacente é usada para recalculer a armadura. Usa-se a menor altura entre as duas lajes envolvidas em cada borda para o cálculo das armaduras. Também é preciso informar o menor vão da laje adjacente, o que será usado na determinação do comprimento das armaduras negativas. Para cada lado engastado é necessário informar os dados das lajes adjacentes. Caso não seja informada a altura da laje adjacente, o programa prossegue como se a laje ora em análise fosse a de menor altura.

Para evitar erros, os lados da laje que não se encontram engastados e que, portanto, não necessitam de armadura negativa comum com outra laje, o programa automaticamente desativa as caixas de informações dos lados não engastados, não permitindo a entrada de dados em tais bordas.

Uma vez preenchidos os dados das lajes adjacentes nas bordas engastadas, o usuário deve clicar em <Recalcular A_s > para que as armaduras sejam recalculadas. Após isso, faz-se o detalhamento das armaduras. O usuário pode escolher entre duas opções: diâmetro da barra e espaçamento. Escolhido o diâmetro das barras, pode-se escolher um dos diâmetros disponíveis no programa que o mesmo determina a menor área de armadura necessária que iguale ou supere a armadura calculada para cada borda. O mesmo procedimento ocorre caso seja selecionado o espaçamento, o programa determina automaticamente a área de armadura necessária e também os outros parâmetros necessários, ou seja, o número de barras e o comprimento das mesmas. Para as armaduras negativas, há a opção de escolher o espaçamento entre 10 e 20 cm. As bitolas disponíveis são: 5 mm, 6,3 mm, 10 mm e 12,5 mm.

As armaduras positivas são determinadas na aba **Armadura positiva** (Figura 24). Nesta aba são exibidas as áreas de armadura necessárias nas direções do maior e do menor vãos. Assim como nas armaduras negativas, o usuário tem duas opções para definir o detalhamento: diâmetro da barra e espaçamento.

Figura 23 - Aba Armadura positiva

Flash Lajes

Arquivo Ferramentas Ajuda

Dados de entrada Esforços Compatibilização / Armadura negativa Armadura positiva Detalhamento Resultados

Na direção de Lx

$A_s = 1,72 \text{ cm}^2/\text{m}$

☒ Diâmetro da barra
☐ Espaçamento

6,3 mm

$A_s = 1,73 \text{ cm}^2/\text{m}$
 22 $\Phi 6,3 \text{ c}/18 \text{ cm c} = 308 \text{ cm}$

Na direção de Ly

$A_s = 1,72 \text{ cm}^2/\text{m}$

☒ Diâmetro da barra
☐ Espaçamento

6,3 mm

$A_s = 1,73 \text{ cm}^2/\text{m}$
 16 $\Phi 6,3 \text{ c}/18 \text{ cm c} = 408 \text{ cm}$

Continuar

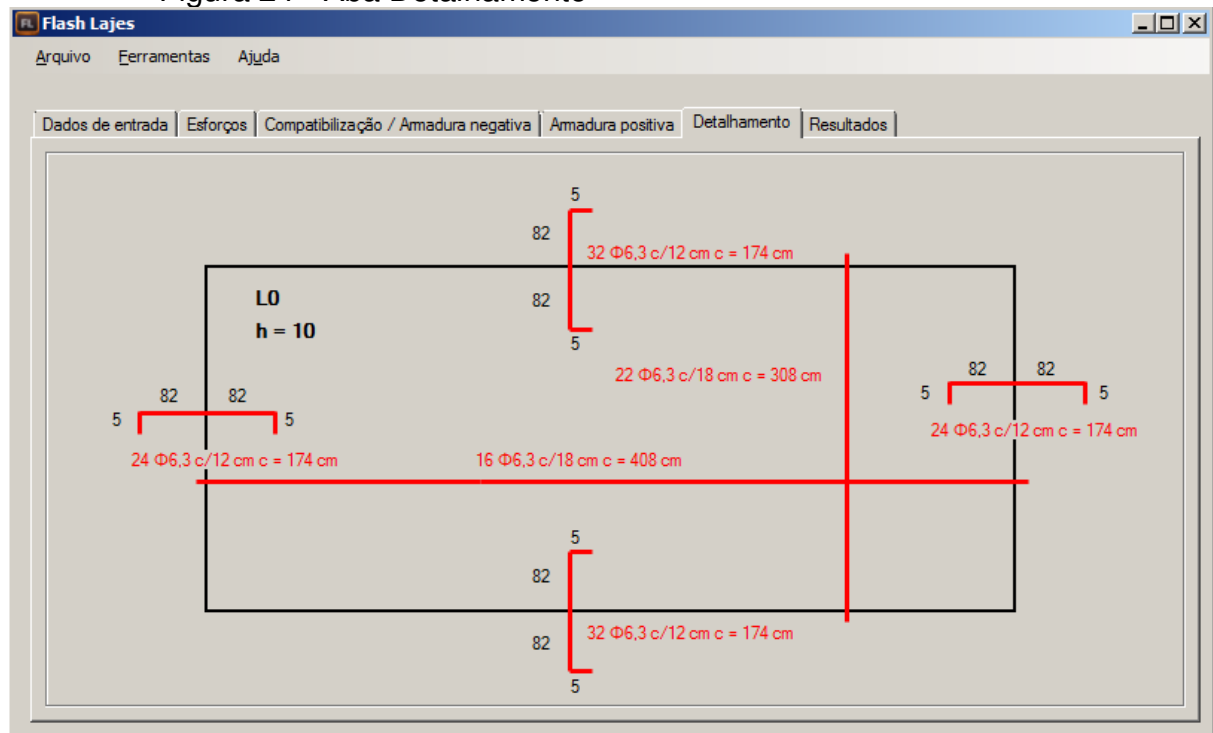
Fonte: Autor (2016)

Após isso, escolhe-se a bitola ou o espaçamento e o programa calcula os demais dados necessários para o detalhamento. As bitolas disponíveis são: 5 mm, 6,3 mm, 10 mm e 12,5 mm. Para o espaçamento, na direção de Lx e de Ly há opções de 10 a 20 cm. Para o caso particular de lajes armadas em uma direção, em que a norma permite um espaçamento maior para as armaduras de distribuição, há a opção de definir o espaçamento de 10 até 30 cm. Importante ressaltar que isto só é acessível se o usuário escolher a opção espaçamento. Ou seja, caso seja escolhida a opção diâmetro, o espaçamento máximo que será obtido é de 20 cm.

7.4 DETALHAMENTO

A etapa seguinte do programa é apresentar ao usuário um esquema gráfico com todas as informações sobre o detalhamento da laje como um todo. A aba **Detalhamento** (Figura 25) tem a finalidade de concentrar as informações reunidas nas outras abas em uma só tela.

Figura 24 - Aba Detalhamento



Fonte: Autor (2016)

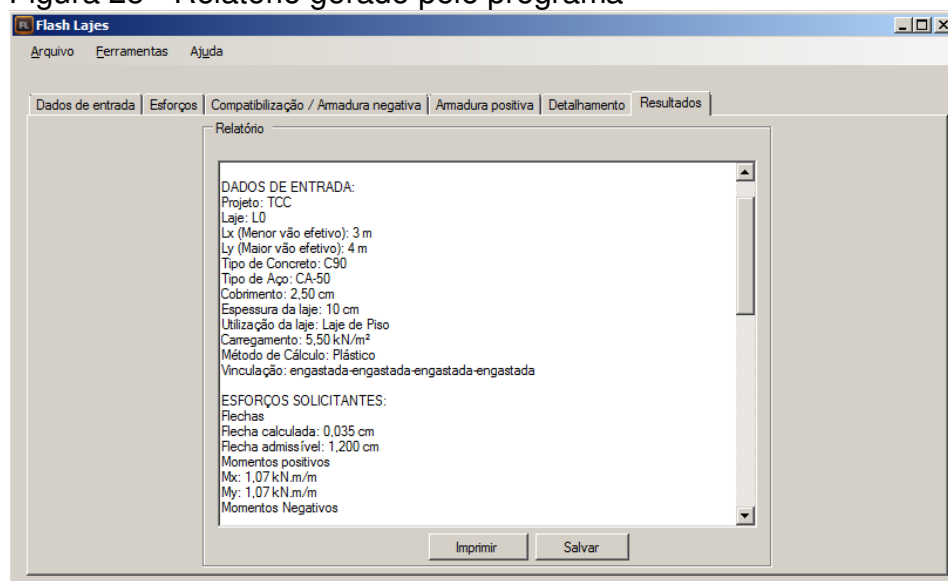
É mostrada a identificação da laje, sua espessura, além da quantidade das barras, as bitolas usadas e os comprimentos e espaçamentos das barras.

Além disso, para as bordas apoiadas o programa apresenta as armaduras negativas de borda, cujas áreas de armaduras são determinadas conforme o disposto no quadro 6 do presente trabalho. O programa, para esse caso particular, seleciona automaticamente a menor área de armadura que iguala ou supera a área de armadura necessária para as armaduras negativas de borda, além de definir o espaçamento, o comprimento e a quantidade de barras necessárias. Para este tipo de armadura, usou-se como maior espaçamento admitido 20 cm. O procedimento realizado para detalhamento das armaduras negativas de borda é mostrado no Apêndice A deste trabalho.

7.5 RELATÓRIO

A última etapa do programa desenvolvido é a de geração de um relatório na aba **Resultados** (Figura 26) com os principais dados de entrada e de saída, para fornecer ao usuário uma memória de cálculo.

Figura 25 - Relatório gerado pelo programa



Fonte: Autor (2016)

Os dados que são registrados no relatório pelo Flash Lajes são os seguintes:

- ✓ Dados de entrada: nome do projeto, identificação da laje, vãos efetivos, tipo de concreto e aço, cobrimento, espessura da laje, utilização da laje, vinculação, carregamento e método de cálculo;
- ✓ Esforços solicitantes: flecha calculada e admissível, momentos positivos e negativos e reações de apoio;
- ✓ Armadura positiva e negativa: taxa de armadura necessária e escolhida, quantidade, bitola, espaçamento e comprimento total das barras;
- ✓ Consumo total de aço.

O usuário tem a opção de salvar o relatório gerado num arquivo de texto ou imprimi-lo, bastando para isso, respectivamente, clicar no botão <Salvar> ou no botão <Imprimir>.

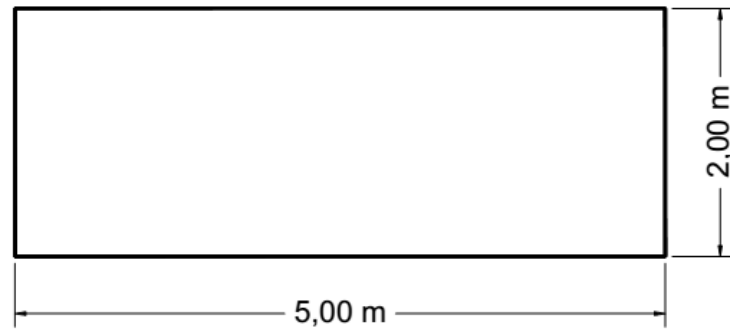
7.6 EXEMPLOS

Visando a validação do software elaborado, são apresentados a seguir três exemplos de dimensionamento e detalhamento efetuados por meio do Flash Lajes. Em todos os exemplos apresentados, os resultados coincidem com o cálculo manual, que está exposto no Apêndice A deste trabalho. Além disso, as vigas que sustentam as lajes têm 15 cm de largura, informação que será usada no detalhamento das lajes.

7.6.1 Exemplo 1 (Laje armada em uma direção)

O primeiro exemplo é uma laje de piso de cozinha de um edifício residencial, mostrada na figura 27, com carga de revestimento de 1,0 kN/m². O cobrimento é de 2 cm, com aço CA-50 e Concreto C25.

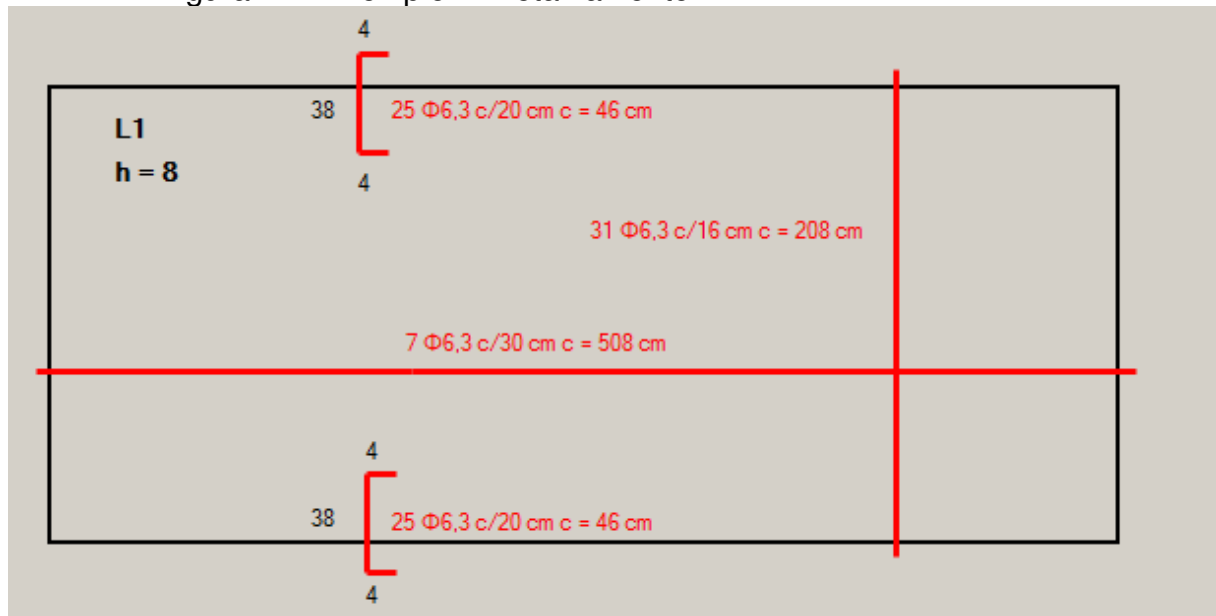
Figura 26 - Exemplo 1: Laje armada em uma direção



Fonte: Autor (2016)

Os resultados do detalhamento e o relatório gerado pelo programa são mostrados, respectivamente, nas figuras 28 e 29.

Figura 27 - Exemplo 1: Detalhamento



Fonte: Autor (2016)

Figura 28 - Exemplo 1: Relatório

```

Relatório gerado pelo programa FLASH LAJES

DADOS DE ENTRADA:
Projeto: TCC
Laje: L1
Lx (Menor vão efetivo): 2 m
Ly (Maior vão efetivo): 5 m
Tipo de Concreto: C25
Tipo de Aço: CA-50
Cobrimento: 2,00 cm
Espessura da laje: 8 cm
Utilização da laje: Laje de Piso
Carregamento: 4,50 kN/m²
Método de cálculo: Plástico
Vinculação: apoiada-apoiada-apoiada-apoiada

ESFORÇOS SOLICITANTES:
Flechas
Flecha calculada: 0,162 cm
Flecha admissível: 0,800 cm
Momentos positivos
Mx: 2,25 kN.m/m
Reações nos apoios
Vx: 3,60 kN/m
Vy: 2,25 kN/m

ARMADURA POSITIVA:
Direção de Lx (Menor vão):
Área de armadura necessária: 1,37 cm²/m
Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
Detalhamento: 31 Ø6,3 c/16 cm c = 208 cm
Direção de Ly (Maior vão):
Área de armadura necessária: 0,90 cm²/m
Área de armadura escolhida: 1,04 cm²/m
Detalhamento: 7 Ø6,3 c/30 cm c = 508 cm

ARMADURA NEGATIVA:
Lado b
Área de armadura necessária: 0,80 cm²/m
Área de armadura escolhida: 1,56 cm²/m
Detalhamento: 25 Ø6,3 c/20 cm c = 46 cm
Lado d
Área de armadura necessária: 0,80 cm²/m
Área de armadura escolhida: 1,56 cm²/m
Detalhamento: 25 Ø6,3 c/20 cm c = 46 cm

Consumo de aço (+10%): 33,16 kg

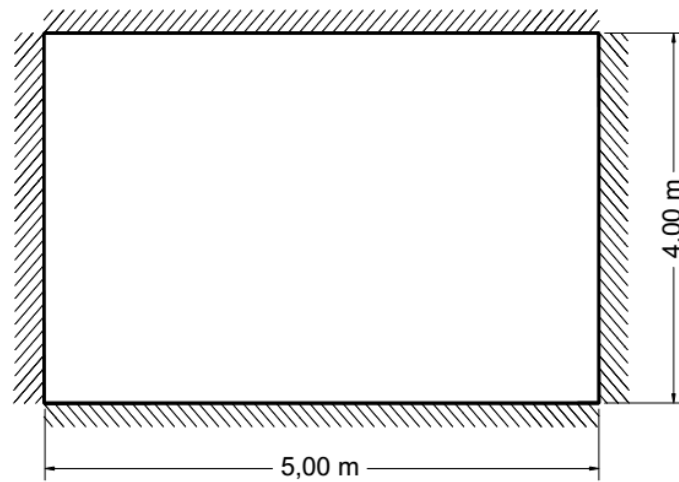
```

Fonte: Autor (2016)

7.6.2 Exemplo 2 (Laje isótropa)

O segundo exemplo é uma laje de piso de despensa de edifício residencial, mostrada na figura 30, com carga de revestimento de 1,0 kN/m². O cobrimento é de 2 cm, com aço CA-50 e Concreto C30.

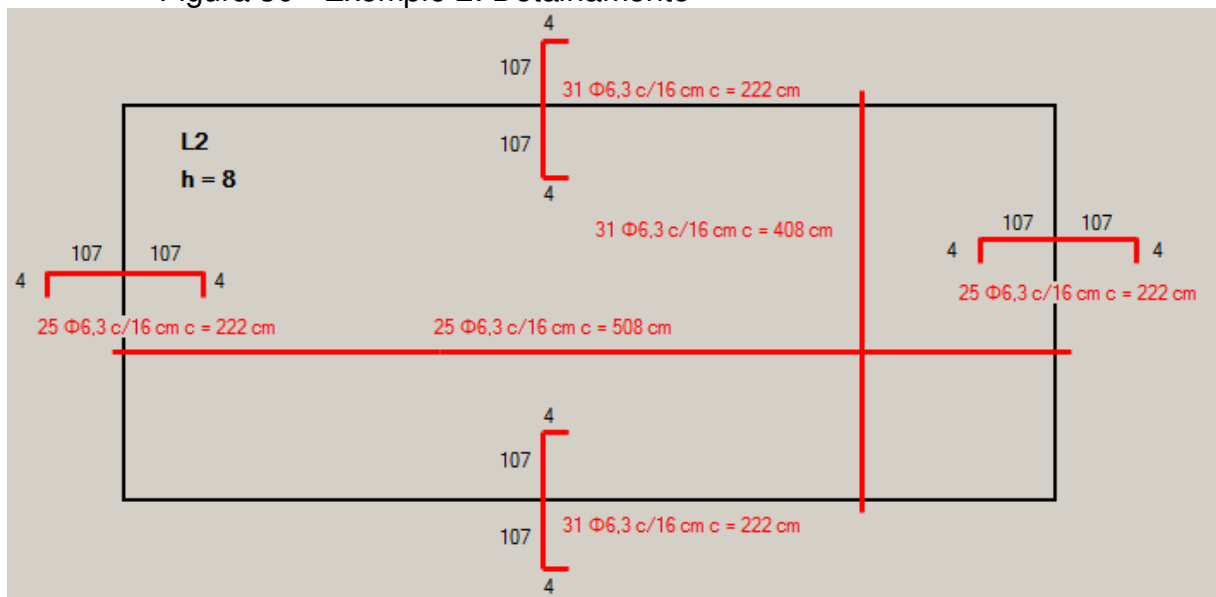
Figura 29 - Exemplo 2: Laje isótropa



Fonte: Autor (2016)

Os resultados do detalhamento e o relatório gerado pelo programa são mostrados, respectivamente, nas figuras 31 e 32.

Figura 30 - Exemplo 2: Detalhamento



Fonte: Autor (2016)

Figura 31 - Exemplo 2: Relatório

Relatório gerado pelo programa FLASH LAJES

DADOS DE ENTRADA:
 Projeto: TCC
 Laje: L2
 Lx (Menor vão efetivo): 4 m
 Ly (Maior vão efetivo): 5 m
 Tipo de Concreto: C30
 Tipo de Aço: CA-50
 Cobrimento: 2,00 cm
 Espessura da laje: 8 cm
 Utilização da laje: Laje de Piso
 Carregamento: 5,00 kN/m²
 Método de cálculo: Plástico
 Vinculação: engastada-engastada-engastada-engastada

ESFORÇOS SOLICITANTES:
 Flechãs
 Flecha calculada: 0,336 cm
 Flecha admissível: 1,600 cm
 Momentos positivos
 Mx: 1,64 kN.m/m
 My: 1,64 kN.m/m
 Momentos Negativos
 Mx': 2,46 kN.m/m
 My': 2,46 kN.m/m
 Reações nos apoios
 Vx': 6,00 kN/m
 Vy': 5,00 kN/m

ARMADURA POSITIVA:
 Direção de Lx (Menor vão):
 Área de armadura necessária: 0,98 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 31 Ø6,3 c/16 cm c = 408 cm
 Direção de Ly (Maior vão):
 Área de armadura necessária: 0,98 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 25 Ø6,3 c/16 cm c = 508 cm

ARMADURA NEGATIVA:
 Lado a
 Área de armadura necessária: 1,49 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 25 Ø6,3 c/16 cm c = 222 cm
 Lado b
 Área de armadura necessária: 1,49 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 31 Ø6,3 c/16 cm c = 222 cm
 Lado c
 Área de armadura necessária: 1,49 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 25 Ø6,3 c/16 cm c = 222 cm
 Lado d
 Área de armadura necessária: 1,49 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 31 Ø6,3 c/16 cm c = 222 cm

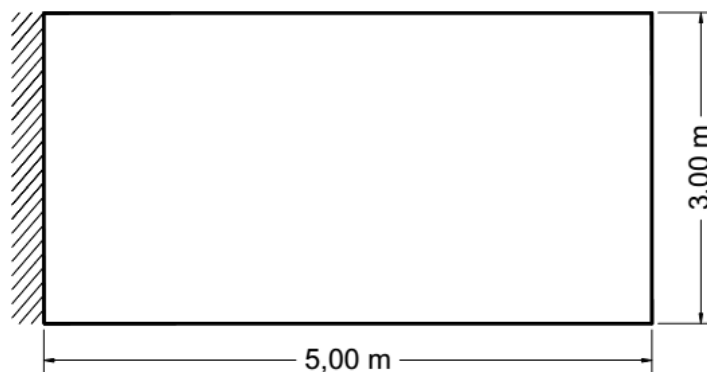
Consumo de aço (+10%): 135,32 kg

Fonte: Autor (2016)

7.6.3 Exemplo 3 (Laje ortótropa)

O terceiro exemplo é uma laje de piso de dormitório de edifício residencial, mostrada na figura 33, com carga de revestimento de $1,0 \text{ kN/m}^2$. O cobrimento é de 2,5 cm, com aço CA-50 e Concreto C35.

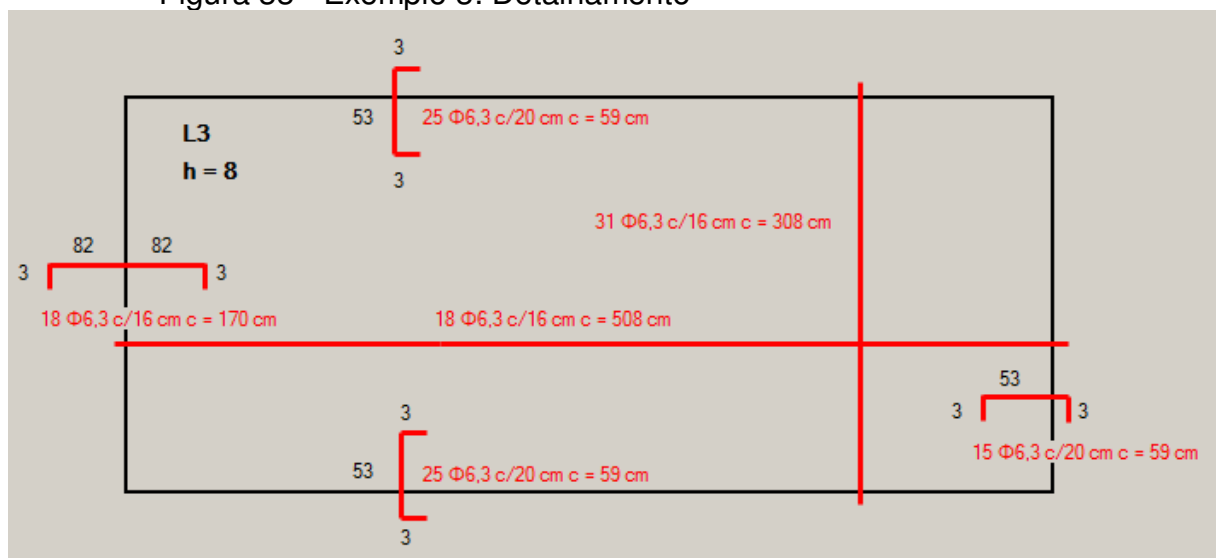
Figura 32 - Exemplo 3: Laje ortótropa



Fonte: Autor (2016)

Os resultados do detalhamento e o relatório gerado pelo programa são mostrados, respectivamente, nas figuras 34 e 35.

Figura 33 - Exemplo 3: Detalhamento



Fonte: Autor (2016)

Figura 34 - Exemplo 3: Relatório

Relatório gerado pelo programa FLASH LAJES

DADOS DE ENTRADA:
 Projeto: TCC
 Laje: L3
 Lx (Menor vão efetivo): 3 m
 Ly (Maior vão efetivo): 5 m
 Tipo de Concreto: C35
 Tipo de Aço: CA-50
 Cobrimento: 2,50 cm
 Espessura da laje: 8 cm
 utilização da laje: Laje de Piso
 Carregamento: 4,50 kN/m²
 Método de Cálculo: Plástico
 Vinculação: engastada-apoiada-apoiada-apoiada

ESFORÇOS SOLICITANTES:
 Flechas
 Flecha calculada: 0,378 cm
 Flecha admissível: 1,200 cm
 Momentos positivos
 Mx: 2,77 kN.m/m
 My: 1,33 kN.m/m
 Momentos Negativos
 My': 2,00 kN.m/m
 Reações nos apoios
 Vx: 3,99 kN/m
 Vy: 3,38 kN/m
 Vy': 5,85 kN/m

ARMADURA POSITIVA:
 Direção de Lx (Menor vão):
 Área de armadura necessária: 1,85 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 31 Ø6,3 c/16 cm c = 308 cm
 Direção de Ly (Maior vão):
 Área de armadura necessária: 0,97 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 18 Ø6,3 c/16 cm c = 508 cm

ARMADURA NEGATIVA:
 Lado a
 Área de armadura necessária: 1,33 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,95 cm²/m
 Detalhamento: 18 Ø6,3 c/16 cm c = 170 cm
 Lado b
 Área de armadura necessária: 0,88 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,56 cm²/m
 Detalhamento: 25 Ø6,3 c/20 cm c = 59 cm
 Lado c
 Área de armadura necessária: 0,88 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,56 cm²/m
 Detalhamento: 15 Ø6,3 c/20 cm c = 59 cm
 Lado d
 Área de armadura necessária: 0,88 cm²/m
 Área de armadura escolhida: 1,56 cm²/m
 Detalhamento: 25 Ø6,3 c/20 cm c = 59 cm

Consumo de aço (+10%): 68,96 kg

Fonte: Autor (2016)

8 CONCLUSÃO

Ao longo dos capítulos do presente trabalho, procurou-se abordar toda a teoria necessária para o projeto de lajes maciças retangulares de concreto armado e também mostrar a utilização do software desenvolvido para projetar lajes maciças sob carregamento uniformemente distribuído. Também foi abordada a Teoria das Charneiras Plásticas, um método menos utilizado que os existentes baseados no regime elástico para dimensionamento de lajes de concreto armado.

Conclui-se que o objetivo principal do trabalho foi plenamente atingido. A saber, foi elaborada uma ferramenta computacional que pode ser usada para o projeto de lajes maciças de concreto armado, sob as limitações já apresentadas ao longo deste trabalho. Os demais objetivos descritos no capítulo Diretrizes da Pesquisa também foram alcançados.

O programa desenvolvido é de simples utilização e pode ser utilizado tanto pelos estudantes de engenharia civil quanto pelos engenheiros civis, sendo recomendado para estes últimos apenas para comparação dos resultados obtidos com outros programas ou pelo cálculo manual realizado.

Durante a pesquisa realizada, constatou-se que há uma variedade de formas para proceder no cálculo de lajes maciças. Há detalhes no procedimento que variam conforme a fonte que se está utilizando como base teórica. Alguns autores usam de muitas tabelas, outros preferem realizar mais cálculos e depender menos de valores tabelados. Há os que consideram redução no cobrimento para algumas situações. O detalhamento das armaduras é possível ser feito de mais de uma maneira. Também são variados os métodos para pré-dimensionamento das lajes. Para determinação dos esforços, existem vários métodos que são válidos e aceitos pela ABNT NBR 6118:2014.

Cabe ao projetista decidir qual forma proceder no cálculo das lajes e também dos demais elementos estruturais, levando em conta a ABNT BR 6118:2014 e outras normas eventualmente necessárias de acordo com o trabalho que se está realizando.

8.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para futuras pesquisas, pode-se citar:

- ✓ Melhorias no software elaborado neste trabalho, visando incluir outros carregamentos além da carga uniformemente distribuída, o cálculo de lajes com uma borda livre e a implementação de algum método de cálculo dos momentos em regime elástico para as lajes armadas em duas direções, como o método das diferenças finitas, o qual requer conhecimentos mais aprofundados em programação que os usados na elaboração deste trabalho;

- ✓ Análise comparativa dos diversos métodos de determinação dos esforços solicitantes de lajes maciças de concreto armado existentes, comparando as armaduras necessárias de acordo com cada método e tratando sobre as vantagens e limitações existentes de cada método;

- ✓ Comparação dos resultados obtidos com o Flash Lajes e outros softwares existentes, sejam estes programas acadêmicos ou comerciais. Apresentando também, de forma mais aprofundada, a evolução no uso da informática na Engenharia de Estruturas.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J.M. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. v.2.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Cargas para o cálculo de estruturas de Edificações. Rio de Janeiro, 1980.

BASTOS, P. S. S. **Lajes de Concreto**. 2015. 119f. Notas de aula. Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2015. Disponível em:<http://wwwp.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm >. Acesso em: 20 junho 2016.

CAMPOS FILHO, A. **Projeto de lajes maciças de concreto armado**. Porto Alegre: UFRGS, 2014. Disponível em: <<https://chasqueweb.ufrgs.br/~americo/eng01112/lajes.pdf>>. Acesso em: 24 junho 2016.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118:2014**. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

FERREIRA, C. C. M. **Notas de aula da disciplina Estruturas de Concreto I**. Engenharia Civil, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2015.

FOLETTTO, I. C. **Desenvolvimento de programa computacional para o projeto de lajes maciças de concreto armado**. 2011. 83f. Trabalho de diplomação apresentado ao Departamento de Engenharia Civil da Escola de Engenharia. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em:<<http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/39137/000825285.pdf?...1> >. Acesso em: 23 junho 2016.

GONZALEZ, R. L. M. **Análise de lajes pela teoria das charneiras plásticas e comparação de custos entre lajes maciças e lajes treliçadas.** 1997. 160f.

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1997ME_RogérioLucianoMizaraGonzalez.pdf>. Acesso em: 24 junho 2016.

KIMURA, A.E. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado: cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais.** 1. ed. São Paulo: Pini, 2007.

PINHEIRO, L.M. **Fundamentos do Concreto e projeto de edifícios.** São Carlos, 2007. Disponível em: <http://coral.ufsm.br/decc/ECC1006/Downloads/Apost_EESC_USP_Libanio.pdf>. Acesso em: 25 novembro 2016.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Lajes Maciças.** São Paulo, 2003. Disponível em: <http://www.fec.unicamp.br/~almeida/au405/Lajes/Lajes_Macicas_EESC.pdf>. Acesso em: 25 setembro 2016.

PINHEIRO, L.M. **Charneiras plásticas em lajes com forma de T: estudo experimental.** 1981. 184 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1981. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1981ME_LibanioMirandaPinheiro.pdf>. Acesso em: 10 outubro 2016.

PINHEIRO, L.M. **Análise elástica e plástica de lajes retangulares de edifícios.** 1988. 303 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/pdf/download/1988DO_LibanioMirandaPinheiro.pdf>. Acesso em: 10 outubro 2016.

APÊNDICES

APÊNDICE A – RESOLUÇÃO DOS EXEMPLOS 1, 2 E 3 ATRAVÉS DO CÁLCULO MANUAL

Este apêndice traz as resoluções dos exemplos feitos para validação do programa criado. Foram usados os dados constantes nos anexos A, B, C e D e toda a teoria desenvolvida neste trabalho.

Exemplo 1:

Pré-dimensionamento:

$$d \cong (2,5 - 0,1n).l^* = (2,5 - 0,1 \times 0) \times 2 = 5 \text{ cm}$$

$$h = d + \frac{\phi_l}{2} + c = 5 + 0,5 + 2 = 7,5 \quad h = 8 \text{ cm (valor adotado)}$$

Flecha:

Combinação quase permanente de serviço:

$$p_{d,ser} = \sum g_{ik} + \sum \psi_{2j} q_{jk} = 3 + 0,3 \times 1,5 = 3,45 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade secante do concreto:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{25}{80} = 0,8625$$

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot \alpha_e \cdot 5600 \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,8625 \times 1 \times 5600 \times 25^{1/2} = 24150,00 \text{ MPa}$$

O valor médio da resistência à tração do concreto:

$$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{25^2} = 2,56 \text{ MPa}$$

O momento de fissuração:

$$m_r = 0,25 \cdot f_{ct,m} \cdot b \cdot h^2 = 0,25 \times 2,56 \times 100 \times 8^2 = 409,6 \text{ kN.cm/m} = 4,10 \text{ kN.m/m}$$

O momento de serviço:

$$m_a = \frac{p_{d,ser} \cdot l_x^2}{8} = \frac{3,45 \cdot 2^2}{8} = 1,72 \text{ kN.m/m}$$

Como $m_a < m_r$, a seção não está fissurada e deve-se considerar $I_{eq} = I_c$.

O valor correspondente ao momento de inércia da seção bruta de concreto:

$$I_{eq} = I_c = b \cdot \frac{h^3}{12} = 100 \times \frac{8^3}{12} = 4267 \text{ cm}^4$$

A flecha de curta duração é dada por:

$$f(t = 0) = \kappa \cdot \frac{p_{d,ser} \cdot l_x^4}{E_{cs} \cdot I_{eq}} = 1,30 \times \frac{0,000345 \times 200^4}{2415,0 \times 4267} = 0,070 \text{ cm}$$

A flecha de longa duração é dada por:

$$f(t = \infty) = (1 + \alpha_f) \cdot f(t = 0) = 2,32 \times 0,070 = 0,1624 \text{ cm}$$

A flecha admissível, para a situação de aceitabilidade visual, segundo a ABNT NBR 6118:2014, é:

$$f_{adm} = \frac{l}{250} = \frac{200}{250} = 0,80 \text{ cm}$$

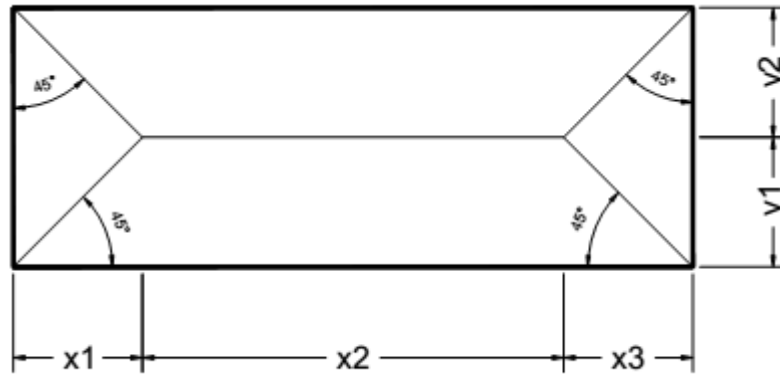
Como a flecha provável é inferior à admissível, pode-se adotar para a laje a espessura de 8 cm.

Cálculo do carregamento total na laje:

$$p = g + q = (0,08 \times 25 + 1) + 1,5 = 4,5 \text{ kN/m}^2$$

Reações de apoio (Figura 36):

Figura 35 - Exemplo 1: Reações de apoio



Fonte: Autor (2016)

Cálculo das distâncias x_1 , x_2 , x_3 , y_1 e y_2 :

$$y_1 = y_2 = \frac{lx}{2} = 1,00 \text{ m}$$

$$x_1 = x_3 = \frac{lx}{2} = 1,00 \text{ m}$$

$$x_2 = Ly - x_1 - x_3 = 5 - 1 - 1 = 3,00 \text{ m}$$

Cálculo das áreas:

$$A_x = \frac{(Ly + x_2) \cdot y_1}{2} = \frac{(5 + 3) \cdot 1}{2} = 4 \text{ m}^2$$

$$A_y = \frac{Lx \cdot x_3}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1 \text{ m}^2$$

Reações:

$$V_x = \frac{P \cdot A_x}{l_y} = \frac{4,5 \times 4}{5} = 3,6 \text{ kN/m}$$

$$V_y = \frac{P \cdot A_y}{l_x} = \frac{4,5 \times 1}{2} = 2,25 \text{ kN/m}$$

Cálculo do momento:

$$m_v = p \cdot \frac{l^2}{8} = \frac{4,5 \times 2^2}{8} = 2,25 \text{ kN.m/m}$$

Cálculo da armadura na direção do menor vão:

$$d = h - c - 0,5 = 8 - 2 - 0,5 = 5,5 \text{ cm}$$

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot w \cdot d^2}} \right) = \frac{5,5}{0,8} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 225}{0,85 \times \frac{2,5}{1,4} \times 100 \times 5,5^2}} \right) = 0,489 \text{ cm}$$

$$x/d = 0,09 < 0,25 \text{ (OK!)}$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} = \frac{0,85 \times 0,8 \times (2,5/1,4) \times 100 \times 0,489}{(50/1,15)} = 1,37 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (adotado)}$$

$$A_{smin} = 0,67 \times 0,15\% \cdot b \cdot h = 0,67 \times \frac{0,15}{100} \times 100 \times 8 = 0,80 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armadura:

$$A_s = 1,37 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{500 - (\frac{15}{2}) - (\frac{15}{2})}{16} = 30,31 = 31 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras (l):

$$l \geq \begin{cases} 200 + 4 + 4 = 208 \text{ cm (adotado)} \\ \left(200 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2} \right) + 6,3 + 6,3 = 197,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Cálculo da armadura na direção do maior vão (armadura de distribuição):

$$A_{sdistr} \geq \begin{cases} \frac{A_{sprinc}}{5} = \frac{1,37}{5} = 0,27 \text{ cm}^2/m \\ \frac{A_{smín}}{2} = 0,60 \text{ cm}^2/m \\ 0,9 \text{ cm}^2/m \text{ (Adotado)} \end{cases}$$

Detalhamento da armadura:

$$A_s = 0,90 \text{ cm}^2/m \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/30 \text{ (} A_s = 1,04 \text{ cm}^2/m \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{200 - (\frac{15}{2}) - (\frac{15}{2})}{30} = 6,16 = 7 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras (l):

$$l \geq \begin{cases} 500 + 4 + 4 = 508 \text{ cm (adotado)} \\ \left(500 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\right) + 6,3 + 6,3 = 497,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Armadura negativa de borda nas duas bordas na direção de Lx:

$$A_{smín} = 0,67 \times 0,15\% \cdot b \cdot h = 0,67 \times \frac{0,15}{100} \times 100 \times 8 = 0,80 \text{ cm}^2/m$$

Detalhamento da armadura:

$$A_s = 0,80 \text{ cm}^2/m \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/20 \text{ (} A_s = 1,56 \text{ cm}^2/m \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{500 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{20} = 24,25 = 25 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras na horizontal (l):

$$l = 0,15 \times 200 + \left(\frac{15}{2}\right) = 37,5 \text{ cm} = 38 \text{ cm}$$

Comprimento dos ganchos (lg):

$$lg = h - 2 \times \text{cobrimento} = 8 - 2 \times 2 = 4 \text{ cm}$$

Comprimento total das barras (lt):

$$l_t = 2 \cdot l_g + l = 2 \times 4 + 38 = 46 \text{ cm}$$

Consumo de aço:

O consumo de aço é calculado somando todos os comprimentos das barras de mesma bitola e multiplicando esses comprimentos pela massa nominal, que varia de acordo com cada bitola, sendo esta mostrada no quadro 11. Para cada bitola se acha o consumo de aço, somando os valores do consumo de aço obtidos de acordo com cada bitola de aço, acha-se o consumo total de aço, o qual é majorado em 10%.

O consumo de aço (Ca) para o Exemplo 1 vale:

$$C_a = 1,1 \times (50 \times 0,46 \times 0,245 + 7 \times 5,08 \times 0,245 + 31 \times 0,245 \times 2,08) = 34 \text{ kg}$$

Exemplo 2:

Flecha:

Será adotada inicialmente a menor espessura permitida pela ABNT NBR 6118:2014 : 8 cm.

Combinação quase permanente de serviço:

$$p_{d,ser} = \sum g_{ik} + \sum \psi_{2j} q_{jk} = 3 + 0,3 \times 2 = 3,6 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade secante do concreto:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{30}{80} = 0,875$$

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot \alpha_e \cdot 5600 \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,875 \times 1 \times 5600 \times 30^{1/2} = 26838,40 \text{ MPa}$$

O valor médio da resistência à tração do concreto:

$$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{30^2} = 2,90 \text{ MPa}$$

O momento de fissuração:

$$m_r = 0,25 \cdot f_{ct,m} \cdot b \cdot h^2 = 0,25 \times 0,290 \times 100 \times 8^2 = 464 \text{ kN.cm/m} = 4,64 \text{ kN.m/m}$$

O momento de serviço:

$$m_a = \alpha \cdot p_{d,ser} \cdot lx^2 = 0,029 \times 3,6 \times 4^2 = 1,67 \text{ kN.m/m}$$

Como $m_a < m_r$, a seção não está fissurada e deve-se considerar $I_{eq} = I_c$.

O valor correspondente ao momento de inércia da seção bruta de concreto:

$$I_{eq} = I_c = b \cdot \frac{h^3}{12} = 100 \times \frac{8^3}{12} = 4267 \text{ cm}^4$$

A flecha de curta duração é dada por:

$$f(t=0) = \kappa \cdot \frac{p_{d,ser} \cdot l_x^4}{E_{cs} \cdot I_{eq}} = 0,18 \times \frac{0,00036 \times 400^4}{2683,840 \times 4267} = 0,145 \text{ cm}$$

A flecha de longa duração é dada por:

$$f(t = \infty) = (1 + \alpha_f) \cdot f(t = 0) = 2,32 \times 0,145 = 0,336 \text{ cm}$$

A flecha admissível, para a situação de aceitabilidade visual, segundo a ABNT NBR 6118:2014, é:

$$f_{adm} = \frac{l}{250} = \frac{400}{250} = 1,60 \text{ cm}$$

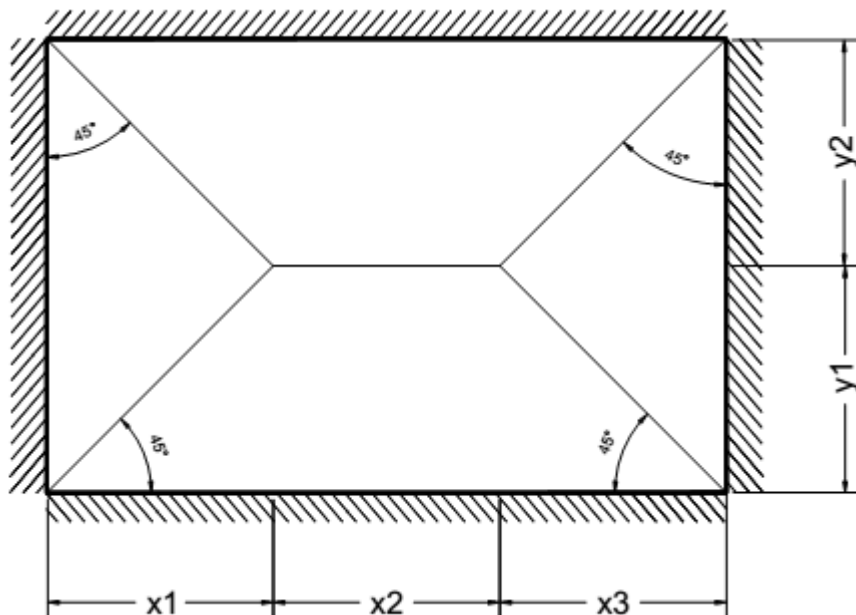
Como a flecha provável é inferior à admissível, pode-se adotar para a laje a espessura de 8 cm.

Cálculo do carregamento total na laje:

$$p = g + q = (0,08 \times 25 + 1) + 2 = 5 \text{ kN/m}^2$$

Reações de apoio (Figura 37):

Figura 36 - Exemplo 2: Reações de apoio



Fonte: Autor (2016)

Cálculo das distâncias x1, x2, x3, y1 e y2:

$$y1 = y2 = \frac{lx}{2} = 2,00 \text{ m}$$

$$x1 = x3 = \frac{ly}{2} = 2,00 \text{ m}$$

$$x2 = Ly - x1 - x3 = 5 - 2 - 2 = 1,00 \text{ m}$$

Cálculo das áreas:

$$A_{x'} = \frac{(Ly + x2).y1}{2} = \frac{(5 + 1).2}{2} = 6 \text{ m}^2$$

$$A_{y'} = \frac{Lx.x3}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4 \text{ m}^2$$

Reações:

$$V_{x'} = \frac{P.A_{x'}}{l_y} = \frac{5 \times 6}{5} = 6 \text{ kN/m}$$

$$V_{y'} = \frac{P.A_{y'}}{l_x} = \frac{5 \times 4}{4} = 5 \text{ kN/m}$$

Cálculo dos momentos:

Como a relação $Lx/Ly = 4/5 = 0,8$, a laje é isótropa. Antes de calcular o momento no vão e nas bordas é necessário calcular os vãos reduzidos:

$$L_{xr} = \frac{2.Lx}{\sqrt{1+i_2} + \sqrt{1+i_4}} = \frac{2 \times 4}{\sqrt{1+1,5} + \sqrt{1+1,5}} = 2,53 \text{ m}$$

$$L_{yr} = \frac{2.Ly}{\sqrt{1+i_1} + \sqrt{1+i_3}} = \frac{2 \times 5}{\sqrt{1+1,5} + \sqrt{1+1,5}} = 3,16 \text{ m}$$

O momento no vão é dado por:

$$m = \frac{p.L_{xr}.L_{yr}}{8 \left(1 + \frac{L_{xr}}{L_{yr}} + \frac{L_{yr}}{L_{xr}} \right)} = \frac{5 \times 2,53 \times 3,16}{8 \left(1 + \frac{2,53}{3,16} + \frac{3,16}{2,53} \right)} = 1,64 \text{ kN.m/m}$$

Os momentos nas bordas têm o mesmo valor:

$$m_{x'} = m_{y'} = 1,64 \times 1,5 = 2,46 \text{ kN.m/m}$$

Cálculo da armadura positiva:

Por se tratar de laje isótropa, a armadura positiva na direção de Lx e de Ly são iguais.

$$d = h - c - 0,5 = 8 - 2 - 0,5 = 5,5 \text{ cm}$$

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d^2}} \right) = \frac{5,5}{0,8} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 164}{0,85 \times \frac{3,0}{1,4} \times 100 \times 5,5^2}} \right) = 0,293 \text{ cm}$$

$$x/d = 0,05 < 0,25 \text{ (OK!)}$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} = \frac{0,85 \times 0,8 \times (3,0/1,4) \times 100 \times 0,293}{(50/1,15)} = 0,98 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (adotado)}$$

$$A_{s\min} = 0,67 \times 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \times 100 \times 8 = 0,80 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armadura positiva na direção de Lx:

$$A_s = 0,98 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{500 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{16} = 30,31 = 31 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras (l):

$$l \geq \begin{cases} 400 + 4 + 4 = 408 \text{ cm (adotado)} \\ \left(400 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\right) + 6,3 + 6,3 = 397,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Detalhamento da armadura positiva na direção de Ly:

$$A_s = 0,98 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{400 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{16} = 24,06 = 25 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras (l):

$$l \geq \begin{cases} 500 + 4 + 4 = 508 \text{ cm (adotado)} \\ \left(500 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\right) + 6,3 + 6,3 = 497,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Cálculo das armaduras negativas:

$$d = h - c - 0,5 = 8 - 2 - 0,5 = 5,5 \text{ cm}$$

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2}} \right) = \frac{5,5}{0,8} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 246}{0,85 \times \frac{3,0}{1,4} \times 100 \times 5,5^2}} \right) = 0,444 \text{ cm}$$

$$x/d = 0,08 < 0,25 \text{ (OK!)}$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} = \frac{0,85 \times 0,8 \times (3,0/1,4) \times 100 \times 0,444}{(50/1,15)} = 1,49 \text{ cm}^2/\text{m (adotado)}$$

$$A_{s\text{mín}} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \times 100 \times 8 = 1,20 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento das armaduras negativas na direção de Lx:

$$A_s = 1,49 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{500 - (\frac{15}{2}) - (\frac{15}{2})}{16} = 30,31 = 31 \text{ ferros (adotado)}$$

Cálculo de a_1 :

$$a_1 \geq \begin{cases} a_1 + l_b = 1,5 \times 5,5 + 23 \times 0,63 = 22,74 \text{ cm} \\ 0,25l + 10\phi = 0,25 \times 400 + 10 \times 0,63 = 106,3 = 107 \text{ cm (adotado)} \end{cases}$$

Comprimento dos ganchos (l_g):

$$l_g = h - 2 \times \text{cobrimento} = 8 - 2 \times 2 = 4 \text{ cm}$$

Comprimento total das barras (l_t):

$$l_t = 2 \cdot l_g + 2 \cdot a_1 = 2 \times 4 + 2 \times 107 = 222 \text{ cm}$$

Detalhamento das armaduras negativas na direção de L_y :

$$A_s = 1,49 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{400 - (\frac{15}{2}) - (\frac{15}{2})}{16} = 24,06 = 25 \text{ ferros (adotado)}$$

Cálculo de a_1 :

$$a_1 \geq \begin{cases} a_1 + l_b = 1,5 \times 5,5 + 23 \times 0,63 = 22,74 \text{ cm} \\ 0,25l + 10\phi = 0,25 \times 400 + 10 \times 0,63 = 106,3 = 107 \text{ cm (adotado)} \end{cases}$$

Comprimento dos ganchos (l_g):

$$l_g = h - 2 \times \text{cobrimento} = 8 - 2 \times 2 = 4 \text{ cm}$$

Comprimento total das barras (l_t):

$$l_t = 2 \cdot l_g + 2 \cdot a_1 = 2 \times 4 + 2 \times 107 = 222 \text{ cm}$$

Consumo de aço:

O consumo de aço (C_a) para o Exemplo 2 vale:

$$C_a = 1,1 \times (62 \times 2,22 \times 0,245 + 50 \times 2,22 \times 0,245 + 25 \times 5,08 \times 0,245 + 31 \times 4,08 \times 0,245) = 136 \text{ kg}$$

Exemplo 3:

Flecha:

Será adotada inicialmente a menor espessura permitida pela ABNT NBR 6118:2014 : 8 cm.

Combinação quase permanente de serviço:

$$p_{d,ser} = \sum g_{ik} + \sum \psi_{2j} q_{jk} = 3 + 0,3 \times 1,5 = 3,45 \text{ kN/m}^2$$

Módulo de elasticidade secante do concreto:

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} = 0,8 + 0,2 \cdot \frac{35}{80} = 0,8875$$

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot \alpha_e \cdot 5600 \cdot f_{ck}^{1/2} = 0,8875 \times 1 \times 5600 \times 35^{1/2} = 29402,92 \text{ MPa}$$

O valor médio da resistência à tração do concreto:

$$f_{ct,m} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} = 0,3 \sqrt[3]{35^2} = 3,21 \text{ MPa}$$

O momento de fissuração:

$$m_r = 0,25 \cdot f_{ct,m} \cdot b \cdot h^2 = 0,25 \times 0,321 \times 100 \times 8^2 = 513,6 \text{ kN.cm/m} = 5,14 \text{ kN.m/m}$$

O momento de serviço:

$$m_a = \alpha \cdot p_{d,ser} \cdot lx^2 = 0,075 \times 3,45 \times 3^2 = 2,33 \text{ kN.m/m}$$

Como $m_a < m_r$, a seção não está fissurada e deve-se considerar $I_{eq} = I_c$.

O valor correspondente ao momento de inércia da seção bruta de concreto:

$$I_{eq} = I_c = b \cdot \frac{h^3}{12} = 100 \times \frac{8^3}{12} = 4267 \text{ cm}^4$$

A flecha de curta duração é dada por:

$$f(t=0) = \kappa \cdot \frac{p_{d,ser} \cdot l_x^4}{E_{cs} \cdot I_{eq}} = 0,73 \times \frac{0,000345 \times 300^4}{2940,292 \times 4267} = 0,163 \text{ cm}$$

A flecha de longa duração é dada por:

$$f(t=\infty) = (1 + \alpha_f) \cdot f(t=0) = 2,32 \times 0,163 = 0,378 \text{ cm}$$

A flecha admissível, para a situação de aceitabilidade visual, segundo a ABNT NBR 6118:2014, é:

$$f_{adm} = \frac{l}{250} = \frac{300}{250} = 1,20 \text{ cm}$$

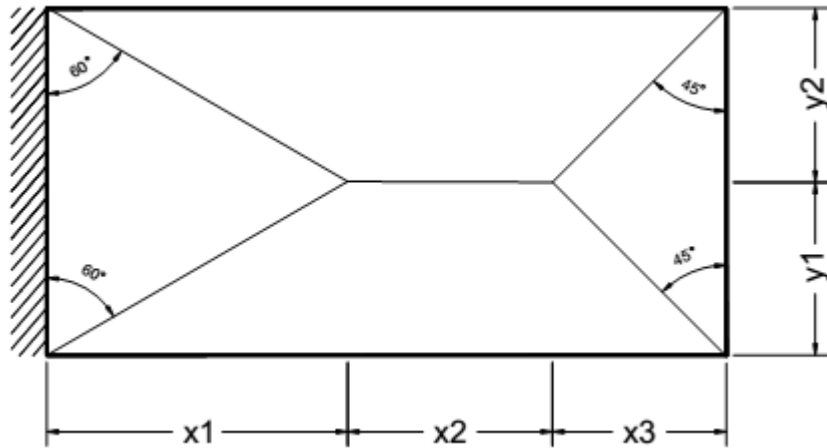
Como a flecha provável é inferior à admissível, pode-se adotar para a laje a espessura de 8 cm.

Cálculo do carregamento total na laje:

$$p = g + q = (0,08 \times 25 + 1) + 1,5 = 4,5 \text{ kN/m}^2$$

Reações de apoio (Figura 38):

Figura 37 - Exemplo 3: Reações de apoio



Fonte: Autor (2016)

Cálculo das distâncias x1, x2, x3, y1 e y2:

$$y1 = y2 = \frac{lx}{2} = 1,50 \text{ m}$$

$$x3 = y1 = 1,50 \text{ m}$$

$$x1 = \tan 60^\circ \cdot y1 = 2,60 \text{ m}$$

$$x2 = 5 - 1,50 - 2,60 = 0,90 \text{ m}$$

Cálculo das áreas:

$$A_x = \frac{(Ly + x2) \cdot y1}{2} = \frac{(5 + 0,90) \cdot 1,50}{2} = 4,43 \text{ m}^2$$

$$A_y = \frac{Lx \cdot x3}{2} = \frac{3 \times 1,50}{2} = 2,25 \text{ m}^2$$

$$A_{y'} = \frac{Lx \cdot x1}{2} = \frac{3 \times 2,60}{2} = 3,90 \text{ m}^2$$

Reações:

$$V_x = \frac{P \cdot A_x}{l_y} = \frac{4,5 \times 4,43}{5} = 3,99 \text{ kN/m}$$

$$V_y = \frac{P \cdot A_y}{l_x} = \frac{4,5 \times 2,25}{3} = 3,38 \text{ kN/m}$$

$$V_{y'} = \frac{P \cdot A_{y'}}{l_x} = \frac{4,5 \times 3,90}{3} = 5,85 \text{ kN/m}$$

Cálculo dos momentos:

Como a relação $L_x/L_y = 3/5 = 0,6$, a laje é ortótropa. É necessário calcular o coeficiente de ortotropia:

$$\varphi = \frac{12 - i_2 - i_4}{12 - i_1 - i_3} \cdot \left(\frac{L_x}{L_y}\right)^{1,7} = \frac{12 - 0 - 0}{12 - 1,5 - 0} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{1,7} = 0,480$$

$$L_{xr} = \frac{2 \cdot l_x}{\sqrt{1 + i_2} + \sqrt{1 + i_4}} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = 3 \text{ m}$$

$$L_{yr} = \frac{2 \cdot l_y}{\sqrt{1 + i_1} + \sqrt{1 + i_3}} = \frac{2 \times 5}{\sqrt{1 + 1,5} + \sqrt{1 + 0}} = 3,87 \text{ m}$$

$$L_{yr}^* = \frac{L_{yr}}{\sqrt{\varphi}} = \frac{3,87}{\sqrt{0,480}} = 5,59$$

$$m = m_x = \frac{p \cdot L_{xr} \cdot L_{yr}^*}{8 \cdot \left(1 + \frac{L_{xr}}{L_{yr}^*} + \frac{L_{yr}^*}{L_{xr}}\right)} = \frac{4,5 \times 3 \times 5,59}{8 \cdot \left(1 + \frac{3}{5,59} + \frac{5,59}{3}\right)} = 2,77 \text{ kN.m/m}$$

$$m_y = \varphi \cdot m_x = 0,480 \times 2,77 = 1,33 \text{ kN.m/m}$$

O momento na borda engastada vale:

$$m_{y'} = 1,5 \cdot m_y = 1,5 \times 1,33 = 2,00 \text{ kN.m/m}$$

Cálculo das armaduras positivas:

Por se tratar de laje ortótropa, a armadura positiva na direção de L_x e de L_y são diferentes.

Armadura na direção de Lx:

$$d = h - c - 0,5 = 8 - 2,5 - 0,5 = 5,0 \text{ cm}$$

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot b \cdot w \cdot d^2}} \right) = \frac{5,0}{0,8} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 277}{0,85 \times \frac{3,5}{1,4} \times 100 \times 5^2}} \right) = 0,474 \text{ cm}$$

$$x/d = 0,09 < 0,25 \text{ (OK!)}$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} = \frac{0,85 \times 0,8 \times (3,5/1,4) \times 100 \times 0,474}{(50/1,15)} = 1,85 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (adotado)}$$

$$A_{s\text{mín}} = 0,67 \times 0,164\% \cdot b \cdot h = \frac{0,164}{100} \times 100 \times 8 = 0,88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armadura positiva na direção de Lx:

$$A_s = 1,85 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{500 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{16} = 30,31 = 31 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras (l):

$$l \geq \begin{cases} 300 + 4 + 4 = 308 \text{ cm (adotado)} \\ \left(300 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\right) + 6,3 + 6,3 = 297,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Armadura na direção de Ly:

$$d = h - c - 0,5 = 8 - 2,5 - 1 = 4,5 \text{ cm}$$

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot bw \cdot d^2}} \right) = \frac{4,5}{0,8} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 133}{0,85 \times \frac{3,5}{1,4} \times 100 \times 4,5^2}} \right) = 0,249 \text{ cm}$$

$$x/d = 0,05 < 0,25 \text{ (OK!)}$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} = \frac{0,85 \times 0,8 \times (3,5/1,4) \times 100 \times 0,249}{(50/1,15)} = 0,97 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (adotado)}$$

$$A_{smin} = 0,67 \times 0,164\% \cdot b \cdot h = \frac{0,164}{100} \times 100 \times 8 = 0,88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armadura positiva na direção de Ly:

$$A_s = 0,97 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{300 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{16} = 17,81 = 18 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras (l):

$$l \geq \begin{cases} 500 + 4 + 4 = 508 \text{ cm (adotado)} \\ \left(500 - \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\right) + 6,3 + 6,3 = 497,6 \text{ cm} \end{cases}$$

Armadura na borda engastada:

$$d = h - c - 0,5 = 8 - 2,5 - 0,5 = 5,0 \text{ cm}$$

$$x = \frac{d}{\lambda'} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot m_d}{\alpha_c \cdot f_{cd} \cdot bw \cdot d^2}} \right) = \frac{5,0}{0,8} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2 \times 1,4 \times 199}{0,85 \times \frac{3,5}{1,4} \times 100 \times 5^2}} \right) = 0,337 \text{ cm}$$

$$x/d = 0,07 < 0,25 \text{ (OK!)}$$

$$A_s = \frac{\alpha_c \cdot \lambda' \cdot f_{cd} \cdot b \cdot x}{f_{yd}} = \frac{0,85 \times 0,8 \times (3,5/1,4) \times 100 \times 0,337}{(50/1,15)} = 1,32 \text{ cm}^2/\text{m} \text{ (adotado)}$$

$$A_{s\min} = 0,164\% \cdot b \cdot h = \frac{0,164}{100} \times 100 \times 8 = 1,31 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armaduras negativa da borda engastada:

$$A_s = 1,32 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/16 \text{ (} A_s = 1,95 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{300 - (\frac{15}{2}) - (\frac{15}{2})}{16} = 17,81 = 18 \text{ ferros (adotado)}$$

Cálculo de a_1 :

$$a_1 \geq \begin{cases} a_1 + l_b = 1,5 \times 5,0 + 21 \times 0,63 = 20,73 \text{ cm} \\ 0,25l + 10\phi = 0,25 \times 300 + 10 \times 0,63 = 81,3 = 82 \text{ cm (adotado)} \end{cases}$$

Comprimento dos ganchos (l_g):

$$l_g = h - 2 \times \text{cobrimento} = 8 - 2 \times 2,5 = 3 \text{ cm}$$

Comprimento total das barras (l_t):

$$l_t = 2 \cdot l_g + 2 \cdot a_1 = 2 \times 3 + 2 \times 82 = 170 \text{ cm}$$

Armadura negativa de borda nas duas bordas na direção de Lx:

$$A_{s\min} = 0,67 \times 0,164\% \cdot b \cdot h = 0,67 \times \frac{0,164}{100} \times 100 \times 8 = 0,88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armadura:

$$A_s = 0,80 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/20 \text{ (} A_s = 1,56 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{500 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{20} = 24,25 = 25 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras na horizontal (l):

$$l = 0,15 \times 300 + \left(\frac{15}{2}\right) = 52,5 \text{ cm} = 53 \text{ cm (adotado)}$$

Comprimento dos ganchos (lg):

$$l_g = h - 2 \times \text{cobrimento} = 8 - 2 \times 2,5 = 3 \text{ cm}$$

Comprimento total das barras (lt):

$$l_t = 2 \cdot l_g + l = 2 \times 3 + 53 = 59 \text{ cm}$$

Armadura negativa de borda na borda não engastada na direção de Ly:

$$A_{smín} = 0,67 \times 0,164\% \cdot b \cdot h = 0,67 \times \frac{0,164}{100} \times 100 \times 8 = 0,88 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Detalhamento da armadura:

$$A_s = 0,80 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \phi 6,3 \text{ c}/20 \text{ (} A_s = 1,56 \text{ cm}^2/\text{m} \text{)}$$

Número de ferros (n):

$$n = \frac{300 - \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{15}{2}\right)}{20} = 14,25 = 15 \text{ ferros (adotado)}$$

Comprimento das barras na horizontal (l):

$$l = 0,15 \times 300 + \left(\frac{15}{2}\right) = 52,5 \text{ cm} = 53 \text{ cm (adotado)}$$

Comprimento dos ganchos (lg):

$$l_g = h - 2 \times \text{cobrimento} = 8 - 2 \times 2,5 = 3 \text{ cm}$$

Comprimento total das barras (lt):

$$l_t = 2 \cdot l_g + l = 2 \times 3 + 53 = 59 \text{ cm}$$

Consumo de aço:

O consumo de aço (Ca) para o Exemplo 3 vale:

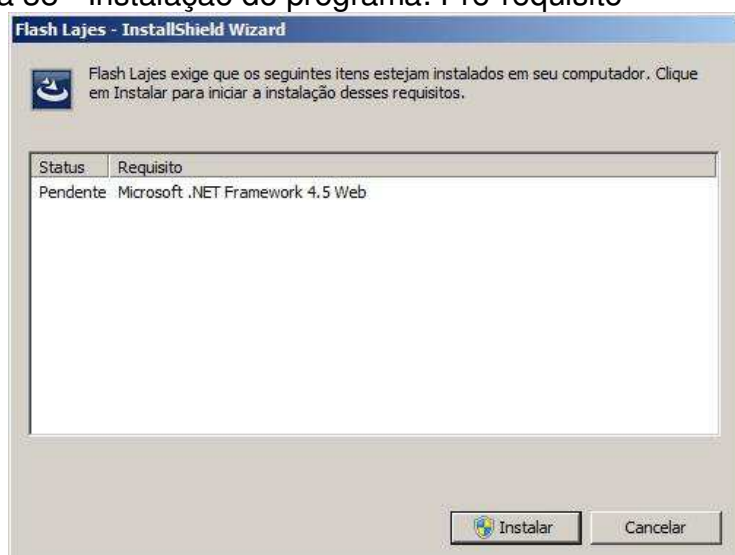
$$C_a = 1,1 \times (50 \times 0,59 \times 0,245 + 15 \times 0,59 \times 0,245 + 18 \times 1,70 \times 0,245 + 18 \times 5,08 \times 0,245 + 31 \times 3,08 \times 0,245) = 69 \text{ kg}$$

APÊNDICE B – INSTALAÇÃO DO FLASH LAJES

O programa desenvolvido necessita de alguns requisitos para funcionar normalmente, por isso a necessidade de executar o instalador ao invés de abrir diretamente o executável do programa. Este apêndice se destina a mostrar as etapas necessárias para instalação do programa.

Ao executar o arquivo de instalação do programa, *setupFL.exe*, caso não haja a versão 4.5 ou superior do Microsoft .Net Framework instalada no computador, é exibida a tela mostrada na figura 39. Para prosseguir a instalação é necessário estar conectado à internet, pois o programa fará o download dos arquivos necessários para instalar o Microsoft .Net Framework.

Figura 38 - Instalação do programa: Pré-requisito



Fonte: Autor (2016)

Caso a tela mostrada na figura 39 não seja exibida, a primeira tela a ser mostrada é a da figura 40. Basta clicar em <Avançar> para prosseguir a instalação.

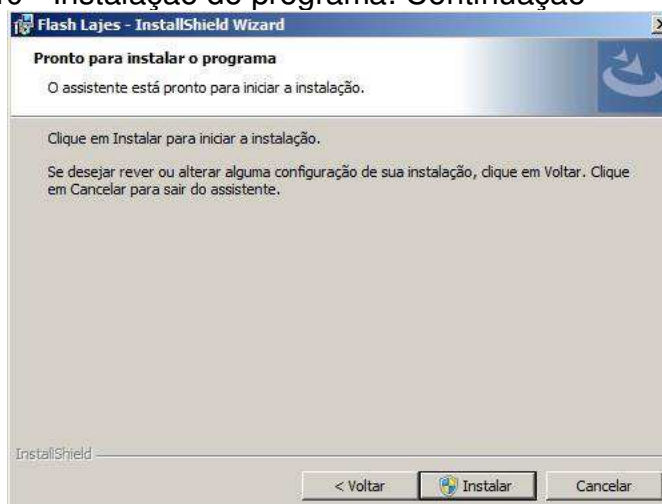
Figura 39 - Instalação do programa: Início



Fonte: Autor (2016)

Após isso, será exibida a tela mostrada na figura 41. Para prosseguir a instalação, deve-se clicar em <Instalar>.

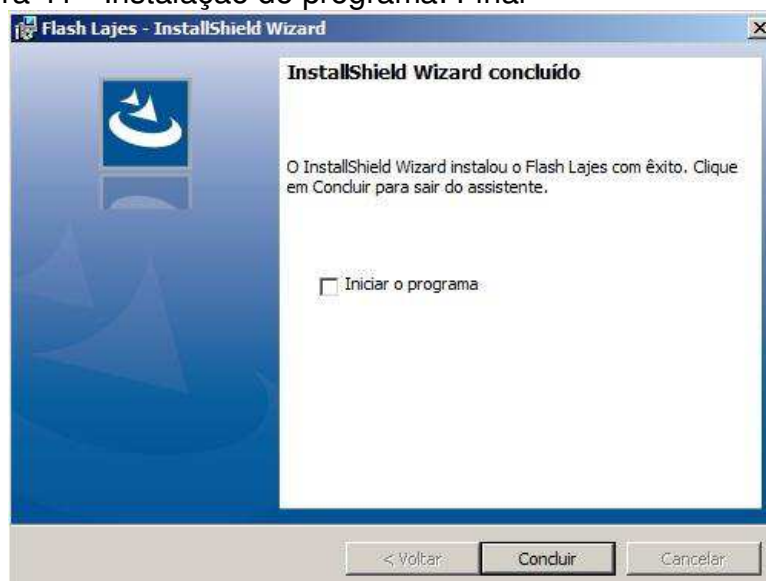
Figura 40 - Instalação do programa: Continuação



Fonte: Autor (2016)

Por fim, será exibida uma tela como a mostrada na figura 42, onde o usuário tem a opção de iniciar o programa logo após a instalação. Uma vez concluída a instalação, será criado um atalho do programa na área de trabalho, de onde o programa poderá ser acessado sempre que necessário.

Figura 41 - Instalação do programa: Final



Fonte: Autor (2016)

ANEXOS

ANEXO A – VALORES DE ALFA

Quadro 8 - Valores de α para o cálculo do momento de serviço na verificação da flecha

L_x/L_y			0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
	m_x		0,099	0,086	0,073	0,061	0,051	0,042
	m_y		0,032	0,037	0,040	0,042	0,043	0,042
	m_x		0,041	0,038	0,034	0,029	0,025	0,021
	m_y		0,010	0,013	0,017	0,018	0,020	0,021
	$m_{x'}$		0,084	0,080	0,074	0,067	0,059	0,052
	$m_{y'}$		0,058	0,058	0,058	0,057	0,055	0,052
	m_x		0,057	0,052	0,045	0,039	0,033	0,027
	m_y		0,016	0,020	0,024	0,026	0,027	0,027
	$m_{x'}$		0,119	0,111	0,101	0,091	0,080	0,070
	$m_{y'}$		0,082	0,082	0,080	0,078	0,074	0,070
	m_x		0,084	0,065	0,049	0,037	0,027	0,020
	m_y		0,036	0,038	0,039	0,037	0,034	0,031
	$m_{y'}$		0,119	0,111	0,102	0,091	0,080	0,070
	m_x		0,042	0,041	0,039	0,037	0,034	0,031
	m_y		0,008	0,010	0,013	0,016	0,018	0,020
	$m_{x'}$		0,084	0,083	0,082	0,078	0,074	0,070
	m_x		0,091	0,075	0,060	0,048	0,037	0,030
	m_y		0,034	0,038	0,040	0,039	0,038	0,036
	$m_{y'}$		0,122	0,117	0,110	0,102	0,093	0,084
	m_x		0,060	0,056	0,051	0,046	0,040	0,036
	m_y		0,015	0,019	0,023	0,026	0,028	0,030
	$m_{x'}$		0,122	0,116	0,109	0,101	0,093	0,084
	m_x		0,042	0,040	0,037	0,033	0,029	0,026
	m_y		0,009	0,012	0,015	0,018	0,019	0,021
	$m_{x'}$		0,085	0,083	0,079	0,074	0,068	0,062
	$m_{y'}$		0,056	0,057	0,058	0,058	0,057	0,055
	m_x		0,055	0,048	0,040	0,033	0,026	0,021
	m_y		0,018	0,023	0,025	0,027	0,026	0,026
	$m_{x'}$		0,114	0,102	0,091	0,088	0,066	0,055
	$m_{y'}$		0,082	0,081	0,078	0,074	0,068	0,062

Fonte: Campos Filho (2014), adaptado pelo Autor (2016)

ANEXO B – VALORES PARA O DETALHAMENTO DAS ARMADURAS

Quadro 9 - Área da seção de armadura por metro de largura (cm²/m)

Espaçamento	Bitola				
s (cm)	5	6,3	8	10	12,5
10	1,96	3,12	5,03	7,85	12,27
11	1,78	2,83	4,57	7,14	11,16
12	1,64	2,60	4,19	6,54	10,23
13	1,51	2,40	3,87	6,04	9,44
14	1,40	2,23	3,59	5,61	8,77
15	1,31	2,08	3,35	5,24	8,18
16	1,23	1,95	3,14	4,91	7,67
17	1,15	1,83	2,96	4,62	7,22
18	1,09	1,73	2,79	4,36	6,82
19	1,03	1,64	2,65	4,13	6,46
20	0,98	1,56	2,51	3,93	6,14
21	0,93	1,48	2,39	3,74	5,84
22	0,89	1,42	2,28	3,57	5,58
23	0,85	1,36	2,19	3,41	5,34
24	0,82	1,30	2,09	3,27	5,11
25	0,79	1,25	2,01	3,14	4,91
26	0,76	1,20	1,93	3,02	4,72
27	0,73	1,15	1,86	2,91	4,55
28	0,70	1,11	1,80	2,80	4,38
29	0,68	1,07	1,73	2,71	4,23
30	0,65	1,04	1,68	2,62	4,09

Fonte: Araújo (2010), adaptado pelo Autor (2016)

ANEXO C – VALORES PARA LB

Quadro 10 - Comprimento de ancoragem básico com e sem gancho

COMPRIMENTO DE ANCORAGEM BÁSICO									
Concreto	Zona de Aderência	CA-50		CA-60				CA-25	
		Nervurado $\eta_1=2,25$		Liso $\eta_1=1,0$		Entalhado $\eta_1=1,4$		Liso $\eta_1=1,0$	
		Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com	Sem	Com
C10	Má	99 ϕ	69 ϕ	268 ϕ	187 ϕ	191 ϕ	134 ϕ	112 ϕ	78 ϕ
	Boa	69 ϕ	49 ϕ	187 ϕ	131 ϕ	134 ϕ	94 ϕ	78 ϕ	55 ϕ
C15	Má	76 ϕ	53 ϕ	204 ϕ	143 ϕ	146 ϕ	102 ϕ	85 ϕ	60 ϕ
	Boa	53 ϕ	37 ϕ	143 ϕ	100 ϕ	102 ϕ	71 ϕ	60 ϕ	42 ϕ
C20	Má	62 ϕ	44 ϕ	169 ϕ	118 ϕ	120 ϕ	84 ϕ	70 ϕ	49 ϕ
	Boa	44 ϕ	31 ϕ	118 ϕ	83 ϕ	84 ϕ	59 ϕ	49 ϕ	34 ϕ
C25	Má	54 ϕ	38 ϕ	145 ϕ	102 ϕ	104 ϕ	73 ϕ	61 ϕ	42 ϕ
	Boa	38 ϕ	26 ϕ	102 ϕ	71 ϕ	73 ϕ	51 ϕ	42 ϕ	29 ϕ
C30	Má	48 ϕ	33 ϕ	129 ϕ	90 ϕ	92 ϕ	64 ϕ	54 ϕ	38 ϕ
	Boa	33 ϕ	23 ϕ	90 ϕ	63 ϕ	64 ϕ	45 ϕ	38 ϕ	27 ϕ
C35	Má	43 ϕ	30 ϕ	116 ϕ	81 ϕ	83 ϕ	58 ϕ	48 ϕ	34 ϕ
	Boa	30 ϕ	21 ϕ	81 ϕ	57 ϕ	58 ϕ	41 ϕ	34 ϕ	24 ϕ
C40	Má	39 ϕ	28 ϕ	106 ϕ	74 ϕ	76 ϕ	53 ϕ	44 ϕ	31 ϕ
	Boa	28 ϕ	19 ϕ	74 ϕ	52 ϕ	53 ϕ	37 ϕ	31 ϕ	22 ϕ
C45	Má	36 ϕ	25 ϕ	98 ϕ	69 ϕ	70 ϕ	49 ϕ	41 ϕ	29 ϕ
	Boa	25 ϕ	18 ϕ	69 ϕ	48 ϕ	49 ϕ	34 ϕ	29 ϕ	20 ϕ
C50	Má	34 ϕ	24 ϕ	92 ϕ	64 ϕ	65 ϕ	46 ϕ	38 ϕ	27 ϕ
	Boa	24 ϕ	17 ϕ	64 ϕ	45 ϕ	46 ϕ	32 ϕ	27 ϕ	19 ϕ
Elaborada por Marcos Vinícius N. Moreira e Libânio M. Pinheiro De acordo com a NBR 6118:2003 Comprimento de ancoragem básico: $\ell_b = (\phi/4) \cdot (f_{yd}/f_{bd})$ Resistência de cálculo do aço ao escoamento: $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ Resistência de aderência: $f_{bd} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot f_{ctd}$ Resistência de cálculo do concreto à tração: $f_{ctd} = (0,21/\gamma_c) \cdot f_{ck}^{2/3}$ $\eta_2 = \begin{cases} 1,0 \text{ p/ BOA aderência} \\ 0,7 \text{ p/ MÁ aderência} \end{cases}$ $\eta_3 = \begin{cases} 1,0 \text{ p/ } \phi \leq 32 \text{ mm} \\ 0,92 \text{ p/ } \phi \leq 40 \text{ mm} \end{cases}$ $\gamma_c = 1,4; \gamma_s = 1,15$ Valores de ℓ_b SEM e COM gancho (redução de 30%: $0,7\ell_b$)									

Fonte: Pinheiro (2007), adaptado pelo Autor (2016)

ANEXO D – VALORES PARA MASSA NOMINAL DAS BITOLAS DE AÇO

Quadro 11 - Massa nominal para cada bitola de aço disponível no Flash
Lajes

Bitola (mm)	Massa Nominal (kg/m)
5	0,154
6,3	0,245
8	0,395
10	0,617
12,5	0,963

Fonte: Pinheiro (2007), adaptado pelo Autor (2016)