UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

GILCYVANIA CASTRO CORVELO COSTA

VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO DE ALTA RESISTÊNCIA SUBMETIDOS À FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL SEGUNDO O MÉTODO GERAL

São Luís
2016

GILCYVANIA CASTRO CORVELO COSTA

VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO DE ALTA RESISTÊNCIA SUBMETIDOS À FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL SEGUNDO O MÉTODO GERAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Estadual do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Aurélio Barros Aguiar

São Luís

2016

Costa, Gilcyvania Castro Corvelo.
Verificação da estabilidade de pilares esbeltos de concreto de alta resistência submetidos à flexo-compressão normal segundo o método geral / Gilcyvania Castro Corvelo Costa. – São Luís, 2016.

131f

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Maranhão, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Aurélio Barros Aguiar.

1.Pilares esbeltos. 2.Método geral. 3.Concreto de alta resistência. I.Título

CDU:624.012.45:004.421

GILCYVANIA CASTRO CORVELO COSTA

VERIFICAÇÃO DA ESTABILIDADE DE PILARES ESBELTOS DE CONCRETO DE ALTA RESISTÊNCIA SUBMETIDOS À FLEXO-COMPRESSÃO NORMAL SEGUNDO O MÉTODO GERAL

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Estadual do Maranhão, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: 15 / 07 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Aurélio Barros Aguiar (Orientador)
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Msc. João Celso Martins Marques
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Esp. Clayton Carvalhêdo Silva
Universidade Estadual do Maranhão

Dedico este trabalho à minha mãe, Dilvania, por todo amor e dedicação.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela vida que me foi dada, pela fé inabalável e por ter me dado serenidade e paciência durante esses longos cinco anos de graduação.

À minha mãe, Dilvania, pelo exemplo de mulher no qual me espelho, por ser a minha motivação e por estar comigo em todos os momentos da minha vida. Ao meu pai, Gilberto, pelo incentivo que me deu na profissão que escolhi, sempre acreditando no meu potencial. Às minhas irmãs, Glayci e Gilvania, que sempre me apoiaram e acompanharam cada passo por mim dado. Às minhas sobrinhas amadas, Sarah e Júlia, pela alegria me dada em dias difíceis.

Ao rapaz que conquistou meu coração, Rafael Abreu, o meu amor, meu melhor amigo e meu co-orientador neste trabalho. Ele que fez eu acreditar em mim e no quanto eu sou capaz, que tornou meus dias mais felizes com seu amor, e que me ajudou extremamente: estudando comigo, tirando dúvidas, sugerindo, emprestando livros, auxiliando nos conceitos de programação dos algoritmos e insistindo que eu estudasse mesmo nos dias de cansaço.

Ao meu orientador, amigo e professor, Eduardo Aguiar, pela amizade, carinho, compreensão, paciência, incentivo, conselhos e conhecimento a mim repassado. Por ter me orientado brilhantemente na iniciação científica, no artigo científico, no estágio obrigatório e agora no trabalho de conclusão.

Ao meu eterno professor, Luís Fernando Soares. Meu mentor desde o curso técnico, aquele que despertou meu interesse por estruturas em 2011, e que fez eu conquistar boa parte do que conquistei nessa área através de seu imenso incentivo.

Aos demais professores que também contribuíram para o meu interesse por estruturas, em especial a grande referência na área, João Celso Martins, por ter me presenteado com suas aulas e com seu vasto conhecimento no assunto. E ao professor do IFMA, Rodrigo Neves, por ter me permitido fazer quatro disciplinas suas como ouvinte, aprimorando ainda mais os meus conhecimentos.

Aos meus amigos de graduação que fizeram dessa caminhada menos árdua e mais feliz: Érika Bianca, Ytallo Albuquerque, Witson Andrade, Rêmerson Corrêa, João Victor Barbosa, Samuel Sousa, Thiago José, Lana Larissa e Rayssa Fernanda.

Aos amigos de Edificações/IFMA: Quézia Santos, Jacilmara Melo, Mayara Câmara, Cleia Silva, Adriano Rodrigues, Maikon Queiroz e Mayanne Câmara.

Aos amigos de sempre e para sempre: Fernanda Borges e Ronald Barbosa.

"Intuição estrutural, uma das ferramentas mais valiosas a um engenheiro de estruturas. Esta intuição é uma maneira de sentir a estrutura, como as cargas caminham, como a estrutura se deforma, quais são seus pontos críticos, e isso não de forma mediada pela linguagem ou pela matemática, e sim com outras partes do nosso cérebro".

Eng.º Ricardo Leopoldo e França Silva

RESUMO

O presente trabalho apresenta a verificação de estabilidade de pilares esbeltos através do uso do Método Geral. Restringido ao caso de flexo-compressão normal, seção retangular constante e armadura simétrica ao longo do pilar, o estudo aplica-se a concretos de alta resistência, recentemente incluídos na ABNT NBR 6118:2014. Para explanação do tema proposto, fez-se uso de toda formulação baseada no diagrama tensão-deformação do concreto na forma parábola-retângulo. Inicialmente, estudou-se as características dos materiais: concreto e aço estrutural; o Estado Limite Último de Instabilidade (ELU-I), característico das barras esbeltas, para melhor definir as configurações de equilíbrio na forma reta e fletida; as não-linearidades física (o concreto é um material que não segue a Lei de Hooke) e geométrica, obrigatoriamente exigidas no cálculo de pilares esbeltos; além é claro, a teoria de segunda ordem. Apresentou-se o roteiro para elaboração de Diagramas M-N-1/r e da verificação da estabilidade de barras pelo Método Geral, tomando como base a Analogia de Mohr. Por fim, apresentou-se dois exemplos de verificação de estabilidades de barras submetidas à flexo-compressão, sendo a primeira bi-apoiada e a segunda, engaste-livre; e dimensionou-se um pilar intermediário, apresentando todos os passos dos procedimentos de forma clara e didática.

Palavras-chave: Pilares Esbeltos. Método Geral. Concreto de Alta Resistência.

ABSTRACT

This paper presents the verification of stability of slender columns by using the General Method. Restricted to the case of the standard flexo-compression, constant rectangular section and symmetrical armor along the column, the study applies to high-strength concrete, recently included in ABNT NBR 6118:2014. For a discussion of the theme, it was made use of the entire formulation based on concrete stress-strain diagram in the parabola-rectangle shape. Initially, we studied the characteristics of materials: concrete and structural steel; the ultimate limit state of instability (ELU-I), characteristic of slender bars, to better define the balance settings on the straight and bent shape; the physical nonlinearity (concrete is a material that does not follow Hooke's Law) and geometric mandatorily required in the calculation of slender columns; and of course, the theory of second order. He presented the roadmap for preparing diagrams M-N-1/r and monitoring stability bars by General Method, based on the Analogy of Mohr. Finally, presented are two stabilities verification examples bars subjected to flexion-compression, the first bi-supported and the second clamped-free; and scaled to an intermediate pillar, with all the steps of the procedures in a clear and didactic way.

Keywords: Slender columns. General method. High-Strength Concrete.

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas

CAR – Concreto de Alta Resistência

ELU – Estado Limite Último

ELU – I - Estado Limite Último de Instabilidade

NL – Não - Linearidades

NLF – Não – Linearidade Física

NLG – Não – Linearidade Geométrica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo visa apresentar a importância do assunto da análise de pilares para a engenharia de estruturas, com ênfase nos pilares esbeltos, que é o foco principal deste presente trabalho. Além disso, serão expostos a justificativa, objetivos, metodologia e estrutura deste.

1.1 Considerações Iniciais

Atualmente a engenharia vem sofrendo diversas mudanças, principalmente no que diz respeito a estruturas mais arrojadas e econômicas. Com o avanço e a concorrência no mercado, arquitetos se reinventam apresentando projetos cada vez mais inovadores. E em paralelo, os engenheiros de estruturas surgem para desempenhar um importante papel: o dimensionamento estrutural. Para determinar os elementos estruturais, as análises estão cada vez mais refinadas, apurando ao máximo o cálculo dos esforços, fazendo assim um melhor uso dos materiais, mantendo em harmonia economia e segurança.

Para atender o novo paradigma mercadológico, torna-se cada vez mais frequentes o uso de peças esbeltas. Isso porque o emprego de materiais com resistências mais altas, como aço CA-50A e concretos com f_{ck} superior a 30MPa, deixam a estrutura com seções mais otimizadas, portanto mais leves, mas ainda resistindo a mesma intensidade de esforços. Em 2014, com a introdução dos *Concretos de Alta Resistência* (CAR) na norma brasileira, a ABNT NBR 6118:2014 – Projeto de Estruturas de Concreto, viu-se uma necessidade ainda maior de estabelecer relações práticas e eficazes para o dimensionamento de peças esbeltas confeccionadas em concreto com resistências entre 50 e 90 MPa, já que na versão anterior da mesma, este grupo de concretos não existiam.

Segundo Aguiar (2000), o uso de concreto de alta resistência no Brasil, iniciou-se por volta dos anos 60, com importantes obras em São Paulo como o Centro Empresarial das Nações Unidas e a ELETROPAULO, em Brasília como o Supremo Tribunal de Justiça e em Salvador como o Centro Empresarial PREVINOR e o Edifício Suarez Trade Center, todos estes com resistência superior à 50MPa.

Ainda segundo Aguiar (2000), o conceito de concreto de alta resistência ainda varia muito na literatura. Autores e normas especificam resistências à compressão diferentes para esta consideração. Neste trabalho, baseando-se na atualização mais recente da norma brasileira, será admitido como concreto de alta resistência aqueles com f_{ck} entre 50MPa e 90MPa.

O uso de concreto de alta resistência em pilares esbeltos resulta em um aumento da área útil em edificações, um alívio no carregamento das fundações e, portanto, economia visto que as seções menores resistiriam igualmente aos esforços produzidos em seções maiores, isso devido à alta resistência à compressão. Porém, problemas de instabilidade em peças esbeltas, onde verifica-se um colapso não mais por ruptura e sim por perda de equilíbrio, geram ainda um entrave para utilização desses tipos de concreto, além do problema da alta ductilidade encontrada em peças de CAR e também pelo fato de até 2014 as formulações para este tipo de concreto ainda não serem normatizadas no país.

Para o dimensionamento de pilares, a norma brasileira atualmente apresenta quatro métodos que podem ser utilizados. São eles: Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada, Método do Pilar-Padrão com Rigidez κ Aproximada, Método do Pilar-Padrão Acoplado ao Diagrama M, N, 1/r (ou Pilar-Padrão Melhorado) e o Método Geral. A imagem a seguir, apresenta as limitações destes processos de cálculo.

Imagem 1 – Limites da ABNT NBR 6118:2014 quanto aos Processos de Cálculo de Pilares

<table>
<tr><th rowspan="2">λ</th><th rowspan="2">γ_f</th><th rowspan="2">Consideração dos efeitos de 2ª ordem</th><th colspan="3">PROCESSO DE CÁLCULO</th><th rowspan="2">Consideração da fluência</th></tr>
<tr><th>Exato</th><th>Aproximado (diagramas M, N, 1/r)</th><th>Simplificado</th></tr>
<tr><td>$\leq \lambda_1$</td><td rowspan="3">1,4</td><td>dispensável</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>≤ 90</td><td rowspan="3">obrigatória</td><td rowspan="2">dispensável</td><td rowspan="2">permitido</td><td>permitido</td><td>dispensável</td></tr>
<tr><td>≤ 140</td><td rowspan="2">não permitido</td><td rowspan="2">obrigatória</td></tr>
<tr><td>≤ 200</td><td>1,4+0,01(λ – 140)</td><td>obrigatório</td><td>não permitido</td></tr>
<tr><td colspan="7">NÃO É PERMITIDO EMPREGAR λ > 200</td></tr>
</table>

Fonte: Campos Filho, 2014

O Método do Pilar-Padrão trata a deformada do pilar como uma senóide, o que de fato não ocorre, e traz assim o cálculo da não-linearidade geométrica de forma aproximada. E para os casos onde aproxima-se a expressão da curvatura 1/r ou a da rigidez κ, calcula-se os momentos no topo, na base e numa seção intermediária considerada crítica, geralmente no meio do pilar, onde tem-se o máximo momento fletor considerando os efeitos de segunda ordem, podendo-se obter uma análise com a não-linearidade física também de forma aproximada. Esses dois métodos são utilizados sem consideração dos efeitos da fluência do concreto, são empregados apenas em pilares com armadura simétrica e constante ao longo do seu comprimento e somente para índice de esbeltez até 90, sendo que, para pilares com esbeltez inferior a λ_1, pode-se desconsiderar os efeitos locais de segunda ordem.

O Método do Pilar-Padrão Melhorado, também chamado de Pilar-Padrão Acoplado ao Diagrama M, N, 1/r, segundo Scadelai e Pinheiro (2002), traz a não-linearidade física através da consideração da curvatura obtida pelos diagramas de interação M, N, 1/r, onde esta curvatura é específica para cada caso. Este se aplica a pilares com esbeltez inferior a 140, sendo que acima de 90 deve-se levar obrigatoriamente em conta os efeitos da fluência.

Já o Método Geral, foco deste trabalho, é um método considerado "exato", pois traz uma análise refinada baseada na discretização de barras, obtendo desta forma os esforços em várias seções do pilar e não mais apenas nas seções base, topo e intermediária. Segundo Santos (1987), é um método essencialmente de verificação, pois deve-se conhecer as dimensões e armadura existentes em cada seção, para então verificar-se a não possibilidade de ruptura e de instabilidade. Além disso, Santos (1987) revela também que as únicas aproximações admitidas por este método é a utilização da curvatura 1/r dada por y devido ao maçante cálculo manual da formulação exata e o uso de processos numéricos que dividem o pilar em subdivisões, porém o refinamento aumenta-se a medida que o número dessas subdivisões cresce. Apesar dessas aproximações o método apresenta bons resultados e é considerado como processo exato. Ele pode ser utilizado para todos os tipos de pilares, sendo obrigatório para pilares com esbeltez superior a 140 e nele deve-se incluir a fluência do concreto.

Antes dos métodos citados acima serem incluídos na norma de concreto, os pilares em geral, incluindo os esbeltos, eram dimensionados através do Processo Ômega (ω). Este processo apesar de simples e bem quisto pelos projetistas estruturais, ele apresentava conceitos errôneos ou contrários a teoria. Um desses conceitos é o de aplicação do conceito de flambagem, pois, segundo Clímaco (2013), os pilares esbeltos de concreto armado não estão submetidos a flambagem de fato, como os pilares metálicos. O dimensionamento através desse processo, segundo Rebello (2005), levava em conta apenas carga axial não admitindo os esforços de flexão, contrário a recomendação atual da norma que exige a consideração de um momento fletor mínimo mesmo em casos de compressão centrada. Devido a isso, o dimensionamento a flexão composta normal e/ou oblíqua foi evitado por um longo tempo, e consequentemente o método geral se manteve afastado da realidade dos projetistas de estruturas.

Diante disso, pode-se observar que o método geral é o procedimento mais completo até o momento, pois abrange todas as faixas de esbeltezes e seções permitidas pela norma, contudo, é um método evitado devido à grande quantidade demandada de cálculos, o que é amenizado através do uso de softwares ou planilhas eletrônicas. Além disso, possui resultados mais realista, o que pode levar a situações de economia em casos onde os processos simplificados resultam em esforços maiores, ou em situações de segurança quando estes mesmos processos resultam em valores errôneos.

Sendo assim, este trabalho visa a verificação de pilares esbeltos submetidos a flexo-compressão normal através do método geral, apresentando a teoria necessária, um roteiro didático e facilmente programável que pode servir de base para rotinas computacionais, onde o mesmo é extremamente abrangente e aplicável aos mais variados tipos de seções transversais, carregamentos impostos e vinculações, além de apresentar a aplicação do mesmo em exemplos numéricos, fazendo comparações entre métodos.

1.2 Justificativa

Com o avanço tecnológico e os estudos cada vez mais evoluídos a tendência natural é desejar-se estruturas cada vez mais ousadas. Para que tal proposta seja alcançada é necessário que se tenha um uso mais racional dos materiais constituintes, tendo dessa forma, um melhor aproveitamento da seção dos elementos. O aço e o concreto atualmente são empregados com resistência cada vez mais altas, o que não era tão comum há um tempo atrás, pois segundo Borges (1998) as estruturas eram executadas com aço CA-25 e concreto C15, o que geravam pilares robustos em sua maioria, tendo como propósito de dimensionamento os estados limites últimos de ruptura do concreto comprimido e plastificação excessiva da armadura.

Na atualidade, com a inserção dos concretos de alta resistência na ABNT NBR 6118:2014 e com a utilização de aços também com resistências elevadas (CA-50A), há maior possibilidade se construir estruturas com seções mais reduzidas, viabilizando dessa forma, os pilares esbeltos.

Porém, a utilização de pilares com esbeltez elevada ainda é algo evitado pela maioria dos engenheiros, isso porque as metodologias de dimensionamento encontradas na literatura ainda são muito trabalhosas. Além disso, o problema da instabilidade nas configurações de equilíbrio de barras esbeltas ainda gera algumas dúvidas e impossibilita soluções estruturais completamente seguras.

Com base nisso, este trabalho tem como proposta trazer uma metodologia a ser seguida para verificação de pilares esbeltos, em especial, para concretos de alta resistência, pois a mesma traz formulações que podem ser aplicadas para concretos de resistência até 90MPa, com total conhecimento de sua segurança, apresentando para isso estudos referentes ao Estado Limite Último de Instabilidade, indicando como se dá a estabilidade nas configurações de equilíbrio para pilares submetidos à flexo-compressão normal.

1.3 Objetivos

Esta seção tem como finalidade descrever os objetivos geral e específico deste presente trabalho.

1.3.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo a verificação da estabilidade de pilares esbeltos submetidos a flexo-compressão normal e com aplicação a concretos de resistências até 90 MPa. O método utilizado será o do Método Geral, onde leva-se em consideração formulações que admitem as não-linearidades de forma não-aproximada.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Tornar acessível a engenheiros e pesquisadores metodologias utilizadas para a análise de pilares esbeltos, apresentando-as de forma clara e detalhada, sendo estas consideradas de forma não aproximada, o que gera um melhor uso dos materiais, e consequentemente economia, além é claro de segurança;
- Indicar a fundamentação teórica necessária para a compreensão do Estado Limite Último de Instabilidade, das Não-Linearidades Física e Geométrica e das propriedades dos concretos de alta resistência;
- Apresentar as formulações que relacionam o momento fletor interno, esforço normal e curvatura real, bem como os procedimentos necessários para traçar os diagramas M-N-1/r;
- Elaborar roteiro para construção de diagramas M, N, 1/r, sendo este indicado para seções retangulares, apesar de ser facilmente adaptável a seções variáveis, com armadura simétrica ou não, e de concretos com resistências até 90MPa, podendo servir de base para implementações computacionais;
- Apresentar exemplos numéricos para melhor esclarecimento sobre a utilização do Método Geral na verificação de barras esbeltas e dimensionar um pilar esbelto intermediário.

1.4 Metodologia

Inicialmente, será feita a coleta bibliográfica nos acervos disponíveis em dissertações, teses, normas técnicas, materiais didáticos e artigos relacionados aos determinados assuntos: Estado Limite Último de Instabilidade; Não-Linearidades Física e Geométrica; Métodos Aproximados e Não-Aproximados para Dimensionamento de Pilares; Relações M, N, 1/r e o traçado dos seus diagramas, e Método Geral na aplicação de pilares esbeltos.

Posteriormente, utilizando toda a bibliografia relatada no trabalho, serão elaborados dois roteiros facilmente programáveis; um para o traçado dos diagramas M, N, 1/r e outro para a verificação da estabilidade de pilares esbeltos através do Método Geral. Ainda serão apresentados exemplos numéricos, demonstrando o passo-a-passo contido nos roteiros elaborados, além de se fazer comparações entre os valores obtidos com métodos aproximados e com o Método Geral.

1.5 Apresentação do Trabalho

Este trabalho foi dividido em 7 capítulos, para que o mesmo se tornasse mais didático e compreensível possível. A sequência escolhida para os capítulos permite a aquisição de uma base sólida sobre o assunto de estabilidade de peças esbeltas, para que então se possa entender a aplicação do Método Geral. O trabalho destina-se àqueles que possui interesse por estabilidade estrutural, métodos para dimensionamento de pilares e para cálculo de esforços de segunda ordem, além daqueles que buscam conhecer mais o comportamento de peças de concreto com resistências elevadas.

Os exemplos foram elaborados de forma mais didática possível, oferecendo para a literatura atual roteiros de fácil entendimento e programação computacional.

O capítulo 2 tem como objetivo apresentar conceitos básicos necessários para compreensão de todo o estudo, mostrando conceitos dos materiais constituintes, hipóteses básicas para dimensionamento, domínios de deformação, bem como as formulações gerais para concretos com resistências dos grupos I e II.

O capítulo 3 tem como objetivo apresentar o Estado Limite Último de Instabilidade, oferecendo conhecimento necessário para compreender as diversas configurações de equilíbrio, obtidas de acordo com o tipo de solicitação e material constituinte, apresentando as possibilidades de colapso por instabilidade.

O capítulo 4 tem como objetivo apresentar os conceitos de curvatura, das relações existentes entre essas e os momentos fletores atuantes nas seções, além da elaboração de um roteiro de fácil entendimento para construção de diagramas M, N, 1/r.

O capítulo 5 tem como objetivo apresentar o Método Geral para verificação de barras esbeltas. O método aplica-se a diversos tipos de pilares, seções, tipos de armadura e solicitações. Apresenta-se um roteiro para aplicação do mesmo, demonstrando os conceitos de forma mais clara possível.

O capítulo 6 tem como objetivo apresentar exemplos numéricos para aplicação do Método Geral. Neste serão feitos três exemplos para pilares esbeltos de alta resistência, verificando sua estabilidade e possibilidade de ruína também por ruptura dos materiais, além de ser feita comparações entre o método geral e os métodos aproximados.

O capítulo 7 tem como objetivo apresentar as conclusões acerca do que foi estudado neste presente trabalho, além de propor ideias para trabalhos futuros.

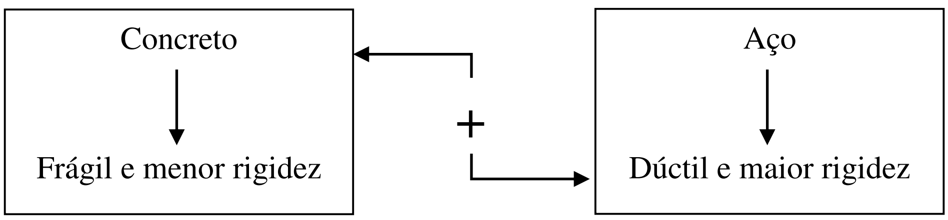
2 CONCEITOS BÁSICOS

Este capítulo tem como objetivo introduzir os conceitos básicos necessários para o entendimento das teorias apresentadas nos capítulos posteriores. Os conceitos apresentados visam um entendimento melhor dos materiais constituintes, das hipóteses básicas admitidas no decorrer da análise e dimensionamento e os diagramas de deformação que especificam os domínios existentes.

2.1 Materiais Constituintes

O concreto armado é um material para fim estrutural obtido da união de dois materiais distintos, aço e concreto. Para que este desempenhe suas funções com sucesso, ele deve ser considerado com todas as peculiaridades de cada um de seus componentes, e nunca o considerar como um material unitário, levando-se em conta o seguinte funcionamento solidário:

Imagem 2 – Funcionamento solidário das propriedades do concreto e do aço



Fonte: Autor, 2016

Portanto, para que concreto armado funcione adequadamente deve-se levar em conta a perfeita solidariedade entre concreto e aço, ou seja, em hipótese alguma deve haver escorregamento relativo entre os materiais.

2.1.1 Concreto

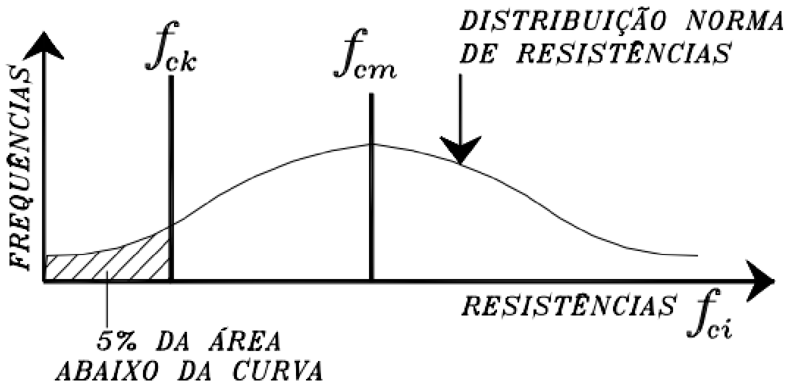
O concreto simples é um material obtido da união de cimento, água, agregado miúdo e agregado graúdo. Para acentuar ou amenizar determinadas características pode-se acrescentar aditivos químicos. O concreto possui diversas vantagens como baixo custo, técnicas de execução dominadas, boa trabalhabilidade possibilitando diversos formatos e resiste bem a maioria dos esforços, exceto à tração. Em contrapartida, os pontos negativos são o elevado peso específico (24kN/m³), conduz bem o calor e o som e sua demolição ou reforma é de difícil execução.

Algumas de suas principais características são fundamentais para o entendimento deste trabalho. São elas:

2.1.1.1 Resistência característica do concreto à compressão

A resistência característica do concreto à compressão depende de vários fatores, alguns deles são a relação consumo de cimento e água da mistura, grau de adensamento e tipo de agregado. A determinação do seu valor depende dos resultados obtidos do ensaio de compressão simples, onde no Brasil adota-se usualmente corpos de provas cilíndricos com 15cm de diâmetro e 30cm de altura e sua moldagem segue as prescrições da ABNT NBR 5738:2015, onde o rompimento dos corpos de provas se dá na idade padrão de 28 dias como é estabelecido na ABNT NBR 5739:2007. Essa resistência característica, comumente chamada de f_{ck} , é conceituada por Araújo (2014, p. 3) como “um valor tal que existe uma probabilidade de 5% de se obter resistências inferiores à mesma”, e é dada com base na Imagem 3 e através da expressão (1):

Imagem 3 – Diagrama de frequências de um concreto



Fonte: Carvalho, 2014

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,645S \tag{1}$$

Onde S é o desvio padrão dado por:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_{ci} - f_{cm}\right)^2}{\left(n-1\right)}} \tag{2}$$

O desvio padrão acima especificado está relacionado ao controle de qualidade adotado na produção do concreto.

Segundo Fusco (2008), para concretos com $f_{ck} \leq 40$MPa, tem-se uma ruptura dúctil, pois a ruptura se dar por compressão longitudinal do concreto, o que resulta no rompimento transversal de tração na microestrutura. Já em concretos acima de 40MPa tem-se uma ruptura frágil, pois a matriz que envolve os agregados passar a conter mais rigidez que os próprios agregados, sendo também chamada de ruptura de modo explosivo.

Com isso determina-se a classe do concreto, que nada mais é que o valor da resistência característica à compressão obtida pelo concreto aos 28 dias, e classifica-se os concretos em dois grupos, conforme a tabela a seguir:

Tabela 1 – Classes de Resistências do Concreto

Grupo I	C10	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45	C50
Grupo II	C55	C60	C65	C70	C75	C80	C85	C90	-

Fonte: Araújo, 2014 (adaptado)

2.1.1.2 Módulo de Deformação Longitudinal do Concreto (E_c)

No diagrama tensão-deformação, obtido em um ensaio de compressão simples, pode-se verificar uma não proporcionalidade entre a tensão e a deformação, pois o material não obedece a Lei de Hooke. O módulo de deformação longitudinal tangente (E_c) representa a inclinação da reta tangente à curva na origem do diagrama. De forma análoga, o módulo de deformação longitudinal secante representa a inclinação da reta que se inicia na origem e corta o diagrama no ponto cuja a tensão corresponde a ordem de $0,4 f_c$, sendo f_c a resistência à compressão simples do concreto.

Verifica-se, experimentalmente, que o módulo de deformação tangente está associado a resistência à compressão do concreto. Inúmeras correlações entre estas propriedades podem ser encontradas em trabalhos científicos, estando algumas destas como indicações normativas. Em geral, essas correlações são válidas para concretos que possuem massa específica normal, submetidos a carregamentos estáticos, já que para carregamentos dinâmicos ocorre um aumento no valor do módulo de deformação.

Segundo Araújo (2014), o equacionamento para o cálculo do módulo de deformação longitudinal do concreto adotado pela ABNT NBR 6118:2014 derivou-se das normas ACI, CEB/90 e MC-FIB/2010. O módulo tangente é dado por:

$$E_c = \alpha_E \times 5600 \times \sqrt{f_{ck}}\ ,\ MPa,\ se\, f_{ck} \leq 50 MPa \tag{3}$$

$$E_c = \alpha_E \times 21500 \times \left(\frac{f_{ck} + 12,5}{10} \right)^{\frac{1}{3}}\ ,\ MPa,\ se\ 50 MPa < f_{ck} \leq 90 MPa \tag{4}$$

Nessas expressões α_E é um coeficiente que considera o tipo de agregado graúdo, sendo $\alpha_E = 1,2$ para agregados de basalto e diabásio; $\alpha_E = 1$ para agregados de granito e gnaisse; $\alpha_E = 0,9$ para agregados de calcário e $\alpha_E = 0,7$ para agregados de granito.

Ainda de acordo com a norma, o módulo secante é dado por:

$$E_{cs} = \alpha_i \times E_c \tag{5}$$

Sendo:

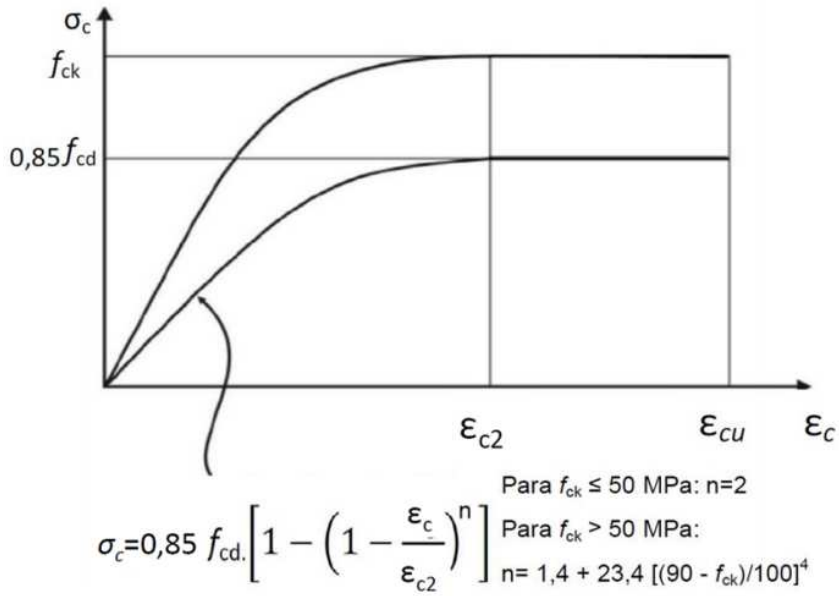
$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \times \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \tag{6}$$

2.1.1.3 Relação Tensão x Deformação para o concreto (σ x ε)

O diagrama tensão-deformação do concreto para análises no estado limite último é obtido através do ensaio de compressão simples anteriormente comentado. Ele apresenta características não-linear devido o concreto ser um material elastoplástico, ou seja, com fase elástica e fase plástica. Porém para efeitos didáticos, durante os cursos de graduação costuma-se dar um tratamento linear para o mesmo, onde simplificações permitidas na norma brasileira aproxima-se o diagrama parábola-retângulo a um diagrama retangular equivalente. Neste trabalho, será considerado o diagrama parábola-retângulo para calcular o volume do diagrama de tensões para obtenção dos esforços internos do concreto.

Segundo Araújo (2014), a expressão do diagrama parábola-retângulo foi desenvolvida por Hognestad, onde admite-se que o trecho curvo do diagrama pode ser descrito por uma parábola do segundo grau, sendo esta introduzida na ABNT NRB 6118:2014 através do equacionamento e da figura que segue:

Imagem 4 – Diagrama Tensão-Deformação do Concreto



Fonte: ABNT NBR 6118:2014

$$\sigma_c = 0,85 \times f_{cd} \times \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right] \tag{7}$$

Onde:

ε_c é a deformação específica de encurtamento do concreto;

ε_{c2} é a deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;

n é um índice;

f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto, dado por.

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \tag{8}$$

Onde:

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias;

γ_c, em geral, 1,4.

ε_c, ε_{c2} e n assumem os valores a seguir:

- Para concretos de classes até 50MPa:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0‰ \quad (9)$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5‰ \quad (10)$$

$$n = 2 \quad (11)$$

- Para concretos de classes C50 até C90:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0‰ + 0,085‰ \times (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6‰ + 35‰ \times \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad (13)$$

$$n = 1,4 + 23,4 \times \left[\frac{(90 - f_{ck})}{100} \right]^4 \quad (14)$$

2.1.1.4 Fluência do Concreto

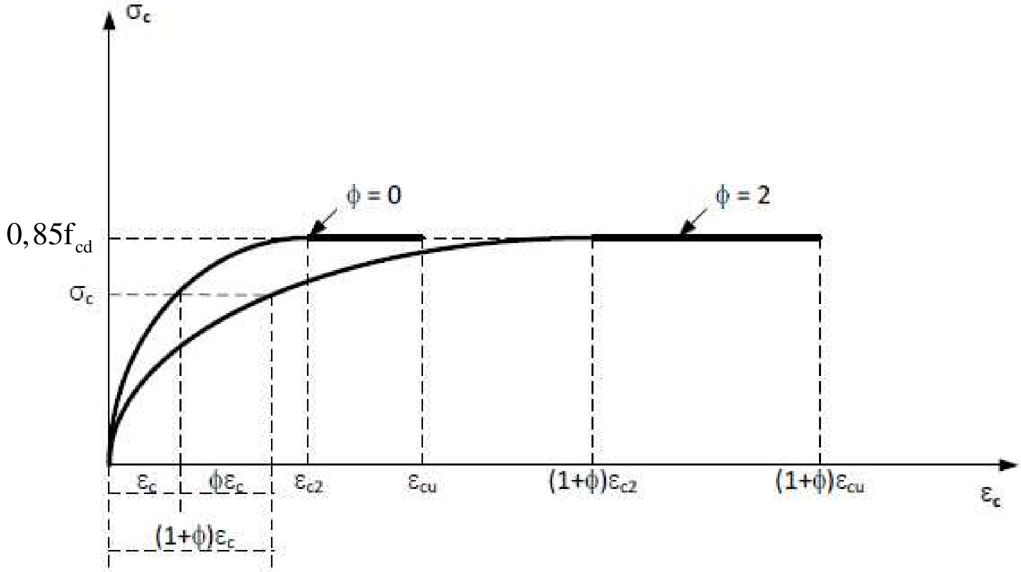
As deformações do concreto estrutural ocorrem desde a moldagem da estrutura, em virtude de características como porosidade e permeabilidade. Uma destas deformações denomina-se fluência, e ocorre devido à retirada do escoramento da estrutura e sua entrada em carga. Esta deformação possui natureza elástica e é imediata.

"Com o aumento da idade, as deformações no concreto continuam à crescer, mesmo sob um estado de cargas constantes. Esse fenômeno é conhecido como deformação lenta ou fluência" (CLÍMACO, 2013, p. 112).

Esse fenômeno é associado à natureza do material, que apresenta um elevado índice de vazios. Os principais fatores que influenciam o efeito da fluência são a idade do concreto quando a carga é aplicada, a umidade relativa do ar e as dimensões da seção analisada (CLÍMACO, 2013).

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, deve-se considerar o efeito da fluência em pilares com índice de esbeltez maior que 90. Esta consideração pode ser feita modificando o diagrama tensão-deformação do concreto conforme a imagem a seguir:

Imagem 5 – Diagrama de Tensão-Deformação do Concreto considerando o efeito da Fluência



Fonte: Campos Filho, 2014 (adaptado)

2.1.2 *Aço para concreto armado*

Os tipos e características dos aços destinados a armaduras para concreto armado estão dispostos na ABNT NBR 7480:2007, esta fixa também as condições exigidas na fabricação e fornecimento dos mesmos.

Os aços para concreto podem ser encontrados no mercado em barras e fios, e são designados pela sigla CA acompanhada do valor da categoria. CA é a sigla de Concreto Armado, indicando que o aço é para este fim e a categoria indica a resistência de escoamento mínima dada em kN/cm². Até a versão da norma de 1982 dividia-se os aços em classe A e classe B, porém o entendimento errôneo fez com que essa classificação saísse nas versões seguintes. Dessa classificação, entendia-se de forma equivocada que para classe A havia patamar de escoamento e para classe B, não o tinha. Hoje, na versão de 2007, especifica-se que os aços em barra, ou seja, aqueles que possuem nervuras, são designados de classe A, caso referente ao CA-25A e CA-50A e estes são laminados a quente. Enquanto os produzidos para fios, sem nervuras, são de classe B, como o CA-60B, e são laminados a frio.

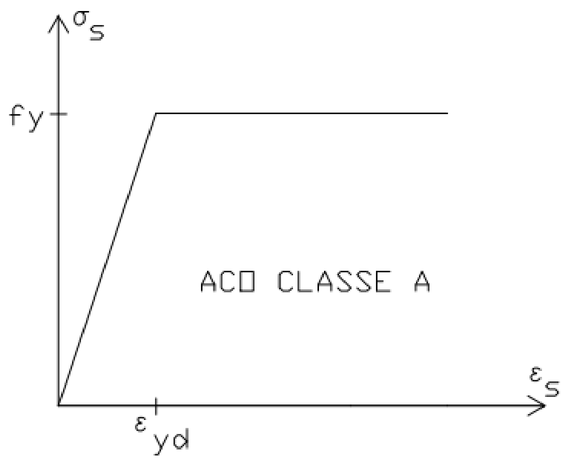
Segundo a ABNT NBR 6118:2014, para o aço de armadura passiva, ou seja, sem tensões prévias, pode-se adotar massa específica de valor igual a 7850kg/m³; coeficiente de dilatação térmica igual a 10^{-5} /ºC para intervalos de temperatura entre -20ºC e 150ºC; e, módulo de elasticidade igual a 210GPa.

As principais características do aço para aplicação no concreto armado, são:

2.1.2.1 Resistência Característica de Escoamento do Aço à Tração

A resistência característica de escoamento do aço à tração é designada por f_{yk}, esta é obtida através do ensaio de tração, onde corpos de prova são submetidos a tração uniforme. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014), este valor significa a máxima tensão que a barra ou o fio suportará, pois, a partir do valor de f_{yk} o aço passa a ter deformações permanentes, ou seja, deforma-se e não volta a sua forma original, admitindo uma fase de plastificação ou patamar de escoamento definido, como por exemplo os aços CA-25A e CA-50A:

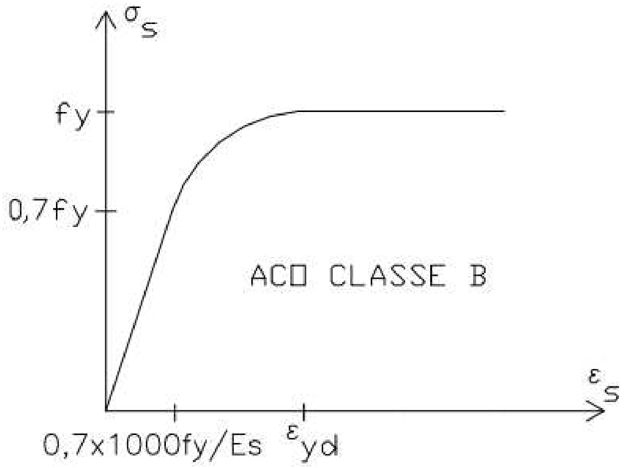
Imagem 6 – Diagrama de Tensão-Deformação para os Aços Classe A



Fonte: Camaduro Júnior, 1997

Os aços que não possuem patamar de escoamento definido, como os aços CA-60B, admite-se valor de f_{yk} igual a 2‰.

Imagem 7 – Diagrama de Tensão-Deformação para os Aços Classe B



Fonte: Camaduro Júnior, 1997

2.1.2.2 Limite de Resistência (f_{stk})

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014), f_{stk} é a máxima força suportada pela barra, é o ponto máximo de resistência do material, onde o mesmo chega a ruptura com este valor. A tensão máxima suportada é obtida pela relação da força de ruptura pela área da seção transversal da amostra.

2.1.2.3 Deformação Específica na Ruptura (ε_{su})

É o alongamento do comprimento da barra na ruptura. Este valor é expresso em porcentagem:

$$\varepsilon_{su} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \times 100 \qquad (15)$$

Onde:

l_0 e l_1 são os comprimentos inicial e final respectivamente

2.1.2.4 Deformação Específica de Cálculo (ε_{yd})

A deformação específica de cálculo corresponde àquela obtida no início do patamar de escoamento, e é dada pelo equacionamento abaixo:

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \qquad (16)$$

Onde:

f_{yd} é a tensão de escoamento de cálculo do aço, dada por:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \tag{17}$$

f_{yk} é a resistência à tração do aço;

γ_s é o coeficiente de segurança do aço, em geral igual a 1,15.

2.2 Hipóteses Básicas

Para o dimensionamento de elementos lineares em concreto armado submetidos a solicitações normais, que é o caso de vigas e pilares por exemplo, a ABNT NRB 6118:2014 preconiza uma série de hipóteses básicas para o cálculo. São elas:

- Hipótese de Bernoulli: esta hipótese admite que mesmo após o início das deformações sofridas pelo elemento estrutural, a seção em estudo, antes indeformada e plana, permanece plana após as deformações e fica assim até atingir o estado limite último. Essa teoria é de extrema importância para a flexão de barras esbeltas. Sobre essa hipótese, Araújo (2014, p. 111) afirma que:

> Em consequência da hipótese das seções planas, resulta uma distribuição linear das deformações normais ao longo da altura das seções transversais. Assim, a deformação em uma fibra genérica da seção é diretamente proporcional à sua distância até a linha neutra.

- Perfeita aderência entre os materiais: Uma fibra de concreto e a armadura adjacente a esta fibra possuem a mesma deformação específica, não havendo desta forma escorregamento de um material em relação ao outro.

- Concreto sob tensões de tração: devido à pouca resistência do concreto às tensões de tração, as mesmas na seção transversal devem ser desprezadas no Estado Limite Último – ELU, sendo levada em conta apenas em situações de serviço.

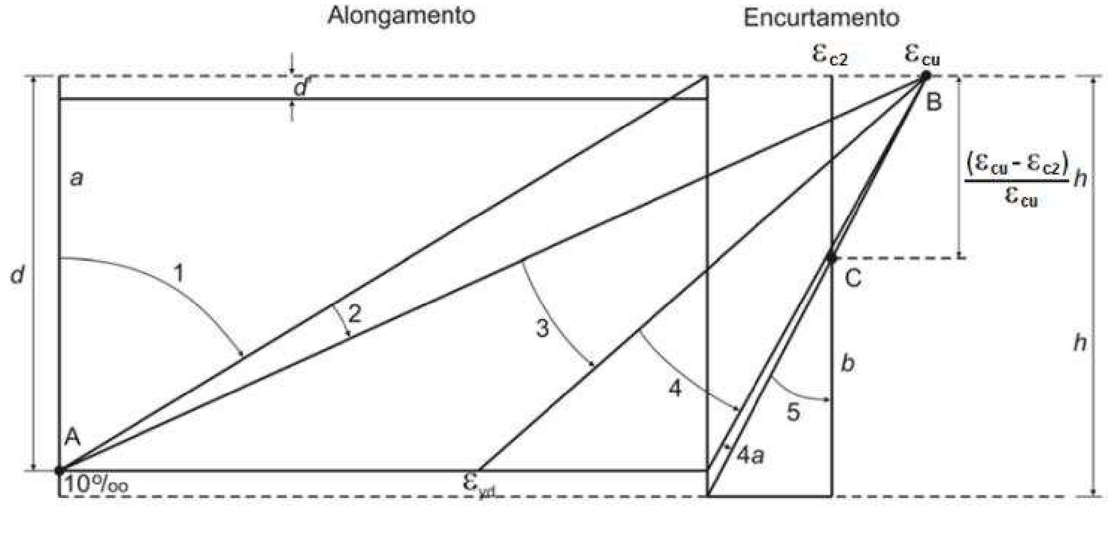
- O Estado Limite Último, também chamado de ruína da seção transversal, é obtido quando os materiais (concreto e aço) atingem suas deformações máximas específicas de cálculo. Para o concreto (ε_c) esta ocorre na fibra menos tracionada e para o aço (ε_s) ocorre próximo da borda mais tracionada. Existem algumas possibilidades de ocorrer um ELU, estas serão apresentadas na seção seguinte.

- As tensões atuantes no concreto são admitidas de forma diferentes para concretos abaixo de 50MPa e para concretos entre 50 e 90MPa. Neste trabalho, o enfoque é dado para concretos com resistências entre 50 e 90MPa, portanto, essa distribuição de tensões é dada por um diagrama parábola-retângulo, onde o pico das tensões é definido como $0,85 f_{cd}$. Segundo o item 17.2.2 da ABNT NBR 6118:2014, este diagrama pode ser substituído por um diagrama retangular de altura igual a y. Porém, neste trabalho, devido a exigência desta norma em considerar as não-linearidades de forma não aproximada, optou-se por considerar o diagrama parábola-retângulo.

2.3 Domínios de Deformação

O Estado Limite Último em elementos de concreto submetidos a tensões normais obedece ao diagrama de domínios de deformação na flexão (Imagem 8) especificado na seção 17.2.2 da ABNT NBR 6118:2014. Este diagrama apresenta as possíveis configurações que a seção deformada pode assumir em casos de ruptura quando submetida a solicitações normais.

Imagem 8 – Domínio de Deformação



Fonte: ABNT NBR 6118:2014

Essas configurações estão compreendidas dentro dos mecanismos de ruptura. Esses mecanismos podem ser: mecanismo A, mecanismo B e mecanismo C. Resumidamente, para que a seção atinja um ELU é necessário que as deformações atinjam um dos mecanismos, que representam a deformação limite de um dos materiais. São eles:

- Mecanismo de Ruptura A: Segundo Paula (1988), esse mecanismo é definido pelo limite de deformação de 10‰ na armadura mais tracionada, e a fibra do concreto menos tracionada, podendo variar entre as deformações de ε_{cu} ‰ e 10‰. Esse mecanismo inclui os domínios 1 e 2.

- Mecanismo de Ruptura B: Esse mecanismo caracteriza-se pelo encurtamento máximo de $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰ na fibra mais comprimida no concreto. Já as deformações na armadura variam entre 0 e 10‰. Esse, engloba os domínios 3, 4 e 4a.

- Mecanismo de Ruptura C: Caracteriza-se pelo encurtamento máximo de $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$‰ para fibras distantes $1-\frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}}$ de h da borda mais comprimida. Esse define o domínio 5, que é usado para peças inteiramente comprimidas.

Atingindo um desses mecanismos de ruptura ocorre o que chamamos de ruína. Estas podem ocorrer de duas formas: Ruína por deformação plástica excessiva do aço, onde há o alongamento máximo do aço ($\varepsilon_{su} = 10$‰); ou Ruína por esmagamento do concreto, onde sua deformação atinge o limite de $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰.

A seguir será especificado cada um dos domínios de deformação.

2.3.1 Domínio 1

O domínio 1 está incluso no mecanismo A. Nele temos a seção inteiramente e uniformemente tracionada, pois a posição da linha neutra (x) tende a $+\infty$, surgindo o que se chama de reta "a". Nesse domínio o concreto resiste as tensões de tração.

Suas deformações têm início em: $\varepsilon_{su} = 10‰$ e $\varepsilon_{cu} = 10‰$, para $x = +\infty$; e finaliza em: $\varepsilon_{su} = 10‰$ e $\varepsilon_{cu} = 0$, para $x = 0$.

O concreto nesse domínio está tracionado e, portanto, fissurado. Logo, o aço é o responsável pela resistência da seção.

2.3.2 Domínio 2

Incluído no mecanismo A, o domínio 2 apresenta a seção sob flexão simples, ou seja, a linha neutra agora está dentro da seção transversal, fazendo com esta tenha esforços de tração e compressão.

Suas deformações têm início em: $\varepsilon_{su} = 10‰$ e $\varepsilon_{cu} = 0$, para $x = 0$ e finaliza em $\varepsilon_{su} = 10‰$ e $\varepsilon_{c} = \varepsilon_{cu}‰$, para $x = \frac{\varepsilon_{cu}}{10‰ + \varepsilon_{cu}} d$.

A seção resistente neste domínio é composta tanto pelo aço tracionado quanto pelo concreto comprimido.

2.3.3 Domínio 3

O domínio 3 está incluso no mecanismo B e nele a seção está submetida à flexão simples ou composta, pois a linha neutra também corta a seção transversal. Neste, a seção é comumente chamada de subarmada, pois ocorre o aproveitamento máximo da seção, estando os materiais, aço e concreto, trabalhando com suas resistências máximas, ou seja, ocorre a ruptura do concreto e o escoamento da armadura, simultaneamente.

Suas deformações têm início em: $\varepsilon_{su} = 10‰$ e $\varepsilon_{c} = \varepsilon_{cu}‰$, para $x = \frac{\varepsilon_{cu}}{10‰ + \varepsilon_{cu}} d$ e finaliza em: $\varepsilon_{su} = \varepsilon_{yd}$ (deformação específica de escoamento do aço, depende do tipo de aço empregado) e $\varepsilon_{c} = \varepsilon_{cu}‰$, para um valor de x que depende do tipo de aço empregado.

Para este domínio a seção resistente também é composta pelo aço tracionado e pelo concreto comprimido, e nele ocorre uma ruína segura, pois há grandes deformações, logo a peça emite avisos (fissuras) que irá romper.

2.3.4 Domínio 4

O domínio 4 faz parte do mecanismo B e nele ocorre flexão simples ou composta, pois a linha neutra corta a seção, havendo desta forma tração e compressão. Para a seção submetida ao domínio 4, chamamos de seção superarmada. Estas são tidas como antieconômicas e devem ser evitadas, pois o aço não trabalha com toda sua resistência, pois não atinge a tensão de escoamento, logo não se deforma o suficiente para que o concreto fissure e possa emitir avisos de ruptura, e isso caracteriza uma ruptura frágil.

Suas deformações têm início em: $\varepsilon_{su} = \varepsilon_{yd}$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰, para um valor de x que depende do tipo de aço empregado e finaliza em: $\varepsilon_{su} = 0$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰, para $x = d$.

Para este, a seção resistente é composta pelo aço tracionado, porém com a deformação da armadura inferior a ε_{yd}, e pelo concreto comprimido com $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰.

2.3.5 Domínio 4a

Este domínio também faz parte do mecanismo B e nele a linha neutra corta a seção no cobrimento da armadura menos comprimida, obtemos assim uma situação de flexão composta com armaduras comprimidas. Para este caso, boa parte do concreto está comprimida, e uma pequena parcela se encontra tracionada, já as duas armaduras se encontram comprimidas. E a ruptura neste domínio também é frágil, pois não deformações e nem fissuração que sirvam de aviso.

Suas deformações têm início em: $\varepsilon_{su} = 0$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰, para $x = d$ e finaliza em: $\varepsilon_{su} < 0$ (compressão) e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$‰, para $x = h$.

Na seção resistente temos tanto o aço quanto o concreto, comprimidos.

2.3.6 Domínio 5

Incluso no mecanismo C, o domínio 5 apresenta a linha neutra cortando fora da seção, deixando esta totalmente sob esforços de compressão, o que caracteriza os casos de flexo-compressão ou compressão não uniforme (sem tração), e compressão uniforme, quando o domínio atinge o que chamamos de “reta b” estando a seção dessa forma, comprimida uniformemente (compressão simples).

Suas deformações têm início em: $\varepsilon_{su} < 0$ e $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}‰$, para $x = h$ e finaliza em: $\varepsilon_{su} = \varepsilon_{c2}‰$ (compressão simples) e $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}‰$, para $x = +\infty$ (compressão uniforme – reta “b”).

A ruptura neste caso é frágil e a seção resistente compõem-se pelo aço e pelo concreto comprimidos.

3 ESTADO LIMITE ÚLTIMO DE INSTABILIDADE

Este capítulo tem como objetivo apresentar o estudo de barras esbeltas, definir o conceito de não-linearidades e de instabilidade, mostrar como se dar a obtenção do Estado Limite Último, assim como as formas de equilíbrio de barras esbeltas, dando enfoque para as diversas situações que incluem tipo de material, tipo e intensidade de solicitação, além, é claro, de apresentar os métodos para obtenção da carga crítica responsável por atingir esse ELU.

3.1 Introdução

Segundo Araújo (1984), o estudo referente a estabilidade em barras teve início no século XVIII, quando Leonard Euler estudou os efeitos do acréscimo de carga centrada de compressão em barras de material elástico-linear. Euler concluiu que existe uma carga limite para qual a barra assume uma instabilidade na forma reta de equilíbrio, sendo estável o equilíbrio apenas em uma configuração fletida. A essa carga, Euler chamou de *carga crítica* ou *carga de flambagem*, muitos a chamam também de *carga de Euler*.

Já para barras de concreto, o conceito de flambagem é utilizado erroneamente há anos para especificar o fenômeno de instabilidade. O termo proferido em disciplinas da graduação, até hoje é utilizado para esta designação. Contudo, aqui, mostra-se a diferença entre a carga crítica de Euler e a carga crítica que se deseja encontrar em casos de flexo-compressão em barras de concreto (SANTOS, 1987).

Para estruturas em concreto, material este que é anelástico e não-linear, uma barra submetida inicialmente a carga centrada de compressão, passa a deforma-se sensivelmente até o material atingir um limite de proporcionalidade. A partir deste, as deformações do eixo da barra aumentam consideravelmente, estando a barra agora submetida a solicitações de flexo-compressão, ou seja, essas deformações geram esforços adicionais, os chamados esforços de segunda ordem.

Portanto, percebe-se que em estruturas de concreto submetidas a flexo-compressão o estudo da carga crítica torna-se um tanto mais complexo. Isso ocorre devido a inclusão de características específicas como as não-linearidades, e também por se tratar de um material que não possui comportamento elástico-linear.

As não-linearidades ocorrem em dois tipos, e estes permitem um entendimento mais completo do fenômeno da instabilidade.

3.2 Não-Linearidades

Entende-se por Não-Linearidade uma desproporcionalidade entre causa e efeito levada em consideração nos cálculos de uma estrutura. Quando se diz que a análise de uma estrutura foi não-linear, significa que a mesma se deu obtendo resultados, sejam eles deslocamentos, deformações ou tensões, desproporcionais às solicitações impostas na mesma (KIMURA, 2007).

O estudo das não-linearidades é fundamental para a compreensão do estudo de peças esbeltas, em especial do Estado Limite Último de Instabilidade, bem como para os demais capítulos que seguem nesse estudo, sendo imprescindível para compreensão dos Efeitos de Segunda Ordem e de análises de Estabilidade Global (não contemplada neste trabalho).

É essencial também, que na realidade dos projetos estruturais se leve em conta o efeito das não-linearidades, pois o material concreto armado é genuinamente não-linear, e ao se considerar isso obtém-se resultados muito mais realísticos.

As não-linearidades se dão em duas formas: Não-Linearidade Física e Não-Linearidade Geométrica.

3.2.1 Não-Linearidade Física (NLF)

A Não-Linearidade Física (NLF) existe devido as variações presentes nas características do material empregado na estrutura, no caso o concreto armado. A medida que um elemento em concreto armado recebe solicitações, seu comportamento gera respostas desproporcionais, não-lineares, a essas solicitações.

Uma forma evidente de se observar a não-linearidade do concreto é analisando o diagrama tensão-deformação do mesmo, apresentado no item 8.2.10.1 da ABNT NBR 6118:2014.

O diagrama já apresentado na seção 2.1.1.3 deste trabalho (Imagem 4), mostra que a medida que as tensões no concreto aumentam suas deformações crescem desproporcionalmente.

A forma como a NLF é considerada nas análises variam, e uma forma aproximada de considerá-la é alterando o valor da rigidez dos elementos. Para o cálculo do Estado Limite de Serviço – Fissuração, por exemplo, diminui-se o valor da rigidez considerando que a seção fissurada possui inércia menor do que a da seção íntegra, resultando então no produto rigidez (EI) menor, logo em uma estrutura menos rígida. Essa é uma maneira de se considerar, contudo é óbvio que se requer estudos para que essa diminuição seja realizada com segurança, economia e o mais realístico possível (KIMURA, 2007).

Outras formas existentes são empregadas, como para o dimensionamento de pilares pelos métodos aproximados como o da curvatura aproximada e rigidez κ aproximada.

No capítulo seguinte apresentar-se-á uma forma não aproximada de levar em conta as NLF, através dos diagramas de interação momento-curvatura.

3.2.2 Não-Linearidade Geométrica (NLG)

A Não-Linearidade Geométrica (NLG) surge nas estruturas devido as deformações sofridas pelos elementos, pois a medida que esta passa a receber carregamentos o eixo anteriormente indeformado do elemento passa para uma configuração deformada. A análise se dá quando se calcula os esforços com base nessa estrutura deformada, obtendo esforços adicionais aos calculados com na base na geometria inicial. Aos esforços obtidos através desse tipo de cálculo dar-se o nome de Esforços de Segunda Ordem e esses não são proporcionais ao carregamento imposto originalmente na estrutura, portanto, não linear (KIMURA, 2007).

A análise em segunda ordem é fundamental para estudos mais rigorosos como o de Estabilidade Global e de dimensionamento de pilares, e esta só cessa ao encontrar-se a posição final de equilíbrio.

3.3 Conceito de Instabilidade

Instabilidade em estruturas de concreto é um fenômeno que ocorre quando uma barra reta é submetida inicialmente a uma carga axial de compressão que sofre modificações crescentes em sua intensidade, e consequentemente, gera deformações consideráveis no eixo (anteriormente reto) da barra. Esse aumento de carregamento gera solicitações de flexo-compressão, o que pode ocasionar um estado limite onde a capacidade resistente da seção passa a ser menor que essa solicitação gerada. A esse estado limite dar-se o nome de Estado Limite Último de Instabilidade.

A ABNT NBR 6118:2014, no item 15.2, especifica os tipos de instabilidade que podem ocorrer nas estruturas:

a) nas estruturas sem imperfeições geométricas iniciais, pode haver (para casos especiais de carregamento) perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio ("flambagem");

b) em situações particulares (estruturas abatidas), pode haver perda de estabilidade sem bifurcação do equilíbrio devido a passagem brusca de uma configuração para outra reversa da anterior (ponto limite de reversão);

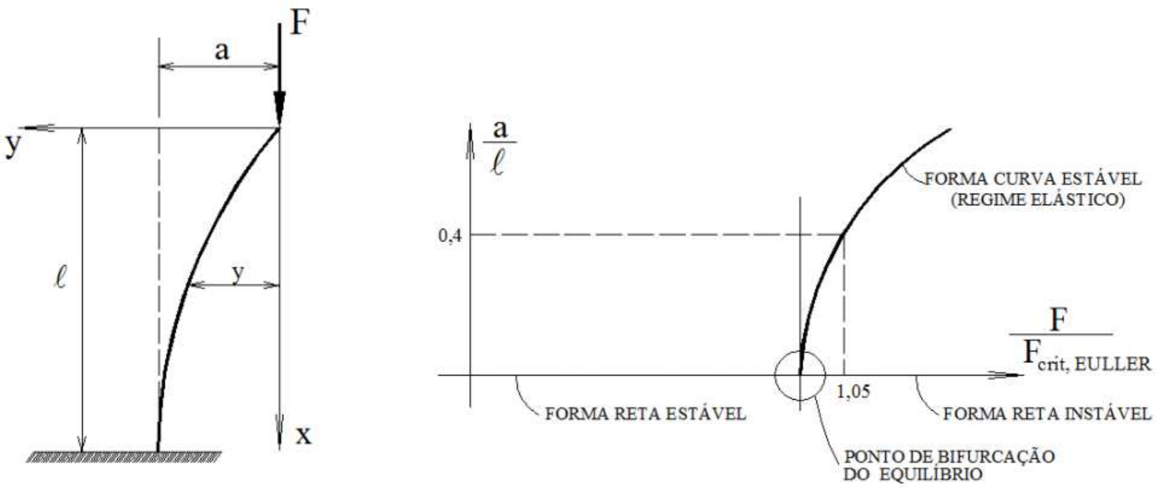
c) em estruturas de material de comportamento não linear, com imperfeições geométricas iniciais, não há perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio, podendo, no entanto, haver perda de estabilidade quando, ao crescer a intensidade do carregamento, o aumento da capacidade resistente da estrutura passa a ser menor do que o aumento da solicitação (ponto-limite sem reversão).

Com os tipos de instabilidade definidos, apresentar-se-á o que define as instabilidades, como se dá, as restrições para os tipos de solicitações e materiais.

3.4 Instabilidade na Compressão Axial – Flambagem

Em barras retas axialmente comprimidas e de material elástico linear, a instabilidade se dá pela presença do *ponto de bifurcação*, que é o ponto onde uma barra submetida a um carregamento crescente atinge uma carga crítica que a faz passar da forma de equilíbrio reta e estável para a forma reta instável, e esta admite uma configuração de equilíbrio fletida e estável.

Imagem 9 – Instabilidade na Compressão Axial



Fonte: Fusco, 1981

Então conclui-se que em torno desse ponto, a barra pode assumir dois possíveis tipos de equilíbrio estável: o reto estável, para a carga aplicada inferior a carga crítica, e o fletido estável, para carregamentos críticos. Quando a barra atinge esse ponto, dizemos que ela atingiu o Estado Limite Último de Instabilidade, também chamado de *Flambagem.*

3.4.1 Carga Crítica de Flambagem

O termo carga crítica de flambagem ou carga de Euler, teoricamente, é usado para casos que tratam de barras de material elástico-linear e submetidas a carga axial de compressão. Essa carga crítica é obtida através da formulação da linha elástica, dada por:

$$\frac{1}{r} = \frac{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{M}{EI} \tag{18}$$

Porém, essa formulação é exata, e esta pode ser modificada para facilitar a resolução dos cálculos. Segundo Hibbeler (2010), a maioria das normas de engenharia limitam as deflexões por questões de estética, o que resultam em deflexões elásticas na maioria dos eixos como curvas rasas, sendo então, a inclinação da linha elástica muito pequena, o que nos dar um valor de $\frac{dy}{dx}$ aproximadamente igual a zero. Com isso elimina-se o denominador da equação acima e utiliza-se a equação aproximada da linha elástica para se obter a carga crítica:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{EI} \tag{19}$$

Sendo $M = F \times y$ e fazendo $k^2 = \frac{F}{EI}$, tem-se:

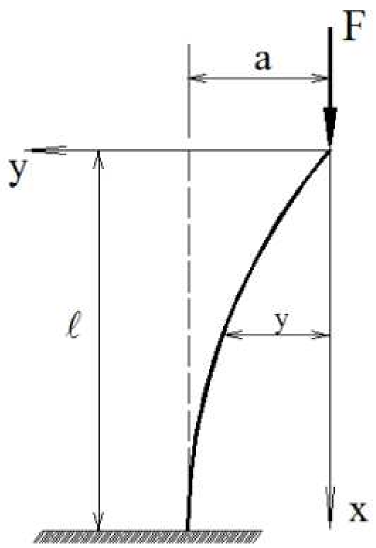
$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \tag{20}$$

Do cálculo diferencial, temos que a equação (20) é uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) com solução definida por:

$$y = C1 \times Sen(kx) + C2 \times Cos(kx) \tag{21}$$

Onde $C1$ e $C2$ são constantes do problema obtidas através de condições de contorno dadas através da barra idealizada abaixo (engaste-livre):

Imagem 10 – Barra Engaste-Livre submetida à Força Compressiva



Fonte: Fusco, 1981

Condições de contorno:

1) Para $x = 0$, temos que a deflexão do eixo é nula, portanto $y = 0$.

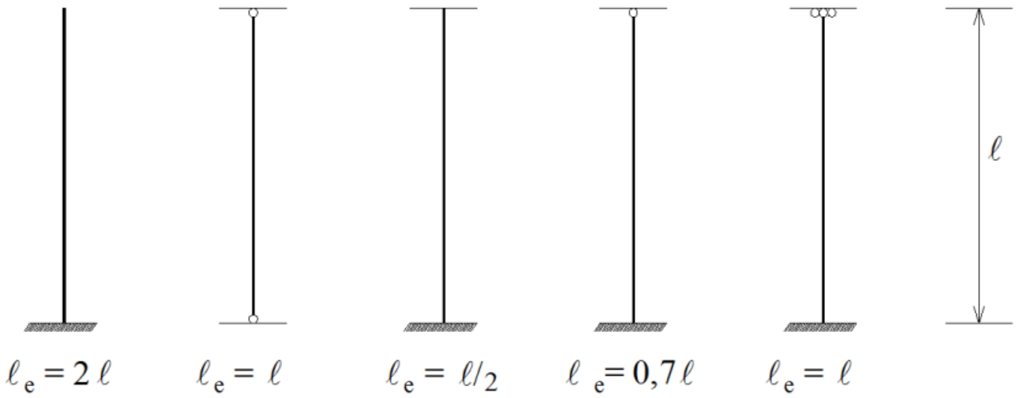
2) Para $x = L$, por se tratar de um engaste temos a inclinação é nula, logo: $\frac{dy}{dx} = 0$

Da solução das condições de contorno temos $C2 = 0$ e $C1 \times KCos(KL) = 0$, onde obrigatoriamente $C1 \neq 0$, logo: $Cos(kL) = 0$, e obtemos a *Carga Crítica de Flambagem*:

$$F_{crit} = \frac{\pi^2 \times EI}{l_o^{\,2}} \tag{22}$$

Onde l_o é o comprimento de flambagem e EI é a rigidez flexional (módulo de elasticidade e momento de inércia). Este comprimento depende do tipo de vinculação da barra. Abaixo apresentam-se os casos possíveis:

Imagem 11 – Comprimentos de Flambagem



Fonte: Fusco, 1981 (adaptado)

A carga crítica de flambagem só é válida para as especificações já apresentadas: carga axial de compressão e material elástico-linear. Esse comportamento elástico-linear se dar quando a tensão crítica é menor que a tensão de proporcionalidade do material, ou seja, $\sigma_{crit} \leq f_o$.

Sendo tensão a relação entre a força aplicada e a área de contato, temos:

$$F = \sigma_{cr} \times A \tag{23}$$

Resultando na fórmula:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \times EI}{l_o^{\,2} \times A} \tag{24}$$

Podemos simplifica-la ainda mais aplicando o conceito de raio de giração (i) e de índice de esbeltez (λ) da Resistência dos Materiais:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \tag{25}$$

$$\lambda = \frac{l_o}{i} \tag{26}$$

Onde:

I é momento de inércia;

A é a área da seção transversal;

l_o é o comprimento de flambagem.

Daí temos:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \times E}{\lambda^2} \tag{27}$$

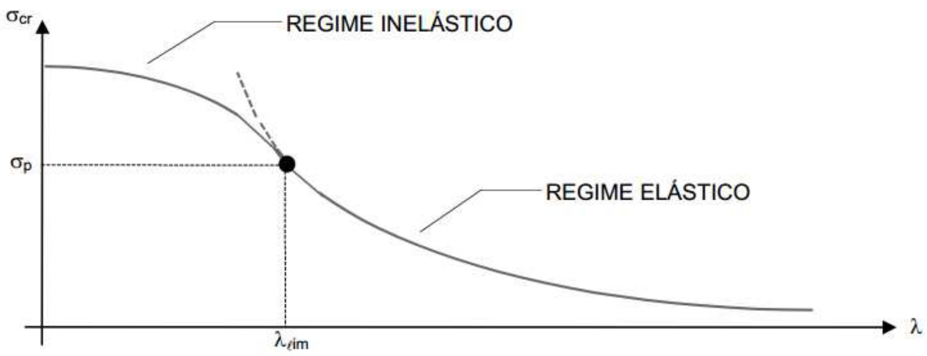
Se dissermos que a tensão crítica é igual a tensão de proporcionalidade do material ($\sigma_{cr} = f_o$), obtemos uma esbeltez limite, onde a partir desta a barra deixa de estar no regime elástico passando para um regime anelástico. Assim, temos o equacionamento para esbeltez limite:

$$\lambda_{lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times E}{f_o}} \tag{28}$$

No regime anelástico tensões e deformações deixam de ser proporcionais, sendo essas deformações no eixo da barra de extrema importância, e o que acaba gerando um equilíbrio instável na forma reta e na forma fletida o equilíbrio é impossível para este regime, chegando a barra em seu Estado Limite Último de Instabilidade.

A seguir, apresenta-se a curva de flambagem que relaciona índice de esbeltez e tensão, evidenciando as características para a barra em cada regime.

Imagem 12 – Curva de Flambagem

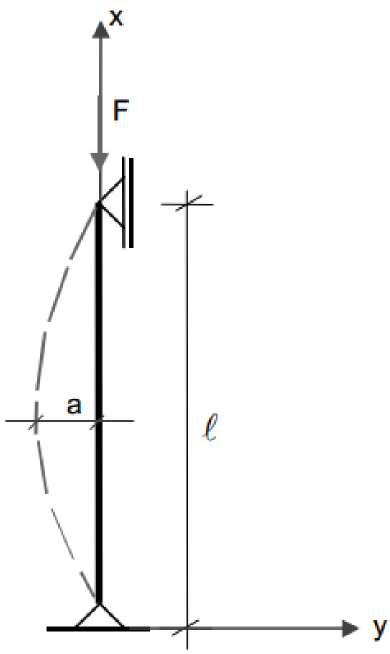


Fonte: Borges, 1999

3.4.2 Estabilidade da Configuração Fletida de Equilíbrio

Segundo Fusco (1981), para que se comprove a existência do equilíbrio estável na forma fletida, como foi enunciado acima, podemos aproximar a elástica obtida após a deformação do eixo da barra à uma senóide, conforme mostra a solução da equação da linha elástica a seguir:

Imagem 13 – Configuração da deformada de uma barra bi-apoiada



Fonte: Borges, 1999

$$y = a \times sen\left(\frac{\pi}{l}\right)x \qquad (29)$$

Derivando a equação (29) obtemos a expressão da curvatura aproximada:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} = -a \times \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \times sen\left(\frac{\pi}{l}\right)x \tag{30}$$

Tomando como base a expressão (29), tem-se:

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 y \tag{31}$$

Com o aumento do carregamento na barra, há um aumento também das deformações, o que consequentemente gera também o aumento dos momentos fletores externos:

$$M_{ext} = F \times y \tag{32}$$

Sendo máximo momento fletor externo obtido no ponto onde tem-se a flecha máxima *a*:

$$M_{ext,max} = F \times a \tag{33}$$

Para cada ponto da elástica da barra temos uma curvatura equivalente, o que consequentemente nos dá um valor de momento interno em função dessa curvatura. O valor máximo desse momento interno é obtido no meio da barra (biapoiada) e é dado pela equação (34) abaixo:

$$M_{int,max} = \left(\frac{1}{r}\right)_{x=l/2} \times EI \tag{34}$$

Para que se mantenha o equilíbrio estável admitido na seção 3.3, é necessário que os momentos internos sejam iguais aos externos, portanto:

$$M_{int} = M_{ext} \tag{35}$$

Com a igualdade acima e fazendo as devidas substituições chegamos a formulação da carga crítica demonstrada na seção anterior, porém desta vez a mesma foi encontrada em função da curvatura aproximada, comprovando desta forma, que há o equilíbrio na forma fletida.

Portanto, chega-se à conclusão que para o Regime Elástico ($\sigma_{crit} < f_o$), o momento interno, obtido através da fórmula da curvatura aproximada deve ser igual ao momento externo obtido através das deformações do eixo da barra para que haja a configuração de equilíbrio estável na forma fletida, ou seja, para $F > F_{crit}$.

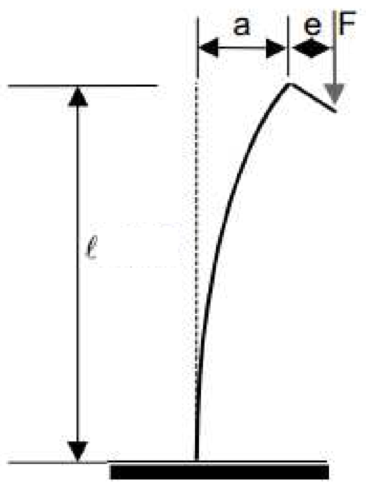
Já para o Regime anelástico, onde a tensão crítica é maior que a tensão de proporcionalidade ($\sigma_{crit} > f_o$) e com isso temos deformações desproporcionais a carga aplicada, obtém-se um diagrama momento interno x curvatura com trecho curvo, sendo necessário que essa curva cruze com a curva do momento externo antes que o material atinja a ruptura, para que então haja o equilíbrio estável na forma fletida.

3.5 Instabilidade na Flexão Composta

Quando as barras esbeltas estão submetidas à flexo-compressão e ao regime elástico, ao obter-se sua elástica pode-se calcular as flechas através do equacionamento abaixo:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M}{EI} \tag{36}$$

Imagem 14 – Barra Engastada na Base com carga F excêntrica



Fonte: Borges, 1999 (adaptado)

Como podemos observar na imagem 14, o momento externo assumo o valor de:

$$M = F\left(e_i + y\right) \tag{37}$$

Substituindo (37) na equação (36), tem-se:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-F\left(e_i + y\right)}{EI} \tag{38}$$

Fazendo $k^2 = \frac{F}{EI}$, temos:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 e_1 \tag{39}$$

Sendo a equação acima, permitida para os cálculos das flechas. Observa-se que para o caso de instabilidade na flexo-compressão não é válida a carga crítica de Euler, visto que nesses casos se admite que a barra está submetida a carregamento centrado apenas, o que não ocorre para casos de flexo-compressão, havendo dessa forma uma incoerência física.

No regime elástico, as barras submetidas a flexo-compressão não terão problemas com instabilidade. Para que haja o fenômeno da Instabilidade na flexão-composta considera-se:

Linha elástica senoidal:

$$y = a \times sen \frac{\pi}{l} x \tag{40}$$

Curvatura aproximada:

$$\frac{1}{r} \cong \frac{d^2 y}{dx^2} = -a \times \left(\frac{-\pi}{l}\right)^2 \times sen \frac{\pi}{l} x \tag{41}$$

Que resulta na formulação da flecha dada por:

$$y = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \times \frac{1}{r} \tag{42}$$

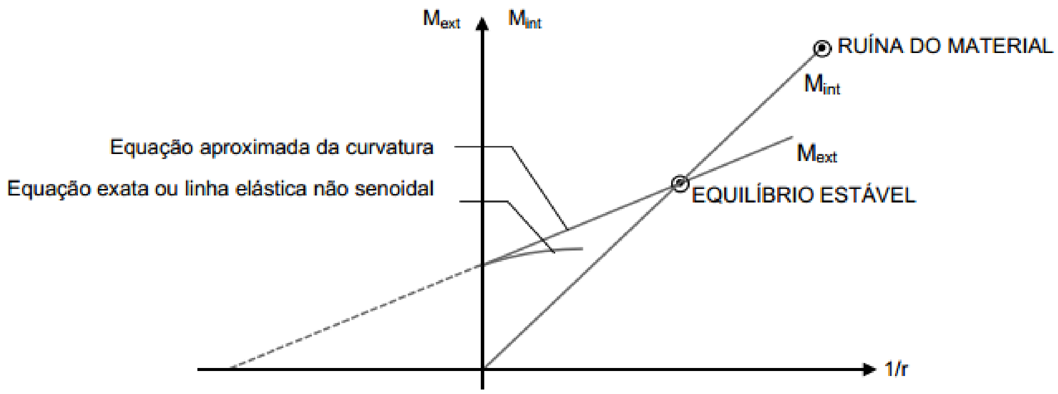
Com isso podemos substituir o valor de y na equação do momento externo:

$$M_{ext} = F\left[e_i + \left(\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \times \frac{1}{r}\right)\right] \tag{43}$$

Podemos observar que a equação (43) é uma função linear da curvatura. E para que haja estabilidade das formas de equilíbrio é necessário que esse momento externo seja igual ao momento interno, ou seja, é preciso que seja satisfeita a equação (35).

Se a barra em estudo estiver no regime elástico, ou seja, a tensão crítica não ultrapassar a tensão limite de proporcionalidade do material, sempre haverá uma configuração estável de equilíbrio, pois para esta situação o momento interno é uma função linear das curvaturas cruzando-se então com o momento externo, caracterizando dessa forma o equilíbrio estável, como é ilustrado na imagem a seguir:

Imagem 15 – Flexo-compressão no Regime Elástico

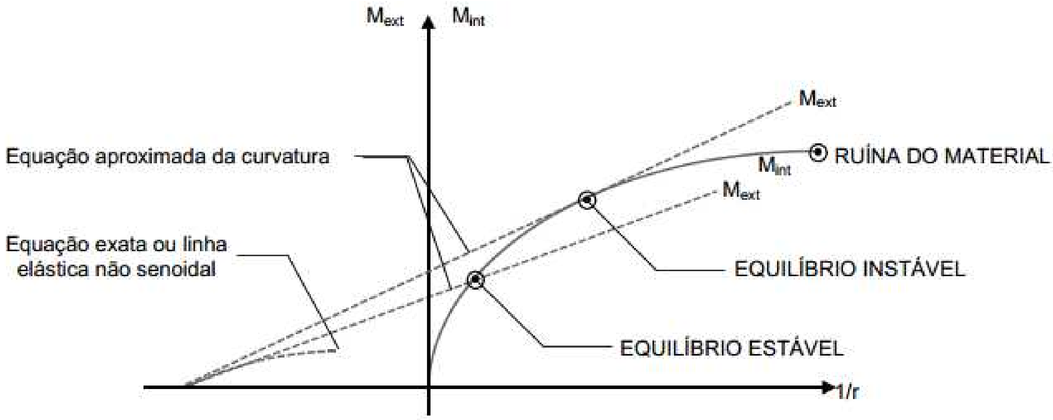


Fonte: Borges, 1999

Portanto, haverá colapso apenas por ruptura do material.

Contudo, quando temos a tensão crítica ultrapassando a tensão de proporcionalidade do material, obtemos uma função de momento interno curva, logo não-linear as curvaturas, surgindo então a instabilidade na flexo-compressão para um carregamento crítico na qual a barra está submetida. Já para um carregamento superior a este, não há equilíbrio possível.

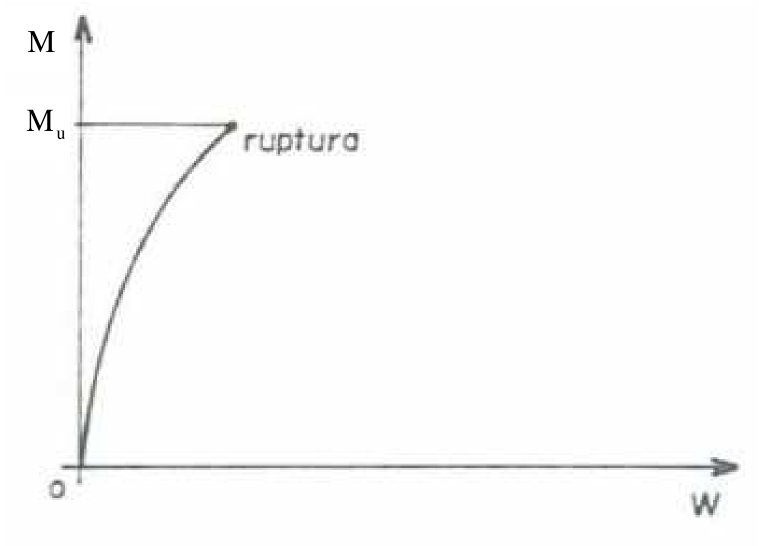
Imagem 16 – Flexo-compressão no Regime Anelástico



Fonte: Borges, 1999

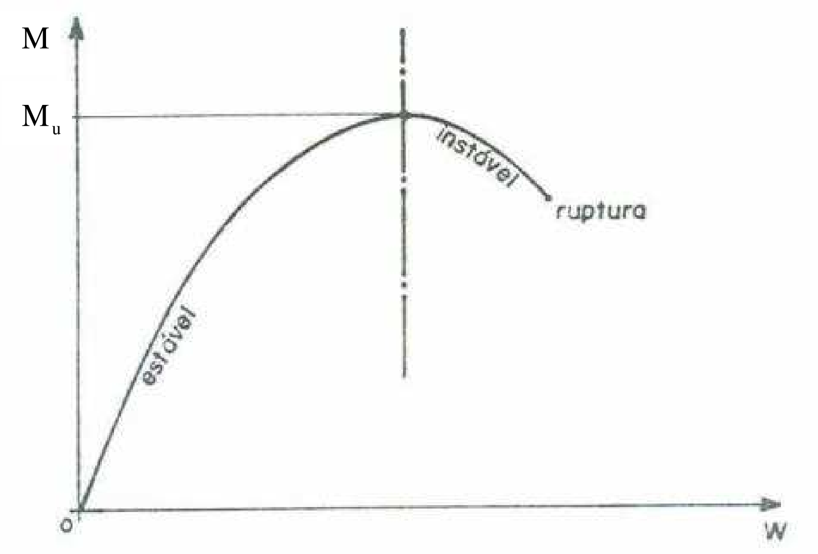
Quando relacionamos a instabilidade aos momentos fletores no qual a barra está submetida, podemos observar que para que não haja ELU-Instabilidade é necessário que o momento fletor de cálculo de primeira ordem (o momento em que se dimensiona peças robustas – ELU de ruptura) seja inferior ao momento crítico (momento onde obtêm-se o colapso por instabilidade - ELU de instabilidade), como representado a seguir:

Imagem 17 – Curva momento-deslocamento para ruptura por ruína



Fonte: Araújo, 1984 (adaptado)

Imagem 18 – Curva momento-deslocamento para ruptura por instabilidade



Fonte: Araújo, 1984 (adaptado)

Então, para a maioria dos casos de dimensionamento de pilares em que temos barras robustas, cuja a tensão crítica não atinge o limite de proporcionalidade, sempre haverá equilíbrio, visto que o dimensionamento é sempre feito para o momento fletor de cálculo de primeira ordem.

4 DIAGRAMA MOMENTO FLETOR – ESFORÇO NORMAL – CURVATURA

Neste capítulo se estudará o conceito de curvatura, as relações entre momento fletor e curvatura para casos de flexão simples, as modificações nas relações quando se inclui a força normal como nos casos de flexão composta, além é claro, de apresentar a construção dos diagramas M, N, 1/r, expondo um roteiro didático e facilmente programável.

4.1 Introdução

Como foi estudado no capítulo anterior, para que haja instabilidade na flexão composta é necessário que o material atinja sua tensão limite de proporcionalidade, diferente de barras axialmente comprimidas, onde há o ponto de bifurcação que caracteriza a mudança das configurações de equilíbrio estável para instável tanto em fase elástica quanto anelástica. Porém, sabemos que a compressão simples não é permitida para os pilares, pois os mesmos sempre estão submetidos a um momento mínimo segundo as prescrições da ABNT NBR 6118:2014.

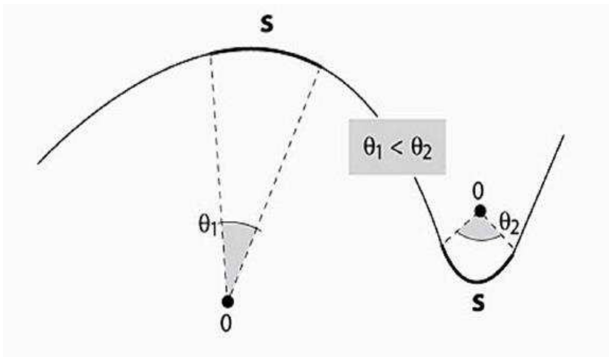
No estudo dos pilares esbeltos, a possibilidade de instabilidade se intensifica, pois há um aumento significativo nos valores dos esforços de segunda ordem, e isso ocorre devido a ocorrência das não-linearidades. A NLF do concreto para pilares submetidos a flexo-compressão normal é levada em consideração através dos diagramas M, N, 1/r. Esse diagrama varia de acordo com a intensidade da força normal, que acaba modificando o momento interno e consequentemente a curvatura, que é relacionada com a rigidez EI do elemento. Com a obtenção dessa rigidez, utilizar-se ela na verificação de pilares esbeltos através do Método Geral (capítulo subsequente), introduzindo assim a NLF de forma bem mais refinada.

Para um entendimento mais completo das relações entre momento fletor e curvatura e dos traçados dos seus diagramas, no qual se propõem este capítulo, é necessário a definição do conceito de curvatura, da apresentação das relações para casos de flexão simples, além de ter-se em mente o entendimento de não-linearidades já expostos na seção 3.2.

4.2 Curvatura

Segundo Kimura (2007), a curvatura é a variação de um ângulo ao longo de um segmento. Por muitas vezes, esta é confundida com a rotação, mas através da imagem demonstra-se claramente o conceito exposto:

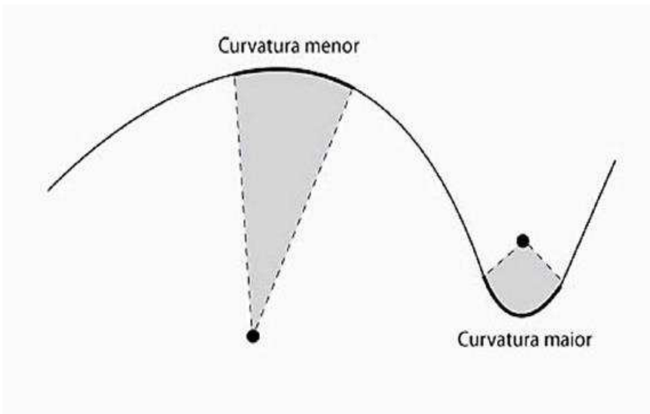
Imagem 19 - Variação de ângulo ao longo de um comprimento de arco



Fonte: Kimura, 2007

A imagem apresenta dois ângulos distintos compreendidos em um mesmo comprimento de arco (*s*), sendo o ângulo θ_1 menor que θ_2. Concluímos então, que a curvatura da esquerda é menor que a da direita.

Imagem 20 – Ideia intuitiva de curvatura

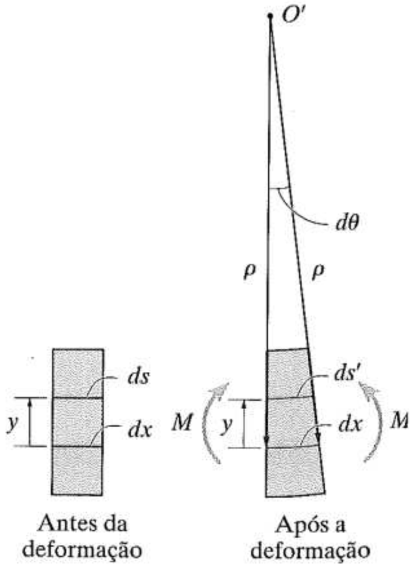


Fonte: Kimura, 2007

A curvatura também pode ser definida segundo os conceitos de Resistência dos Materiais, ao estudar-se deflexões em vigas, onde segundo Hibbeler (2010):

Quando o momento fletor interno *M* deforma o elemento da viga, o ângulo entre as seções transversais torna-se $d\theta$. O arco *dx* representa uma porção da linhas elástica que intercepta o eixo neutro para cada seção transversal. O raio de curvatura para esse arco é definido como a distância *r*, que é medida do *centro de curvatura O'* até *dx*.

Imagem 21 – Curvatura da Seção de uma Barra



Fonte: Hibbeler, 2010

Onde define-se a curvatura como sendo o inverso do raio de curvatura definido por um segmento curvo, dada pela expressão abaixo:

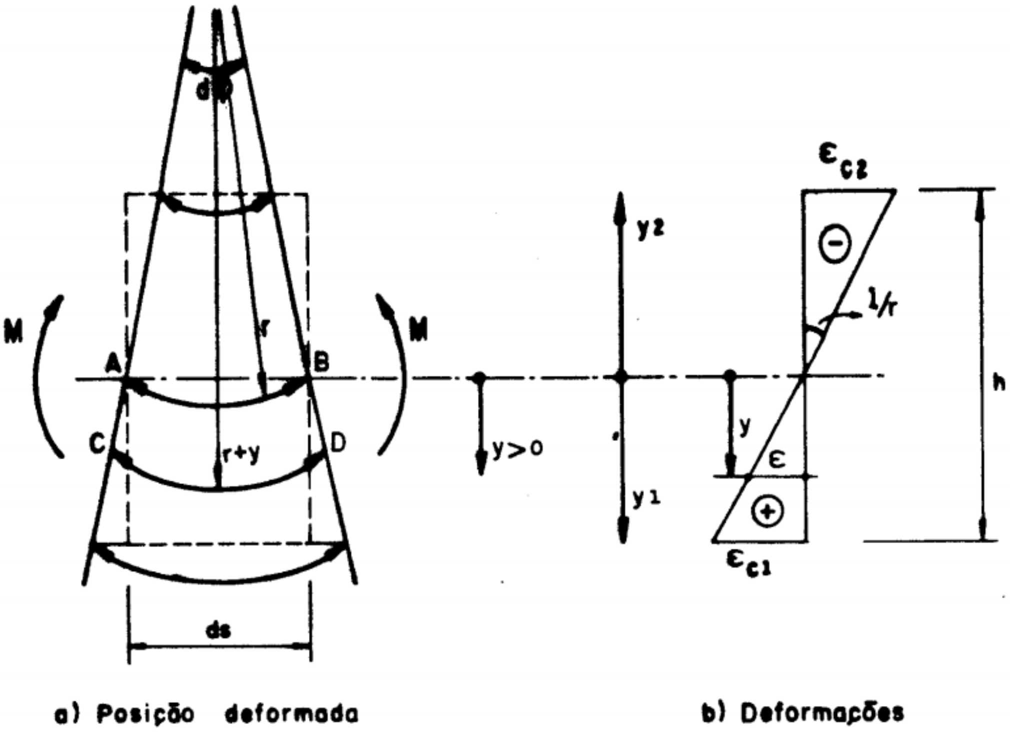
$$curvatura = \frac{1}{r} \tag{44}$$

4.2.1 *Expressão Geral da Curvatura*

Estendendo o conceito de curvatura para uma peça de concreto armado (material não-linear), admitindo as considerações da seção anterior e a hipótese de Bernoulli definida na seção 2.2, temos que a fórmula geral da curvatura numa seção é dada pele equação (45), como pode-se observar com o auxílio da imagem 22:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_s}{h} \tag{45}$$

Imagem 22 – Curvatura de uma Seção de Concreto Armado



Fonte: Paula, 1988

Onde:

r é o raio de curvatura;

ε_c é a deformação na borda mais encurtada;

ε_s é a deformação na borda mais alongada;

h é a altura da seção.

A expressão (45) assume caráter geral, pois é válida na flexão composta e para qualquer tipo de material, sendo possível ainda para casos com linha neutra dentro ou fora da seção. Devido a isso, Kimura (2007) afirma que pelas deformações no concreto e no aço, e pela altura útil da seção pode-se calcular a curvatura em seção de concreto armado.

4.3 Relação Momento - Curvatura

Analisando a imagem, aplicando os conceitos de curvatura expressos na seção 4.2, levando em consideração a Lei de Hooke e a formulação de tensão na flexão simples (47), podemos escrever uma expressão para curvatura relacionando-a com momento fletor atuante na seção:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{46}$$

$$\sigma = \frac{M}{I} \times y \tag{47}$$

Isolando σ e igualando as expressões, temos a relação entre curvatura e momento fletor, como mostra o equacionamento abaixo:

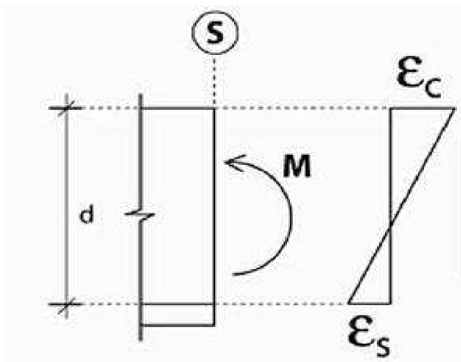
$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{EI} \tag{48}$$

A expressão obtida acima deixa evidente que a relação entre momento e curvatura de uma seção é definida pela rigidez EI. Através da mesma, e considerando que o material está no regime elástico, pode-se obter as flechas (*y*) através da integração da equação da Linha Elástica ou por Analogia de Mohr. Devido à presença apenas do momento fletor, temos que a formulação é válida apenas para casos de flexão simples.

4.3.1 Diagrama Momento – Curvatura

Quando se define a relação entre momento e curvatura para vários valores de solicitações, obtém-se os diagramas $M\,x 1/r$. Segundo Kimura (2007), um bom exemplo de diagrama momento-curvatura é o que representa o comportamento de um trecho de concreto armado sob flexão, apresentado abaixo:

Imagem 23 – Seção de uma Barra



Fonte: Kimura (2007)

Nesse diagrama, observa-se que o primeiro trecho é linear e representa o Estádio I, onde o concreto resiste bem as tensões de tração e o produto rigidez (EI) é constante. Esse estádio termina quando o momento atinge o momento de fissuração, onde ocorre a primeira fissura no concreto. O próximo trecho, não é mais linear, e sim curvo, e por isso temos uma rigidez variável. Este chamamos de Estádio II, e nele a seção começa a fissurar. Este estádio é delimitado pelo momento de escoamento, ou seja, a armadura tracionada começa a escoar. O último trecho é representado por um aumento da curvatura para pouco acréscimo de momento. Esse estádio é o III e ele se finda com o momento último, ou seja, atinge-se o ELU.

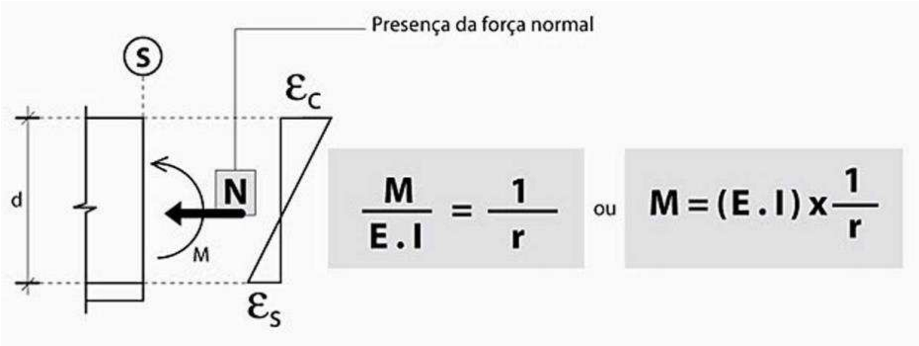
O traçado desse diagrama é importante, pois é uma maneira de se considerar a NLF, conceituada na seção 3.2.1, de forma não aproximada, o que gera resultados bem próximos da realidade.

Kimura (2007) ainda afirma que para traçar esse tipo de diagrama necessita-se do conhecimento prévio da armadura, para então levar-se em conta as não-linearidades. Baseado nisso, afirma-se que todo processo onde utiliza-se os diagramas de interação *M x 1/r* no cálculo de elementos estruturais, no caso deste trabalho para pilares esbeltos, realiza-se na verdade a verificação de um dimensionamento, e não um dimensionamento propriamente dito, visto que as armaduras devem ser preestabelecidas.

4.4 Relação Momento Fletor - Esforço Normal - Curvatura (M, N, 1/r)

A relação momento – curvatura apresentada na seção 4.3 é utilizada para casos de flexão simples e para materiais com comportamento linear. Geralmente faz-se essa consideração em casos de vigas. Em situações onde se inclui o esforço normal, a relação é modificada, visto que o caso caracteriza uma flexão composta. Nessa situação, a força normal entra como parte integrante do mecanismo resistente da seção, e esta passa a ser solicitada tanto pela força normal de compressão quanto pelo momento fletor, fato que acontece nos pilares de modo geral.

Imagem 24 – Seção de uma Barra Solicitada à Flexo-compressão



Fonte: Kimura (2007)

Com a equação da curvatura x momento fletor para flexão simples, percebe-se que a relação momento-curvatura está associada a deformada. Analogamente, para o caso da flexão composta, Santos (1987) afirma que:

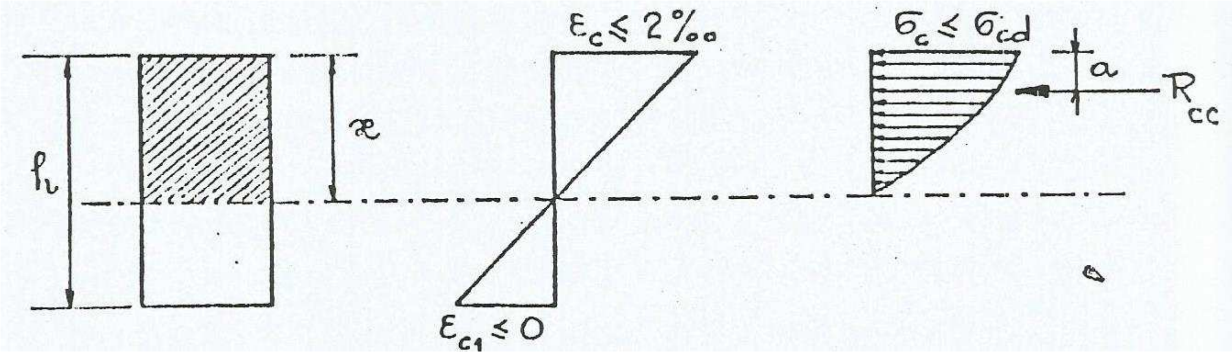
> Nas peças de concreto armado, se descobrirmos uma relação que ligue a curvatura ao momento fletor, teremos meio caminhado andado para a solução do problema da deformada. Na realidade, procura-se diagramas de interação força normal – momento fletor – curvatura. Tais diagramas são a ferramenta básica de qualquer cálculo de verificação de instabilidade.

Para que se relacionar o momento e curvatura na flexão composta, é necessário ter em mãos o diagrama tensão-deformação do concreto. Neste trabalho, será utilizado o diagrama parábola-retângulo apresentado pela ABNT NBR 6118:2014, e através deste diagrama, na seção subsequente, serão determinados os esforços internos na seção de concreto armado. Este trabalho apresentará um roteiro para elaboração deste diagrama para seções retangulares, contudo, pode-se adaptar este roteiro para outros tipos de seção.

- Resultante da R_{cc} e sua posição em função de ε_c e θ:

A imagem 25 mostra a seção retangular submetida a uma resultante R_{cc} localizada a uma distância “a” da borda mais comprimida. Deseja-se determinar essa resultante R_{cc} e a distância “a” em função do encurtamento máximo ε_c e da curvatura θ.

Imagem 25 – Resultante R_{cc} e sua posição



Fonte: Santos (1987)

Adimensionalisando a resultante de força e de momento no concreto, surgem os parâmetros η e η', conforme as formulações abaixo:

$$\eta = \frac{Rcc}{\sigma_{cd} \times A_c} \tag{49}$$

$$\eta' = \frac{Rcc \times a}{\sigma_{cd} \times A_c \times h} \tag{50}$$

Onde, resulta em:

$$\eta' = \eta \times \beta_a \tag{51}$$

Sendo:

$$\beta_a = \frac{a}{h} \tag{52}$$

Além de termos a tensão de cálculo do concreto dada por:

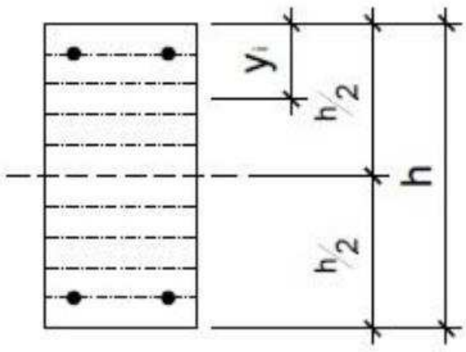
$$\sigma_{cd} = 0,85 \times \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \tag{53}$$

O cálculo da capacidade resistente do concreto (R_{cc}) pode ser obtido através de expressões analíticas, contudo uma interessante forma de tratar o problema é utilizar métodos de integração numérica. Dentre estes, pode-se citar o Método do Trapézio, Método de Simpson e Método da Quadratura de Gauss. Porém para este estudo, optou-se por utilizar o Método do Ponto Médio, pois segundo Prazeres, Gomes e Souza (2003) o mesmo, quando comparado com os demais, apresenta uma rápida convergência de resultados, apesar de possuir uma simples formulação, tornando-se assim, atrativo para este fim.

Uma vantagem de aplicar métodos de integração numérica é que um programa computacional elaborado para calcular este tipo de diagrama pode ser facilmente adaptável para contemplar diferentes diagramas de tensão-deformação do concreto de outras normas, além da ABNT NBR 6118:2014.

O Método do Ponto Médio baseia-se em dividir a seção em estudo em diversas partes, onde o número de subdivisões da seção equivale ao número de pontos de integração. O resultado é tão preciso quanto maior for o número de subdivisões. Para este caso, julgou-se suficiente dividir a seção em 10 partes. Em cada parte, será obtido um valor de R_{cci} referente a sua subseção. O somatório de todos R_{cci} resultará no R_{cc} da seção. Através da imagem 26, pode-se ter uma ideia melhor do que se trata:

Imagem 26 – Seção transversal dividida em 10 subseções



Fonte: Ribeiro, Silva e Cunha (2015)

- Compatibilidade das Deformações:

O diagrama das deformações é linear ao longo da altura da seção. Com isso, podemos verificar que:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_{si}}{x - d_i} \tag{54}$$

E sendo:

$$\beta_x = \frac{x}{d} \tag{55}$$

$$\beta_i = \frac{d_i}{h} \tag{56}$$

Temos como resultado que:

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_c \times \frac{\beta_x - \beta_i}{\beta_x} \tag{57}$$

- Equações de Equilíbrio:

Para a determinação das equações de equilíbrio temos que a seção transversal retangular está submetida a um par de esforços solicitantes: o esforço normal (N) e o momento fletor (M). Esses esforços não são obrigatoriamente os esforços últimos, o que quer dizer que as deformações ocasionadas na seção podem ser menores que aquelas correspondentes a ruína.

Fazendo o equilíbrio em relação ao centro da seção, tem-se que as equações resultam nos esforços internos abaixo:

$$N = Rcc + \sum_{1}^{n} A_{si} \times \sigma_{si} \tag{58}$$

$$M = Rcc\left(c_2 - a\right) + \sum_{1}^{n} A_{si} \times \sigma_{si}\left(c_2 - d_i\right) \tag{59}$$

Onde temos que:

- N é o esforço normal resultante na seção;
- A_{si} é a área total de aço contida na seção;
- σ_{si} é tensão no aço
- c_2 é a distância da fibra mais comprimida (ou menos tracionada) até o centro geométrico;
- a é a distância entre a localização da força resultante até a fibra mais comprimida (ou menos tracionada);
- d_i é a distância do centroide da armadura até a fibra mais comprimida (ou menos tracionada).

Temos ainda os adimensionais a seguir:

$$v = \frac{N}{\sigma_{cd} \times A_c} \tag{60}$$

$$\mu = \frac{M}{\sigma_{cd} \times A_c \times h} \tag{61}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_{si}}{\sigma_{cd}} \tag{62}$$

$$\eta = \frac{Rcc}{\sigma_{cd} \times A_c}$$

$$\eta' = \frac{Rcc \times a}{\sigma_{cd} \times A_c \times h} = \eta \times \beta_a$$

$$\rho = \frac{A_{si}}{A_c} = n \tag{63}$$

Sendo $c_2 = 0,5h$ e substituindo os adimensionais corretamente, podemos reescrevê-las da seguinte forma:

$$\mu = 0,5\eta - \eta' + \frac{\rho}{n}\sum_{1}^{n} n \times \alpha\left(0,5 - \beta\right) \tag{64}$$

- Curvatura Relativa (θ)

Como foi apresentado na seção 4.1.2 a curvatura possui uma expressão geral que pode ser aplicada ao concreto, onde a mesma relaciona-se apenas com as deformações no concreto e a altura da seção.

Para facilitar a rotina de construção do diagrama uma série de autores recomenda que essa curvatura seja transformada em uma curvatura relativa, que é adimensional e facilita a efetuação das contas.

Dada a equação geral da curvatura (45), multiplicando-se os membros da equação por *h,* obtém-se:

$$\frac{h}{r} = \varepsilon_c - \varepsilon_s \tag{65}$$

Multiplicando-se novamente os termos, agora por 1000, obtemos uma curvatura mil vezes maior e as deformações que serão trabalhadas agora com valores em ‰, e temos como resultado a curvatura relativa:

$$\theta = 1000 \times \frac{h}{r} = \varepsilon_c\left(‰\right) - \varepsilon_s\left(‰\right) \tag{66}$$

Dessa forma, quando não for indicado, as deformações serão na unidade ‰.

4.4.1 Diagrama Momento Fletor - Esforço Normal - Curvatura (μ, υ, θ):

A construção do diagrama M, N, 1/r é feito para uma seção onde são conhecidas algumas propriedades do pilar como a área de aço e suas dimensões. Este é baseado em um processo interativo de execução extremamente trabalhosa quando feita manualmente. É aconselhável que o mesmo seja confeccionado sempre com auxílios computacionais.

A ideia para elaboração é simples e se dar pela relação entre a curvatura e as deformações, essas por sua vez estão ligadas as tensões através de equações, de posse da curvatura, deformações e tensões, calcula-se os adimensionais de força υ e de momento μ.

Segundo Santos (1987) o processo pode ser feito através de cálculos numéricos como sugerido pelo CEB ou por meio de cálculo analítico. O método apresentado aqui é proposto por Santos, o de cálculo analítico, que é baseado nas formulações apresentadas anteriormente.

4.4.2 Roteiro para o traçado do diagrama (μ, υ, θ):

A seguir, apresenta-se um roteiro extremamente didático e de fácil automatização via *software:*

1) Fixar um valor de υ:

$$\upsilon = \frac{N}{\sigma_{cd} \times A_c}$$

$$\sigma_{cd} = 0{,}85 \times f_{cd}$$

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}$$

$$A_c = b \times h$$

- N - Esforço normal de compressão característico que age no pilar;
- σ_{cd} - Tensão de cálculo do concreto a compressão;
- f_{cd} - Resistência de cálculo do concreto a compressão;
- f_{ck} - Resistência característica do concreto a compressão;
- γ_c - Coeficiente de segurança do concreto ($\gamma_c = 1,4$);
- A_c - Área da seção transversal do pilar.

2) Fixar um valor de θ:

$$\theta = 1000 \times \frac{h}{r}$$

Sendo θ a curvatura adimensional, tem-se:

$$0 < \frac{1}{r} \leq \frac{\varepsilon_{cu}‰ + 10‰}{h} \text{ ou } 0 < \theta \leq \varepsilon_{cu} + 10$$

$$\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ se } f_{ck} \leq 50MPa$$

$$\varepsilon_{cu} = 2,6 + 35\left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4 \text{ se } f_{ck} > 50MPa\, e\, f_{ck} \leq 90MPa$$

- ε_{cu} – Deformação última no concreto;
- f_{ck} – Resistência característica do concreto à compressão.

3) Escolhe-se um valor para ε_c, onde:

$$0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

- ε_c – Encurtamento da fibra mais comprimida ou menos tracionada.

4) Calcula-se β_x, onde:

$$\beta_x = \frac{\varepsilon_c}{\theta}$$

- β_x – Profundidade adimensional da linha neutra.

5) Calculo da parcela da capacidade resistente da seção referente ao concreto:

Força Normal (η):

- Calcula-se β_i :

$$\beta_i = \frac{d_i}{h}$$

- d_i – Profundidade do ponto de integração. Distância entre o centroide de cada subseção até a fibra mais comprimida ou menos tracionada.
- β_i – Profundidade adimensional do ponto de integração

- Calcula-se ε_{ci} :

$$\varepsilon_{ci} = \frac{\varepsilon_c\left(\beta_x - \beta_i\right)}{\beta_x}$$

- ε_{ci} – Deformação do concreto na subseção analisada;
- ε_c – Deformação do concreto arbitrada no início da rotina.

- Com posse de ε_{ci}, calcula-se σ_{ci} :

Se $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$: $\sigma_{ci} = \sigma_{cd}$

Se $0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2}$: $\sigma_{ci} = \sigma_{cd}\left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right)$

Se $\varepsilon_c < 0$: $\sigma_{ci} = 0$

Onde:

Se $f_{ck} \leq 50MPa$, tem-se:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0$$

$$n = 2,0$$

Se $50MPa < f_{ck} \leq 90MPa$, tem-se:

$$\varepsilon_{c2} = 2,0 + 0,085\left(f_{ck} - 50\right)^{0,53}$$

$$n = 1,4 + 23,4\left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4$$

- ε_{c2} – Deformação na borda mais comprimida do concreto;

- ε_{cu} – Deformação última do concreto;
- σ_{ci} – Tensão no concreto na subseção analisada;
- σ_{cd} – Tensão no concreto de cálculo.

Caso se deseje incluir o efeito da fluência do concreto no diagrama, deve-se seguir o apresentado na seção 2.1.1.4, ou seja:

$$\varepsilon_{c2} = (1+\varphi)\varepsilon_{c2}$$

$$\varepsilon_{cu} = (1+\varphi)\varepsilon_{cu}$$

- φ – Coeficiente de fluência do concreto.

- Finalmente, calcula-se R_{cci} :

$$R_{cci} = \sigma_{ci} \times b \times \frac{h}{10}$$

- Sendo R_{cc} :

$$R_{cc} = \sum_{i=1}^{n=10} R_{cci}$$

- Adimensionando R_{cc}, encontraremos o parâmetro η :

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{ci} \times A_c}$$

Momento Fletor (η'):

- Calcula-se β_a :

Se $R_{cc} = 0$: $\beta_a = 0$

Se $R_{cc} \neq 0$: $\beta_a = \dfrac{\sum R_{cci} \times \beta_i}{Rcc}$

- Com β_a, define-se η':

$$\eta' = \eta \times \beta_a$$

6) Cálculo da parcela da capacidade resistente da seção referente aço:

Sendo i o número da camada em análise, repete-se o cálculo para as n camadas de aço:

- Cálculo de β_i:

$$\beta_i = \frac{d_i}{h}$$

- d_i – Profundidade do ponto de integração;
- β_i – Profundidade adimensional do ponto de integração.

- Cálculo de ε_{si} :

$$\varepsilon_{si} = \frac{\varepsilon_c \left(\beta_x - \beta_i\right)}{\beta_x}$$

Condição: $\varepsilon_{si} \geq -10$

- ε_{si} – Deformação do aço na subseção analisada;
- ε_c – Deformação do concreto arbitrada no início da rotina.

- Com posse de ε_{si}, calcula-se σ_{si}:

Se $\left|E_s \times \frac{\varepsilon_{si}}{1000}\right| \leq f_{yd}$: $\sigma_{si} = E_s \times \frac{\varepsilon_{si}}{1000}$

Se $\left|E_s \times \frac{\varepsilon_{si}}{1000}\right| > f_{yd}$: $\sigma_{si} = \frac{\left|\varepsilon_{si}\right|}{\varepsilon_{si}} \times f_{yd}$

- σ_{si} – Tensão do aço na camada analisada;
- E_s – Módulo de Elasticidade Longitudinal do aço: $E_s = 210GPa$
- f_{yd} – Tensão de escoamento de cálculo do aço.

- Cálculo do adimensional de tensão:

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{\sigma_{cd}}$$

- Cálculo do adimensional das áreas:

$$\rho_i = \frac{A_{si}}{A_c}$$

7) Capacidade Resistente da Seção:

$$v_j = \eta + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times \alpha_i$$

- v_j – Adimensional de Normal calculado.

8) Se $v_j = v$, calcula-se μ :

$$\mu = 0{,}5\eta - \eta' + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times \alpha_i \left(0{,}5 - \beta_i\right)$$

- μ – Adimensional de momento fletor dado por: $\mu = \dfrac{M_d}{\sigma_{cd} \times A_c \times h}$.

Após o cumprimento da rotina apresentada, encontra-se um ponto do diagrama, onde este possui coordenada (μ ,θ). Para a elaboração do diagrama completo, basta dar prosseguimento com os item 9) e 10), porém por ser um trabalho extremamente penoso, aconselha-se que, através deste roteiro seja elaboradas rotinas computacionais em planilhas ou softwares específicos onde se possa gerar os diagramas de forma automatizada.

9) Se $v_j \neq v$, voltar para o item 3) e arbitrar um novo valor para ε_c .

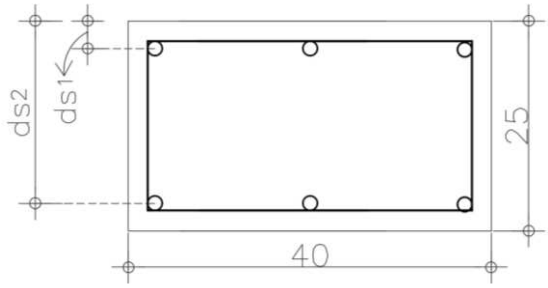
10) Sendo $v_j = v$, voltar para o item 2) e arbitrar um novo valor para θ .

4.5 Exemplo Numérico

A seguir, apresentar-se-á um exemplo adaptado de Santos (1987), onde será feita a determinação de um ponto do diagrama μ, υ, θ para um pilar esbelto de concreto de alta resistência.

Um pilar de seção retangular encontra-se sob flexo-compressão normal, com seção transversal considerada crítica de largura b = 40cm e altura h = 25cm, e está armada com 6 barras de ϕ16mm, sendo 3 barras em cada face, como apresentado na imagem 27. A força normal que atua na seção é $N = 60,5tf$ ($N = 605kN$). Estuda-se o comportamento do pilar à medida que ele se deforma. Quando a curvatura atinge um valor correspondente a $\theta = 1$, deseja-se saber qual o correspondente adimensional de momento fletor resistido pela seção.

Imagem 27 – Seção transversal do pilar em exemplo



Fonte: Autor, 2016

São dados:

$f_{ck} = 90MPa = 9\ \text{KN/cm²}$

$Aço\ \ CA-50$

$\gamma_c = 1,4$

$E_s = 21000\,KN/cm²$

$f_{yk} = 50\,KN/cm²$

$N = 605\,KN$

$d_{s1} = 2,5cm$

$A_{s1} = 6cm²$

$d_{s2} = 22,5cm$

$A_{s2} = 6cm²$

A resolução se dar seguindo o roteiro apresentado na seção anterior:

1) Fixar um valor de ν:

$$\upsilon = \frac{N}{\sigma_{cd} \times A_c}$$

Sendo:

$$A_c = b \times h = 40 \times 25 = 1000cm²$$

$$\sigma_{cd} = 0,85 \times f_{cd} = 0,85 \times \frac{fck}{\gamma_c} = 0,85 \times \frac{9}{1,4} = 5,46\ KN/cm^2$$

Tem-se que:

$$\upsilon = \frac{605}{5,46 \times 1000}$$

$$\upsilon = 0,1108$$

2) Fixar um valor para θ:

$$0 < \theta \leq \varepsilon_{cu} + 10$$

Sendo:

$$\varepsilon_{cu} = 2,6 + 35\left(\frac{90 - f_{ck}}{100}\right)^4 = 2,6 + 35\left(\frac{90 - 90}{100}\right)^4 = 2,6$$

Adotou-se:

$$\theta = 1,0$$

Como:

$$0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$$

Arbitrou-se:

$$\varepsilon_c = 0,6$$

3) Calcular β_x:

$$\beta_x = \frac{\varepsilon_c}{\theta}$$

4) Calcular a parcela da capacidade resistente – Concreto

Força Normal

- Cálculo de β_i:

$$\beta_i = \frac{d_i}{h}$$

$$\beta_1 = 0,05$$

$$\beta_2 = 0,15$$

$$\beta_3 = 0,25$$

$$\beta_4 = 0,35$$

$$\beta_5 = 0,45$$

$$\beta_6 = 0,55$$

$$\beta_7 = 0,65$$

$$\beta_8 = 0,75$$

$$\beta_9 = 0,85$$

$$\beta_{10} = 0,95$$

- Cálculo de ε_{ci} (‰):

$$\varepsilon_{ci} = \frac{\varepsilon_c \left(\beta_x - \beta_i\right)}{\beta_x}$$

$$\varepsilon_{c1} = 0,55$$

$$\varepsilon_{c2} = 0,45$$

$$\varepsilon_{c3} = 0,35$$

$$\varepsilon_{c4} = 0,25$$

$$\varepsilon_{c5} = 0,15$$

$$\varepsilon_{c6} = 0,05$$

$$\varepsilon_{c7} = -0,05$$

$$\varepsilon_{c8} = -0,15$$

$$\varepsilon_{c9} = -0,25$$

$$\varepsilon_{c10} = -0,35$$

- Cálculo de σ_{ci} (kN/cm²):

Sendo:

$$0 < \varepsilon_{ci} \leq \varepsilon_{c2}$$

Tem-se que a tensão é dada por:

$$\sigma_{ci} = \sigma_{cd}\left(1-\left(1-\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right)$$

$$\sigma_{c1} = 1,545$$

$$\sigma_{c2} = 1,275$$

$$\sigma_{c3} = 1,000$$

$$\sigma_{c4} = 0,720$$

$$\sigma_{c5} = 0,436$$

$$\sigma_{c6} = 0,146$$

$$\sigma_{c7} = 0$$

$$\sigma_{c8} = 0$$

$$\sigma_{c9} = 0$$

$$\sigma_{c10} = 0$$

Os valores nulos de tensão deve-se ao fato que as suas respectivas deformações obtidas foram de tração no concreto, portanto tem-se que estas tensões são desprezíveis.

- Cálculo de R_{cc} (kN):

Com os valores das tensões obtidos, calcula-se as resultantes de força de cada subseção:

$$R_{cci} = \sigma_{ci} \times b \times \frac{h}{10}$$

$$R_{cc1} = 154,5$$

$$R_{cc2} = 127,5$$

$$R_{cc3} = 100,0$$

$$R_{cc4} = 72,0$$

$$R_{cc5} = 43,6$$

$$R_{cc6} = 14,6$$

$$R_{cc7} = 0$$

$$R_{cc8} = 0$$

$$R_{cc9} = 0$$

$$R_{cc10} = 0$$

Calcula-se R_{cc} total da seção:

$$R_{cc} = \sum_{i=1}^{n=10} R_{cci}$$

$$R_{cc} = 512,20 \text{ kN}$$

- Cálculo de η:

Com posse de R_{cc}, calcula-se o adimensional de força η:

$$\eta = \frac{R_{cc}}{\sigma_{ci} \times A_c}$$

$$\eta = \frac{512,20}{5,46 \times 1000}$$

$$\eta = 9,38 \times 10^{-2}$$

Momento Fletor

- Cálculo de β_a:

$$\beta_a = \frac{\sum_{i=1}^{n=10} R_{cci} \times \beta_i}{R_{cc}}$$

$$\beta_a = \frac{104,6937}{512,20}$$

$$\beta_a = 0,2044$$

- Cálculo de η':

$$\eta' = \eta \times \beta_a$$

$$\eta' = 9,38 \times 10^{-2} \times 0,2044$$

$$\eta' = 1,90 \times 10^{-2}$$

5) Calcular a parcela da capacidade resistente – Aço

- Cálculo de β_i:

$$\beta_i = \frac{d_{si}}{h}$$

$$\beta_1 = \frac{d_{s1}}{h}$$

$$\beta_1 = \frac{2,5}{25}$$

$$\beta_1 = 0,1$$

$$\beta_2 = \frac{d_{s2}}{h}$$

$$\beta_2 = \frac{22,5}{25}$$

$$\beta_2 = 0,9$$

- Cálculo de ε_{si} (‰):

$$\varepsilon_{si} = \frac{\varepsilon_c\left(\beta_x - \beta_i\right)}{\beta_x}$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{\varepsilon_c\left(\beta_x - \beta_1\right)}{\beta_x}$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0,6\left(0,6-0,1\right)}{0,6}$$

$$\varepsilon_{s1} = 0,50$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_c\left(\beta_x - \beta_2\right)}{\beta_x}$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0,6\left(0,6-0,9\right)}{0,6}$$

$$\varepsilon_{s2} = -0,3$$

- Cálculo de σ_{si} (kN/cm²):

Para σ_{s1}:

$$\left| E_s \times \frac{\varepsilon_{s1}}{1000} \right| \leq f_{yd}$$

$$\left| 21000 \times \frac{0,5}{1000} \right| \leq \frac{50}{1,15}$$

$$|10,5| \leq 43,48 - ok$$

$$\sigma_{s1} = 10,5$$

Para σ_{s2}:

$$\left| E_s \times \frac{\varepsilon_{s2}}{1000} \right| \leq f_{yd}$$

$$\left| 21000 \times \frac{-0,3}{1000} \right| \leq \frac{50}{1,15}$$

$$|-6,3| \leq 43,48 - ok$$

$$\sigma_{s2} = -6,3$$

- Cálculo do adimensional de tensão (α_i):

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{si}}{\sigma_{cd}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{cd}}$$

$$\alpha_1 = \frac{10,5}{5,46}$$

$$\alpha_1 = 1,92$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma_{s2}}{\sigma_{cd}}$$

$$\alpha_2 = \frac{-6,3}{5,46}$$

$$\alpha_2 = -1,15$$

- Cálculo do adimensional de área (ρ_i):

$$\rho_i = \frac{A_{si}}{A_c}$$

$$\rho_1 = \frac{A_{s1}}{A_c}$$

$$\rho_1 = \frac{6}{1000}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 0,006$$

6) Cálculo da Capacidade Resistente da Seção:

$$\nu_j = \eta + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times \alpha_i$$

$$\nu_j = 9,38 \times 10^{-2} + 1,92 \times 0,006 + (-1,15) \times 0,006$$

$$\nu_j = 0,09842 \ \neq \ \nu = 0,1108$$

Tabela 2 – Resultados para $\varepsilon_c = 0,6$

ε_c	β_x	R_{cc}	η	β_a	η'	ε_{s1}	ε_{s2}	σ_{s1}	σ_{s2}	α_1	α_2	ν_j
0,6	0,6	512,20	0,0938	0,204	0,0191	0,5	0,3	10,5	6,3	1,92	1,15	0,09842

Fonte: Autor, 2016

Pode-se verificar que o valor do adimensional de normal encontrado para a deformação fixada inicialmente é inferior ao que realmente solicita a seção. Portanto, deve repetir o roteiro a partir do passo 3).

Para as próximas interações serão testados os valores para $\varepsilon_c = 0,7$ e $\varepsilon_c = 0,64$. Para evitar cálculos repetitivos, os resultados para essas interações serão apresentados conforme a tabela 3.

Tabela 3 – Resultados para $\varepsilon_c = 0,7$ e $\varepsilon_c = 0,64$

ε_c	β_x	R_{cc}	η	β_a	η'	ε_{s1}	ε_{s2}	σ_{s1}	σ_{s2}	α_1	α_2	ν_j
0,7	0,7	693,20	0,127	0,238	0,0302	0,6	-0,2	12,6	-4,2	2,307	-0,769	0,1362
0,64	0,64	579,13	0,106	0,216	0,0229	0,54	-0,26	11,34	-5,46	2,077	-1,00	0,1120

Fonte: Autor, 2016

Pode-se observar que para o valor de $\varepsilon_c = 0,64$, o adimensional de normal igualou-se ao inicialmente fixado ($\nu = 0,1108$), prossegue-se o cálculo, onde o próximo passo é determinar o adimensional de momento:

7) Calcula-se o adimensional de momento (μ):

$$\mu = 0,5\eta - \eta' + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times \alpha_i \left(0,5 - \beta_i\right)$$

$$\mu = 0,5 \times 0,106 - 0,0229 + (0,006 \times 2,077)(0,5 - 0,1) + (0,006 \times (-1))(0,5 - 0,9)$$

$$\mu = 0,0375$$

Portanto, com a obtenção dos valores de ν_j e μ, pode-se dizer que foi encontrado um ponto no diagrama μ - ν_j - θ, cuja coordenada é (θ, μ).

O exemplo original de Santos (1987) utilizou os mesmos dados deste exemplo, contudo a resistência característica do concreto à compressão foi de 20MPa. A seguir serão mostrados os resultados obtidos por Santos para $f_{ck} = 20$ MPa:

1) Fixar um valor de ν:

$$\upsilon = \frac{N}{\sigma_{cd} \times A_c}$$

$$\sigma_{cd} = 0,85 \times f_{cd} = 0,85 \times \frac{fck}{\gamma_c} = 0,85 \times \frac{2}{1,4} = 1,21$$

$$\upsilon = 0,5$$

2) Fixar um valor para θ:

$$\theta = 1,0$$

Tabela 4 – Resultados de Santos (1987)

ε_c	β_x	R_{cc}	η	β_a	η'	ε_{s1}	ε_{s2}	σ_{s1}	σ_{s2}	α_1	α_2	ν_j
0,9	0,9	416,0	0,344	0,314	0,108	0,8	0	16,8	0	13,88	0	0,427
1,0	1,0	504,39	0,417	0,352	0,147	0,9	0,1	18,9	2,1	15,62	1,73	0,521
0,98	0,98	486,15	0,402	0,344	0,139	0,88	0,08	18,48	1,68	15,27	1,39	0,502

Fonte: Autor, 2016

Para os resultados de Santos, verifica-se que o adimensional de força coincide com o fixado no início do roteiro para uma deformação de $\varepsilon_c = 0{,}98$ ‰. Diante disso, prossegue-se com o roteiro achando o valor de μ .

7) Calcula-se o adimensional de momento (μ):

$$\mu = 0{,}5\eta - \eta' + \sum_{i=1}^{n} \rho_i \times \alpha_i \left(0{,}5 - \beta_i\right)$$

$$\mu = 0{,}5 \times 0{,}402 - 0{,}139 + (0{,}006 \times 15{,}27)(0{,}5 - 0{,}1) + (0{,}006 \times 1{,}39)(0{,}5 - 0{,}9)$$

$$\mu = 0{,}096$$

Como pode-se observar, para os mesmos critérios considerados, o encurtamento na fibra mais comprimida do concreto foi maior para o exemplo de Santos, onde utilizou-se um f_{ck} de 20MPa, obtendo-se $\varepsilon_c = 0{,}98$‰ . Já para o exemplo proposto aqui, onde foi utilizado f_{ck} de 90MPa, conseguiu-se um valor de ε_c igual a 0,64‰. Concluindo-se que a fibra mais comprimida no concreto encurta menos para concretos de resistências elevadas. Podemos comparar também os valores de momentos de cálculo suportados pelas duas seções (de 20MPa e de 90MPa):

Para a seção de 20 MPa, tem-se um M_d de:

$$\mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} \times A_c \times h}$$

$$0{,}096 = \frac{M_d}{\frac{0{,}85 \times 2}{1{,}4} \times 1000 \times 25}$$

$$M_d \cong 290 \, \text{tf.cm}$$

Já para 90 MPa, tem-se M_d igual a:

$$\mu = \frac{M_d}{\sigma_{cd} \times A_c \times h}$$

$$0,0375 = \frac{M_d}{\frac{0,85 \times 9}{1,4} \times 1000 \times 25}$$

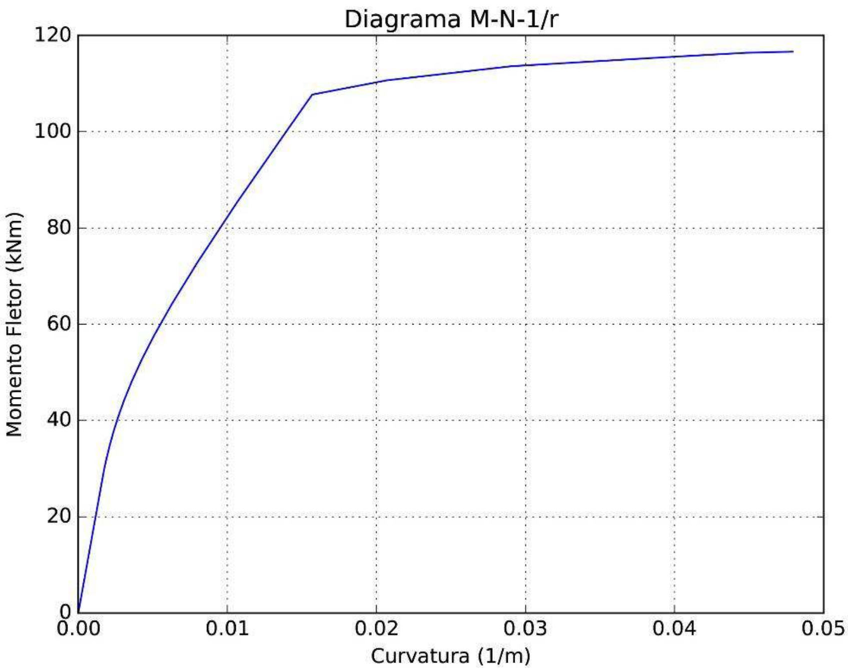
$$M_d \cong 512 \,\text{tf.cm}$$

Portanto, pode-se concluir que uma seção de concreto com $f_{ck} = 90\,\text{MPa}$ suportará um momento 76,55% maior que o momento suportado por uma seção de 20MPa. Mostrando-se a maior eficiência das seções compostas por concretos de alta resistência.

Este exemplo foi resolvido arbitrando-se valores para ε_c, e verificando se os resultados dos adimensionais de força correspondiam ao adotado no início do exemplo. Sendo assim, não utilizou-se nenhum critério para escolha deste ε_c. Para automatizar esta rotina, é interessante utilizar algum critério para acelerar a convergência do resultado. Uma opção é utilizar o Processo da Bissecante, apresentado por Araújo (2014), que é basicamente um método para obtenção da raiz de uma equação.

A seguir, apresenta-se o diagrama M-N-1/r completo, referente ao exemplo anterior, obtido através de um programa computacional, elaborado em Python 3.4, componente do trabalho de Abreu e Costa (2016), em elaboração.

Gráfico 1 – Diagrama M, N, 1/r para o exemplo anterior



Fonte: Abreu e Costa, 2016

5 MÉTODO GERAL

Este capítulo apresenta-se como o principal de todo estudo, pois refere-se a teoria escolhida para aplicação do objetivo geral desse trabalho. Neste se conceituará o Método Geral, que resumidamente, é um método de verificação de estabilidade de pilares esbeltos, mostrando suas inúmeras vantagens e comentando suas diversas formas de aplicação. Além disso, será apresentado também o método numérico escolhido para abordar o princípio do método geral.

5.1 Introdução

Na literatura atual o cálculo de pilares dispõem de uma série de métodos de dimensionamento. Para pilares esbeltos o tratamento é dado de forma mais cuidadosa, pois os deslocamentos transversais são consideráveis e influenciam nos momentos de segunda ordem, o que pode levar o pilar a uma configuração de instabilidade.

Pilares esbeltos, a rigor, não passam por um processo de dimensionamento como os pilares curtos ou medianamente esbeltos. O que é feito na realidade é verificar se a seção proposta suportará aos esforços solicitantes sem que a mesma atinja o estado limite último de instabilidade ou de ruptura. Essa verificação, conforme apresentado em Malakoski (1998), pode ser feita através do Método Geral ou do Método do Equilíbrio.

O Método do Equilíbrio é um tanto mais simples devido a não necessidade de se traçar um diagrama esforço x deslocamento. Neste, o estudo do equilíbrio é feito apenas analisando se um deslocamento específico obtido numa única seção de referência pré-determinada corresponde a uma configuração de equilíbrio estável ou não.

Já o Método Geral, foco deste estudo, representa uma das opções mais rigorosas e completas que se tem para cálculo de estruturas onde a consideração dos deslocamentos são importantes. Este método é também um método de verificação, onde se faz uma análise do pilar em questão, onde o mesmo está submetido a determinados esforços e composto por uma dada seção onde já são conhecidas suas propriedades como área de aço, camadas e dimensões. Com posse dessas informações, consegue-se verificar se o pilar atinge ou não uma configuração de equilíbrio instável, ou seja, se esse pilar atinge ou não o ELU-I, e também, a ruína por ruptura da seção, o ELU de Ruptura.

O método considera também as não-linearidades de forma não aproximada ao contrário dos métodos tradicionais para cálculo de pilares, possui uma análise mais refinada efetuando uma discretização da barra em questão analisando os esforços e deslocamentos em cada subseção, além da possibilidade de levar em conta os efeitos do tempo no concreto (fluência).

Apesar disso tudo, Santos (1987) afirma que o método geral permite a consideração de duas aproximações: uma é o equacionamento da curvatura que é dado de forma simplificada, devido a sua formulação exata levar a um cálculo diferencial extremamente trabalhoso; e a outra refere-se a utilização de processos numéricos para realizar a discretização da barra, sendo óbvio que, a exatidão é maior conforme maior for o número de subseções consideradas. Porém, mesmo com essas concessões, o método geral é bastante preciso e é visto como um método “exato”, apresentando resultados bem aproximados ao da realidade.

Vale lembrar que o Método Geral é obrigatório para verificação de pilares com esbeltez maior que 140, porém ele não é restringido somente a estes. Ele pode ser utilizado para dimensionamento de pilares de todos os tipos de esbeltezes, mostrando mais uma vez sua generalidade. Sua utilização permitirá resultados mais otimizados, levando em conta maior segurança e maior economia.

Para este estudo, será apresentado a teoria do método geral, que é extremamente abrangente, pois pode ser aplicada a pilares de seção, armadura ou força normal variável. Porém trata-se de um processo exaustivamente trabalhoso, portanto é aconselhável o uso de software ou planilhas eletrônicas para automatizar as cálculos, pois manualmente torna-se um processo vagaroso. Por se referir a um método facilmente programável, visto que seu processo de cálculo é bastante repetitivo, será apresentado um roteiro didático e autoexplicativo que pode servir de referência para elaboração de códigos computacionais futuros. No quesito prático do estudo, serão apresentados no capítulo seguinte exemplos numéricos que servirão de base para o entendimento aplicado do método geral. Para a parte prática deste trabalho, fez-se algumas limitações do uso do método geral, conforme mostra a seção seguinte.

5.2 Limitações do Estudo

Apesar de sua ampla aplicação, o método geral neste trabalho, para efeitos de exemplos numéricos, estará restringido a fazer a verificação de pilares esbeltos submetidos à flexo-compressão normal, ou seja, será considerado a ação do momento fletor atuando apenas em um eixo, sendo este um dos eixos de simetria da seção. A seção por sua vez, será restringida a casos retangulares, possuindo armadura simétrica e constante ao longo do pilar, assim como o esforço normal, que também será constante.

Além disso, os exemplos serão voltados para pilares de concreto de alta resistência, alteração incluída recentemente na ABNT NBR 6118:2014, e ainda irá considerar, como já comentado, as não-linearidades de forma não aproximada. A NLF é incluída no equacionamento através dos diagrama momento – normal – curvatura, apresentados na seção anterior. Já a não NLG é incluída através da consideração dos momentos de segunda ordem que estão em função das flechas calculadas por sucessivas interações obtidas por meio de processos numéricos.

Dentre os processos numéricos que podem ser utilizados, pode-se citar o Método das Diferenças Finitas, Integração Numérica, Método dos Elementos Finitos, Analogia de Mohr, dentre outros. A escolha de um ou outro baseia-se apenas na pré-disposição e conforto do pesquisador em executar um ou outro método. Para este trabalho, o autor optou por utilizar o Processo de Engesser-Vianello, também conhecido por Analogia de Mohr.

5.3 Analogia de Mohr

A analogia de Mohr trata-se de um método interativo baseado, assim como o Princípio dos Trabalhos Virtuais, na ideia de carga fictícia equivalente. É bastante utilizado na teoria do Método Geral, apesar de possuir, segundo Santos (1987), uma convergência extremamente lenta quando não aplicado corretamente. Ele é indicado neste caso, para descobrir os valores de deslocamentos do eixo deformado em relação a um ponto inicial no eixo indeformado do elemento, possibilitando assim o cálculos os momentos de 2ª ordem.

O processo surgiu após Mohr observar uma semelhança entre as equações diferenciais abaixo:

Analogia 1: Equação da linha elástica e Equação diferencial da estática:

$$\frac{d^2y}{dx} = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \tag{67}$$

Analogia 2: Equação da derivada dos momentos em relação a x e da equação da derivada dos deslocamentos em relação a x:

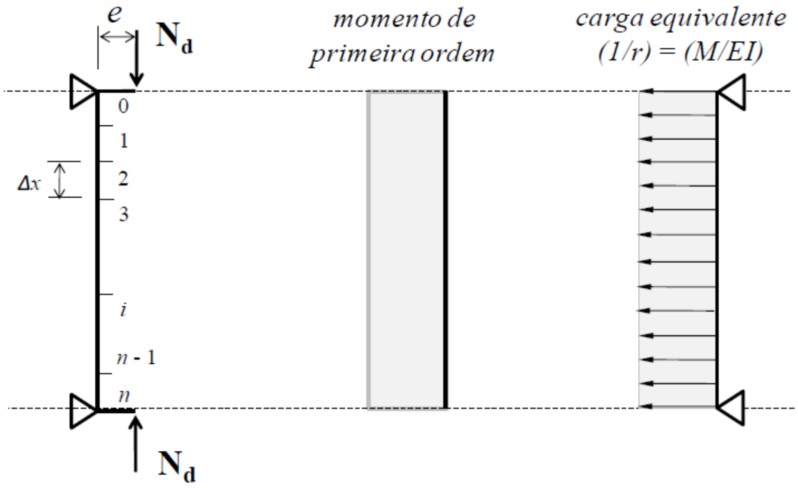
$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{68}$$

$$\frac{dV}{dx} = \phi \tag{69}$$

Segundo Martha (2010), a ideia de Mohr ao estudar essas analogias era ter uma forma alternativa de impor condições de compatibilidade em uma viga real, através de imposições de condições de equilíbrio em uma viga fictícia. Para entender-se melhor o processo, deve-se ter em mente que viga fictícia ou viga conjugada, é uma viga em um sistema equivalente ao real, onde nessa viga aplica-se um carregamento fictício, para então obter-se a grandeza desejada no sistema real.

Por exemplo, através da analogia 1 pode-se encarar o momento *M* atuando em uma viga fictícia como o carregamento *q,* onde através de uma análise estática de momentos fletores nesse sistema equivalente, obtém-se as flechas no sistema real, como apresentado na imagem a seguir:

Imagem 28 – Ideia básica da Analogia de Mohr

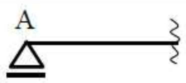
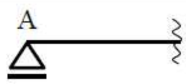
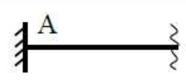
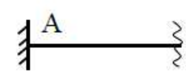
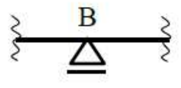
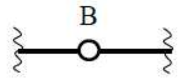
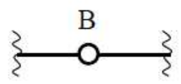
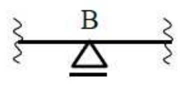
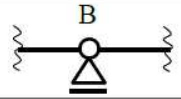
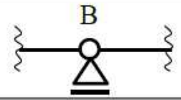


Fonte: Ribeiro, 2011

“O momento fletor M será considerado positivo quando tracionar as fibras inferiores e comprimir as fibras superiores da seção na qual será aplicado. O valor da força q será positivo, aplicado verticalmente de cima para baixo, quando M for positivo.” (MALAKOSKI, 1998, p.23)

A vinculação na Analogia de Mohr é alterada no sistema equivalente conforme a imagem 29, que mostra a transformação dos vínculos do sistema real para o equivalente.

Imagem 29 – Transformação de vínculos para a viga conjugada

Viga dada	Viga conjugada	Condições de contorno
		$y_A = 0$ $\varphi_A \neq 0$
		$y_A = 0$ $\varphi_A = 0$
		$y_A \neq 0$ $\varphi_A \neq 0$
		$y_B = 0$ $\varphi_B^{esq} = \varphi_B^{dir}$
		$y_B \neq 0$ $\varphi_B^{esq} \neq \varphi_B^{dir}$
		$y_B = 0$ $\varphi_B^{esq} \neq \varphi_B^{dir}$

Fonte: Sussekind, 1979

5.3.1 Analogia de Mohr no Método Geral:

A Analogia de Mohr foi escolhida para a aplicação do Método Geral, pois é visto como um processo numérico eficiente, pois possui caráter completo para barras isoladas e de simples entendimento e aplicação manual. Sua utilização permite introduzir na análise do pilar diversos tipos de solicitações, como cargas transversais decorrentes de empuxos ou de ações de vento, além, é claro, da carga axial de compressão e do momento no qual todos os pilares são submetidos, permitindo ainda o uso de qualquer tipo de vinculação. O uso de métodos como o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos recairiam na solução de sistemas de equações diferenciais com tamanho proporcional à discretização do pilar, não sendo considerado atrativo para este trabalho, cujas determinações dos efeitos de segunda ordem seriam feitas de forma manual.

A teoria da Analogia de Mohr é dada ao considerarmos como carregamento do sistema equivalente uma curvatura obtida de relações momento-curvatura válidas para o concreto armado, visto que, como comentado, a equação (36) não é adequada para o mesmo, pois refere-se a materiais elásticos-lineares.

Essa curvatura será obtida dos diagramas M, N, 1/r, cuja metodologia de construção foi apresentada no capítulo anterior deste trabalho. De posse da curvatura, $\frac{1}{r}$, pode-se perfeitamente admiti-la como carregamento em um sistema equivalente, para então com o cálculo dos momentos fletores no mesmo, obter-se as flechas, e consequentemente os momentos de segunda ordem no sistema real.

5.4 Aplicação do Método Geral em Pilares

O objetivo do Método Geral na verificação da estabilidade de pilares é a obtenção dos momentos fletores de 2ª ordem. Os pilares em questão podem apresentar características gerais quaisquer que lhe for conveniente considerar, e sempre levando em conta as não-linearidades de forma não aproximada.

As NL são alcançadas uma vez que, a NLG não é incluída considerando a deformada em forma de senóide, como nos métodos aproximados. A mesma será considerada obtendo a deformada, e consequentemente, os momentos de segunda ordem através do método numérico apresentado na seção anterior, a Analogia de Mohr, que traçará a elástica do pilar de forma bem próxima da realidade.

A Analogia de Mohr permite o cálculo das flechas finais através de sucessivas interações. E como já comentado, a exatidão das flechas dar-se conforme é dada a discretização do pilar, pois para cada seção feita no pilar será obtido um valor de flecha (sendo momento fletor no sistema equivalente), e consequentemente valores de momentos de segunda ordem. Onde, de posse dos momentos de segunda ordem obtém-se os momentos totais e com estes pode-se consultar os diagramas de interação M, N, 1/r o que permitirá adquirir as respectivas curvaturas para cada seção analisada, considerando nesse instante a NLF no método.

Portanto, mostra-se quão importante é a discretização em mais ou menos números de subdivisões, pois quanto mais subdivisões são feitas, mais refinados são os resultados de flechas, momentos totais e curvaturas, para então refazer-se as interações necessárias no método até os resultados convergirem.

5.5 Roteiro para o método:

1) Discretização do pilar:

O pilar será dividido em segmentos iguais de altura. Segundo Santos (1987), é mais cômodo que a quantidade de seções seja ímpar quando se tratar de pilares bi-apoiados com carregamentos simétricos.

O comprimento do trecho é dado por:

$$\Delta x = \frac{l}{n} \tag{70}$$

Onde:

Δx - comprimento do trecho;

l – comprimento total do pilar;

n – quantidade total de trechos.

2) Determinação do diagrama de Momento Fletor:

Após o pilar ser discretizado, calcula-se o momento fletor para cada ponto de divisão. Quando o pilar em estudo não estiver submetido a momentos, como no caso de pilares intermediários, a ABNT NBR 6118:2014 preconiza o uso de um momento fletor mínimo atuante dado pela formulação a seguir:

$$M_{1d,mín} = N_{cd}\left(0,015 + 0,03h\right) \tag{71}$$

Onde:

N_{cd} - esforço axial de compressão de cálculo que atua no pilar;

h – altura da seção em metro.

Em casos de pilares de canto e de extremidade esse momento já é obtido a partir da análise escolhida do modelo estrutural de cálculo, respeitando o momento mínimo.

3) Obtenção das curvaturas $\left(\frac{1}{r}\right)$:

De posse dos momentos fletores, consulta-se os diagramas M, N, 1/r referente as características do pilar em questão e obtém-se a curvatura referente a esses momentos e esforço normal.

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

Com a aplicação da analogia de Mohr, temos um carregamento fictício que é dado pelas curvaturas obtidas nos diagramas M, N, 1/r, onde estas incidem no pilar como carregamento distribuído, formando assim o sistema equivalente. Dependendo do diagrama de momento fletor esse carregamento fictício pode assumir uma distribuição constante ou uma variação parabólica. Segundo Santos (1987), esse carregamento distribuído pode ser substituído por um carregamento discretizado correspondente a uma quantidade de cargas concentradas, que serão aplicadas em cada ponto de divisão. À essas cargas concentradas, damos o nome de "pesos elásticos".

Os pesos elásticos são definidos por Leonhardt (1977) como sendo:

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5 \times \frac{1}{r_0} + 3 \times \frac{1}{r_1} - 0,5 \times \frac{1}{r_2}\right) \tag{72}$$

$$w_i = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_{i-1}} + 10 \times \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_{i+1}}\right) \tag{73}$$

$$w_n = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5 \times \frac{1}{r_n} + 3 \times \frac{1}{r_{n-1}} - 0,5 \times \frac{1}{r_{n-2}}\right) \tag{74}$$

Com as formulações dos pesos elásticos pode-se obter o carregamento em cada subseção realizada ao longo do pilar.

5) Cálculo das Flechas:

De posse dos carregamentos fictícios concentrados nos pontos de subseção, pode-se calcular o momento fletor em cada ponto nesse sistema equivalente. Esse momento fletor, por analogia de Mohr, corresponderá as flechas no sistema real. Com as flechas em cada ponto, é possível traçar a deformada para cada interação.

6) Cálculo dos Momentos Fletores de Cálculo de 2ª Ordem$\left(M_{2d}\right)$:

Uma vez obtida a deformada do pilar, pode-se calcular os momentos de segunda ordem a partir da segunda interação, através da formulação abaixo:

$$M_{2d} = N_d \times y_i \tag{75}$$

7) Cálculo dos Momentos Fletores Totais de Cálculo$\left(M_{tot,d}\right)$:

$$M_{tot,d} = M_{1d} + M_{2d} \tag{76}$$

8) Início da nova interação:

De posse dos momentos totais, volta-se aos diagramas M, N, 1/r, passo 3), e obtém-se as novas curvaturas, reiniciando o roteiro.

A repetição do roteiro finda-se quando as flechas da última interação se aproximarem com as da penúltima, convergindo dessa forma os resultados. Com essa convergência chega-se à conclusão que o pilar em questão alcançou uma configuração fletida de equilíbrio não atingindo o Estado Limite Último de Instabilidade, caso não houvesse essa convergência seria obtido o ELU-I.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

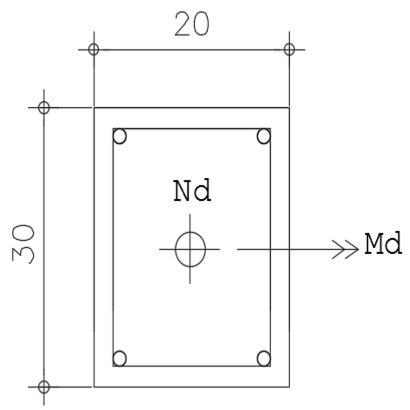
Neste capítulo serão apresentados alguns exemplos numéricos com aplicação direta do Método Geral para verificar a estabilidade de pilares esbeltos de alta resistência. Escolheu-se barras submetidas a flexo-compressão normal, sendo uma bi-apoiada e outra engaste-livre, onde o roteiro apresentado na seção anterior será aplicado de uma forma didática e compreensiva. E para efeito de estudo serão feitas comparações entre os momentos obtidos com o Método Geral e com o Método do Pilar Padrão, mesmo contrariando as prescrições da norma quanto ao limite de esbeltez. Além disso, fez o dimensionamento de um pilar intermediário, aplicando este mesmo roteiro.

Todos os diagramas utilizados neste capítulo foram obtidos através de uma rotina computacional, utilizando a linguagem Python 3.4, que compõe um trabalho de Abreu e Costa (2016) em elaboração.

6.1 Pilar Esbelto Bi-apoiado

Verificar a estabilidade de um pilar esbelto submetido a flexo-compressão normal, de comprimento $l = 7,90m$, armadura simétrica composta por 4 barras de 20mm, sendo duas barras em cada camada, seção transversal de 20cm x 30cm, resistência característica à compressão igual a 70MPa e aço CA-50A. O pilar está submetido a uma carga axial de compressão de 200kN e momento fletor de 40kNm, aplicado na direção x. O coeficiente de fluência do concreto é $\varphi = 1$, coeficiente de segurança do concreto é $\gamma_c = 1,4$ e do aço $\gamma_s = 1,15$ módulo de elasticidade longitudinal do aço igual a $E_s = 210$ GPa, $d' = cobrimento + \frac{\phi_{barra}}{2} = 4cm$.

Imagem 30 – Seção transversal do pilar bi-apoiado



Fonte: Autor, 2016

Para constatar a esbeltez da barra, apresenta-se o cálculo a seguir:

- Índice de Esbeltez (λ):

$$\lambda = 3,46 \times \frac{l}{b} \tag{77}$$

$$\lambda_x = 3,46 \times \frac{790}{30} = 91,11$$

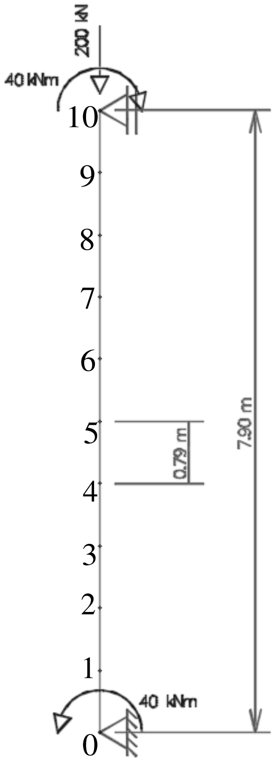
$$\lambda_y = 3,46 \times \frac{790}{20} = 136,67$$

Visto que a análise será realizada na direção x, constata-se que λ_x é maior que 90, portanto trata-se de um pilar esbelto. A seguir apresenta-se os passos para a solução do problema conforme o roteiro demonstrado na seção 5.5.

1) Discretização do pilar:

Discretizou-se o pilar em 10 trechos, conforme apresentado na imagem 31.

Imagem 31 – Discretização do pilar bi-apoiado



$$\Delta x = \frac{l}{n}$$

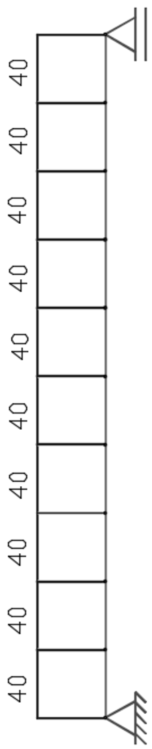
$$\Delta x = \frac{7,90}{10}$$

$$\Delta x = 0,79 \text{ m}$$

Fonte: Autor, 2016

2) Determinação do diagrama de Momento Fletor:

Imagem 32 – Diagrama de momento fletor de 1ª ordem do pilar bi-apoiado



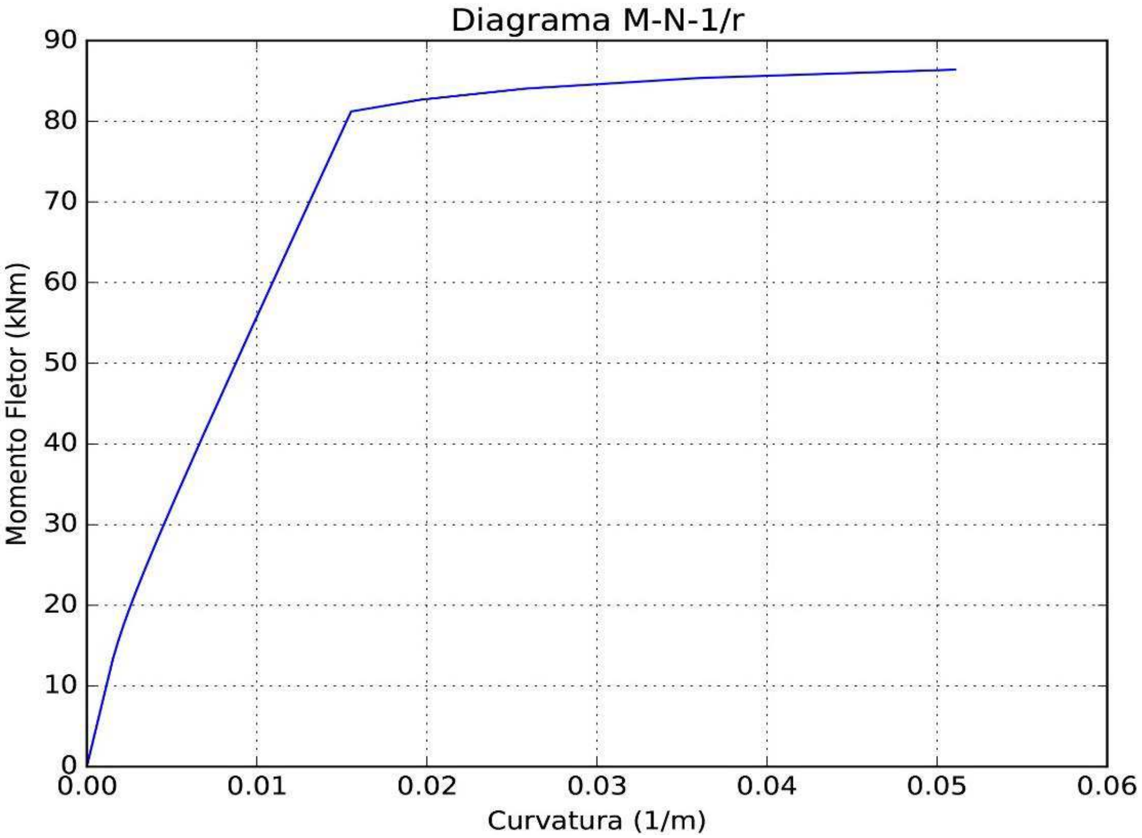
Fonte: Autor, 2016

- 1ª Interação:

3) Obtenção das curvaturas $\left(\frac{1}{r}\right)$:

A curvatura obtida para o momento fletor de primeira ordem de 40 kNm é de $0{,}0066\,m^{-1}$, conforme o diagrama apresentado a seguir:

Gráfico 2 – Diagrama M, N, 1/r para o exemplo do pilar bi-apoiado

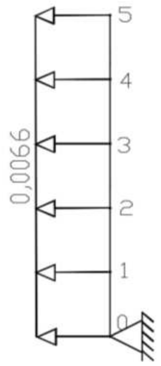


Fonte: Abreu e Costa, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

Será aplicado como carregamento fictício a curvatura obtida do diagrama M, N, 1/r apresentada anteriormente. Tirando proveito da simetria desse carregamento no pilar, pode-se trabalhar com o trecho entre os pontos de 0 a 5, pois estes serão iguais ao trecho de 5 a 10, conforme a imagem que segue:

Imagem 33 – Aplicação da curvatura como carregamento do pilar bi-apoiado – 1ª interação



Fonte: Autor, 2016

Aplicar a formulação dos pesos elásticos para esta primeira interação não apresenta grandes vantagens, apesar de não está incorreto, mas por se tratar de um carregamento uniformemente distribuído se calculará utilizando a equação de momento a seguir:

$$M_{(x)} = 2,6 \times 10^{-2} x - 3,3 \times 10^{-3} x^2 \tag{78}$$

5) Cálculo das Flechas:

De posse da equação de momento apresentada no item acima, substitui-se os valores de *x*, obtendo-se os momentos fletores nos pontos para o sistema equivalente, onde os valores encontrados correspondem as flechas no sistema real. A tabela 5 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 5 – Flechas da 1ª interação

Ponto	*x* (m)	y_i (m)
0	0	0
1	0,79	0,0185
2	1,58	0,0328
3	2,37	0,0431
4	3,16	0,0492
5	3,95	0,0512

Fonte: Autor, 2016

6) Cálculo dos Momentos Fletores de Cálculo de 2ª Ordem (M_{2d}):

$$M_{2d} = N_d \times y_i$$

Sendo $N_d = 200$kN, obtém-se os resultados para os momentos de segunda ordem, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 6 – Momentos Fletores de 2ª Ordem da 1ª interação

Ponto	M_{2d} (kNm)
0	0
1	3,70
2	6,56
3	8,62
4	9,84
5	10,24

Fonte: Autor, 2016

7) Cálculo dos Momentos Fletores Totais de Cálculo$\left(M_{tot,d}\right)$:

$$M_{tot,d} = M_{1d} + M_{2d}$$

Apresenta-se os momentos totais através da tabela a seguir:

Tabela 7 – Momentos Fletores Totais da 1ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)
0	40
1	43,70
2	46,56
3	48,62
4	49,84
5	50,24

Fonte: Autor, 2016

- 2ª Interação: Repete-se todo processo a partir do passo 3)

3) Obtenção das curvaturas $\left(\dfrac{1}{r}\right)$:

Com os valores dos momentos obtidos no passo anterior, encontra-se as novas curvaturas correspondentes a esses momentos através do diagrama M, N, 1/r (gráfico 2). Apresenta-se os valores obtidos através da tabela a seguir:

Tabela 8 – Curvaturas da 2ª interação

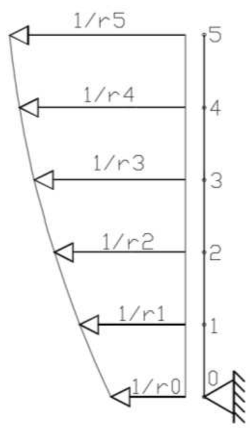
Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)	1/r (m^{-1})
0	40	0,0066
1	43,70	0,0074
2	46,56	0,0080
3	48,62	0,0085
4	49,84	0,0087
5	50,24	0,0088

Fonte: Autor, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

Será aplicado como carregamento fictício as curvaturas obtidas do diagrama M, N, 1/r apresentadas na tabela 8. O carregamento agora apresenta uma variação parabólica, conforme mostra a imagem 34:

Imagem 34 – Aplicação da curvatura como carregamento do pilar bi-apoiado – 2ª interação



Fonte: Autor, 2016

A partir da 2ª interação verifica-se a necessidade de calcular-se os pesos elásticos, dados por:

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5\times\frac{1}{r_0}+3\times\frac{1}{r_1}-0,5\times\frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5\times 0,0066+3\times 0,0074-0,5\times 0,0080\right)$$

$$w_0 = 2,7189\times 10^{-3}$$

$$w_1 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_0} + 10\times\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_1 = \frac{0,79}{12}\left(0,0066 + 10\times 0,0074 + 0,0080\right)$$

$$w_1 = 5,8328\times 10^{-3}$$

$$w_2 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_1} + 10\times\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$$

$$w_2 = \frac{0,79}{12}\left(0,0074 + 10\times 0,0080 + 0,0085\right)$$

$$w_2 = 6,3134\times 10^{-3}$$

$$w_3 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_2} + 10\times\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_3 = \frac{0,79}{12}\left(0,0080 + 10\times 0,0085 + 0,0087\right)$$

$$w_3 = 6,6952\times 10^{-3}$$

$$w_4 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_3} + 10\times\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)$$

$$w_4 = \frac{0,79}{12}\left(0,0085 + 10\times 0,0087 + 0,0088\right)$$

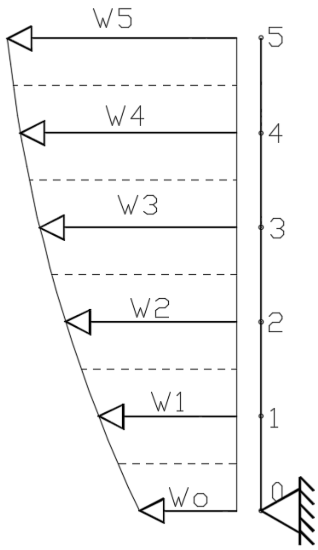
$$w_4 = 6,8664\times 10^{-3}$$

$$w_5 = \frac{\Delta x}{12}\left(10\times\frac{1}{r_5} + 2\times\frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_5 = \frac{0,79}{12}\left(10\times 0,0088 + 2\times 0,0087\right)$$

$$w_5 = 6,9388 \times 10^{-3}$$

Imagem 35 – Representação dos pesos elásticos do pilar bi-apoiado



Fonte: Autor, 2016

5) Cálculo das Flechas:

De posse dos pesos elásticos calculados no item acima, obtém-se os momentos fletores nos pontos para o sistema equivalente, onde os valores encontrados correspondem as flechas no sistema real. A tabela 9 apresenta os resultados obtidos:

Tabela 9 – Flechas da 2ª interação

Ponto	x (m)	y (m)
0	0	0
1	0,79	23.0499×10^{-3}
2	1,58	41.4920×10^{-3}
3	2,37	54.9465×10^{-3}
4	3,16	63.1118×10^{-3}
5	3,95	65.8526×10^{-3}

Fonte: Autor, 2016

6) Cálculo dos Momentos Fletores de Cálculo de 2ª Ordem $\left(M_{2d}\right)$:

$$M_{2d} = N_d \times y_i$$

Sendo $N_d = 200\,\text{kN}$, obtém-se os resultados para os momentos de segunda ordem, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 10 – Momentos Fletores de 2ª Ordem da 2ª interação

Ponto	M_{2d} (kNm)
0	0
1	4.6099
2	8.3893
3	10.9893
4	12.6223
5	13.1705

Fonte: Autor, 2016

7) Cálculo dos Momentos Fletores Totais de Cálculo $\left(M_{tot,d}\right)$:

$$M_{tot,d} = M_{1d} + M_{2d}$$

Apresenta-se os momentos totais através da tabela a seguir:

Tabela 11 – Momentos Fletores Totais da 2ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)
0	40
1	44.6099
2	48.3893
3	50.9893
4	52.6223
5	53.1705

Fonte: Autor, 2016

- 3ª Interação: Repete-se todo processo a partir do passo 3)

3) Obtenção das curvaturas $\left(\frac{1}{r}\right)$:

Apresenta-se os valores obtidos através da tabela a seguir:

Tabela 12 – Curvaturas da 3ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)	1/r(m^{-1})
0	40	0,0066
1	44.6099	0,0076
2	48.3893	0,0084
3	50.9893	0,0090
4	52.6223	0,0093
5	53.1705	0,0094

Fonte: Autor, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

Será aplicado como carregamento fictício as curvaturas obtidas do diagrama M, N, 1/r apresentadas na tabela 12.

Cálculo dos pesos elásticos, demonstrados na interação anterior, conforme imagens 34 e 35.

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5\times\frac{1}{r_0}+3\times\frac{1}{r_1}-0,5\times\frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}(3,5\times 0,0066+3\times 0,0076-0,5\times 0,0084)$$

$$w_0 = 2,7452\times 10^{-3}$$

$$w_1 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_0}+10\times\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_1 = \frac{0,79}{12}(0,0066+10\times 0,0076+0,0084)$$

$$w_1 = 5,9908\times 10^{-3}$$

$$w_2 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_1}+10\times\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

$$w_2 = \frac{0,79}{12}(0,0076+10\times 0,0084+0,0090)$$

$$w_2 = 6,6228\times 10^{-3}$$

$$w_3 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_2} + 10 \times \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_3 = \frac{0,79}{12}\left(0,0084 + 10 \times 0,0090 + 0,0093\right)$$

$$w_3 = 7,0902 \times 10^{-3}$$

$$w_4 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_3} + 10 \times \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)$$

$$w_4 = \frac{0,79}{12}\left(0,0090 + 10 \times 0,0093 + 0,0094\right)$$

$$w_4 = 7,3338 \times 10^{-3}$$

$$w_5 = \frac{\Delta x}{12}\left(10 \times \frac{1}{r_5} + 2 \times \frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_5 = \frac{0,79}{12}\left(10 \times 0,0094 + 2 \times 0,0093\right)$$

$$w_5 = 7,4128 \times 10^{-3}$$

5) Cálculo das Flechas:

Tabela 13 – Flechas da 3ª interação

Ponto	x (m)	y (m)
0	0	0
1	0,79	24.2877×10^{-3}
2	1,58	43.8427×10^{-3}
3	2,37	58.1658×10^{-3}
4	3,16	66.8875×10^{-3}
5	3,95	69.8156×10^{-3}

Fonte: Autor, 2016

6) Cálculo dos Momentos Fletores de Cálculo de 2ª Ordem $\left(M_{2d}\right)$:

$$M_{2d} = N_d \times y_i$$

Sendo $N_d = 200$ kN, obtém-se os resultados para os momentos de segunda ordem, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 14 – Momentos Fletores de 2ª Ordem da 3ª interação

Ponto	M_{2d} (kNm)
0	0
1	4.8575
2	8.7685
3	11.6331
4	13.3775
5	13.9631

Fonte: Autor, 2016

7) Cálculo dos Momentos Fletores Totais de Cálculo $\left(M_{tot,d}\right)$:

$$M_{tot,d} = M_{1d} + M_{2d}$$

Apresenta-se os momentos totais através da tabela a seguir:

Tabela 15 – Momentos Fletores Totais da 3ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)
0	40
1	44.8575
2	48.7685
3	51.6331
4	53.3775
5	53.9631

Fonte: Autor, 2016

- 4ª Interação: Repete-se todo processo a partir do passo 3)

3) Obtenção das curvaturas $\left(\frac{1}{r}\right)$:

Apresenta-se os valores obtidos através da tabela a seguir:

Tabela 16 – Curvaturas da 4ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)	1/r(m^{-1})
0	40	0,0066
1	44.8575	0,0077
2	48.7685	0,0085
3	51.6331	0,0091
4	53.3775	0,0095
5	53.9631	0,0096

Fonte: Autor, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

Será aplicado como carregamento fictício as curvaturas obtidas do diagrama M, N, 1/r apresentadas na tabela 16.

Cálculo dos pesos elásticos, demonstrados na interação anterior, conforme imagens 34 e 35.

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5 \times \frac{1}{r_0} + 3 \times \frac{1}{r_1} - 0,5 \times \frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}(3,5 \times 0,0066 + 3 \times 0,0077 - 0,5 \times 0,0085)$$

$$w_0 = 2,7617 \times 10^{-3}$$

$$w_1 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_0} + 10 \times \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_1 = \frac{0,79}{12}(0,0066 + 10 \times 0,0077 + 0,0085)$$

$$w_1 = 6,0632 \times 10^{-3}$$

$$w_2 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_1} + 10 \times \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$$

$$w_2 = \frac{0,79}{12}(0,0077 + 10 \times 0,0085 + 0,0091)$$

$$w_2 = 6,7018 \times 10^{-3}$$

$$w_3 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_2} + 10 \times \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_3 = \frac{0,79}{12}(0,0085 + 10 \times 0,0091 + 0,0095)$$

$$w_3 = 7,1758 \times 10^{-3}$$

$$w_4 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_3} + 10 \times \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)$$

$$w_4 = \frac{0,79}{12}(0,0091 + 10 \times 0,0095 + 0,0096)$$

$$w_4 = 7,4852 \times 10^{-3}$$

$$w_5 = \frac{\Delta x}{12}\left(10 \times \frac{1}{r_5} + 2 \times \frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_5 = \frac{0,79}{12}(10 \times 0,0096 + 2 \times 0,0095)$$

$$w_5 = 7,5708 \times 10^{-3}$$

5) Cálculo das Flechas:

Tabela 17 – Flechas da 4ª interação

Ponto	x (m)	y (m)
0	0	0
1	0,79	24.6570×10^{-3}
2	1,58	44.5240×10^{-3}
3	2,37	59.0981×10^{-3}
4	3,16	68.0005×10^{-3}
5	3,95	70.9909×10^{-3}

Fonte: Autor, 2016

6) Cálculo dos Momentos Fletores de Cálculo de 2ª Ordem $\left(M_{2d}\right)$:

$$M_{2d} = N_d \times y_i$$

Sendo $N_d = 200$kN, obtém-se os resultados para os momentos de segunda ordem, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 18 – Momentos Fletores de 2ª Ordem da 4ª interação

Ponto	M_{2d} (kNm)
0	0
1	4.9314
2	8.9048
3	11.8196
4	13.6001
5	14.1981

Fonte: Autor, 2016

7) Cálculo dos Momentos Fletores Totais de Cálculo $\left(M_{tot,d}\right)$:

$$M_{tot,d} = M_{1d} + M_{2d}$$

Apresenta-se os momentos totais através da tabela a seguir:

Tabela 19 – Momentos Fletores Totais da 4ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)
0	40
1	44.9314
2	48.9048
3	51.8196
4	53.6001
5	54.1981

Fonte: Autor, 2016

- 5ª Interação: Repete-se todo processo a partir do passo 3)

3) Obtenção das curvaturas $\left(\frac{1}{r}\right)$:

Apresenta-se os valores obtidos através da tabela a seguir:

Tabela 20 – Curvaturas da 5ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)	1/r(m^{-1})
0	40	0,0066
1	44.9314	0,0077
2	48.9048	0,0085
3	51.8196	0,0092
4	53.6001	0,0095
5	54.1981	0,0097

Fonte: Autor, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

Será aplicado como carregamento fictício as curvaturas obtidas do diagrama M, N, 1/r apresentadas na tabela 20.

Cálculo dos pesos elásticos, demonstrados na interação anterior, conforme imagens 34 e 35.

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5\times\frac{1}{r_0}+3\times\frac{1}{r_1}-0,5\times\frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_0 = \frac{\Delta x}{12}\left(3,5\times0,0066+3\times0,0077-0,5\times0,0085\right)$$

$$w_0 = 2,7617\times10^{-3}$$

$$w_1 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_0}+10\times\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$w_1 = \frac{0,79}{12}\left(0,0066+10\times0,0077+0,0085\right)$$

$$w_1 = 6,0632\times10^{-3}$$

$$w_2 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_1}+10\times\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$$

$$w_2 = \frac{0,79}{12}\left(0,0077+10\times0,0085+0,0092\right)$$

$$w_2 = 6,7084\times10^{-3}$$

$$w_3 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_2} + 10\times\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_3 = \frac{0,79}{12}\left(0,0085 + 10\times 0,0092 + 0,0095\right)$$

$$w_3 = 7,2416\times 10^{-3}$$

$$w_4 = \frac{\Delta x}{12}\left(\frac{1}{r_3} + 10\times\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5}\right)$$

$$w_4 = \frac{0,79}{12}\left(0,0092 + 10\times 0,0095 + 0,0097\right)$$

$$w_4 = 7,4984\times 10^{-3}$$

$$w_5 = \frac{\Delta x}{12}\left(10\times\frac{1}{r_5} + 2\times\frac{1}{r_4}\right)$$

$$w_5 = \frac{0,79}{12}\left(10\times 0,0097 + 2\times 0,0095\right)$$

$$w_5 = 7,6366\times 10^{-3}$$

5) Cálculo das Flechas:

Tabela 21 – Flechas da 5ª interação

Ponto	x (m)	y (m)
0	0	0
1	0,79	24.7506×10^{-3}
2	1,58	44.7113×10^{-3}
3	2,37	59.3723×10^{-3}
4	3,16	68.3125×10^{-3}
5	3,95	71.3290×10^{-3}

Fonte: Autor, 2016

6) Cálculo dos Momentos Fletores de Cálculo de 2ª Ordem $\left(M_{2d}\right)$:

$$M_{2d} = N_d \times y_i$$

Sendo $N_d = 200$kN, obtém-se os resultados para os momentos de segunda ordem, conforme apresentado na tabela a seguir:

Tabela 22 – Momentos Fletores de 2ª Ordem da 5ª interação

Ponto	M_{2d} (kNm)
0	0
1	4.9501
2	8.9422
3	11.8744
4	13.6625
5	14.2658

Fonte: Autor, 2016

7) Cálculo dos Momentos Fletores Totais de Cálculo $\left(M_{tot,d}\right)$:

$$M_{tot,d} = M_{1d} + M_{2d}$$

Apresenta-se os momentos totais através da tabela a seguir:

Tabela 23 – Momentos Fletores Totais da 5ª interação

Ponto	$M_{tot,d}$ (kNm)
0	40
1	44.9501
2	48.9422
3	51.8744
4	53.6625
5	54.2658

Fonte: Autor, 2016

Pode-se observar que as flechas obtidas com a 5ª interação são bem próximas dos valores de flechas da 4ª interação, portanto, conclui-se os resultados convergem já com a 5ª interação, o que resulta no término do cálculo interativo, pois verifica-se que o pilar em questão não atinge o Estado Limite Último de Instabilidade, nem o Estado Limite Último de Ruptura, já que o Diagrama M, N, 1/r foi gerado para o momento máximo igual ao momento de ruptura.

Para efeito de comparação, esse mesmo exemplo será calculado pelo Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada, mesmo não sendo permitido em norma. Optou-se por fazê-lo para verificar a diferença percentual de momento e curvatura de um método com o outro.

Resolução pelo Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada através do roteiro adaptado de Souza (2011):

1) Cálculo do Momento Mínimo ($M_{1d,\text{mín}}$):

$$M_{1d,\text{mín}} = N_d(0,015+0,03h)$$

$$M_{1d,\text{mín}} = 200(0,015+0,03\times 0,3)$$

$$M_{1d,\text{mín}} = 4,8\ kN.m$$

2) Cálculo de α_b :

Como o $M_{1d,\text{mín}} \leq M_d$, a ABNT NBR 6118:2014 especifica que para pilares bi-apoiados sem carregamento transversal, α_b é dado:

$$0,4 \leq \alpha_b = 0,6+0,4\times\frac{M_b}{M_a} \leq 1,0 \tag{79}$$

$$\alpha_b = 0,6+0,4\times\frac{40}{40}$$

$$\alpha_b = 1,0$$

3) Cálculo do adimensional de força (ν):

$$\nu = \frac{N_d}{b\times h\times f_{cd}}$$

$$\nu = \frac{200}{20\times 30\times\frac{7}{1,4}}$$

$$\nu = 6,66\times 10^{-2}$$

4) Cálculo da curvatura ($\frac{1}{r}$):

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(\nu+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,3(6,66\times10^{-2}+0,5)} \leq \frac{0,005}{0,3}$$

$$\frac{1}{r} = 2,941\times10^{-2} \geq 1,667\times10^{-2}$$

$$\frac{1}{r} = 1,667\times10^{-2}$$

5) Cálculo do Momento Fletor Total ($M_{d,tot}$):

$$M_{d,tot} = \alpha_b \times M_{1,d} + N_d \times \frac{l_e^2}{10} \times \frac{1}{r} \geq M_{d,mín}$$

$$M_{d,tot} = 1,0\times40 + 200\times\frac{7,9^2}{10}\times1,667\times10^{-2} \geq 4,8$$

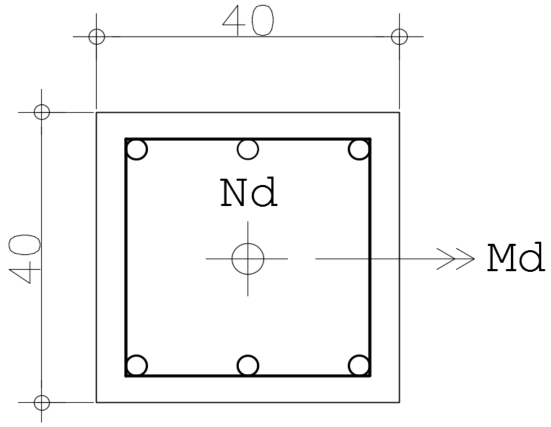
$$M_{d,tot} = 60,875kNm \geq 4,8kNm$$

Observando os valores obtidos pelo Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada, temos que o valor do momento fletor é maior que o obtido pelo Método Geral. Para esta situação, o método aproximado apresentou resultados antieconômicos para pilares esbeltos, sendo portanto, o Método Geral mais eficiente, pois resulta em maior economia. A diferença percentual obtida é de 12,18% maior para o método aproximado quando comparado ao método geral.

6.2 Pilar Esbelto Engaste-Livre

Verificar a estabilidade de um pilar esbelto submetido a flexo-compressão normal, de comprimento $l = 8,20m$, armadura simétrica composta por 6 barras de 16mm, sendo três barras em cada camada, onde sua seção transversal é de 40cm x 40cm, resistência característica à compressão igual a 70MPa e aço CA-50A. O pilar está submetido a uma carga axial de compressão de 100kN e momento fletor de 60kNm, aplicado na direção x. O coeficiente de fluência do concreto é $\varphi = 1$, coeficiente de segurança do concreto é $\gamma_c = 1,4$ e do aço $\gamma_s = 1,15$, módulo de elasticidade longitudinal do aço igual a $E_s = 210$ GPa, $d' = cobrimento + \frac{\phi_{barra}}{2} = 5cm$.

Imagem 36 – Seção transversal do pilar engastado



Fonte: Autor, 2016

Para constatar a esbeltez da barra, apresenta-se o cálc a seguir:

- Índice de Esbeltez (λ):

$$\lambda = 3,46 \times \frac{l}{b}$$

$$\lambda_x = 3,46 \times \frac{820}{40} = 142$$

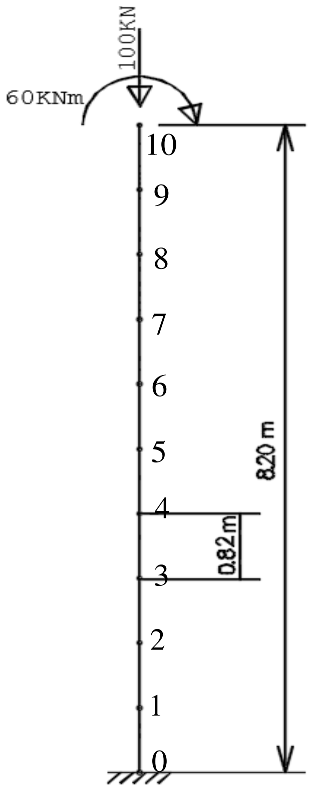
$$\lambda_y = 3,46 \times \frac{820}{40} = 142$$

Visto que a análise será realizada na direção x, constata-se que λ_x é maior que 90, portanto trata-se de um pilar esbelto. A seguir apresenta-se os passos para a solução do problema conforme o roteiro demonstrado na seção 5.5.

1) Discretização do pilar:

Discretizou-se o pilar em 10 trechos, conforme apresentado na imagem 37.

Imagem 37 – Discretização do pilar engastado



$$\Delta x = \frac{l}{n}$$

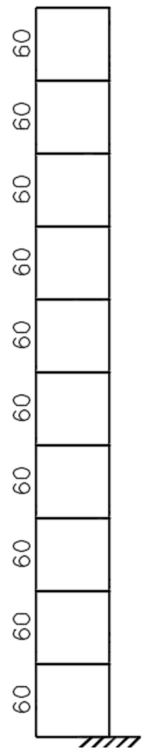
$$\Delta x = \frac{8,20}{10}$$

$$\Delta x = 0,82\,\text{m}$$

Fonte: Autor, 2016

2) Determinação do diagrama de Momento Fletor:

Imagem 38 – Diagrama de momento fletor de 1ª ordem do pilar engastado

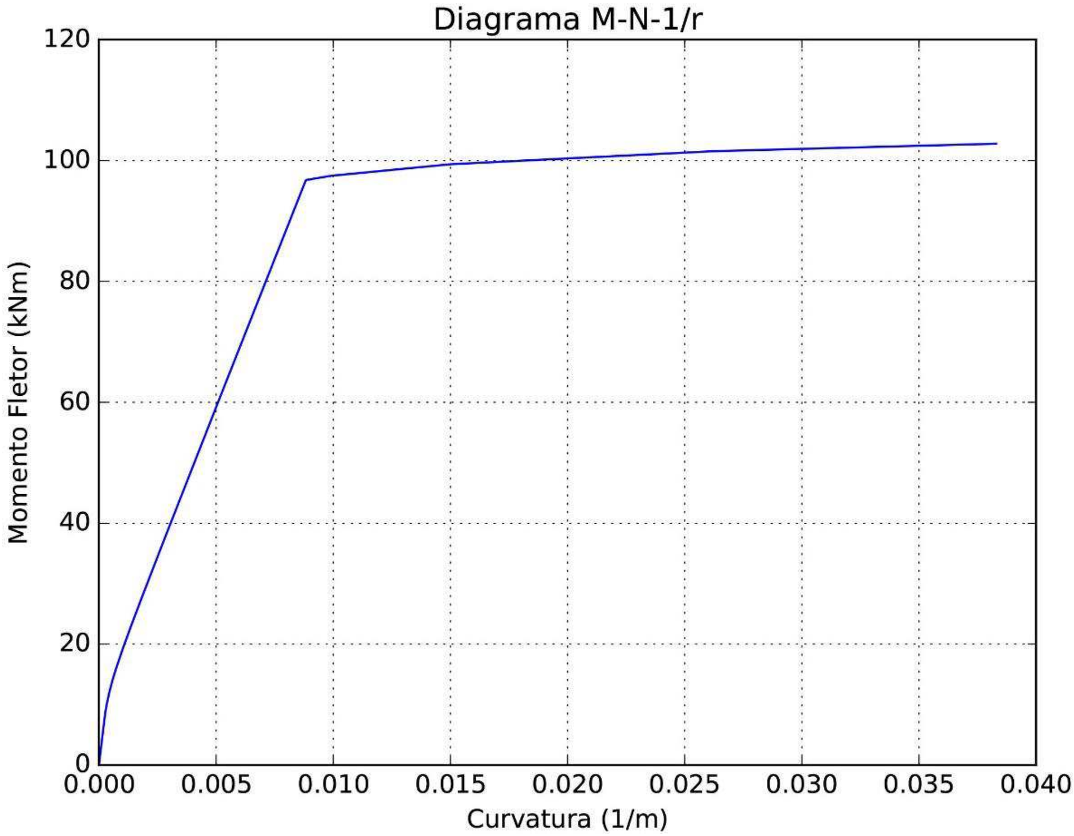


Fonte: Autor, 2016

3) Obtenção das curvaturas $\left(\dfrac{1}{r}\right)$:

A curvatura obtida para o momento fletor de primeira ordem de 60 KN.m é de $0.005125\,m^{-1}$, conforme o diagrama apresentado a seguir:

Gráfico 3 – Diagrama M, N, 1/r para o exemplo do pilar engastado

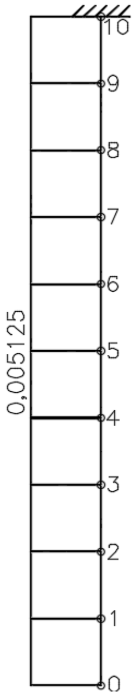


Fonte: Abreu e Costa, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

A curvatura obtida do diagrama M, N, 1/r apresentado no gráfico 3, será aplicada no sistema equivalente como carregamento. Para pilares engastados a Analogia de Mohr determina a transformação dos vínculos, como foi apresentado na imagem 29. Portanto, a extremidade engastada no sistema real torna-se livre no sistema equivalente, resultando na imagem 39 a seguir:

Imagem 39 – Aplicação da Analogia de Mohr do pilar engastado



Fonte: Autor, 2016

Para evitar que este trabalho fique extensivo, serão apresentados apenas os resultados sem seus correspondentes cálculos, visto que o procedimento para os mesmos já foram expostos detalhadamente no exemplo anterior. Portanto serão expostas tabelas com os valores obtidos para cada interação.

- Resultados obtidos para 1ª Interação:

Tabela 24 – Resultados da 1ª interação – pilar engastado

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	60	0.005125	0.0021013	0	17.23025	77.23025
1	0.82	60	0.005125	0.0042025	0.001723	17.05795	77.0579
2	1.64	60	0.005125	0.0042025	0.006892	16.54104	76.5410
3	2.46	60	0.005125	0.0042025	0.015507	15.67953	75.6795
4	3.28	60	0.005125	0.0042025	0.027568	14.47341	74.4734
5	4.1	60	0.005125	0.0042025	0.043076	12.92269	72.9227
6	4.92	60	0.005125	0.0042025	0.062029	11.02736	71.0274
7	5.74	60	0.005125	0.0042025	0.084428	8.787428	68.7874
8	6.56	60	0.005125	0.0042025	0.110274	6.20289	66.2029
9	7.38	60	0.005125	0.0042025	0.139565	3.273748	63.2737
10	8.2	60	0.005125	0.0021013	0.172303	0	60.0000

Fonte: Autor, 2016

- Resultados obtidos para 2ª Interação:

Tabela 25 – Resultados da 2ª interação – pilar engastado

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	77.23025	0.0069	0.0028264	0	22.17351	82.17351
1	0.82	77.0579	0.006875	0.0056358	0.002318	21.94174	81.94174
2	1.64	76.5410	0.006825	0.0055931	0.009257	21.24784	81.24784
3	2.46	75.6795	0.006725	0.0055128	0.020782	20.0953	80.0953
4	3.28	74.4734	0.0066	0.0054103	0.036828	18.49072	78.49072
5	4.1	72.9227	0.00645	0.0052856	0.05731	16.44249	76.44249
6	4.92	71.0274	0.00625	0.0051233	0.082127	13.96085	73.96085
7	5.74	68.7874	0.006025	0.0049371	0.111144	11.05909	71.05909
8	6.56	66.2029	0.00575	0.0047133	0.14421	7.752492	67.75249
9	7.38	63.2737	0.00545	0.0044673	0.181141	4.059405	64.0594
10	8.2	60.0000	0.005125	0.0021465	0.221735	0	60

Fonte: Autor, 2016

- Resultados obtidos para 3ª Interação:

Tabela 26 – Resultados da 3ª interação – pilar engastado

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	82.17351	0.0074	0.0030323	0	23.58849	83.58849
1	0.82	81.94174	0.007375	0.0060441	0.002486	23.33984	83.33984
2	1.64	81.24784	0.0073	0.0059877	0.009929	22.59558	82.59558
3	2.46	80.0953	0.00725	0.005933	0.022282	21.36033	81.36033
4	3.28	78.49072	0.007025	0.0057605	0.039499	19.63856	79.63856
5	4.1	76.44249	0.0068	0.0055743	0.061441	17.44444	77.44444
6	4.92	73.96085	0.00655	0.0053676	0.087953	14.79322	74.79322
7	5.74	71.05909	0.00625	0.0051233	0.118866	11.70186	71.70186
8	6.56	67.75249	0.005925	0.0048534	0.153981	8.190392	68.19039
9	7.38	64.0594	0.005525	0.0045305	0.193075	4.280947	64.28095
10	8.2	60	0.005125	0.0021559	0.235885	0	60

Fonte: Autor, 2016

- Resultados obtidos para 4ª Interação:

Tabela 27 – Resultados da 4ª interação – pilar engastado

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	83.58849	0.00755	0.0030895	0	23.91671	83.91671
1	0.82	83.33984	0.0075	0.0061483	0.002533	23.66337	83.66337
2	1.64	82.59558	0.007425	0.0060851	0.010108	22.90587	82.90587
3	2.46	81.36033	0.0073	0.0059826	0.022673	21.64939	81.64939
4	3.28	79.63856	0.007125	0.0058391	0.040144	19.90234	79.90234
5	4.1	77.44444	0.0069	0.0056546	0.062402	17.67649	77.67649
6	4.92	74.79322	0.006625	0.0054308	0.089298	14.98696	74.98696
7	5.74	71.70186	0.006325	0.0051814	0.120646	11.8521	71.8521
8	6.56	68.19039	0.00595	0.0048773	0.156243	8.292373	68.29237
9	7.38	64.28095	0.00555	0.0045493	0.19584	4.332707	64.33271
10	8.2	60	0.005125	0.0021602	0.239167	0	60

Fonte: Autor, 2016

Para este exemplo, observa-se que na 4ª interação já foi possível obter convergência entre os resultados: as flechas da 3ª e da 4ª interação possuem valores bem próximos. A convergência dos resultados significa que para as configurações de concreto e armadura e para os esforços que agem no pilar, foi verificada a estabilidade do mesmo, não atingindo nem o Estado Limite Último de Instabilidade e nem o de Ruptura.

6.3 Pilar Intermediário

Visando uma aplicação prática de verificação de pilares esbeltos de concreto de alta resistência, nesse exemplo será exposto a metodologia necessário para o dimensionamento de um pilar com esbeltez elevada.

O exemplo em questão trata-se de um pilar intermediário esbelto, adaptado de Carvalho e Pinheiro (2013, p. 381). Por se tratar de um pilar intermediário, será dimensionado à flexo-compressão normal segundo prescrições da norma ABNT NBR 6118:2014.

No exemplo proposto por Carvalho e Pinheiro (2013), o pilar é dimensionado pelo Método do Pilar-Padrão Melhorado, onde neste inclui a não-linearidade física de forma não aproximada, porém a não-linearidade geométrica é obtida de forma aproximada, pois considera-se a elástica do pilar em forma de senóide (princípio do pilar-padrão). Já nesse estudo, a proposta é dimensiona-lo através do Método Geral.

Calcular a armadura longitudinal de um pilar de seção quadrada de lado 20cm, comprimento de flambagem igual a 6 metros (pé-direito duplo) e força normal de 200kN. Admite-se que a qualidade do concreto a ser usado e o tipo de impermeabilização da superfície, além de um controle rigoroso de execução e classe de agressividade ambiental I, permitem um cobrimento de 10mm. Adota-se $f_{ck} = 60MPa$ e aço CA-50A. Considerar coeficiente de fluência $\varphi = 1$.

É importante frisar, que tirou-se proveito da simetria do problema para simplificar o processo, contudo, se o mesmo não apresentasse tal simetria, seria uma opção proceder com o Método Geral em cada uma das duas direções (desacoplamento das direções), ou seja, calcular o momento mínimo na direção x e y, e verificar a estabilidade do pilar em cada uma destas direções, com seu momento fletor específico. Uma outra opção é empregar o Método Geral acoplado ao Diagrama Mx, My, N, 1/r, que foge do escopo deste trabalho.

1) Esbeltez do Pilar:

$$\lambda = 3,46 \frac{l}{b}$$

$$\lambda = 3,46 \frac{600}{20}$$

$$\lambda = 103,8$$

Verifica-se que o pilar é esbelto, pois o mesmo possui $\lambda > 90$.

2) Cálculo das Excentricidades:

- Excentricidade Mínima ($e_{1,mín}$):

$$e_{1,mín} = 0,015 + 0,03 \times b \tag{80}$$

$$e_{1,mín} = 0,015 + 0,03 \times 20$$

$$e_{1,mín} = 0,021\ cm$$

3) Proposta da Configuração da Armadura:

O Método Geral, como já comentado, trata-se de um método de verificação, logo ele deve partir de uma configuração proposta de armadura. Sugere-se neste trabalho três formas para escolha dessa configuração inicial. São elas:

- Emprego de um método aproximado para dimensionamento de pilares, como o Método do Pilar-Padrão com Curvatura Aproximada ou Método do Pilar-Padrão com Rigidez κ Aproximada (necessidade da utilização de ábacos);
- Dimensionar a seção à compressão simples, sobretudo, se o pilar for submetido à momentos de pequena intensidade;
- Escolher uma configuração de armadura, de preferência a mais econômica possível, levando em conta as exigências normativas quanto ao diâmetro e quantidade de barras, bem como a área mínima.

Lembrando que, essas opções citadas são apenas sugestões para iniciar o dimensionamento de pilares pelo método geral. Para este trabalho escolheu-se o cálculo da armadura mínima.

4) Cálculo da Armadura Mínima:

$$\rho_{mín} = 0,15 \times \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \times v \geq 0,4\% \tag{81}$$

Onde, v é:

$$v = \frac{N_d}{b \times h \times f_{cd}} \tag{82}$$

$$v = \frac{200}{20 \times 20 \times \frac{6}{1,4}}$$

$$v = 0,1167$$

Assim, temos $\rho_{mín}$ igual a:

$$\rho_{mín} = 0,15 \times \frac{\frac{60}{1,4}}{\frac{500}{1,15}} \times 0,1167$$

$$\rho_{mín} = 0,001725 = 0,1725\%$$

$$0,1725\% < 0,4\%$$

Tem-se que o $\rho_{mín}$ calculado é menor que o exigido na ABNT NBR 6118:2014, portanto, utiliza-se 0,4%:

$$A_{s,mín} = \rho_{mín} \times A_c$$

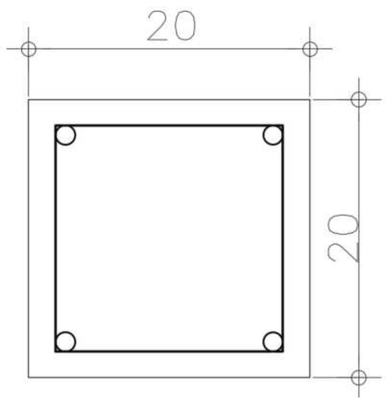
$$A_{s,mín} = \frac{0,4}{100} \times 20 \times 20$$

$$A_{s,mín} = 1,6\ cm^2$$

Para o $A_{s,mín}$ calculado, a mínima configuração de armadura que pode ser adotada, seguindo a ABNT NBR 6118:2014, é 4 barras de 10 mm, que corresponde a área de 3,14cm² de aço. Portanto, a primeira tentativa de verificação de estabilidade se dará com essa configuração de armadura. Para calcular o d', estima-se o diâmetro dos estribos igual à 6,3mm.

- Verificação de Estabilidade do pilar para 4 ϕ 10mm

Imagem 40 – Configuração da armadura adotada



Fonte: Autor, 2016

Dados desta verificação:

Armadura:

4Ø10mm

Esforços Solicitantes:

$$N_d = \gamma_c \times N_k \tag{83}$$

$$N_d = 1,4 \times 200$$
$$N_d = 280 \ kN$$

$$M_d = N_d \times e_{1,mín}$$
$$M_d = 280 \times 0,021$$
$$M_d = 5,88 \ kN.m$$

$$d' = c + \phi_t + \frac{\phi_{barra}}{2} \tag{84}$$

$$d' = 1 + 0,63 + 0,5$$
$$d' = 2,13 \ cm$$

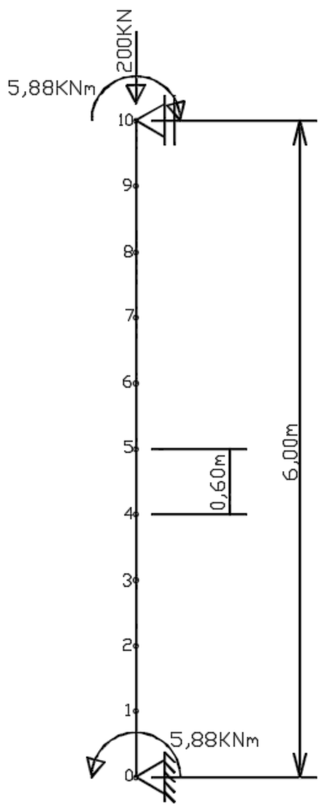
- d' – distância entre o centróide da armadura até a borda seção:

De posse dos parâmetros obtidos, inicia-se a aplicação do Método Geral, seguindo o roteiro apresentado na seção 5.5.

1) Discretização do pilar:

Discretizou-se o pilar em 10 trechos, conforme apresentado na imagem 41:

Imagem 41 – Discretização do pilar bi-apoiado



$$\Delta x = \frac{l}{n}$$

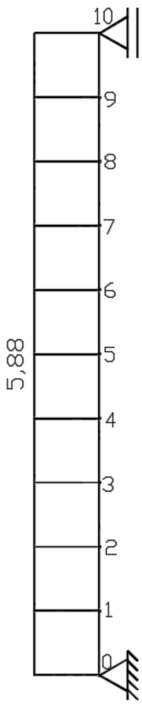
$$\Delta x = \frac{6,00}{10}$$

$$\Delta x = 0,60 \text{ m}$$

Fonte: Autor, 2016

2) Determinação do diagrama de Momento Fletor:

Imagem 42 – Momentos Fletores do pilar intermediário

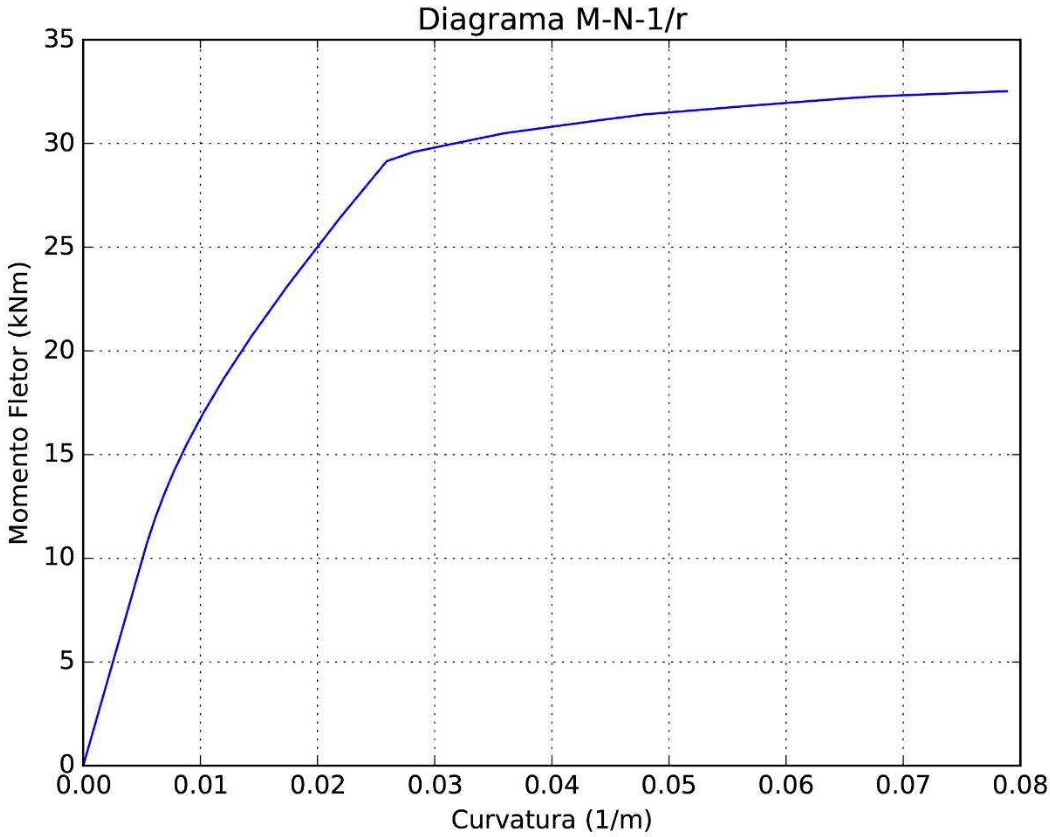


Fonte: Autor, 2016

3) Obtenção das curvaturas $\left(\frac{1}{r}\right)$:

A curvatura obtida para o momento fletor de primeira ordem de 5,88 kNm é de $0{,}003\, m^{-1}$, conforme o diagrama apresentado a seguir:

Gráfico 4 – Diagrama M, N, 1/r para o exemplo do pilar intermediário

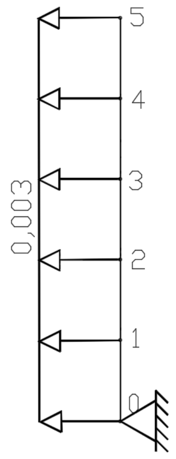


Fonte: Abreu e Costa, 2016

4) Aplicação do Carregamento Fictício da Analogia de Mohr:

A curvatura obtida do diagrama M, N, 1/r apresentada anteriormente, será aplicada no sistema equivalente como carregamento. Tirando proveito da simetria desse carregamento no pilar, pode-se trabalhar com o trecho entre os pontos de 0 a 5, pois estes serão iguais ao trecho de 5 a 10, conforme a imagem que segue:

Imagem 43 – Aplicação da curvatura como carregamento do pilar intermediário



Fonte: Autor, 2016

Serão apresentadas a seguir tabelas com os resultados obtidos das interações:

- Resultados obtidos para 1ª Interação:

Tabela 28 – Resultados da 1ª interação – pilar intermediário

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	5.88	0.003	0.0009	0	0	5.88
1	0.6	5.88	0.003	0.0018	0.00054	0.1512	6.0312
2	1.2	5.88	0.003	0.0018	0.00216	0.6048	6.4848
3	1.8	5.88	0.003	0.0018	0.00486	1.3608	7.2408
4	2.4	5.88	0.003	0.0018	0.00864	2.4192	8.2992
5	3	5.88	0.003	0.0018	0.0135	3.78	9.66

Fonte: Autor, 2016

- Resultados obtidos para 2ª Interação:

Tabela 29 – Resultados da 2ª interação – pilar intermediário

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	5.88	0.003	0.0009	0	0	5.88
1	0.6	6.0312	0.00305	0.00184	0.00054	0.1512	6.0312
2	1.2	6.4848	0.0033	0.0019875	0.002184	0.61152	6.49152
3	1.8	7.2408	0.0037	0.002225	0.005021	1.40574	7.28574
4	2.4	8.2992	0.0042	0.00253	0.009192	2.57376	8.45376
5	3	9.66	0.0049	0.00287	0.014882	4.16682	10.04682

Fonte: Autor, 2016

- Resultados obtidos para 3ª Interação:

Tabela 30 – Resultados da 3ª interação – pilar intermediário

Ponto	x(m)	$M_{1,d}$	$1/r\ (m^{-1})$	W	y(m)	$M_{2,d}$	$M_{d,tot}$
0	0	5.88	0.003	0.0009	0	0	5.88
1	0.6	6.0312	0.00305	0.00184	0.00054	0.1512	6.0312
2	1.2	6.49152	0.0033	0.0019875	0.002184	0.61152	6.49152
3	1.8	7.28574	0.0037	0.00223	0.005021	1.40574	7.28574
4	2.4	8.45376	0.0043	0.00259	0.009195	2.5746	8.4546
5	3	10.04682	0.0051	0.00298	0.014924	4.17858	10.05858

Fonte: Autor, 2016

Pode-se observar que para a configuração de armadura adotada inicialmente houve convergência de resultados na 3ª interação. Com isso, podemos concluir que o pilar intermediário em questão foi verificado quanto sua estabilidade, logo ele não atingirá o ELU de Instabilidade e nem o ELU de Ruptura.

É importante frisar que, a estabilidade foi verificada para a primeira tentativa de configuração de armadura. Porém, se caso esta não fosse possível, dever-se-ia testar outra configuração.

7 CONCLUSÃO

Esta seção tem como objetivo apresentar as conclusões e recomendações relacionadas a este presente trabalho.

7.1 Considerações Finais

Pilares são elementos lineares submetidos preponderantemente a esforços de compressão. Pilares de concreto armado, segundo a ABNT NBR 6118:2014, sempre estarão sujeitos a, no mínimo, flexão composta. Neste trabalho restringiu-se o estudo a flexo-compressão normal.

Dos métodos existentes para dimensionar estes pilares, pode-se utilizar os métodos aproximados, que não incluem as não-linearidades de forma precisa. No caso de pilares esbeltos (índice de esbeltez maior que 90), métodos aproximados como o Método do Pilar Padrão com Curvatura Aproximada ou Método do Pilar Padrão com Rigidez Aproximada não são permitidos por norma, portanto nesse trabalho mostrou-se um método considerado exato para esses casos de pilares, o Método Geral. O equacionamento oriundo desta teoria tem como base formulações que levam em conta as não-linearidades de forma não aproximada, além de ser de caráter geral, podendo ser usado para pilares de qualquer tipo de vinculação, esbeltez, e carregamento imposto.

Para o estudo ser completo, apresentou-se também as formulações e roteiros necessário para a construção dos diagramas M, N, 1/r, cuja utilização é fundamental para a aplicação do Método Geral, pois através desses diagramas se inclui a não-linearidade física de forma não aproximada. O roteiro apresentado é aplicável para concretos de baixa e alta resistência (até 90MPa), e permite uma fácil adaptação à diferentes diagramas de tensão-deformação do concreto de normas internacionais devido à aplicação de integração numérica no mesmo. Portanto, o roteiro apresentado nesse estudo para traçados de diagramas M, N, 1/r é o mais geral possível, de fácil entendimento e grande facilidade de implementação computacional.

O uso do Método Geral apresentou resultados bem mais refinados do que uma análise oriunda dos métodos aproximados. O cálculo das flechas foram obtidos através da

Analogia de Mohr, que é um processo de fácil entendimento e pode ser usado para todos os tipos de carregamentos impostos no pilar em estudo, gerando bons resultados para análises de elementos isolados. Contudo, a aplicação manual do Método Geral é extensa e extremamente cansativo, por isso, recomenda-se sempre o uso de software ou planilhas eletrônicas para auxiliar as contas.

7.2 Recomendações para Trabalhos Futuros

Como recomendações para trabalhos futuros sobre o assunto:

- Expandir a formulação apresentada neste trabalho para contemplar a flexo-compressão oblíqua, permitindo o dimensionamento de pilares laterais e de canto.
- Automatizar os roteiros apresentados realizando a elaboração de códigos computacionais capazes de verificar a estabilidade de pilares esbeltos com maior facilidade e rapidez.
- Apresentar a teoria do Método Geral através de outros métodos numéricos, como por exemplo o Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Integração Numérica, entre outros.
- Realizar comparações entre a eficácia da utilização dos métodos numéricos citados acima (velocidade de convergência e processamento de dados), bem como comparações entre o Método Geral e os Métodos aproximados, visto que o método pode ser aplicado a pilares de esbeltezes diversas.
- Realizar comparações entre pilares de concreto baixa e alta resistência para a avaliar as vantagens de utilização do CAR.

REFERÊNCIAS

ABREU, Rafael Otávio Alves. COSTA, Gilcyvania Castro Corvelo, AGUIAR, Eduardo Aurélio Barros. **Rotinas para dimensionamento de pilares esbeltos de concreto armado.** 2016. Artigo Científico (No prelo).

AGUIAR, Eduardo Aurélio Barros. **Projeto de Pilares de Concreto de Alto Desempenho.** 2000. 202f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

ARAÚJO, José. Milton de. **Curso de concreto armado.** 4. ed. Rio Grande: Dunas, v.3, 2014.

ARAÚJO, José. Milton de. **Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado.** 1984. 176f. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1984.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 5738:** Procedimento para moldagem e cura de corpos de prova. Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 5739:** Concreto – Ensaio de compressão de corpos de prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. **NBR 7480:** Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado - Especificação. Rio de Janeiro, 2007.

AUFIERO, Liliana. **Estabilidade de Colunas Isostáticas de Concreto Armado.** 1977. 164f. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BORGES, Ana Cláudia Leão. **Análise de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Solicitados a Flexo-Compressão Oblíqua.** 1999. 98f. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.

BUCHAIN, Roberto. **Efeitos de Segunda Ordem e Estado Limite Último de Instabilidade em Pilares de Concreto Armado.** 1979. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

CADAMURO JÚNIOR, Ismael Wilson. **Dimensionamento de Pilares Esbeltos de Concreto Armado com Seção Qualquer Solicitados por Flexão Composta Oblíqua.** 1997. 120f. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.

CAMPOS FILHO, Américo. **Verificação da Estabilidade de Pilares Esbeltos de Concreto Armado.** 2014. 28f. Apostila do Curso de Especialização em Estruturas de Concreto/UFRGS, Porto Alegre, 2014.

CARDOSO JÚNIOR, Sander David. **Sistema Computacional para Análise Não Linear de Pilares de Concreto Armado.** 2014. 55f. Monografia (Pós-Graduação) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

CARVALHO, Roberto Chust. PINHEIRO, Libânio Miranda. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado.** 2. ed. São Paulo: Pini, vol. 2, 2013.

CARVALHO, Roberto Chust. **Estruturas em Concreto Protendido:** cálculo e detalhamento. São Paulo: Pini, 2012.

CLÍMACO, João Carlos Teatini de Souza. **Estruturas de Concreto Armado:** Fundamentos de Projeto, Dimensionamento e Verificação. 2. ed. Brasília: UnB, 2013.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Estruturas de Concreto:** Solicitações Normais. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara 2, 1981.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Tecnologia do Concreto Estrutural:** Tópicos Aplicados. São Paulo, Ed. Pini Ltda., 2008.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

KETTERMANN, Adriana Carla. **Efeito da Deformabilidade dos Pilares no Estudo do Estado Limite Último de Instabilidade.** 2001. 196f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

KIMURA, Alio Ernesto. **Informática Aplicada à Estruturas de Concreto Armado.** São Paulo: Pini, 2007.

LEONHARDT, Fritz; MÖNNING, Eduard. **Construções de Concreto:** Princípios básicos de dimensionamento de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: Interciência, v.1, 1977.

MALAKOSKI, Joice. **Pilares Esbeltos de Concreto Armado com Seção Variável.** 1998. 175f. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

MARTHA, Luiz Fernando. **Análise de Estruturas:** Conceitos e Métodos Básicos. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

MASON, Jayme. **Estruturas de Concreto Armado e Protendido.** Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

PAULA, Joel Alves de. **Algorítmos para o Estudo de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Solicitados a Flexão Normal Composta.** 1988. 191f. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

PRAZERES, Plínio Glauber Carvalho dos; GOMES, Jair José dos Santos; SOUZA, Remo Magalhães de. **Aplicação de Métodos Numéricos na Análise Computacional de Seções de Concreto Armado Submetidas a Flexão Composta Reta.** 2003. 20f. Artigo Científico. V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 2003.

REBELLO, Yopanan Conrado Pereira. **Estruturas de Aço, Concreto e Madeira:** Atendimento da expectativa dimensional. São Paulo: Zigurate Editora, 2005.

REGALLA, Diana de Almeida Pinto. **Análise Comparativa entre os Diversos Métodos de Consideração de Efeitos Locais de Segunda Ordem.** 2015. 98f. Trabalho de Conclusão (Graduação). Universidade Federal do Rio de Janeiro – Escola Politécnica, Rio de Janeiro, 2015.

RIBEIRO, Eduardo Ascenso Reis; SILVA, Jheisson Luiz Pereira da; CUNHA, Carlos Henrique de Moura. **Análise da Não Linearidade Física em Pórtico pela Relação Momento-Normal-Curvatura.** 2015. 14f. Artigo Científico. 57º CBC, 2015.

RIBEIRO, Kleyser. **Diagrama para Verificação de Pilares Retangulares em Concreto Armado Submetidos à Flexão Composta Normal.** 2011. 304f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

SANTOS, Lauro Modesto dos. **Instabilidade nas Estruturas de Concreto:** Análise de Pilares. 1987. 112f. Apostila (Pós-Graduação). Universidade de São Paulo - USP, São Paulo, 1987.

SCADELAI, Murilo Alessandro. PINHEIRO, Libânio Miranda. **Instabilidade de Barras.** 2002. 37f. Apostila da disciplina Fundamentos do Concreto II. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

SMIDERLE, Luiz Gabriel Sarmet Moreira. **Influência da Relação Tensão-Deformação do Concreto no Comportamento de Pilares Esbeltos.** 1998. 104f. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes, 1998.

SOUZA, Carlos Eduardo Lobo de. **Análise do Efeito de Segunda Ordem em Pilares Segundo a NBR 6118 e Métodos Exatos.** 2011. 104f. Trabalho de Conclusão (Monografia). Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

SÜSSEKIND, José Carlos. **Curso de Análise Estrutural.** 4. ed**.** Rio de Janeiro: Globo, v.2, 1980.

SÜSSEKIND, José Carlos. **Curso de Concreto Armado.** 2. ed**.** Rio de Janeiro: Globo, v.2, 1982.

WATANABE, Waldson Takeo. **Verificação da Estabilidade de Pilares Esbeltos de Concreto Armado Submetidos à Flexo-compressão Oblíqua pelo Método Exato:** proposta de programa computacional. 2011. 70f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011.