

**Universidade Estadual do Maranhão**  
**Centro de Ciências Tecnológicas**  
**Departamento de Engenharia da Computação**

**Alfredo Costa Oliveira Junior**

**PROJETO DO FILTRO DE KALMAN EM UM MANIPULADOR ROBÓTICO  
USANDO UM ALGORÍTMO GENÉTICO**

**São Luís - MA**

**2014**



**Universidade Estadual do Maranhão**  
**Centro de Ciências Tecnológicas**  
**Departamento de Engenharia da Computação**

**Alfredo Costa Oliveira Junior**

**PROJETO DO FILTRO DE KALMAN EM UM MANIPULADOR ROBÓTICO  
USANDO UM ALGORÍTMO GENÉTICO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia da Computação da UEMA, como registro para obtenção parcial do grau de Bacharelado em Engenharia da Computação com ênfase em Automação e Controle.

Orientador: Ivanildo Silva Abreu, PhD.

**São Luís - MA**

**2014**

Oliveira Junior, Alfredo Costa.

Projeto de Filtro de Kalman em um Manipulador Robótico usando um Algoritmo Genético / Alfredo Costa Oliveira Junior.– São Luís, 2014.

78 f

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia da Computação, Universidade Estadual do Maranhão, 2014.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu

1.Manipulador robótico. 2.Controlador robusto. 3.Filtro de Kalman.  
I.Título

CDU: 621.3:004

**Alfredo Costa Oliveira Junior**

**PROJETO DO FILTRO DE KALMAN EM UM MANIPULADOR ROBÓTICO  
USANDO UM ALGORÍTMO GENÉTICO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia da Computação da UEMA, como registro para obtenção parcial do grau de Bacharelado em Engenharia da Computação com ênfase em Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 08 de agosto de 2014:

---

**Ivanildo Silva Abreu, PhD.**  
Orientador

---

**Msc. Denner Robert Rodrigues Guilhon**  
Primeiro Membro da Banca

---

**Msc. Áurea Celeste da Costa Ribeiro**  
Segundo Membro da Banca



## **Agradecimentos**

Agradeço primeiramente a Deus e a minha família pelo apoio, motivação e cuidado.

Também ao professor Ivanildo Abreu pela sua orientação, pela oportunidade de convívio e aprendizado diário, pelo exemplo de inspiração profissional.

Agradeço profundamente à Direção, meus professores e aos funcionários do curso de Engenharia da Computação da UEMA, pelo acolhimento, atenção e principalmente pelo ambiente acadêmico aberto ao pensamento crítico e ao debate de ideias.

Aos meus caros colegas da turma 2009.2 que de uma forma ou de outra contribuíram com sua força e estímulo para que eu conseguisse completar este percurso.



*“Não existe nenhum caminho lógico para  
a descoberta das leis do Universo -  
o único caminho é o da intuição.  
(Albert Einstein)*



## Resumo

Este trabalho tem como objetivo utilizar o projeto do Filtro de Kalman para estimar as variáveis de estado de um manipulador robótico, uma vez que as mesmas não estão disponíveis na prática. O problema do Filtro de Kalman é resolvido através da metodologia de controle robusto *LQG*, isso significa que tanto a incerteza com relação às variáveis de estado, quanto as perturbações são consideradas durante o projeto do controlador. Além disso, significa que o controlador projetado pode tolerar o erro de modelagem, sem degradar, significativamente, o desempenho do sistema de controle. Com relação à avaliação desta metodologia, analisou-se a resposta no domínio do tempo para uma entrada ao impulso unitário, avaliando tempo de pico, tempo de assentamento e erro de estado estacionário, e no domínio da frequência, avaliando parâmetros, tais como: Margem de Ganho, Margem de Fase, largura de banda, frequência de ressonância e pico de ressonância. De modo geral, o Filtro de Kalman projetado cumpriu seu papel de estimar os estados de forma satisfatória, e o desempenho e estabilidade do sistema compensado apresentaram comportamento desejado, mesmo com a presença de ruídos na planta e na medição, e de polos adicionais não modelados.

**Palavras-chaves:** Manipulador robótico. Controlador Robusto. Filtro de Kalman.



## **Abstract**

This research aims to use design Kalman Filter to estimate the state variables of a robotic manipulator, since the same are not available in practice. The problem of the Kalman filter is solved using the methodology of robust control  $LQG$ , this means that both the uncertainty with respect to the state variables, as the disturbances are considered during the controller design. Furthermore, it means that the designed controller can tolerate the error modeling without significantly degrading the performance of the control system. Regarding the evaluation of this methodology, it has been analyzed the response in the time domain for a unit impulse input, evaluating peak time, settling time, and steady-state error, and in the frequency domain, evaluating parameters such as: Gain Margin, Margin Phase, bandwidth, resonance frequency and resonance peak. It has been observed that the Kalman Filter has fulfilled its role of estimating states, satisfactorily, and performance and stability of the compensated system had desired behavior, even in the presence of noise in the plant and noise in the measurement, and additional poles not modeled.

**Key-words:** Robotic manipulator. Robust Controller. Kalman Filter.



## Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação gráfica do espaço de estados e de um vetor de estado. . . . .	26
Figura 2 – Configuração de realimentação com um grau de liberdade. . . . .	33
Figura 3 – Projeto de compensações para função de transferência de malha multivariável $GK$ . . . . .	35
Figura 4 – Sistema Regulador Ótimo. . . . .	37
Figura 5 – Diagrama de blocos de um Filtro de Kalman. . . . .	38
Figura 6 – Estrutura de Controle $LQG$ . . . . .	39
Figura 7 – Estrutura de Controle $LQG$ com Observador de Estados. . . . .	40
Figura 8 – Sistema de Controle a malha aberta. . . . .	41
Figura 9 – Sistema de Controle a malha fechada. . . . .	42
Figura 10 – Sistema Controlador em Cascata (sem realimentação). . . . .	46
Figura 11 – Diagramas de Bode para $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$ , com $\tau = 1$ . . . . .	50
Figura 12 – Diagramas de Bode de $G(j\omega) = K_b = 1$ . . . . .	51
Figura 13 – Diagramas de Bode para $(j\omega)^{\pm N}$ . . . . .	52
Figura 14 – Diagramas de Bode para $(1 + j\omega_n\tau)^{-1}$ , com $\tau = 1$ . . . . .	53
Figura 15 – Diagramas de Bode para $G(j\omega) = [1 + j2\zeta/\omega j\omega - (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ . . . . .	55
Figura 16 – Fluxograma do AG para Busca das Matrizes $Q$ e $R$ . . . . .	57
Figura 17 – Manipulador Robótico e ambiente-alvo. . . . .	63
Figura 18 – Análise dos deslocamentos do Manipulador Robótico e ambiente-alvo. . . . .	64
Figura 19 – Sensibilidade total da população inicial. . . . .	67
Figura 20 – Evolução do processo-função objetivo média e melhor função objetivo das gerações. . . . .	68
Figura 21 – Fitness normalizada de cada geração e de cada indivíduo. . . . .	69
Figura 22 – Estrutura de Controle $LQG$ com Observador de Estados. . . . .	70
Figura 23 – Sistema nominal aumentado (azul) e as barreiras de desempenho (vermelho) e de estabilidade (preto). . . . .	74
Figura 24 – Trajetórias do erro para as variáveis de estado. . . . .	75
Figura 25 – Trajetórias dos estados versus os estimados. . . . .	76
Figura 26 – Trajetórias de estado $x_1$ versus o estado estimado $e_1$ . . . . .	76
Figura 27 – Resposta do Sistema não compensado em azul e do sistema com compensação $LQG$ em verde. . . . .	78
Figura 28 – Frequências de corte dos sistemas não compensado (em azul) e do compensado (em verde). . . . .	79
Figura 29 – Diagramas de Bode do Sistema não compensado em azul e do sistema compensado com Controlador $LQG$ em verde. . . . .	80
Figura 30 – Sistema Regulador Ótimo. . . . .	89



## Lista de abreviaturas e siglas

AG	Algoritmo Genético
EAR	Equação Algébrica de Riccati
FK	Filtro de Kalman
K	Ganho do Regulador Linear Quadrático
L	Ganho do Filtro de Kalman
LQ	Linear Quadratic (Linear Quadrático)
LQG	Linear Quadratic Gaussian (Gaussiano Linear Quadrático)
LQR	Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)
SISO	Single-Input and Single-Output (Simples-Entrada e Simples-Saída)
MIMO	Multiple-Input and Multiple-Output (Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas)
P	Solução da Equação Algébrica de Riccati
Q	Matriz de Ponderação do Estado
R	Matriz de Ponderação do Controle
LIT	Linear e Invariante no Tempo



## Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	19
2	OBJETIVOS . . . . .	21
2.1	Objetivo Geral . . . . .	21
2.2	Objetivos Específicos . . . . .	21
3	JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO . . . . .	23
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	25
4.1	Modelagem no domínio do tempo . . . . .	25
4.1.1	Definições de sistemas no espaço de estados . . . . .	25
4.1.2	Aplicando representação no espaço de estados . . . . .	27
4.2	Análise de Sistemas de Controle no Espaço de Estados . . . . .	28
4.2.1	Controlabilidade . . . . .	28
4.2.2	Observabilidade . . . . .	30
4.3	Projetos de Sistemas de Controle Robusto . . . . .	32
4.3.1	Compromissos de projeto em sistema com realimentação . . . . .	33
4.3.2	Regulador Quadrático Linear . . . . .	36
4.3.3	Filtro de Kalman . . . . .	37
4.3.4	Problema de Controle <i>LQG</i> . . . . .	38
4.3.5	Princípio da Separação para o Projeto <i>LQG</i> . . . . .	39
4.3.6	Controlador <i>LQG</i> . . . . .	40
4.4	Características de Sistema de Controle com Realimentação . . . . .	41
4.4.1	Análise do Sinal de Erro . . . . .	42
4.4.2	Sensibilidade do Sistema de Controle a Variação de Parâmetros . . . . .	43
4.4.3	Rejeição a Perturbações em Sistemas de Controle com Retroação . . . . .	44
4.4.4	Atenuação de Ruídos de Medição em Sistemas de Controle com Retroação . . . . .	44
4.4.5	Controle da Resposta Transiente . . . . .	45
4.4.6	Erro de Estado Estacionário . . . . .	45
4.4.7	Custo da Realimentação . . . . .	46
4.5	Método de Resposta em Frequência . . . . .	47
4.5.1	Diagrama de Bode . . . . .	49
4.5.2	Especificações em Malha Fechada . . . . .	54
4.6	Computação Evolutiva . . . . .	56
4.6.1	Algoritmo Genético . . . . .	56
4.6.2	Algoritmo Genético para Busca das Matrizes <i>Q</i> e <i>R</i> . . . . .	58

4.6.2.1	Modelos das Matrizes $Q$ e $R$ . . . . .	58
4.6.2.2	Modelo da População $QR$ . . . . .	58
4.6.2.3	Modelo de Avaliação dos Cromossomos . . . . .	59
4.6.2.4	Modelos de Operações Genéticas . . . . .	60
<b>5</b>	<b>PROJETO DO CONTROLADOR LQG</b> . . . . .	<b>63</b>
5.1	Modelagem do Manipulador Robótico . . . . .	63
5.2	Controlador Inteligente $LQR$ . . . . .	65
5.2.1	Modelagem Inteligente via <i>Algoritmo Genético</i> . . . . .	65
5.2.1.1	Desempenho da População Inicial . . . . .	66
5.2.1.2	Desempenho da População final . . . . .	66
5.2.2	Projeto do Controlador $LQR$ . . . . .	67
5.3	Filtro de Kalman para estimação de estados . . . . .	69
5.4	Projeto do Controlador $LQG$ . . . . .	71
<b>6</b>	<b>SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS</b> . . . . .	<b>73</b>
6.1	Barreiras de desempenho e estabilidade . . . . .	73
6.2	Estimação com Filtro de Kalman . . . . .	74
6.3	Resposta no Domínio do Tempo . . . . .	75
6.4	Resposta no Domínio da Frequência . . . . .	77
6.5	Conclusões . . . . .	81
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>85</b>
	<b>APÊNDICES</b>	<b>87</b>
	<b>APÊNDICE A – SISTEM REGULADOR ÓTIMO QUADRÁTICO</b> . .	<b>89</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, as grandes mudanças na economia e a abertura de mercado levaram o setor industrial a se adequar a novos padrões de concorrência, os quais objetivam a lucratividade e competitividade com relação a qualidade, custo e atendimento. Visando estas questões, várias indústrias tem implementado a automatização de seus processos com base na robótica, mais especificamente com a utilização de robôs manipuladores para realização de tarefas repetitivas e pré-definidas com eficiência e precisão (CARVALHO, 2009).

Os manipuladores robóticos podem ser aplicados em tarefas como soldagem, prensagem, embalagem, manuseio de objetos radioativos, entre outras, e são empregados nos mais diversos segmentos industriais, tais como mecânico, automobilístico, aeronáutico, espacial, eletroeletrônico, etc. Na área médica, os manipuladores tem sido utilizados em processos de telecirurgia, assistindo os médicos nas operações e no planejamento cirúrgico (TAYLOR; STOIANOVICI, 2003).

Os robôs manipuladores, objeto desta pesquisa, são basicamente dispositivos de posicionamento com muitos graus de liberdade, formados por cadeia de corpos (elos), em cuja extremidade há um atuador, responsável pela realização da tarefa.

Segundo Chiu e Lee (1997), manipuladores modernos estão requerendo mais e mais interagir com seus meios por contato direto. Ainda segundo o autor, garantir um desempenho otimizado neste tipo de sistema, implicaria mínimo tempo de contato, bem como mínima força de impacto e pequeno erro em regime permanente.

É importante destacar que em tais sistemas há incertezas na localização da superfície de colisão e quanto à dinâmica do mesmo. Tais questões podem resultar em um tempo de contato, indesejavelmente, longo do manipulador robótico com o meio (CHIU; LEE, 1997).

Diante destes problemas, fica claro também que as variáveis de estado, como, por exemplo, o deslocamento e velocidade do manipulador robótico, não estão disponíveis (CHIU; LEE, 1997). Segundo Ogata e Yang (2010), em projetos de sistemas de controle na abordagem de alocação de polos, assume-se que todas as variáveis de estado são disponíveis para a malha fechada. Na prática, contudo, nem todas são disponíveis, sendo necessário estimá-las, o que é comumente chamado de Observação de estados.

Neste tocante, propõe-se um projeto de um observador de estados ótimo, ou em outras palavras, um Filtro de Kalman (FK), para estimar as variáveis de estado não disponíveis na prática. Este projeto é fundamentado na metodologia de projeto do controlador robusto *LQG* (Linear Quadratic Gaussian), o que significa que o mesmo estima de forma ótima as variáveis de estado, considera erros na modelagem do sistema e ruídos na planta e na medição, mantendo, mesmo assim, o desempenho e estabilidade do sistema de forma satisfatória (XUE; CHEN;

ATHERTON, 2007).

A análise do projeto proposto será feita no domínio do tempo, avaliando parâmetros de desempenho, tais como: tempo de pico, tempo de assentamento e erro de estado estacionário para uma entrada ao impulso unitário. Também analisou-se a Margem de Ganho, a Margem de fase, a largura de banda, a frequência de ressonância e pico de ressonância para o domínio da frequência.

Para tanto, a estrutura do trabalho continua da seguinte maneira: Na Seção 2, os Objetivos são apresentados. A Justificativa e Motivação são abordadas na Seção 3. Na Seção 4 é apresentado o Referencial Teórico. Na Seção 5 é apresentado o Projeto *LQG*. A Seção 6 apresenta a Simulação e Análise dos resultados. As Considerações Finais estão na Seção 7. E finalmente na Seção 8 são apresentadas as Referências.

## 2 OBJETIVOS

### 2.1 Objetivo Geral

Estimar as variáveis de estado não disponíveis para o projeto de realimentação na abordagem por meio da alocação de polos no Projeto de Manipulador Robótico.

### 2.2 Objetivos Específicos

- Levantar o estado da arte em relação a análise e projeto de sistemas de controle em espaço de estados;
- Modelar o sistema de controle de salto de impacto de um manipulador robótico;
- Obter o ganho do compensador através do projeto  $LQR$ ;
- Obter a matriz de ganho do Filtro de Kalman;
- Analisar resultados no domínio do tempo e no domínio da frequência;
- Simular os resultados usando software Matlab.



### 3 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

Cada vez mais, projetos de manipuladores modernos estão requerendo interação com seus meios por contato direto. Assim, é importante que tanto impacto quanto força de contato em regime permanente sejam controlados para garantir um desempenho satisfatória.

Para aplicar robôs manipuladores em uma classe mais ampla de tarefas, é necessário controlar não só a posição de um manipulador, mas também a força exercida pelo seu atuador terminal em um objeto ou ambiente (HU; JR; KRISHNAN, 2000). Já Passold (2003) afirma que especialmente no caso de tarefas que exigem contato do robô com o meio (peça), é altamente desejável algoritmos de controle que considerem esse contato (impacto).

Outro fator importante para o controle de impacto é o grau de conhecimento da dinâmica do sistema. Entretanto, o que se nota é que geralmente se sabe muito pouco sobre a dinâmica do meio e a localização da superfície de colisão (CHIU; LEE, 1997).

Várias aproximações tentam contornar o problema, mas não tratam o problema da incerteza da localização do meio. Em adição a esses problemas, segundo Chiu e Lee (1997), questões para implementação prática, tal como taxa de amostragem limitada e incapacidade de controlar o motor de torque devido à existência de estruturas PID no servo, podem representar sérios problemas para o sucesso da implementação do mais sofisticado esquema de controle.

Então para superar limitações quanto ao conhecimento da dinâmica de sistemas de controle de impacto, conforme Ogata e Yang (2010), pode-se utilizar um dispositivo (ou um programa de computador) que estima ou observa as variáveis de estado, chamado de observador de estado. Já Xue, Chen e Atherton (2007) acrescenta que quando se deseja uma estimação ótima, projetar um Filtro de Kalman é uma solução viável. Além disso, vários trabalhos utilizaram o Filtro de Kalman para a estimação em projetos de manipuladores robóticos, tais como em (ROTELLA et al., 2014), (QUIGLEY et al., 2010), (ROAN et al., 2012), (ULRICH; SASIADEK, 2011).

Para o desenvolvimento deste trabalho, utiliza-se a metodologia de controle robusto *LQG*, a qual permite estimar estados não disponíveis e ainda considera ruídos na planta e ruídos de medição de modo que o desempenho do sistema se mantem significativamente desejável. A técnica de controle *LQG* é fundamentada no projeto dual de um controlador *LQR* (ganho ótimo) e de um Filtro de Kalman (estimação ótima).

Deste modo, este trabalho propõe um observador de estados para um Manipulador Robótico, tendo em vista que os estados não estão disponíveis. Este observador é fundamentado na teoria do Filtro de Kalman, e é desenvolvido via Algoritmo Genético, conforme Fonseca et al. (2008). Ainda, como consequência da metodologia, deseja-se desenvolver um controlador que otimize o desempenho da planta, baseado no projeto *LQR*.



## 4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estado da arte deste trabalho trata dos seguintes temas: Modelagem no domínio do Tempo, Análise de Sistemas de Controle no Espaço de Estados, Projeto de Sistemas de Controle Robusto, Características de Sistema de Controle com Realimentação, Método de Resposta em Frequência e Computação Evolutiva.

### 4.1 Modelagem no domínio do tempo

Há duas abordagens para análise e projeto de sistemas com realimentação. A primeira é conhecida com técnica clássica ou no domínio da frequência. A principal desvantagem da técnica convencional (clássica) é a sua limitada aplicabilidade (NISE; SILVA, 2012, p. 118). Ela só é válida para sistemas lineares, invariantes no tempo, tendo apenas uma entrada e uma saída. Ela não serve para sistemas invariantes no tempo, sistemas não lineares e sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas.

Portanto os métodos do lugar das raízes e de respostas em frequência não se aplicam a sistemas não lineares, estocásticos, etc.

O advento da exploração espacial provocou um aumento no escopo dos requisitos de sistema de controle. Daí a modelagem de sistemas que usam equações diferenciais lineares e invariantes no tempo e as funções de transferências subsequentes se tornam inadequadas (NISE; SILVA, 2012, p. 118).

Então por esse motivo surge a teoria de controle moderno em torno de 1960 e pode ser aplicada a qualquer sistema, inclusive para sistemas de controle de manipuladores robóticos. Ela é essencialmente uma abordagem no domínio do tempo, utilizando o conceito de estado. As próximas subseções apresentam os principais conceitos relacionados a sistemas no espaço de estados.

#### 4.1.1 Definições de sistemas no espaço de estados

Segundo Kalman (1963), o estado de um sistema é uma estrutura matematicamente constituída por um conjunto de  $n$  variáveis  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ , chamadas variáveis de estado, tal que os valores iniciais  $x_i(t_0)$ , deste conjunto e os sinais de entrada  $u_j(t)$ , são suficientes para descrever univocamente a resposta do sistema para  $t \geq t_0$ .

Existe um conjunto mínimo de variáveis de estado que se torna necessário para representar um sistema exatamente.

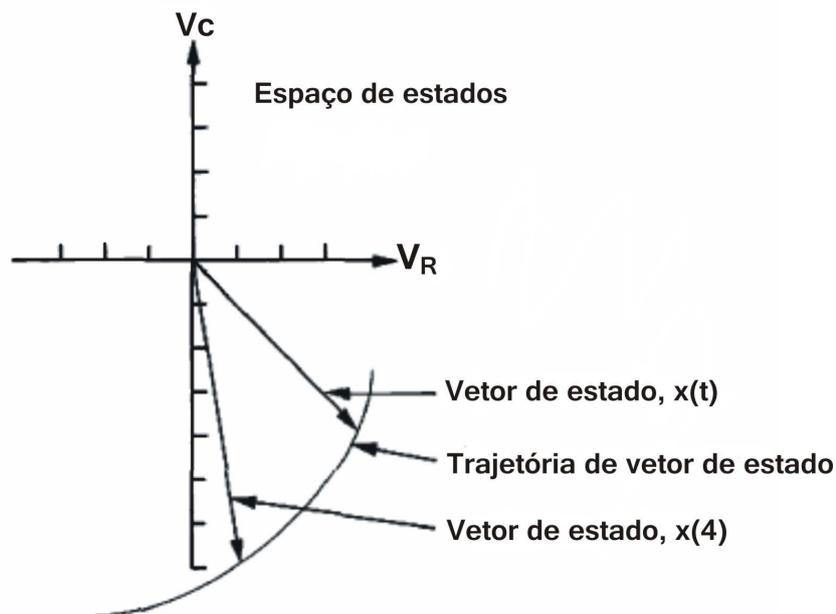
O conceito de estado está associado à memória (armazenadores de energia) do sistema. Separam o futuro do passado, contendo toda a informação histórica importante para determinar

o seu comportamento futuro em respeito a qualquer entrada. Segundo Ogata e Yang (2010, p. 29), variáveis de estado representam o menor conjunto de variáveis que determinam o estado do sistema dinâmico.

Já sobre vetor de estado pode-se fazer a seguinte consideração: se  $n$  variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então as  $n$  variáveis de estado podem ser consideradas como os  $n$  componentes de um vetor  $x(t)$ . Este vetor chamado vetor de estado.

Espaço de estados pode ser definido como o espaço  $n$ -dimensional, cujos eixos de coordenadas são os eixos  $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t)$ . Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados. Por exemplo, na Figura 1, tomou-se como variáveis de estado a tensão do resistor,  $V_r$ , e uma tensão no capacitor,  $V_c$ . Estas variáveis formam os eixos do espaço de estados. Uma trajetória pode ser imaginada como sendo mapeada pelo vetor,  $x(t)$ , para uma faixa de valores de  $t$ . Esta mostrado, também o vetor de estado no instante particular  $t = 4$ .

Figura 1 – Representação gráfica do espaço de estados e de um vetor de estado.



Fonte: (NISE; SILVA, 2012, p. 123)

Equações de estado é um conjunto de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, simultâneas, com  $n$  variáveis, sendo as  $n$  variáveis a serem resolvidas são as variáveis de estado. Já a equação de saída é a equação algébrica que exprime as variáveis de saída de um sistema com combinações lineares das variáveis de estado e das entradas.

Agora que as definições básicas foram estabelecidas formalmente, pode-se definir a representação de um sistema no espaço de estados. Um sistema no espaço de estados pode ser

representado pelas seguintes equações:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.2)$$

Para  $t \geq t_0$  e as condições iniciais,  $x(t_0)$ , sendo

$x$  = vetor de estado;

$\dot{x}$  = derivada de vetor de estado em relação ao tempo;

$y$  = vetor resposta;

$u$  = vetor entrada ou de controle;

$A$  = matriz de sistema;

$B$  = matriz de entrada;

$C$  = matriz de saída;

$D$  = matriz de ação avante.

A Equação 4.1 é chamada de equação de estado, e o vetor  $x$ , chamado de vetor de estado, contém as variáveis de estado. A Equação 4.2 é chamada de equação de saída. Esta equação é usada para calcular quaisquer outras variáveis do sistema. Esta representação, segundo Nise e Silva (2012, p. 118), fornece o conhecimento completo de todas as variáveis do sistema em qualquer instante de tempo  $t \geq t_0$ .

Tomando-se um exemplo, pode-se representar as equações de estado de um sistema de segunda ordem, linear, invariante no tempo, com uma entrada  $v(t)$  da seguinte forma:

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1v(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2v(t) \quad (4.4)$$

sendo  $x_1$  e  $x_2$  são as variáveis de estado. Se houver uma única saída, a equação de saída poderá ter a seguinte forma:

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + d_1v(t) \quad (4.5)$$

#### 4.1.2 Aplicando representação no espaço de estados

Para se representar um sistema, o primeiro passo é selecionar o vetor de estado, o qual é escolhido segundo os seguintes critérios:

1. Deve-se selecionar um número mínimo de variáveis de estado como componentes do vetor de estado;
2. Essas variáveis de estado selecionadas (componentes de vetor de estado) devem ser linearmente independente.

## 4.2 Análise de Sistemas de Controle no Espaço de Estados

Um sistema moderno complexo pode ter muitas entradas e muitas saídas (do inglês, *Multiple Inputs, Multiple Outputs* - MIMO), e estas podem estar interrelacionadas de uma forma complicada. Para analisar tal sistema, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas, bem como recorrer a computadores para a maioria dos cálculos tediosos necessários para a análise. A abordagem no espaço de estados para análise de sistemas é mais adequada a partir deste ponto de vista.

Embora a teoria de controle convencional é baseada na relação de entrada-saída, ou na função de transferência, a teoria de controle moderno baseia-se na descrição das equações do sistema em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, que podem ser combinadas numa equação diferencial vetor-matricial de primeira ordem .

A utilização da notação vetor-matricial simplifica grandemente a representação matemática de sistemas de equações. O aumento do número de variáveis de estado, o número de entradas, e o número de saídas não aumenta a complexidade das equações. De fato, a análise de múltiplas entradas complicadas e vários sistemas de saída, pode ser realizada por meio de processos que são apenas ligeiramente mais complicados do que os necessários para a análise dos sistemas de equações diferenciais escalares de primeira ordem.

Os conceitos das propriedades de *controlabilidade* e *observabilidade* foram introduzidos por Kalman. Na concepção de sistemas de controle no espaço de estado, esses conceitos desempenham um papel importante. Na verdade, as condições de controlabilidade e observabilidade podem governar a existência de uma solução completa para o problema de projeto de sistemas de controle. A solução para este problema não pode existir se o sistema proposto não é controlável.

Embora a maioria dos sistemas físicos são controláveis e observáveis, modelos matemáticos correspondentes podem não possuir tais propriedades. Em seguida, é necessário conhecer as condições em que um sistema é controlável e observável. Esta seção possui conteúdos básicos de análise de espaço de estados, referente a *controlabilidade* e a *observabilidade* de sistemas de controle.

### 4.2.1 Controlabilidade

Um sistema, segundo Ogata e Yang (2010, p. 675), é dito ser controlável no instante  $t_0$ , se é possível, por meio de um vetor de controle sem restrições, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito. Considere o sistema de tempo contínuo.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (4.6)$$

sendo  $\mathbf{x}$  = vetor de estado (vetor de dimensão  $n$ )

$\mathbf{u}$  = sinal de controle (escalar)

$\mathbf{A}$  = matriz de dimensão  $n \times n$

$\mathbf{B}$  = matriz de dimensão  $n \times 1$

O sistema descrito pela Equação 4.6 é dito ser de estado controlável em  $t = t_0$  se é possível construir um sinal de controle sem restrições que vai transferir de um estado inicial para qualquer estado final de um intervalo de tempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Se todo estado é controlável, então o sistema é dito de estado completamente controlável.

Será deduzida a condição para a completa controlabilidade de estados. Sem perda de generalidade, pode-se admitir que o estado final seja a origem do espaço de estados e que o instante inicial seja zero, ou seja,  $t = 0$ .

A solução da Eq. 4.6 é

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Aplicando a definição de controlabilidade de estado completa, que a pouco foi dada, tem-se

$$\mathbf{x}(t_1) = 0 = e^{\mathbf{A}t_1}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_1-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

ou seja,

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (4.7)$$

Nota-se que  $e^{-\mathbf{A}\tau}$  pode ser escrito sob a forma

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \quad (4.8)$$

Substituindo-se a Eq. 4.8 na Eq. 4.7, tem-se

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau. \quad (4.9)$$

Seja

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau)u(\tau)d\tau = \beta_k.$$

Então, a Eq. 4.9 se torna

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= -\sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{A}^k \mathbf{B} \beta_k \\ &= \left[ \mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Se o sistema for de estado completamente controláveis, então, dado um estado inicial qualquer  $\mathbf{x}(t)$ , a Eq. 4.10 deve ser satisfeita. Isso requer que o posto da matriz  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

seja  $n$ .

Desta análise pode ser estabelecida a seguinte condição para a contrabilidade completa de estados: o sistema dado pela Eq. 4.10 é de estados completamente controláveis se e somente se os vetores  $\mathbf{B}, \mathbf{BA}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$  forem linearmente independentes, ou seja, se a matriz  $n \times n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

for de posto  $n$ .

O resultado que se acabou de obter pode ser estendido para o caso em que o vetor  $\mathbf{u}$  seja  $r$ -dimensional. Se o sistema for descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4.11)$$

sendo  $\mathbf{u}$  é um vetor de dimensão  $r$ , pode-se provar então que a condição para a controlabilidade de estados completa é que a matriz  $n \times nr$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

seja de posto  $n$ , ou seja, que contenha  $n$  vetores-coluna linearmente independentes. A Matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

é comumente chamada de *matriz de controlabilidade*.

#### 4.2.2 Observabilidade

Considera-se o sistema não-forçado descrito através das seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} \quad (4.13)$$

em que  $\mathbf{x}$  = vetor de estado (vetor de dimensão  $n$ )

$\mathbf{y}$  = vetor resposta (vetor de dimensão  $m$ )

$\mathbf{A}$  = matriz de dimensão  $n \times n$

$\mathbf{C}$  = matriz de dimensão  $m \times n$

O sistema é dito completamente observável se qualquer estado  $\mathbf{x}(t_0)$  pode ser determinado a partir da observação de  $\mathbf{y}(t)$  durante um intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Conseqüentemente, o sistema é completamente observável se toda transição de estado afeta finalmente cada um dos elementos do vetor de saída. O conceito de observabilidade é útil na solução do problema de se reconstruírem variáveis de estado não-mensuráveis a partir das variáveis mensuráveis, no menor intervalo possível de tempo (OGATA; YANG, 2010).

O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com o controle por retroação de estado reside no fato de algumas variáveis de estado não serem acessíveis diretamente para medição. Isto tem como resultado a necessidade de se estimarem as variáveis de estado não-mensuráveis para que se possam elaborar os sinais de controle.

Ao se discutirem as condições de observabilidade, considera-se o sistema não-forçado conforme pelas Eqs. 4.12 e 4.13. A razão para isto é a seguinte: se o sistema for descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

então,

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

e  $\mathbf{y}(t)$  é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}.$$

Como as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  são conhecidas e  $\mathbf{u}(t)$  também é conhecido, os dois últimos termos do segundo membro desta última equação são quantidades conhecidas. Portanto, elas podem ser subtraídas dos valores observados de  $\mathbf{y}(t)$ . Em consequência, para se investigar uma condição necessária e suficiente para observabilidade completa, basta considerar o sistema descrito pelas Eqs. 4.12 e 4.13.

Considera-se o sistema descrito pelas Eqs. 4.12 e 4.13.

O vetor de saída  $\mathbf{y}(t)$  é

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0).$$

Nota-se que

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k.$$

Assim, resulta

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)$$

ou

$$\mathbf{y}(t) = \alpha_0(t)\mathbf{C}\mathbf{x}(0) + \alpha_1(t)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \quad (4.14)$$

Se o sistema for completamente observável, então, dado o sinal de saída  $\mathbf{y}(t)$  durante um intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_1$ , é possível determinar  $\mathbf{x}(0)$ , univocamente, a partir da Eq. 4.14. Pode-se mostrar que isto requer que o posto da matriz  $nm \times n$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

seja igual a  $n$ .

A partir dessa análise é possível enunciar a condição de observabilidade completa da seguinte forma: o sistema descrito pelas Eqs. 4.12 e 4.13 é completamente observável se e somente se a matriz  $n \times nm$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{A}^*\mathbf{C}^* & \cdots & (\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{C}^* \end{bmatrix}$$

for de posto  $n$ , ou seja, se tiver  $n$  vetores-coluna linearmente independentes. Esta matriz é chamada *matriz de observabilidade*.

### 4.3 Projetos de Sistemas de Controle Robusto

O modelo é essencialmente uma aproximação da planta física real. Pode existir uma incerteza de modelagem, o que é a diferença entre o modelo e a propriedade da planta real, também conhecida como erro de modelagem. Se o controlador projetado pode tolerar o erro de modelagem, o controlador é chamado de **robusto**. Isto implica que o desempenho do sistema de controle não se degradará significativamente na presença do erro de modelagem utilizando o *controlador robusto*.

Nesta seção, a incerteza e a perturbação serão explicitamente e quantitativamente tomadas em consideração durante o projeto do controlador. Isto é referido como o projeto de controlador robusto e tem sido o foco de investigação ao longo de décadas.

O projeto de um controlador *LQG*, pode ser dividido em dois subprojetos: primeiro projetar um estimador de estado (Filtro de Kalman) e, então, projetar um controlador com retroação de estados *LQR*, de modo que um subprojeto independe do outro.

Para tal, as subseções seguintes tratam dos Requisitos de projeto em sistema com realimentação, Regulador Quadrático Linear, Filtro de Kalman, Controle *LQG*, Princípio da Separação para o projeto *LQG* e Controlador *LQG* com Observador de Estados.

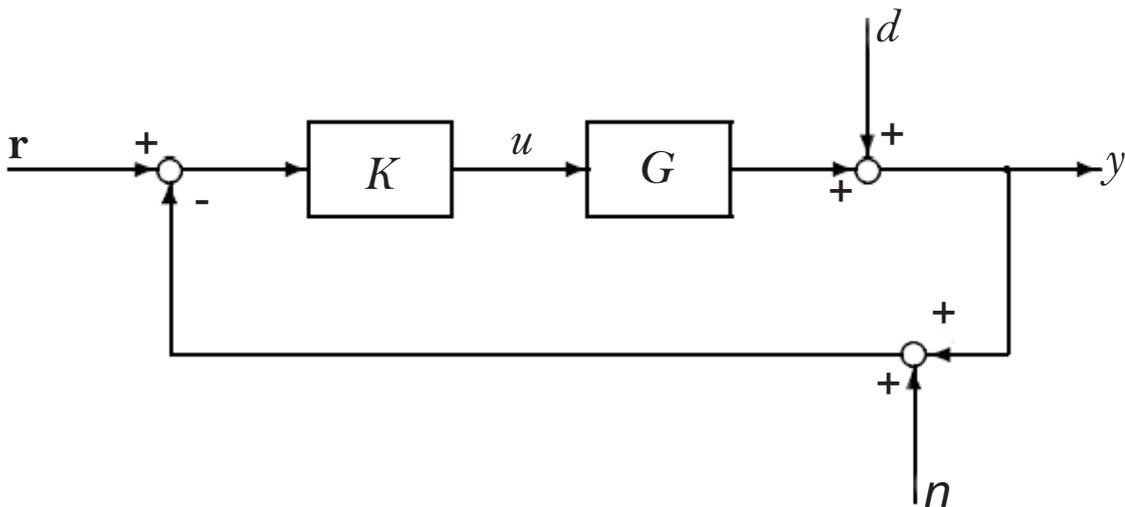
### 4.3.1 Compromissos de projeto em sistema com realimentação

Seja a configuração com um grau de liberdade mostrado na Figura 2. A interconexão entre a planta  $G$  e o controlador  $K$  é acionada por comandos de referência  $r$ , perturbações de saída  $d$ , e ruído de medição  $n$ .  $y$  são as saídas a ser controladas, e  $u$  são os sinais de controle. Em termos de função de sensibilidade,  $S = (I + GK)^{-1}$ , e a função de transferência de malha fechada,  $T = GK(I + GK)^{-1} = I - S$ , tem-se as seguintes relações importantes:

$$y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \quad (4.15)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \quad (4.16)$$

Figura 2 – Configuração de realimentação com um grau de liberdade.



Fonte: (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007, p. 356)

Estas relações determinam vários objetivos da malha fechada, para além do requisito de que o  $K$  estabiliza  $G$ , os quais, segundo Skogestad e Postlethwaite (2007), são:

1. Para a *rejeição a perturbação*, fazer  $\bar{\sigma}(S)$ <sup>1</sup> pequeno;
2. Para a *atenuação do ruído*, fazer  $\bar{\sigma}(T)$  pequeno;
3. Para o *rastreamento de referência*, fazer  $\bar{\sigma}(T) \approx \underline{\sigma}(T) \approx 1$ <sup>2</sup>;

<sup>1</sup>  $\bar{\sigma}$ , significa o maior valor singular.

<sup>2</sup>  $\underline{\sigma}$ , significa o menor valor singular.

4. Para a *redução da energia de controle*, fazer  $\bar{\sigma}(KS)$  pequeno;  
Se a incerteza não estruturada no modelo da planta  $G$  é representado por uma perturbação aditiva, isto é,  $G_p = G + \Delta$ , em seguida, um objetivo da malha fechada é ainda
5. Para a *estabilidade robusta na presença de uma perturbação aditiva*, fazer  $\bar{\sigma}(KS)$  pequeno;  
Alternativamente, se a incerteza é modelada por uma perturbação de saída multiplicativa de tal modo que  $G_p = (I + \Delta)G$ , então, tem-se:
6. Para a *estabilidade robusta na presença de uma perturbação de saída multiplicativa*, fazer  $\bar{\sigma}(T)$  pequeno.

As requisições de malha fechada de 1 a 6 não poderão ser todas satisfeitas simultaneamente. O projeto de retroação é, portanto, um compensação sobre frequência de objetivos conflitantes. Isso nem sempre é tão difícil como parece, porque as faixas de frequência em que os objetivos são importantes pode ser bastante diferente. Por exemplo, rejeição a perturbação é tipicamente uma exigência de baixa frequência, enquanto que a mitigação de ruído é, frequentemente, só nas altas frequências (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007).

O ganho de malha clássico é a magnitude da função de transferência de malha aberta  $L = GK$ , a qual é conformada, ao passo que as exigências do projeto acima são todos em termos de funções de transferência de malha fechada. No entanto, sabe-se que

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1 \quad (4.17)$$

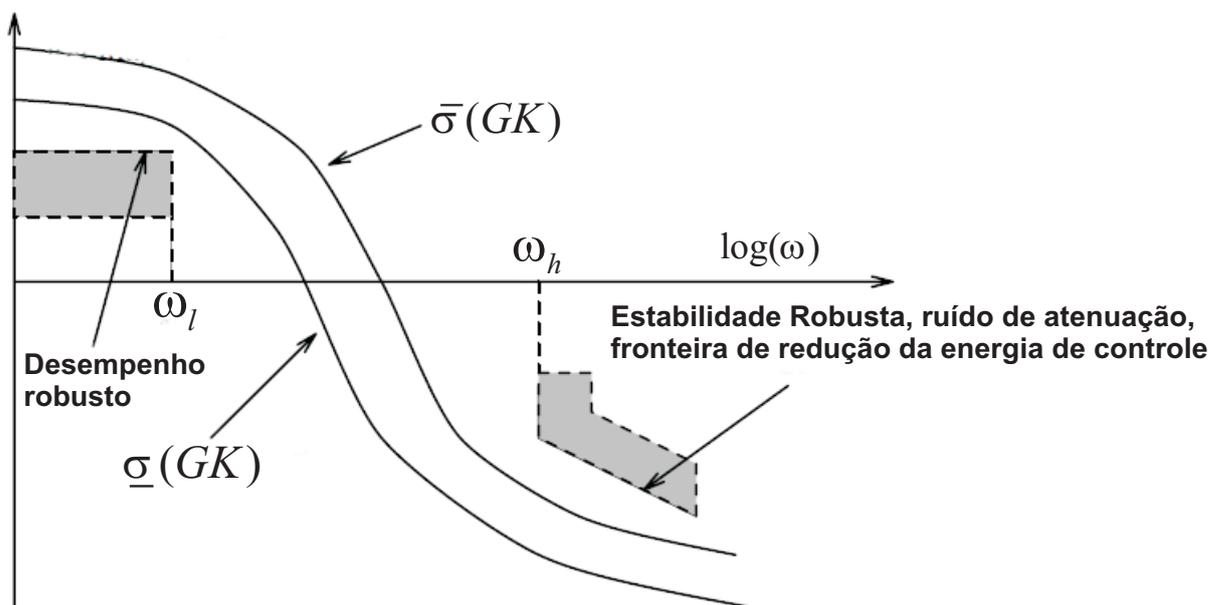
dela observa-se que  $\bar{\sigma}(S) \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(L)}$  na frequência sendo  $\underline{\sigma}(L)$  é muito maior que 1. Segue-se também que na frequência de largura de banda (sendo  $\frac{1}{\bar{\sigma}(S(j\omega_b))} = \sqrt{2} = 1,41$ ), tem-se que  $\underline{\sigma}(L(j\omega_b))$  entre 0,41 e 2,41. Além disso, de  $T = L(I + L)^{-1}$  segue-se que  $\bar{\sigma}(T) \approx \bar{\sigma}(L)$  nas frequências sendo  $\bar{\sigma}(L)$  é pequeno. Assim, ao longo de frequência específica, é relativamente fácil de aproximar os requisitos de circuito fechado pelos seguintes objetivos em malha aberta:

1. Para a *rejeição a perturbação*, fazer  $\underline{\sigma}(GK)$  grande; válido para frequências em que  $\bar{\sigma}(GK) \gg 1$ ;
2. Para a *atenuação de ruído*, fazer  $\bar{\sigma}(GK)$  pequeno; válido para frequências em que  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ;
3. Para o *rastreamento de referência*, fazer  $\underline{\sigma}(GK)$  grande; válido para frequências em que  $\bar{\sigma}(GK) \gg 1$ ;
4. Para a *redução da energia de controle*, fazer  $\bar{\sigma}(K)$  pequeno; válido para frequências em que  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ;
5. Para a *estabilidade robusta a uma perturbação aditiva*, fazer  $\bar{\sigma}(K)$  pequeno; válido para frequências em que  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ;

6. Para a *estabilidade robusta a uma perturbação multiplicativa*, fazer  $\bar{\sigma}(GK)$  pequeno; válido para frequências em que  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ ;

Tipicamente, as requisições de malha aberta 1 e 3 são válidas e importantes nas baixas frequências,  $0 \leq \omega \leq \omega_l \leq \omega_B$ , enquanto, 2, 4, 5 e 6 são condições que são válidas e importantes nas altas frequências,  $\omega_B \leq \omega_h \leq \omega \leq \infty$ , como é ilustrado na Figura 3. Dela, pode-se ver que em uma frequência, sendo se deseja altos ganhos (baixas frequências), a direção do “pior caso” é relatada para  $\underline{\sigma}(GK)$ , enquanto que em frequências, sendo queremos ganhos baixos (em altas frequências) a direção de “pior caso” direção está relacionada com o  $\bar{\sigma}(GK)$ .

Figura 3 – Projeto de compensações para função de transferência de malha multivariável  $GK$ .



Fonte: Adaptado de (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2007, p. 358)

Para Skogestad e Postlethwaite (2007), a partir da Figura 3, segue-se que o engenheiro de controle deve projetar  $K$  tal que  $\bar{\sigma}(GK)$  e  $\underline{\sigma}(GK)$  evitem as regiões sombreadas. Para um bom desempenho,  $\bar{\sigma}(GK)$  deve ser feito a situar-se acima de um limite de desempenho para todo  $\omega$  até  $\omega_l$ , e para a estabilidade robusta  $\bar{\sigma}(GK)$  deve ser forçado pertencer a um limite de robustez para todo  $\omega$  até  $\omega_h$ . A forma dos valores singulares de  $GK$  pela seleção de  $K$  é uma tarefa relativamente fácil, mas para fazer isso de uma forma que também garanta a estabilidade de malha fechada é difícil, geralmente. A estabilidade de malha fechada não pode ser determinada pelos valores singulares de malha aberta.

Para sistemas SISO, é claro que a estabilidade de malha fechada está intimamente relacionado ao ganho de malha aberta e de fase perto do  $\omega_c$  (frequência de *crossover* ou de corte), sendo  $|GK(j\omega_c)| = 1$ . Em particular, a taxa de *roll-off* de alto a baixo ganho no corte é limitada por requisitos da fase de estabilidade e, na prática, o que corresponde a uma taxa de *roll-off*

menor que  $40dB/década$ . Uma consequência imediata disso, é que há um limite baixo para a diferença entre  $\omega_h$  e  $\omega_l$  na Figura 3.

### 4.3.2 Regulador Quadrático Linear

Regulador Quadrático Linear (do inglês Linear Quadratic Regulator - LQR) é um dos métodos de controle ótimo baseado em espaço de estados. Nesta seção, se descreverá este método. Considera-se um sistema Linear Invariante no Tempo (LTI) dado por seu modelo no espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (4.18)$$

sendo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  dada esta equação do sistema, determina-se a matriz  $\mathbf{K}$  do vetor de controle ótimo

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (4.19)$$

para minimizar o índice de desempenho

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (4.20)$$

sendo  $\mathbf{Q}$  é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva, ou seja,  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{Q} \geq 0$ ) ou real simétrica e  $\mathbf{R}$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica, ou seja,  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $\mathbf{R} > 0$  (GANESH; VASU; BHAVANA, 2012). Nota-se que a Eq. A.3 representa o consumo de energia dos sinais de controle. Nesse problema, supõem-se que o vetor de controle  $\mathbf{u}(t)$  não seja limitado.

Será visto posteriormente, que a lei de controle linear dada pela Eq. A.2 é a lei de controle ótimo. Portanto, se os elementos não conhecidos da matriz  $\mathbf{K}$  forem determinados para minimizar o índice de desempenho, então  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  será ótimo para qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ . O diagrama de blocos mostrando a configuração ótima está indicado na Fig. 30.

Considerando a Equação A.3, pode-se então resolver a Equação Algébrica de Riccati (EAR) dada por

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.21)$$

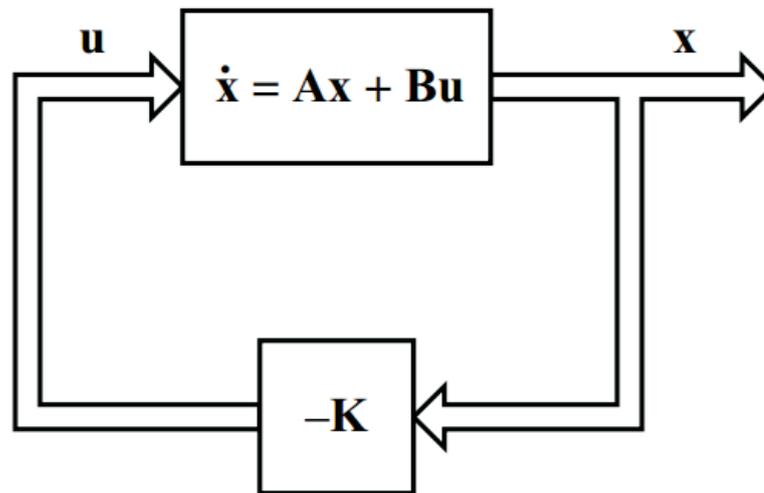
Pela solução da EAR, a matriz definida positiva  $\mathbf{P}$  é obtida, e, conseqüentemente, pode calcular o ganho ótimo e o controlador pela Eq. A.9.

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}. \quad (4.22)$$

em que os polos de malha fechada são os autovalores da matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$ .

No problema LQR, as matrizes de ponderação de  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  possuem profundo efeito sobre o desempenho do controlador. Em outras palavras, encontrar o melhor valor para  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  necessita

Figura 4 – Sistema Regulador Ótimo.



Fonte: (OGATA; YANG, 2010, p. 793)

de muito esforço computacional e de tentativa e erro, o que é bastante dispendioso. Assim, a utilização de métodos de otimização inteligente para encontrar  $Q$  e  $R$  é mais eficaz, conforme Ghoreishi, Nekoui e Basiri (2011) e Abreu e Fonseca (2010). Para tal, este trabalho utilizará um Algoritmo Genético, consolidado por Abreu (2008), para solucionar este problema.

Maiores detalhes sobre o projeto  $LQR$  podem ser consultados no Apêndice A.

Segundo (OGATA; YANG, 2010), as etapas de projeto  $LQR$  podem ser enunciadas como a seguir:

1. Determinar a matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaz a Eq. A.9, equação matricial reduzida de Riccati.
2. Substituir esta matriz  $\mathbf{P}$  dentro da Eq. A.8. A matriz  $\mathbf{K}$  resultante é a matriz ótima.

### 4.3.3 Filtro de Kalman

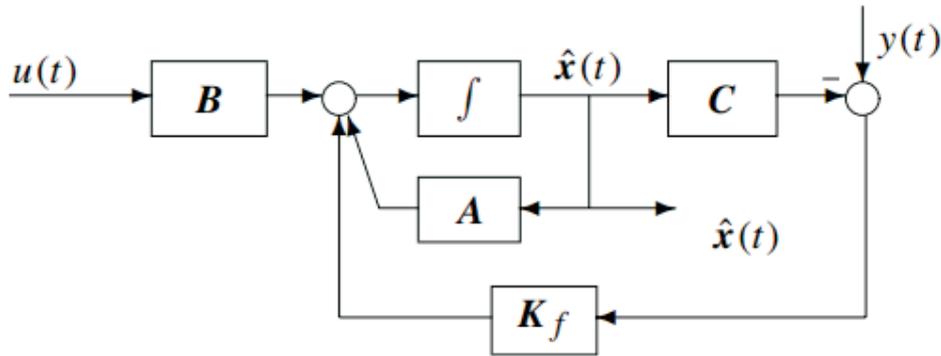
Os estados podem ser estimados otimamente se um Filtro de Kalman, em vez de um observador, é usado.

Pode-se encontrar primeiro um sinal de estimação de estado ótimo  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ , que minimiza a covariância  $E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T]$ , que é a matriz de covariância do sinal Gaussiano de média zero de  $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ . E, então, usa-se o sinal de estimação  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  para substituir as variáveis de estado reais tal que o problema original pode ser reduzido a um problema de controle ótimo  $LQ$  ordinário.

O diagrama de blocos do filtro de Kalman é mostrado na Fig. 5, sendo a matriz de ganho do Filtro de Kalman  $\mathbf{K}_f$  é dada por

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}_f \mathbf{C}^T \Theta^{-1}, \quad (4.23)$$

Figura 5 – Diagrama de blocos de um Filtro de Kalman.



Fonte: (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007, p. 237)

sendo  $\Theta$  é a matriz de Covariância de média zero do sinal do ruído de medição de saída e  $\mathbf{P}_f$  satisfaz a *Equação Algébrica de Riccati (EAR)*

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_f\mathbf{C}^T\Theta^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}_f + \Gamma\Xi\Gamma^T = 0, \quad (4.24)$$

sendo  $\mathbf{P}_f$  uma matriz simétrica semidefinida positiva, isto é,  $\mathbf{P}_f = \mathbf{P}_f^T \geq 0$ .

#### 4.3.4 Problema de Controle LQG

Considere o modelo de espaço de estados do sistema de controle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \Gamma\xi(t) \quad (4.25)$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \theta(t), \quad (4.26)$$

sendo  $\xi(t)$  e  $\theta(t)$  são ruídos aleatórios na equação de estados e nas medições de saída, respectivamente. Assume-se que  $\xi(t)$  e  $\theta(t)$  são conhecidos como processos aleatórios Gaussianos de média zero com matrizes de covariância dadas por

$$E[\xi(t)\xi^T(t)] = \Xi \geq 0, \quad E[\theta(t)\theta^T(t)] = \Theta > 0 \quad (4.27)$$

sendo  $E[x]$  indica o valor médio de  $\mathbf{x}$  e  $E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$  é a matriz de covariância do sinal Gaussiano de média zero de  $\mathbf{x}$ . Além disso, os sinais aleatórios  $\xi(t)$  e  $\theta(t)$  são ainda assumidos serem mutuamente independentes, isto é,  $E[\xi(t)\xi^T(t)] = 0$ . O índice de desempenho para o controle ótimo é definido como

$$\mathbf{J} = E \left\{ \int_0^\infty [z^T(t)\mathbf{Q}z(t) + u^T(t)\mathbf{R}u(t)] \right\}, \quad (4.28)$$

sendo  $z(t) = \mathbf{M}\mathbf{x}(t)$  é a combinação linear do vetor de estados  $\mathbf{x}(t)$  com  $\mathbf{M}$  definido pelo usuário para medir o desempenho. A matriz de ponderação constante  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  são, respectivamente, uma

matriz simétrica semidefinida positiva e uma simétrica definida positiva, sendo  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0$ . Note que  $\mathbf{R}$  é um escalar quando o sistema representado pelas Eqs. 4.25 e 4.26 é um sistema de malha fechada *SISO* (sigla para a expressão da língua inglesa *single-input single-output*, única entra, única saída).

O problema *LQG* pode ser dividido em dois subproblemas:

1. O controle de retroação de estados ótimo *LQ*, conforme seção 4.3.2;
2. O estimador de estados com perturbação, também conhecido como Filtro de Kalman, conforme seção 4.3.3.

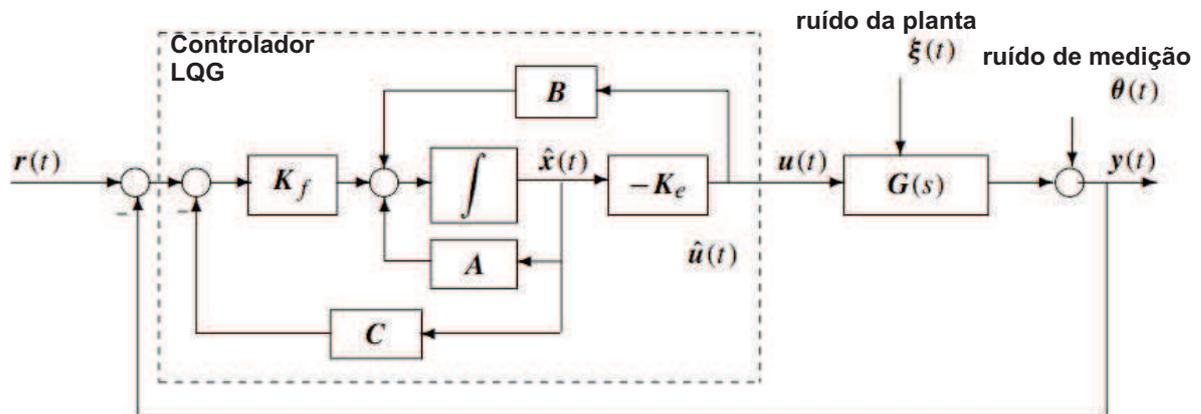
#### 4.3.5 Princípio da Separação para o Projeto *LQG*

Quando o sinal do filtro ótimo  $\hat{x}(t)$  é obtido, o diagrama de bloco do compensador *LQG* pode ser construído, conforme Fig. 6, com controle ótimo  $\mathbf{u}^*(t)$  dado pela Eq. 4.29.

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{K}_e \hat{\mathbf{x}}(t) \quad (4.29)$$

e matriz de retroação de estado ótimo  $\mathbf{K}_e$  dada pela Eq. 4.30.

Figura 6 – Estrutura de Controle *LQG*.



Fonte: (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007, p. 238)

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_e \quad (4.30)$$

sendo a matriz simétrica semidefinida positiva,  $\mathbf{P}_e$ , satisfaz a seguinte *EAR* (Eq. 4.31).

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_e \mathbf{A} - \mathbf{P}_e \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_e + \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \mathbf{M} = 0. \quad (4.31)$$

Dessa discussão, pode-se observar que, no problema de controle ótimo *LQG*, a estimação ótima e o problema de controle ótimo são resolvidos separadamente. Isto é conhecido como o

*princípio da separação*. Em outras palavras, para o projeto de um controlador *LQG*, pode-se primeiro projetar um estimador de estado e, então, usar os estados estimados, como se eles fossem mensuráveis exatamente, para depois se projetar o controlador com retroação de estados *LQR*.

#### 4.3.6 Controlador *LQG*

Para o modelo da planta em espaço de estados

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \xi(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \theta(t) \end{cases} \quad (4.32)$$

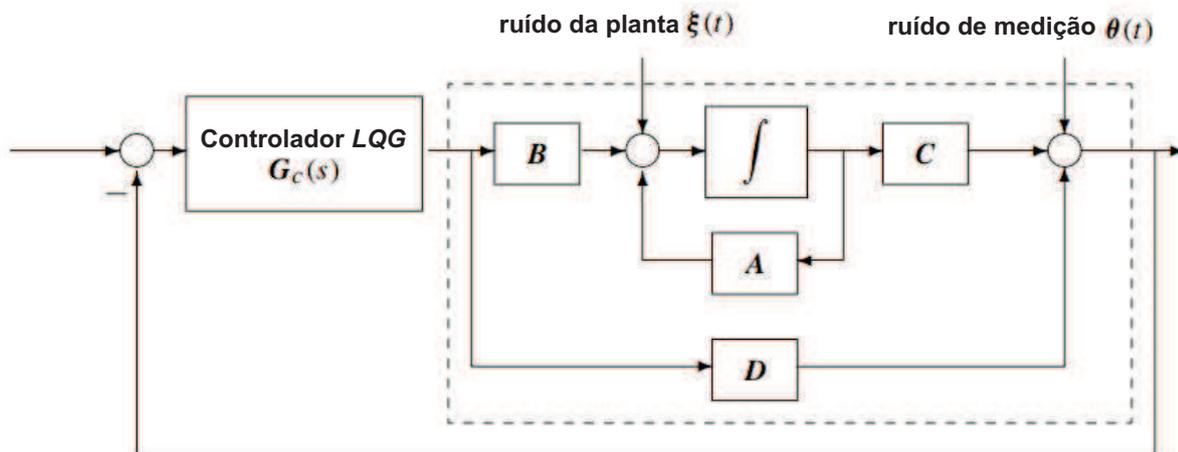
e o critério de otimização é dado pela Eq. 4.33

$$\mathbf{J} = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E \left\{ \int_0^{t_f} [\mathbf{x}^T \mathbf{u}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N}_c \\ \mathbf{N}_c^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} dt \right\}, \quad (4.33)$$

sendo  $\mathbf{N}_c$  pode ser normalmente selecionado como uma matriz nula, o diagrama de blocos do controlador *LQG* com Observador de Estados é apresentado na Fig. 7. Sumpõe-se que a matriz de ganho com retroação de estados,  $\mathbf{K}_e$ , e a matriz de ganho do Filtro de Kalman,  $\mathbf{K}_f$ , foram obtidas via *princípio da separação*. Então, a equação dinâmica do Filtro de Kalman é escrita como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_f(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\mathbf{u}). \quad (4.34)$$

Figura 7 – Estrutura de Controle *LQG* com Observador de Estados.



Fonte: (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007, p. 238)

O controlador *LQG* com Observador de Estados pode ser compactamente formulado como na Eq. 4.35.

$$\mathbf{G}_c(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C} - \mathbf{B}\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_f\mathbf{D}\mathbf{K}_e & \mathbf{K}_f \\ \mathbf{K}_e & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.35)$$

De um modo geral, o controlador  $LQG$  apresenta como vantagens: ação integral que pode ser introduzida facilmente; sinais de referência estocásticos podem ser incluídos; estimação de estados não disponíveis (FILHO; LUIS, 2006).

Como desvantagens, tem-se as perdas das propriedades de robustez, devido a inclusão do estimador e o tempo gasto com a estimação (FILHO; LUIS, 2006).

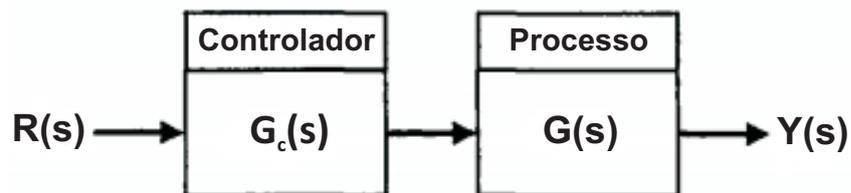
#### 4.4 Características de Sistema de Controle com Realimentação

Segundo Dorf e Bishop (2010), um sistema de controle é definido como uma interconexão de componentes formando um sistema que proverá uma resposta de sistema desejado. Porque a resposta do sistema desejado é conhecida, um sinal proporcional ao erro entre a resposta desejada e a resposta real é gerado. O uso desse sinal para controlar o processo resulta em uma sequência de operações a malha fechada que é chamado de sistema com retroação.

Para ilustrar as características e as vantagens de se introduzir a retroação, será considerado um sistema simples com uma única malha de retroação. A compreensão plena dos benefícios da retroação pode ser melhor obtidas a partir de sistemas com uma única malha e depois estendida aos sistemas com malhas múltiplas (DORF; BISHOP, 2010).

Um sistema sem retroação, também chamado de sistema direto ou sistema de malha aberta, é apresentado na Figura 8.

Figura 8 – Sistema de Controle a malha aberta.



Fonte: Adaptado de (DORF; BISHOP, 2010, p. 235)

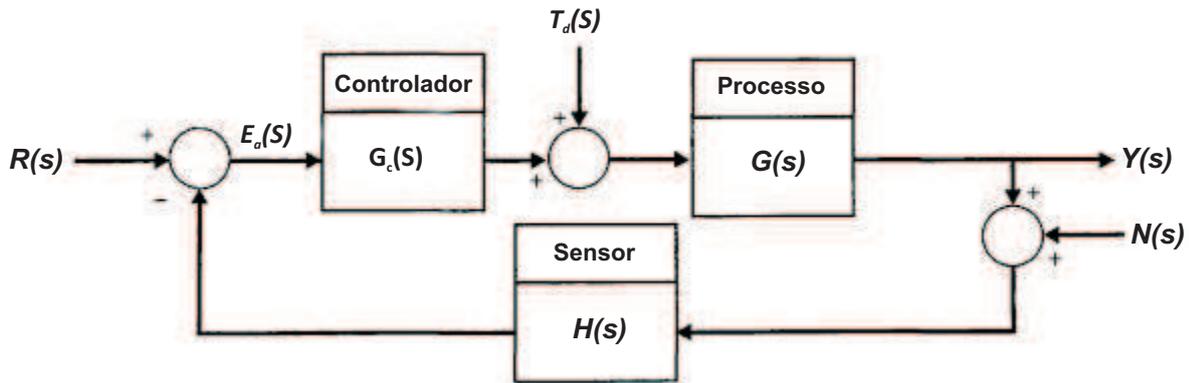
Um sistema de **malha aberta** opera sem reatuação e gera diretamente a saída em resposta a um sinal de entrada (DORF; BISHOP, 2010).

Em oposição, um sistema de controle com retroação negativa, a malha fechada, é mostrado na Fig. 9.

Um sistema a **malha fechada** usa uma medida do sinal de saída e a compara com a saída desejada para gerar um sinal de erro que é aplicado ao atuador (DORF; BISHOP, 2010).

É importante destacar que, apesar do custo e da complexidade de sistema, o sistema a malha fechada tem as seguintes vantagens:

Figura 9 – Sistema de Controle a malha fechada.



Fonte: Adaptado de (DORF; BISHOP, 2010, p. 236)

- Diminui a sensibilidade do sistema a variações em parâmetros do processo;
- Melhora a rejeição a perturbações;
- Melhora a atenuação de ruídos de medição;
- Melhora a redução do erro de estado estacionário do sistema;
- Fácil controle e ajuste da resposta transiente do sistema.

#### 4.4.1 Análise do Sinal de Erro

O sistema de controle mostrado na Figura 9 possui três entradas -  $R(s)$ ,  $T_d(s)$  e  $N(s)$  - e uma saída,  $Y(s)$ . Os sinais  $T_d(s)$  e  $N(s)$  são os sinais de perturbação e de ruído de medição, respectivamente. Define-se o **erro de rastreamento** como

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (4.36)$$

Para facilitar a discussão, será considerado um sistema de controle com realimentação unitária, isto é, com  $H(s) = 1$ .

Após algumas manipulações no diagrama de blocos, encontra-se a seguinte saída dada por

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_d(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (4.37)$$

Entretanto, como  $E(s) = R(s) - Y(s)$ , tem-se que

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_d(s) + \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (4.38)$$

Define-se a função

$$L(s) = G_c(s)G(s).$$

A função  $L(s)$  é chamada de **ganho de malha** e desempenha um papel fundamental na análise de sistemas de controle. Em termos de  $L(s)$ , tem-se que o erro de rastreamento é dado porque

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)}T_d(s) + \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s) \quad (4.39)$$

#### 4.4.2 Sensibilidade do Sistema de Controle a Variação de Parâmetros

Segundo Dorf e Bishop (2010), sensibilidade é definida pela relação entre a variação percentual na função de transferência do sistema pela relação percentual da função de transferência do processo. A função de transferência do sistema é

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad (4.40)$$

e, portanto, a sensibilidade é definida como

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad (4.41)$$

No limite, para pequenas variações incrementais, a Eq. 4.41 torna-se

$$S = \frac{\partial T(s)/T(s)}{\partial G(s)/G(s)} \quad (4.42)$$

A sensibilidade do sistema de controle a malha aberta a variação na planta  $G(s)$  é igual a 1. A sensibilidade do sistema a malha fechada é prontamente obtido usando a Eq. 4.42. A função de transferência do sistema a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Portanto, a sensibilidade deste tipo de sistema é

$$S_G^T = \frac{\Delta T(s)/\Delta G(s)}{G(s)/T(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (4.43)$$

Descobre-se uma vez mais que a sensibilidade do sistema pode ser reduzida abaixo da sensibilidade do sistema a malha aberta aumentando-se  $L(s) = G_c(s)G(s)$  sobre uma faixa de frequência de interesse.

É importante destacar a seguinte relação

$$S + C = 1 \quad (4.44)$$

sendo  $C$  é a função de sensibilidade complementar, definida por

$$C = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (4.45)$$

A capacidade para reduzir o efeito da variação de parâmetros de um sistema de controle pelo acréscimo de um laço de controle constitui uma vantagem importante dos sistemas de controle com retroação. Para obter sistema a malha aberta de alta precisão, os componentes da malha aberta  $G(s)$  devem ser selecionados cuidadosamente a fim de alcançar as especificações exatas. Contudo, um sistema a malha fechada permite que  $G(s)$  seja especificado com menor exatidão porque a sensibilidade a mudanças ou erros é reduzida pelo ganho de malha,  $L(s)$ .

#### 4.4.3 Rejeição a Perturbações em Sistemas de Controle com Retroação

Seja  $R(s) = N(s) = 0$ , segue-se da Eq. 4.39 que

$$E(s) = -S(s)G(s)T_d(s) = \frac{G(s)}{1 + L(s)}T_d(s)$$

Para um  $G(s)$  fixo e um dado  $T_d(s)$ , com o aumento do ganho de malha  $L(s)$ , o efeito de  $T(s)$  no erro de rastreamento diminui. Em outras palavras, a função de Sensibilidade  $S(s)$  é pequena quando o ganho de malha é grande. Diz-se que um ganho de malha grande leva a uma boa rejeição a perturbações. Mais precisamente, para se ter uma boa rejeição de perturbações, requer-se um ganho de malha grande sobre as frequências de interesse associadas com os sinais de perturbações esperados.

Na prática, os sinais de perturbação são frequentes em baixa frequência. Nesse caso, deseja-se projetar um controlador  $G_c(s)$  tal que a função de Sensibilidade  $S(s)$  é pequeno nas baixas frequências.

#### 4.4.4 Atenuação de Ruídos de Medição em Sistemas de Controle com Retroação

Quando  $R(s) = T_d(s) = 0$ , segue-se da Eq. 4.38 que

$$E(s) = C(s)N(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s)$$

Como o ganho de malha  $L(s)$  diminui, o efeito de  $N(s)$  sobre o erro de rastreamento diminui. Ou seja, a função de sensibilidade complementar  $C(s)$  é pequena quando o ganho de malha  $L(s)$  é pequeno. Ao se projetar  $G_c(s)$  tal que  $L(s) \ll 1$ , então o ruído de medição é atenuado porque

$$C(s) \approx L(s)$$

Na prática, os sinais de ruído de medição são comuns em altas frequências. Assim, quer-se um ganho de malha que seja pequeno em altas frequências. Já o efeito do ruído na saída, considerando  $R(s) = T_d(s) = 0$ , é dado por

$$Y(s) = \frac{-G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (4.46)$$

que é aproximadamente igual a

$$Y(s) \simeq -N(s) \quad (4.47)$$

para ganho de malha  $L(s) = G_c(s)G(s)$ . Isso é consistente com a recente discussão que o pequeno ganho de malha leva a uma atenuação do ruído de medição. Isso é equivalente a uma pequena função de sensibilidade complementar em altas frequências.

A separação entre perturbação (nas baixas frequências) e ruído de medição (nas altas frequências) é muito fortunosa porque dá ao projetista do sistema de controle uma forma de abordar o processo de projeto: o controlador deve ser de ganho alto nas baixas frequências e de ganho baixo nas altas frequências.

#### 4.4.5 Controle da Resposta Transiente

Uma das características mais importantes dos sistemas de controle é a sua resposta transitória. A **resposta transitória** é a resposta de um sistema como uma função do tempo. Uma vez que o objetivo dos sistemas de controle consiste em proporcionar a resposta desejada, a resposta transiente de sistemas de controle muitas vezes tem de ser ajustada até que ela seja satisfatória.

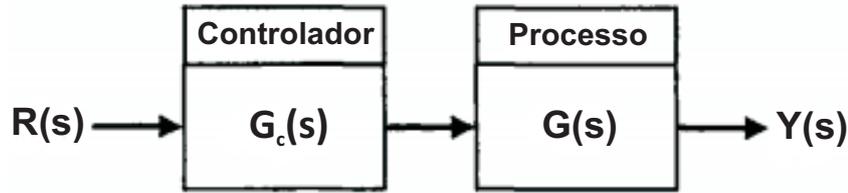
Se um sistema de controle em malha aberta não fornece uma resposta satisfatória, então o processo,  $G(s)$ , deve ser substituído por um processo mais adequado. Por outro lado, um sistema de malha fechada pode muitas vezes ser ajustado para produzir a resposta desejada, ajustando-se os parâmetros de realimentação.

Em geral, é possível alterar a resposta de um sistema em malha aberta através da inserção de um controlador adequado em cascata,  $G_c(s)$ , ao processo anterior,  $G(s)$ , como mostrado na Fig. 10. Em seguida, é necessário projetar a função de transferência de cascata,  $G_c(s)G(s)$ , de modo que a função de transferência resultante proporcione a resposta transiente desejada.

#### 4.4.6 Erro de Estado Estacionário

Um sistema de controle com retroação é importante porque fornece ao engenheiro a capacidade de ajustar a resposta transiente. Além disso, como já visto, a sensibilidade do sistema e o efeito de perturbações podem ser reduzidos significativamente. No entanto, como mais uma exigência, tem-se de analisar e comparar o erro de estado estacionário final para um sistema a malha aberta e para um a malha fechada. O erro de estado estacionário é o erro após a resposta transiente ter decaído, deixando somente a resposta contínua.

Figura 10 – Sistema Controlador em Cascata (sem realimentação).



Fonte: Adaptado de (DORF; BISHOP, 2010, p. 248)

O erro do sistema a malha aberta mostrado na Fig. 8 é

$$E_0(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s))R(s) \quad (4.48)$$

sendo  $T_d(s) = 0$ . Já para o sistema a malha fechada da Fig. 9, sendo  $T_d(s) = N(s) = 0$  e considerando  $H(s) = 1$ , o erro de rastreamento (conf. Eq. 4.38) é dado por

$$E_c(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) \quad (4.49)$$

Para calcular o erro de estado estacionário, usa-se o teorema do valor final, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (4.50)$$

Portanto, usando uma entrada degrau unitário como uma entrada comparável, obtém-se para o sistema em malha aberta

$$e_0(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - G(s)) \left( \frac{1}{s} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} (1 - G(s)) = 1 - G(0) \quad (4.51)$$

Para o sistema a malha fechada obtém-se

$$e_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \left( \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{1 + G_c(0)G(0)} \quad (4.52)$$

O valor de  $G(s)$ , quando  $s = 0$  é frequentemente chamado de **ganho DC** e é normalmente maior do que um. Portanto, o sistema em malha aberta geralmente têm um erro de estado estacionário de magnitude significativa. Em contraste, o sistema em malha fechada com um razoável grande ganho de malha DC,  $L(0) = G_c(0)G(0)$ , terá um pequeno erro de estado estacionário. Isso porque o sistema a malha fechada continuamente monitora o erro de estado estacionário e provê um sinal de atuação que reduz o erro de estado estacionário.

#### 4.4.7 Custo da Realimentação

A adição de realimentação a um sistema de controle resulta em vantagens descritas nas subseções anteriores. Naturalmente, no entanto, essas vantagens têm um custo de atendimento.

O primeiro custo da realimentação é um aumento do número de componentes e da complexidade do sistema. Para adicionar a realimentação é necessário considerar vários componentes de realimentação; o componente de medição (sensor) é o componente chave. O sensor é muitas vezes o componente mais caro em um sistema de controle. Além disso, o sensor apresenta ruído e imprecisões no sistema.

O segundo custo de realimentação é a perda do ganho. Por exemplo, num sistema em malha singular, o ganho em malha aberta é  $G_c(s)G(s)$  e é reduzida para  $(G_c(s)G(s))/(1 + G_c(s)G(s))$  em um sistema de realimentação negativa unitário. O ganho de malha fechada é menor por um fator de  $1/(1 + G_c(s)G(s))$ , que é exactamente o fator que reduz a sensibilidade do sistema a variações de parâmetros e perturbações. Normalmente, tem-se ganho em malha aberta extra, e se está mais do que dispostos a trocá-lo por um maior controle da resposta do sistema.

Deve-se notar que é o ganho da transmissão entrada e saída que é reduzido. O sistema de controle faz reter o ganho de potência substancial de um amplificador de potência e do atuador, o que é totalmente utilizado no sistema de malha fechada.

O custo final de realimentação é a introdução da possibilidade de **instabilidade**. Considerando que o sistema em malha aberta é estável, o sistema de malha fechada pode não ser sempre estável.

A adição de realimentação a sistemas dinâmicos faz com que mais desafios para o projetista. No entanto, na maioria dos casos, as vantagens superam as desvantagens, e um sistema de realimentação é desejável. Portanto, é necessário considerar a complexidade adicional e o problema da estabilidade no projeto de um sistema de controle.

#### 4.5 Método de Resposta em Frequência

A resposta de frequência de um sistema é definida como a resposta em estado estacionário do sistema a um sinal de entrada senoidal. A senóide é um sinal de entrada peculiar, e o sinal de saída resultante de um sistema linear, bem como os sinais ao longo deste, é senoidal em regime estacionário; que difere da forma de onda de entrada apenas em amplitude e do ângulo de fase (DORF; BISHOP, 2010).

Seja o sistema  $Y(s) = T(s)R(s)$ , com  $r(t) = A\sin(\omega t)$ . Tem-se

$$R(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e

$$T(s) = \frac{m(s)}{q(s)} = \frac{m(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)},$$

sendo  $p_i$  são considerados polos distintos. Então na forma de frações parciais, tem-se

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} + \dots + \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2}$$

Tomando a Transforma de Laplace inversa, resulta

$$y(t) = k_1 e^{-p_1 t} + \dots + k_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes dependentes do problema. Se o sistema for estável, então todos os  $p_i$  têm parte real negativa diferente de zero, e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\},$$

uma vez que os termos exponenciais  $k_i e^{-p_i t}$  decaem a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Calculando o limite para  $y(t)$ , obtém-se para  $t \rightarrow \infty$  (estado estacionário)

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\omega} |A\omega T(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi) \\ &= A |T(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \phi), \end{aligned} \tag{4.53}$$

sendo  $\phi = \angle T(j\omega)$

Assim, o sinal de saída em regime permanente depende somente da *magnitude* e da *fase* de  $T(j\omega)$  na frequência específica  $\omega$ . Convém observar que a resposta em regime permanente descrita na Eq. 4.53 só é verdadeira para sistemas  $T(s)$  estáveis.

Uma vantagem, segundo Dorf e Bishop (2010), do método de resposta de frequência é a facilidade de se dispor de sinais de teste senoidais para várias faixas de frequência e amplitude. Assim a determinação experimental da resposta de frequência de um sistema é facilmente realizada e constitui o método mais confiável e simples para a análise experimental de um sistema. Frequentemente, pode-se deduzir a função de transferência desconhecida de um sistema a partir da resposta de frequência determinada experimentalmente (DORF; BISHOP, 2010). Além disso, o projeto de um sistema no domínio de frequência fornece ao projetista o controle da banda passante do sistema e de algumas medidas da resposta do sistema à ruídos e perturbações indesejadas.

Ainda para Dorf e Bishop, uma segunda vantagem deste método é que a função de transferência que descreve o comportamento senoidal de um sistema em regime estacionário pode ser obtida substituindo-se  $s$  por  $j\omega$  na função de transferência do sistema  $T(s)$ . A função de transferência que representa o comportamento de um sistema em regime senoidal permanente é então uma função da variável complexa  $j\omega$  e ela própria é uma função complexa  $T(j\omega)$  que

possui uma magnitude e um ângulo de fase. A magnitude e o ângulo de fase de  $T(j\omega)$  são facilmente representados por gráficos que propiciam uma visão global importantíssima para análise e projeto de sistemas de controle.

A desvantagem básica do método de resposta de frequência para análise e projeto é o elo indireto entre frequência e o domínio do tempo. Correlações diretas entre a resposta de frequência e as correspondentes características das respostas transitórias são de certa forma tênues e, na prática, a característica da resposta de frequência é ajustada usando vários critérios de projeto que normalmente resultarão numa resposta transitória satisfatória (DORF; BISHOP, 2010).

Há diversos métodos de apresentação da resposta de frequência de uma função  $GH(j\omega)$ . O método utilizado nesse trabalho considera o Diagrama de Bode, que será explicado na Subseção 4.5.1.

#### 4.5.1 Diagrama de Bode

O diagrama de Bode é uma ferramenta gráfica que permite a análise da resposta em frequência de sistemas de controle lineares. O diagrama de Bode é uma representação do módulo e do ângulo de fase de uma função complexa da frequência  $\omega$ .

A função de transferência no domínio da frequência é

$$G(j\omega) = |G(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (4.54)$$

e pode ser representada por dois gráficos separados: *módulo (magnitude) versus frequência* e *ângulo de fase (em graus) versus frequência*. Assim um diagrama de Bode consiste em dois gráficos: um é um gráfico do logaritmo do módulo de uma função de transferência senoidal; o outro é um gráfico do ângulo de fase; ambos são construídos em função da frequência em escala logarítmica.

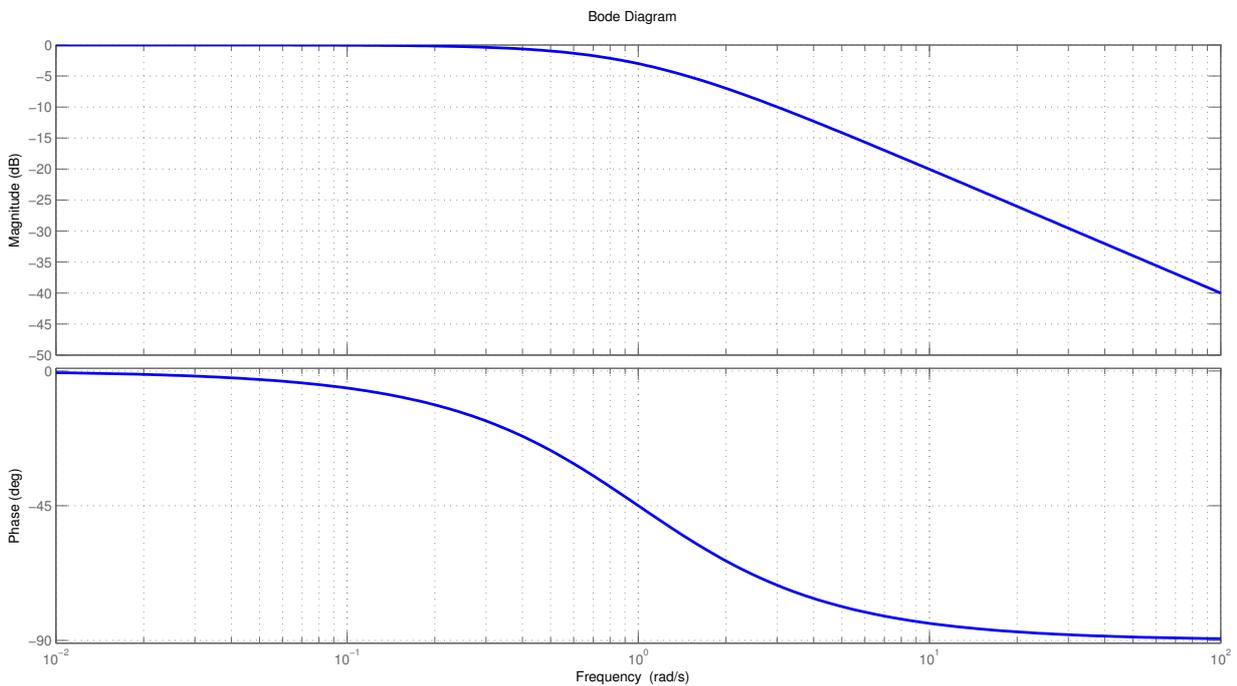
Usualmente, o módulo de  $G(j\omega)$  é representado como  $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ . A unidade usada nesta representação do módulo é o decibel (dB). A Fig 11 apresenta um exemplo de diagramas de Bode para  $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$ , com  $\tau = 1$ .

A frequência  $\omega = \frac{1}{\tau}$  é chamada de **frequência de quebra** ou **frequência de corte**, e no exemplo da Fig. 11, a frequência de corte é  $\omega = 1$ .

A principal vantagem de usar gráfico logarítmico é que a multiplicação dos módulos é convertida em uma adição. Além disso, é possível utilizar um método simples para esboçar o diagrama de Bode, através de um método baseado em aproximações assintóticas.

A representação logarítmica é útil pelo fato de mostrar tanto as características de baixa frequência como aquelas de alta frequência, para a função de transferência considerada, em um único diagrama. A expansão da faixa de baixa frequência utilizando uma escala logarítmica é

Figura 11 – Diagramas de Bode para  $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$ , com  $\tau = 1$ .



Fonte: Autor

vantajosa, uma vez que as características de baixa frequência são tipicamente mais importantes em sistemas práticos.

Uma outra aplicação é a determinação experimental de uma função de transferência, que pode ser realizada de modo simples se os dados de resposta em frequência estiverem apresentados na forma de um diagrama de Bode.

Sabe-se que os quatro tipos de fatores diferentes são os que podem ocorrer em uma função de transferência são:

1. Ganho constante  $K_b$ ;
2. Pólos (ou zeros) na origem ( $j\omega$ );
3. Pólos (ou zeros) sobre o eixo real ( $j\omega\tau + 1$ );
4. Pólos (ou zeros) complexos conjugados  $[1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2]$ .

Pode-se determinar o gráfico de magnitude logarítmica e de ângulo de fase para estes quatro fatores e então utilizá-los para obter diagramas de Bode para qualquer forma geral de função de transferência. Tipicamente, as curvas para cada fator são obtidas e em seguida adicionadas graficamente para obter as curvas relativas à função de transferência completa. Além

disto, este procedimento pode ser simplificado usando aproximações assintóticas para estas curvas e obtendo as curvas reais somente em frequências específicas importantes.

**Ganho constante  $K_b$ .** O ganho logarítmico para a **constante  $K_b$**  é

$$20 \log K_b = \text{constante em dB}, \quad (4.55)$$

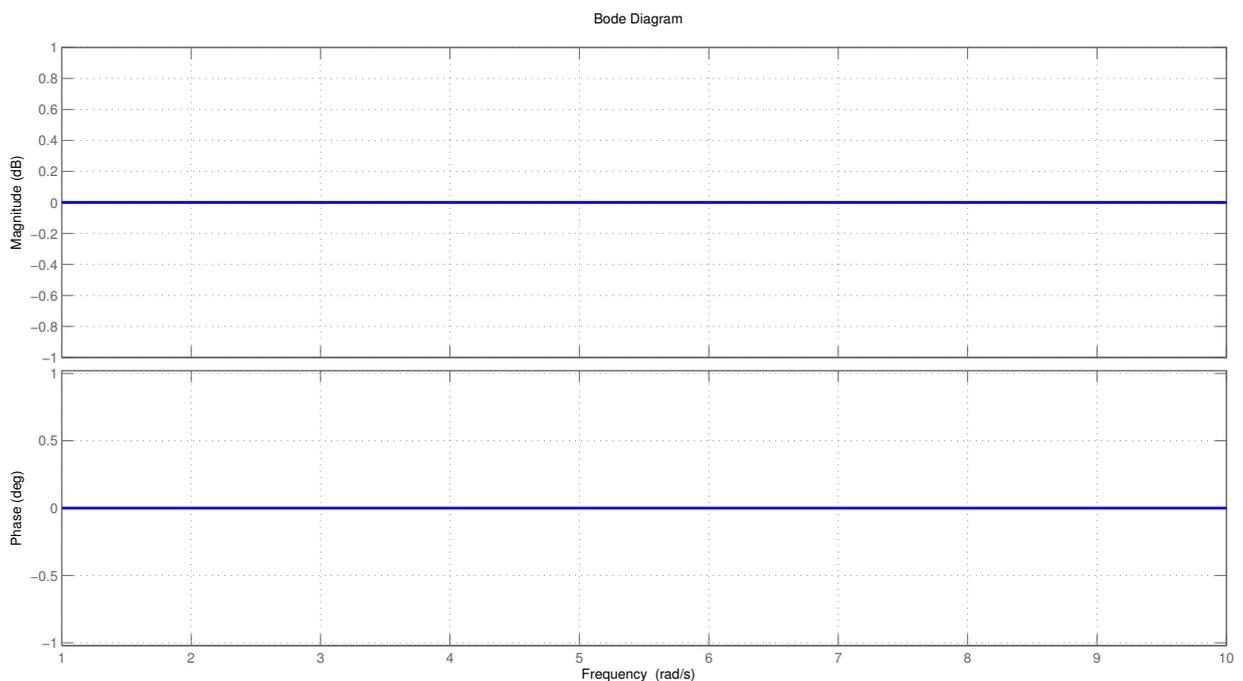
e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = 0. \quad (4.56)$$

A curva de ganho é simplesmente uma reta horizontal no diagrama de Bode de magnitude.

Se o ganho for um valor negativo,  $-K_b$ , o ganho logarítmico continua sendo  $20 \log K_b$ . O sinal negativo é levado em conta no ângulo de fase,  $-180^\circ$ . Os diagramas de Bode de magnitude e de ângulo de fase de  $K_b$  são apresentados na Fig. 12 para  $G(j\omega) = K_b = 1$ .

Figura 12 – Diagramas de Bode de  $G(j\omega) = K_b = 1$ .



Fonte: Autor

**Pólos (ou zeros) na origem ( $j\omega$ ).** Um polo na origem possui uma magnitude logarítmica

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ dB} \quad (4.57)$$

e um ângulo de fase

$$\phi(\omega) = -90^\circ. \quad (4.58)$$

A inclinação da curva de magnitude para um polo é  $-20\text{dB/década}$ . Do mesmo modo, para um polo múltiplo na origem, tem-se

$$20 \log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| = -20 N \log \omega \text{ dB} \quad (4.59)$$

e um ângulo de fase

$$\phi(\omega) = -90^\circ N. \quad (4.60)$$

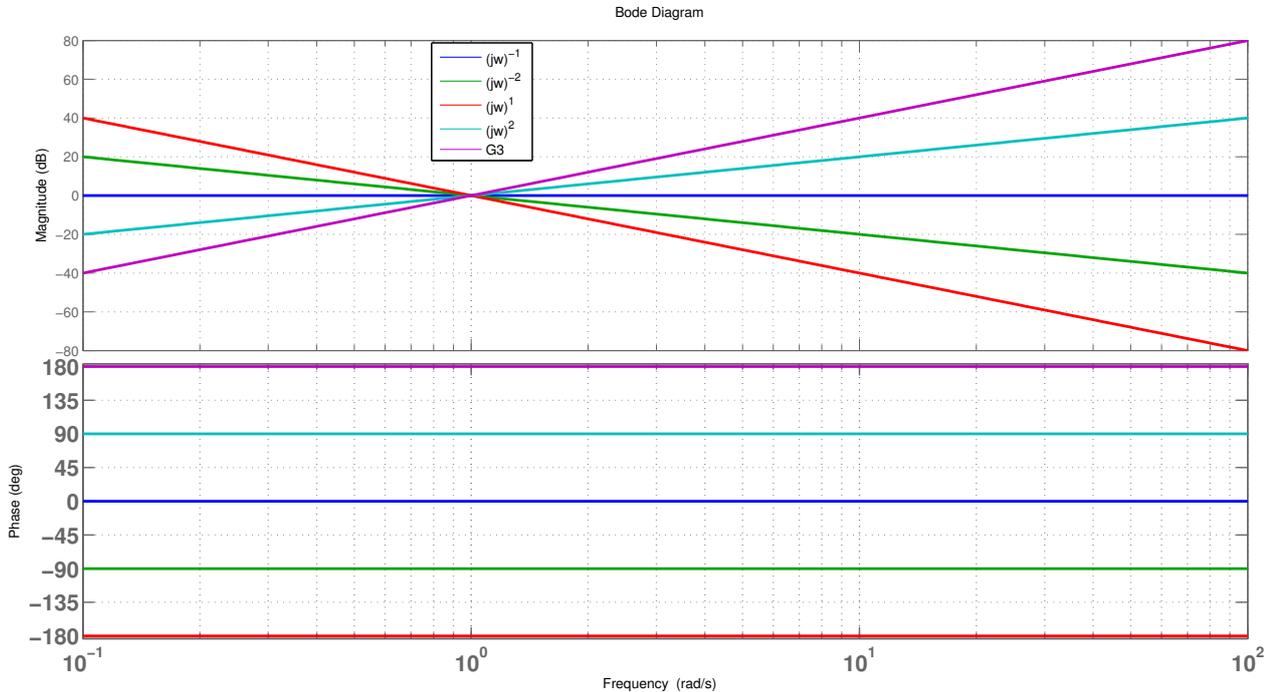
Para esse caso, a inclinação da curva de magnitude para um polo é  $-20N\text{dB/década}$ . Já para um **zero na origem**, tem-se a seguinte magnitude logarítmica

$$20 \log |j\omega| = +20 \log \omega \quad (4.61)$$

sendo a inclinação é de  $+20\text{dB/década}$ , e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = +90^\circ. \quad (4.62)$$

Figura 13 – Diagramas de Bode para  $(j\omega)^{\pm N}$ .



Fonte: Autor

Os diagramas de Bode de magnitude e de ângulo de fase de  $(j\omega)^{\pm N}$  são apresentados na Fig. 13 para  $N = 1$  e  $N = 2$ .

**Pólos (ou zeros) sobre o eixo real.** Para o fator polo  $(1 + j\omega\tau)^{-1}$  achou-se que para um polo sobre o eixo real o módulo é dado por

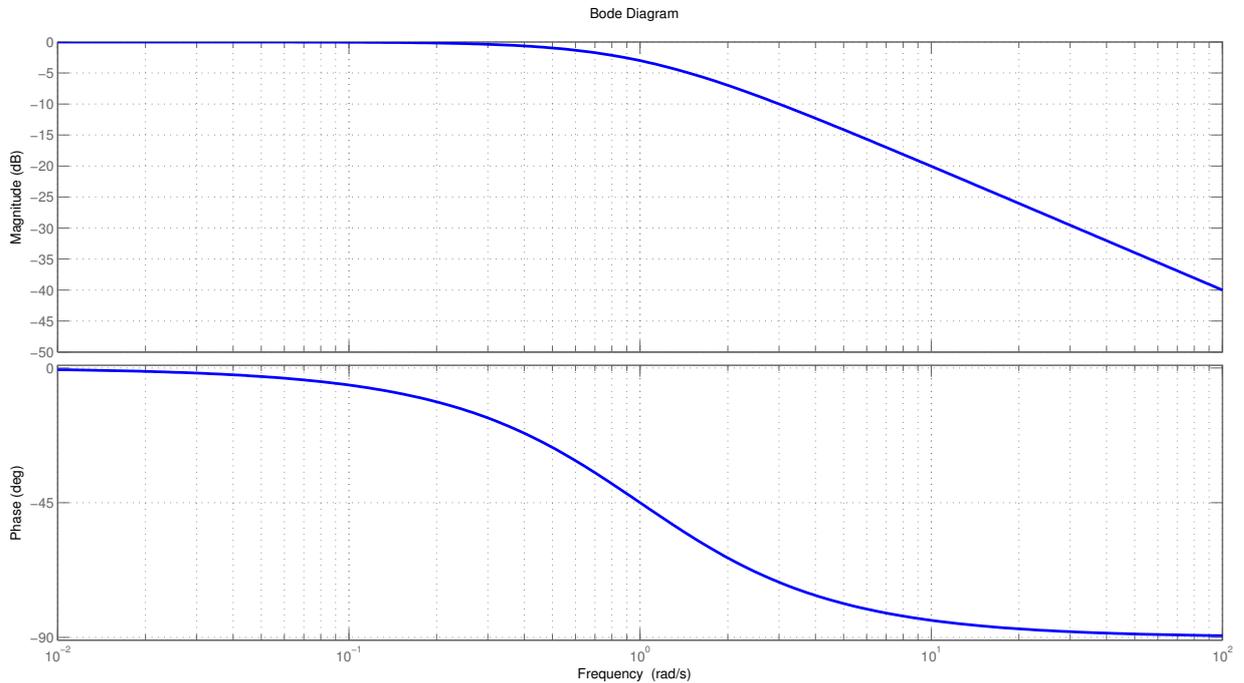
$$20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = -10 \log (1 + \omega^2\tau^2). \quad (4.63)$$

Para baixas frequências ( $\omega \ll 1/\tau$ ) pode-se aproximar o módulo por  $-20 \log 1 = 0\text{dB}$ . Para frequência elevadas ( $\omega \gg 1/\tau$ ) pode-se aproximar o valor do módulo por  $-20 \log \omega\tau$ , que tem sua inclinação de  $-20\text{dB/década}$ . Logo a representação da curva de módulo pode ser representada por duas retas assintóticas que se cruzam no ponto  $\omega = 1/\tau$  (conhecida como **frequência de corte** ou de **quebra**).

A frequência de corte é muito importante para o esboço de curvas de resposta em frequência logarítmicas. O ângulo de fase exato do fator  $(1 - j\omega\tau)^{-1}$  é dado por  $\phi = -tg^{-1}\omega\tau$ .

Os diagramas de Bode de um fator  $(1 + j\omega\tau)$  são obtidos do mesmo modo que os do polo. Contudo, a inclinação é positiva em  $+20\text{dB/década}$ , e o ângulo de fase é de  $\phi = +tg^{-1}\omega\tau$ . O diagrama de Bode para o fator de polo  $(1 + j\omega_n\tau)^{-1}$  é mostrado na Fig. 14.

Figura 14 – Diagramas de Bode para  $(1 + j\omega_n\tau)^{-1}$ , com  $\tau = 1$ .



Fonte: Autor

**Pólos (ou zeros) complexos conjugados.** O fator quadrático devido a um par de polos complexos conjugados pode ser escrito na forma normalizada como

$$[1 + j2\zeta u - u^2]^{-1}, \quad (4.64)$$

sendo  $u = \omega/\omega_n$ . Consequentemente, a magnitude logarítmica para um par de polos complexos conjugados é

$$-20 \log |G(\omega)| = -10 \log ((1 - u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2), \quad (4.65)$$

e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = -\text{tg}^{-1} \left( \frac{2\zeta u}{1 - u^2} \right). \quad (4.66)$$

Quando  $u \ll 1$ , a magnitude é

$$20 \log |G| = -10 \log 1 = 0 \text{dB},$$

e o ângulo de fase tende a  $0^\circ$ . Quando  $u \gg 1$ , a magnitude logarítmica tende a

$$20 \log |G| = -10 \log u^4 = -40 \log u,$$

que resulta em uma curva de inclinação de  $-40\text{db/década}$ . O ângulo de fase, quando  $u \gg 1$ , tende a  $-180^\circ$ . O valor máximo da resposta de frequência,  $M_{p\omega}$ , ocorre na **frequência de ressonância**  $\omega_r$ . A frequência de ressonância é representada pela relação

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta < 0,707, \quad (4.67)$$

e o valor máximo de magnitude  $|G(\omega)|$  é

$$M_{p\omega} = |G(\omega_r)| = \left( 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \right)^{-1}, \quad \zeta < 0,707, \quad (4.68)$$

O diagrama de Bode de um fator quadrático devido a um par de polos complexos conjugados é apresentado na Fig. 15.

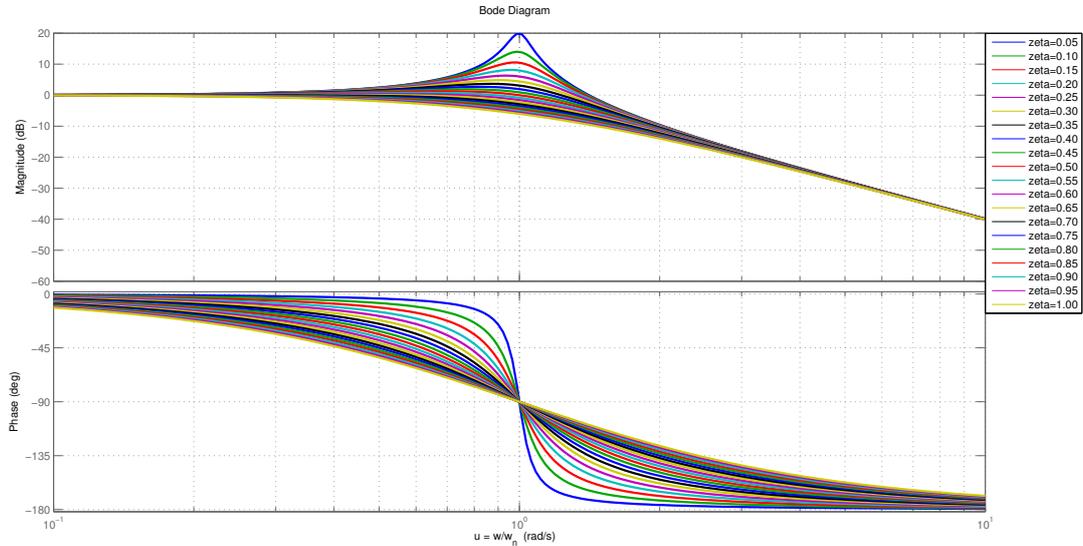
#### 4.5.2 Especificações em Malha Fechada

Uma curva típica da resposta em frequência em sistema de malha fechada é mostrado na Fig. 13. Estes gráficos mostram as seguintes grandezas características de um sistema de malha fechada:

**Pico de ressonância ( $M_r$ ):** é definido como máximo valor de  $M = |G(j\omega)/(1 + G(j\omega)H(j\omega))|$ . Em geral, o máximo valor de  $M_r$  dá uma indicação de estabilidade relativa. Normalmente, um valor grande de  $M_r$  corresponde a um grande sobresinal na resposta temporal a um degrau. Para a maioria dos projetos, o valor máximo de  $M_r$  está entre 1,1 e 1,5 (0,83 db a 3,5 db).

**Frequência de ressonância ( $\omega_r$ ):** ou **frequência de pico**, frequência na qual ocorre o pico de ressonância.

**Frequência de corte e largura de banda ( $\omega_b$ ):** é definida como a frequência na qual  $M$  cai para 70,7% do nível da frequência zero, ou seja, cai de 3db do ganho de frequência zero.

Figura 15 – Diagramas de Bode para  $G(j\omega) = [1 + j2\zeta/\omega j\omega - (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ .

Fonte: Autor

Para sistemas de 2ª ordem, pode-se relacionar  $M_r$ ,  $\omega_r$  e  $\omega_b$  com o grau de amortecimento  $\zeta$  e com a frequência natural do sistema não amortecido,  $\omega_n$ . Essas relações podem ser facilmente a partir das expressões da função harmônica de transferência dos sistemas de 2ª ordem:

$$T(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega_n)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega_n) + \omega_n^2}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\omega_n}^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

**Margem de Ganho ( $G_m$ ):** define-se como a variação requerida no ganho da malha aberta para levar o sistema à instabilidade. Sistemas com margens de ganho grande podem suportar grandes mudanças nos parâmetros do sistema antes de atingir a instabilidade em malha fechada.

**Margem de Fase ( $P_m$ ):** É o valor angular a ser acrescido ou decrescido à curva de fase da resposta em frequência de um sistema operando em malha aberta na frequência em que a curva de módulo da resposta em frequência deste mesmo sistema apresenta valor unitário (ou 0.0 dB).

Os resultados que se obtém são os seguintes:

1. Pico de ressonância:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

2. Frequência de ressonância:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

Sendo  $\omega_r$  um valor real, então,  $2\zeta^2 \leq 1$ , ou seja,  $\zeta \leq 0,707$ . Isto significa, simplesmente, que a existência do pico de ressonância ( $M_r$ ) e a respectiva frequência de ressonância ( $\omega_r$ ) só ocorrem em sistemas de 2ª ordem subamortecidos e com grau de amortecimento inferior a 0,707. Para os demais sistemas de 2ª ordem, o valor máximo de amplitude ocorre para  $\omega = 0$ , teria-se nesse caso,  $\omega_r = 0$  e  $M_r = 1$ .

3. Largura de banda:

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

É interessante notar que  $M_r$  é função apenas de  $\zeta$ , enquanto  $\omega_r$  e  $\omega_b$  são funções de  $\omega_n$  e  $\zeta$ .

## 4.6 Computação Evolutiva

A Computação Evolucionária (CE) compreende um conjunto de técnicas de busca e otimização inspiradas na evolução natural das espécies. Desta forma, cria-se uma população de indivíduos que vão reproduzir e competir pela sobrevivência. Os melhores sobrevivem e transferem suas características a novas gerações. As técnicas atualmente incluem: Programação Evolucionária, Estratégias Evolucionárias, Algoritmos Genéticos e Programação Genética (BANZHAF et al., 1998). Estes métodos estão sendo utilizados, cada vez mais, pela comunidade de inteligência artificial para obter modelos de inteligência computacional (BARRETO, 1997).

Algoritmos Genéticos (AG) e Programação Genética (PG) são as duas principais frentes de pesquisa em CE. Os AGs possuem uma larga aplicação em muitas áreas científicas, entre as quais podem ser citados problemas de otimização de soluções, aprendizado de máquina, desenvolvimento de estratégias e fórmulas matemáticas, análise de modelos econômicos, problemas de engenharia, diversas aplicações na Biologia como simulação de bactérias, sistemas imunológicos, ecossistemas, descoberta de formato e propriedades de moléculas orgânicas (MITCHELL, 1997).

Por suas propriedades e pela característica de sua aplicação, esse trabalho utilizará Computação Evolutiva, mais especificamente Algoritmo Genético para encontrar as matrizes  $Q$  de ponderação de estado e  $R$  de ponderação de controle, de maneira a minimizar o índice de desempenho ótimo  $J$  e fornecer um controlador  $K$  ótimo.

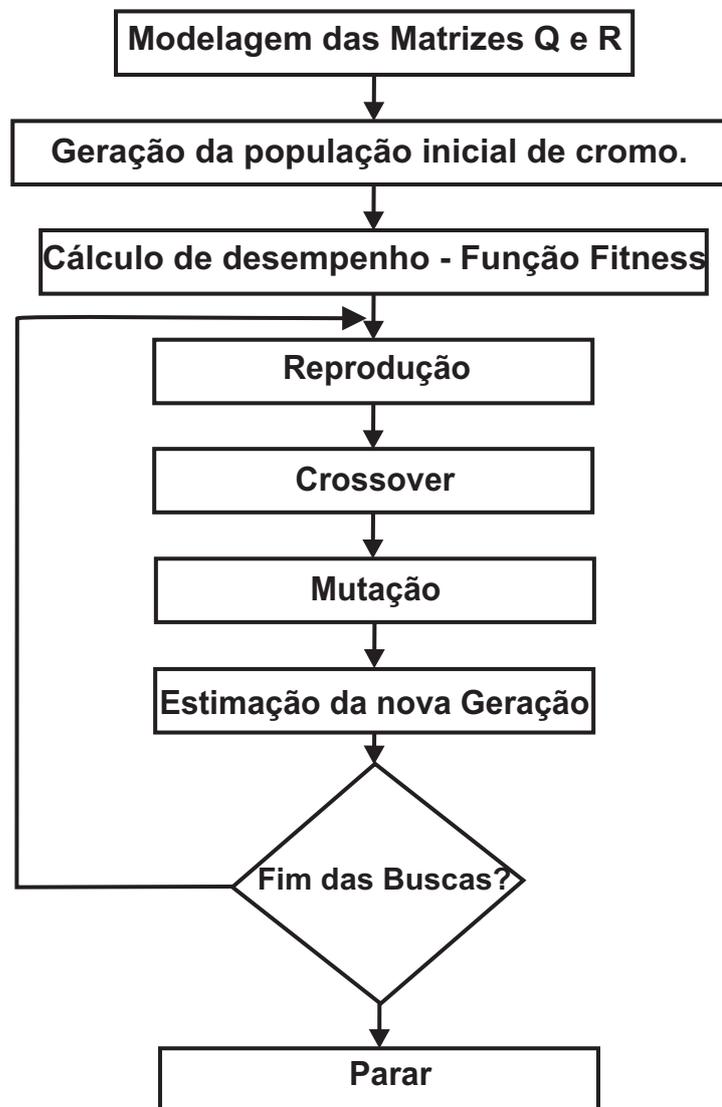
### 4.6.1 Algoritmo Genético

O Algoritmo Genético (AG) é uma técnica de Inteligência Artificial que visa resolver problemas de otimização, baseando-se na Biologia Evolutiva estabelecido por C. Darwin em 1859. Os AG foram introduzidos por Jonh Holland e, posteriormente, popularizados por David Goldberg. Estes algoritmos seguem o princípio da seleção natural e sobrevivência do mais adaptado. A seguir será mostrado o desenvolvimento de um AG, conforme Abreu (2008), criado

para obter as matrizes de ponderação de estado ( $Q$ ) e de controle ( $R$ ), de maneira a fornecer um controlador  $K$  ótimo. Para isso, será utilizado o método de alocação de auto-estrutura, ou seja, o AG deve encontrar um controlador  $K$  de forma a alocar os autovalores e, conseqüentemente, os autovetores de acordo com critérios especificados pelo projetista.

O desenvolvimento do AG segue as seguintes etapas: 1) Modelagem das matrizes  $Q$  e  $R$ . 2) Geração da população inicial de *chromossomos*. 3) Cálculos de desempenho - Função *Fitness*. 4) Reprodução. 5) *Crossover*. 6) *Mutação*. 7) Nova Geração e 8) Acúmulo dos melhores resultados. A Figura 16 apresenta um fluxograma para o AG implementado neste trabalho.

Figura 16 – Fluxograma do AG para Busca das Matrizes  $Q$  e  $R$ .



Fonte: Autor

## 4.6.2 Algoritmo Genético para Busca das Matrizes $Q$ e $R$

### 4.6.2.1 Modelos das Matrizes $Q$ e $R$

Inicialmente, considera-se a ordem das matrizes  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times m}$  e  $C_{n \times p}$  do sistema dinâmico. As dimensões das matrizes do modelo e as especificações do projeto LQR proporcionam o agrupamento das matrizes dos pesos  $Q_{n \times n}$  e  $R_{m \times m}$ . Estas matrizes devem obedecer as restrições do problema de otimização do LQR, as matrizes  $Q_{n \times n}$  e  $R_{m \times m}$  devem ser simétricas, positiva e semidefinida positiva, respectivamente,

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \cdots q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \cdots q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & q_{n4} \cdots q_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

e

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \cdots r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \cdots r_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & r_{m3} & r_{m4} \cdots r_{mm} \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

A característica simétrica dessas matrizes nos conduzem a um modelo com matrizes triangulares superior ou inferior. O modelo do cromossomo que representa as matrizes  $Q$  e  $R$  é apresentado a seguir,

$$QR_z = \bigcup_{j,i=1}^n q_{ij} \wedge \bigcup_{j,i=1}^m r_{ij} \quad (4.71)$$

$$z = 1, \dots, n_{indiv}$$

sendo  $n$  o número de linhas e colunas da matriz  $A$ ,  $m$  o número de colunas da matriz  $B$ . O elemento  $q_{ij}$  representa um gene da matriz  $Q$ ;  $r_{ij}$  representa um gene da matriz  $R$  e  $n_{indiv}$  é o número de cromossomos individuais de uma certa população.

A relação dos elementos  $q_{ij}$  e  $r_{ij}$ , da Eq. 4.69, unem as duas matrizes em uma única representação que é o conjunto dos *genes*, similar ao gene do cromossomo no paradigma da genética de Mendel. O modelo genético das matrizes  $Q$  e  $R$  é projetado para reduzir a carga computacional do algoritmo de modo a conter a informação necessária para a reconstrução das matrizes  $Q$  e  $R$  na sua forma algébrica, conforme Eqs. 4.69 e 4.70.

### 4.6.2.2 Modelo da População $QR$

Considerando que o cromossomo  $QR_z$ , Eq. 4.71, é um elemento composto por  $g$  genes, de modo que o cromossomo representa as matrizes  $Q_{n \times n}$  e  $R_{m \times m}$ , a quantidade de genes de um cromossomo depende da dimensão  $n$  da matriz dinâmica do sistema e de  $m$  que representa o

número de entradas do sistema. A quantidade de genes  $g$  de um solução cromossômica é dada por:

$$g = \frac{n(n+1) + m(m+1)}{2} \quad (4.72)$$

A população cromossômica é representada da seguinte forma

$$QR_{n_{indiv} \times g} = [QR_1; QR_2; QR_3; \dots; QR_{n_{indiv}}] \quad (4.73)$$

A notação  $n_{indiv} \times g$  indica a quantidade individual do cromossomo de uma população e a quantidade de genes em cada solução cromossômica ou indivíduo tem  $n_Q + n_R$  genes, sendo  $n_Q = \frac{n(n+1)}{2}$  e  $n_R = \frac{m(m+1)}{2}$ . Os indivíduos  $QR$  de uma população são modelados como

$$qr_z^w = \begin{cases} q_{i,j}, & w < n_Q + 1, & i, j = 1, \dots, n_Q \\ r_{i,j}, & w > n_Q, & i, j = 1, \dots, n_R \end{cases} \quad (4.74)$$

$$z = 1, \dots, n_{indiv}$$

sendo  $n_Q$  e  $n_R$  as quantidades dos elementos das matrizes simétricas  $Q$  e  $R$ , respectivamente, e  $n_{indiv}$  é o número de indivíduos.

#### 4.6.2.3 Modelo de Avaliação dos Cromossomos

A avaliação Cromossômica é baseada em uma função *fitness*. Esta função é uma estrutura de otimização muito complexa que envolve a solução do  $LQR$ , isto é, Equação A.3, e cálculo da auto-estrutura de malha fechada. O desempenho de cada cromossomo do  $z$ -ésimo indivíduo da população  $QR_{n_{indiv} \times g}$  é avaliado e cada indivíduo  $QR_z$  é pontuado. O modelo da função *fitness* requer a solução do  $LQR$ , o espectro de malha fechada e seus autovetores,

$$K_z = LQR_z(A, B, Q_z, R_z) \quad (4.75)$$

$$A_z = (A - BK_z) \quad (4.76)$$

$$\lambda_z, V_z, W_z = A_z \quad (4.77)$$

$$S_z = \frac{|V_z|^2 |W_z|^2}{\langle V_z, W_z \rangle} \quad (4.78)$$

$$z = 1, \dots, n_{indiv}$$

sendo  $K_z$  o ganho produzido por um indivíduo  $z$ .  $A_z$  é a matriz de malha fechada para o ganho  $K_z$  e  $\lambda_z$ ,  $V_z$  e  $W_z$  são os autovalores e autovetores à direita e esquerda, respectivamente.  $S_z$  é a sensibilidade associada.

O cálculo dos parâmetros atuais da função *fitness* para habilitar a avaliação da população são os principais propósitos deste modelo. Os algoritmos associados a esses cálculos são apresentados em Abreu (2008).

#### 4.6.2.4 Modelos de Operações Genéticas

As operações genéticas são representadas por dois modelos. O primeiro modelo está direcionado para a seleção de indivíduos e o outro com as operações genéticas. O modelo de seleção aleatório desenvolve a seleção de indivíduos para reprodução. Os operadores genéticos são *recombinação* e *mutação*, descritos a seguir, sendo que eles estão interessados em saber como os genes serão manipulados no cruzamento (ABREU; FONSECA, 2010).

**Modelo de Seleção.** A operação de seleção, baseada nos valores da função de *fitness*, é um dos principais elementos de um AG. O modelo seguinte representa a seleção de indivíduos:

$$k_z = Fit_{pop} k_{rand} \quad (4.79)$$

$$QR_{select} = QR_j, \quad \max_j k_z < \sum_{j=1}^{n_{indiv}} Fit_j, \quad (4.80)$$

$$z = 1, \dots, n_{indiv}$$

sendo  $k_z$  a escolha aleatória para o  $z$ -ésimo indivíduo baseado no número pseudo-aleatório  $k_{rand}$  e  $Fit_{pop}$  é o desempenho populacional total.  $QR_{select}$  é o  $j$ -ésimo indivíduo selecionado.

Este modelo é responsável pela seleção aleatória dos indivíduos que serão cruzados. Os indivíduos que tem maior pontuação tem maior chance de sobreviver no ambiente. O ambiente é caracterizado pela restrição de auto-estrutura definida pelo projetista. A escolha aleatória é simulada pelo jogo da roleta. Segundo Abreu e Fonseca (2010), a montagem da roleta é relativamente simples:

- O desempenho de cada elemento  $QR_z$  é adicionado em uma forma cumulativa para se agrupar ao modelo.
- Se todos os indivíduos são classificados e mapeados ordenadamente no modelo da roleta, o processo de seleção está pronto para iniciar.
- Um número aleatório é gerado e seu valor é mapeado com um valor percentual. Este valor percentual corresponde a um intervalo no modelo da roleta que está associado com um indivíduo em uma dada população.

**Modelo de Reprodução.** A reprodução é o elemento de um AG que é responsável pela seleção probabilística dos indivíduos que irão continuar no processo de desenvolvimento. A escolha desses indivíduos baseia-se na função *fitness*, ou seja, o indivíduo com maior pontuação terá maior chance de sobreviver.

Utilizou-se a roleta como objeto de seleção. A montagem da roleta é simples. Soma-se parcialmente as *fitness* de cada elemento  $QR_K$  formando intervalos, como mostra a Eq. 4.79.

$$Fitness(i) = \sum_{j=1}^{crom} Fitness(j) \quad i = 1, \dots, crom \quad (4.81)$$

Em seguida, gera-se um número aleatório entre “0” e o somatório das *fitness* individuais, se o número gerado estiver dentro do intervalo, o elemento escolhido de  $QR_{crom \times g}$  será o  $QR_k$ . A reprodução pode ser vista de forma mais detalhada na função **Reprod-G** em Abreu (2008).

**Modelo de Recombinação.** A recombinação ou *crossover* é o elemento do AG responsável pela combinação entre dois indivíduos. É nessa fase que os elementos  $QR_k$  da matriz  $QR_{crom \times g}$ , trocam informações genéticas entre si.

Considerando dois indivíduos  $I1$  e  $I2$  de uma dada população  $G$ , de forma tal que  $I1 \neq I2$ . Então, o model de recombinação adota foi o de cruzamento médio, expresso na Eq. 4.82.

$$QR_{G+1,I1} = \alpha(QR_{G,I1}) + (1 - \alpha)(QR_{G,I2}) \quad (4.82)$$

$$QR_{G+1,I2} = \alpha(QR_{G,I2}) + (1 - \alpha)(QR_{G,I1})$$

o índice  $G$  representa a  $G$ -ésima geração da população e o índice  $G + 1$  representa a próxima geração. O indivíduo  $QR_{G,I1}$  representa  $I1$ -ésimo indivíduo e  $QR_{G,I2}$  representa o  $I2$ -ésimo indivíduo da população  $G$ , respectivamente, os que fazem parte do cruzamento. O parâmetro  $\alpha$  é um número aleatório gerado entre 0 e 1.

**Modelo de Mutação.** A mutação é responsável por modificar os genes nos cromossomos para gerar um novo cromossomo. A principal característica desta operação é evitar uma convergência prematura e gerar um novo material genético. Este modelo considera a seleção de um indivíduo somente para desempenhar a operação de mutação:

$$q_{ij}^{novo} = q_{ij}^I b^{x_{local}}$$

$$i = 1, \dots, (n^2 + n)/2 \quad e \quad (4.83)$$

$$j = 1, \dots, (n^2 + n)/2$$

sendo  $b$  a base determinística do multiplicador exponencial,  $b > 1$ ,  $x_{local}$  é o expoente aleatório,  $0 < x_{local} < 1$ . Este modelo genético desempenha uma mutação decimal. Cada elemento  $QR_z$  da população  $QR_{crom \times g}$  tem probabilidade de  $P = 0.05$ , conforme (ABREU; FONSECA, 2010). Em outras palavras, 5% de chance de ser mutado. Se um certo elemento é escolhido, um novo gene é aleatoriamente gerado para substituir o gene de um cromossomo antigo selecionado. Depois, o algoritmo de mutação implementa seu modelo, Eq. 4.81.



## 5 PROJETO DO CONTROLADOR LQG

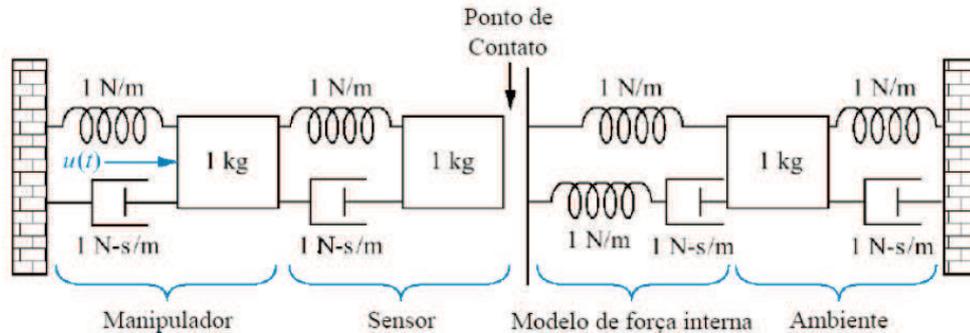
Esta seção refere-se ao projeto do controlador LQG para um manipulador robótico. Deste modo, a sequência deste trabalho se dá da seguinte forma: Modelagem do Manipulador Robótico, Controlador Inteligente *LQR*, Filtro de Kalman para estimação de estados e Projeto do controlador *LQG*.

### 5.1 Modelagem do Manipulador Robótico

Os manipuladores robóticos modernos que atuam diretamente sobre o ambiente-alvo devem ser controlados de modo que as forças de impacto bem como as forças de estado estacionário não danifiquem o alvo. Ao mesmo tempo, o manipulador deve fornecer força suficiente para executar a tarefa.

Admitindo o modelo ilustrado na Fig. 17, que consiste de manipulador, sensor, e ambiente.

Figura 17 – Manipulador Robótico e ambiente-alvo.

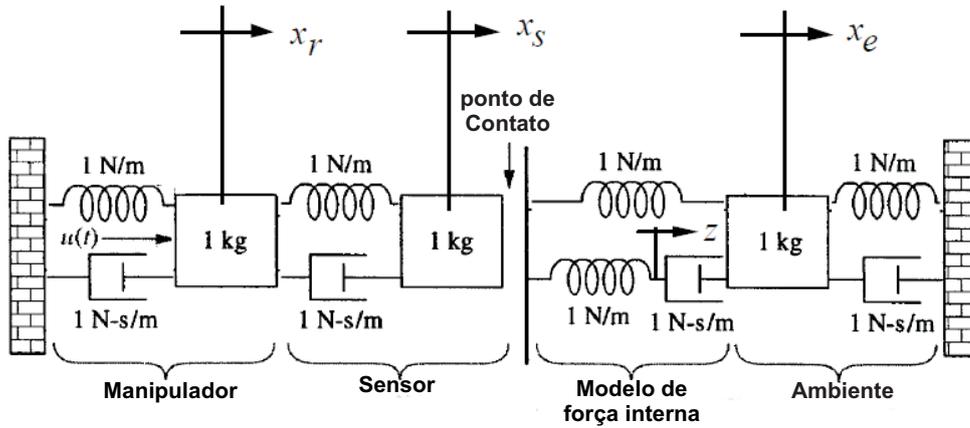


Fonte: Adaptado de (CHIU; LEE, 1997)

O manipulador deve posicionar o sensor sobre a superfície de contato de forma controlada para não causar danos a nenhum dos componentes, então, a saída do sistema é o deslocamento do sensor, e a entrada seria uma excitação  $u(t)$ . O sistema na Fig. 17 ilustra dois regimes, um sem contato com o meio ambiente e o outro com contato com o meio ambiente. Para cada regime a dinâmica do sistema é diferente. Desta forma será analisado o regime sem contato para desenvolver a metodologia deste trabalho. Para este caso, tem-se um sistema de quarta ordem com representação no espaço de estados.

Iniciando a etapa de modelagem, tem-se a Fig. 18, onde  $x_r$  é o deslocamento do manipulador robótico,  $x_s$  é o deslocamento do sensor, e  $x_e$  é o deslocamento do ambiente.

Figura 18 – Análise dos deslocamentos do Manipulador Robótico e ambiente-alvo.



Fonte: Adaptado de (NISE; SILVA, 2012, pg. 153)

Escrevendo as equações diferenciais para o manipulador sem contato com o ambiente alvo, tem-se:

$$\begin{cases} \ddot{x}_r + 2\dot{x}_r + 2x_r - x_s - \dot{x}_s = u(t) \\ -\dot{x}_r - x_r + \ddot{x}_s + \dot{x}_s + x_s = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Assume-se as variáveis de estado como:

$$\begin{cases} x_1 = x_r \\ x_2 = \dot{x}_r \\ x_3 = x_s \\ x_4 = \dot{x}_s \end{cases} \quad (5.2)$$

Escrevendo as equações de estado, usando as equações diferenciais e a definição das variáveis de estado, obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x}_r = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_r = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + u(t) \\ \dot{x}_3 = \dot{x}_s = x_4 \\ \dot{x}_4 = \ddot{x}_s = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \quad (5.3)$$

Supondo que a saída seja  $x_s$  (deslocamento do sensor), a equação de saída fica:

$$y = x_s = x_3 \quad (5.4)$$

Ordenando na forma vetor-matricial, a equação de estado,  $\dot{x} = Ax + Bu$ , torna-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.5)$$

A equação de saída,  $y = Cx + Du$ , é a seguinte:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (5.6)$$

Assim, assumem-se as variáveis de estado conforme 5.2 e o modelo matemático em representação no espaço de estados, conforme Eqs. 5.5 e 5.6. Assume-se também que o manipulador robótico em questão é controlável e observável. Desta forma, discute-se a questão de como escolher o compensador  $K_c(s)$  de modo que o sistema de malha fechada seja estável e ainda tenha graus de liberdade em número suficiente para dar forma à malha, de modo que satisfaça as condições de desempenho e estabilidade.

Para isso, admite-se que todas as variáveis de estados sejam mensuráveis e que estejam disponíveis para realimentação e uma vez que, o manipulador robótico seja controlável e observável, todos os autovalores de malha fechada do sistema poderão ser alocados em qualquer posição desejada, por meio de uma realimentação de estados, desde que seja empregada uma matriz de ganho apropriada. Então, para a busca deste ganho ótimo, nesta pesquisa, utiliza-se o projeto do Regulador Linear Quadrático - *LQR* (sigla inglesa para *Linear Quadratic Regulator*).

## 5.2 Controlador Inteligente LQR

O problema do *LQR* é formulado por uma estrutura de otimização não-linear, cujo foco consiste em minimizar um índice de desempenho quadrático. Este problema tem como gargalo, a seleção das matrizes de ponderação de estado e de controle,  $Q$  e  $R$ , respectivamente, e resolver a *equação algébrica de Riccati (EAR)*, de modo que, possa alocar autovalores e autovetores especificados e que garanta a estabilidade e desempenho robustos do sistema de controle. É apresentada a evolução de uma abordagem de inteligência computacional para resolver o problema do *LQR*. Esta evolução é resultado de pesquisa utilizando um *AG* na seleção das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ , conforme Abreu (2008).

### 5.2.1 Modelagem Inteligente via Algoritmo Genético

Um dos grandes desafios na teoria de controle, utilizando o projeto do regulador linear quadrático, é a seleção das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ . Nesta pesquisa, utiliza-se uma abordagem de inteligência computacional para realizar a busca das mesmas, o *AG*. Os parâmetros matriciais do projeto *LQR* são utilizados para realizar a sintonia do ganho ótimo do compensador. Apresenta-se o modelo matemático não-linear para exibir estas matrizes, conforme Eq. 5.7.

$$\begin{aligned} & \text{Min}_{Q,R} \sum_{i=1}^n p_i s_i(Q, R) \\ & \text{s.a} \quad s_i(Q, R) \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \\ & \quad \lambda_{i,esq.} \leq \lambda_{i,aloc.} \quad Q, R \leq \lambda_{i,dir.}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.7)$$

sendo  $p_i$  os pesos das  $i$ -ésimas sensibilidades,  $S_i$ , normalizadas com relação à  $i$ -ésima especificação de projeto,  $\varepsilon_i$ , ou seja, ( $p_i = S_i/\varepsilon_i$ ). Este modelo aborda desde a representação genética das matrizes de ponderação, passando pelas operações cromossômicas, até chegar às avaliações de *fitness* (desempenho).

Percebe-se que a mesma constitui uma estrutura de otimização muito complexa, uma vez que, envolve a solução do projeto *LQR* e o cálculo dos autovalores de malha fechada. O desempenho de cada cromossomo do indivíduo que compõe a população  $QR_{n_{ind}.xg}$  é avaliado, e cada indivíduo  $QR_z$  é pontuado.  $K_z$  é o ganho gerado por um indivíduo,  $A_z$  é a matriz de malha fechada para o ganho  $K_z$ , enquanto que  $\lambda_z$  são os autovalores e  $V_z, W_z$  constituem os autovetores à direita e os autovetores à esquerda, respectivamente. Já  $S_z$  são as sensibilidades associadas com cada autovalor. As operações genéticas são representadas pelos modelos de seleção, *crossover* e mutação, que podem ser consultados em Abreu (2008).

Realizada a computação da auto-estrutura de malha fechada, a estratégia de pontuação de cada indivíduo é realizada da seguinte forma: para cada autovalor, dentro da margem especificada na estrutura de otimização não linear pelo projetista, atribui-se valor um (1) ao indivíduo *QR*, e um centésimo (0.01) para cada autovetor associado que possua sensibilidade normalizada,  $S_z < 1$ . O indivíduo que possuir maior pontuação será considerado o ótimo, e para o critério de empate, será considerado melhor, aquele que possuir menor soma das sensibilidades normalizadas.

### 5.2.1.1 Desempenho da População Inicial

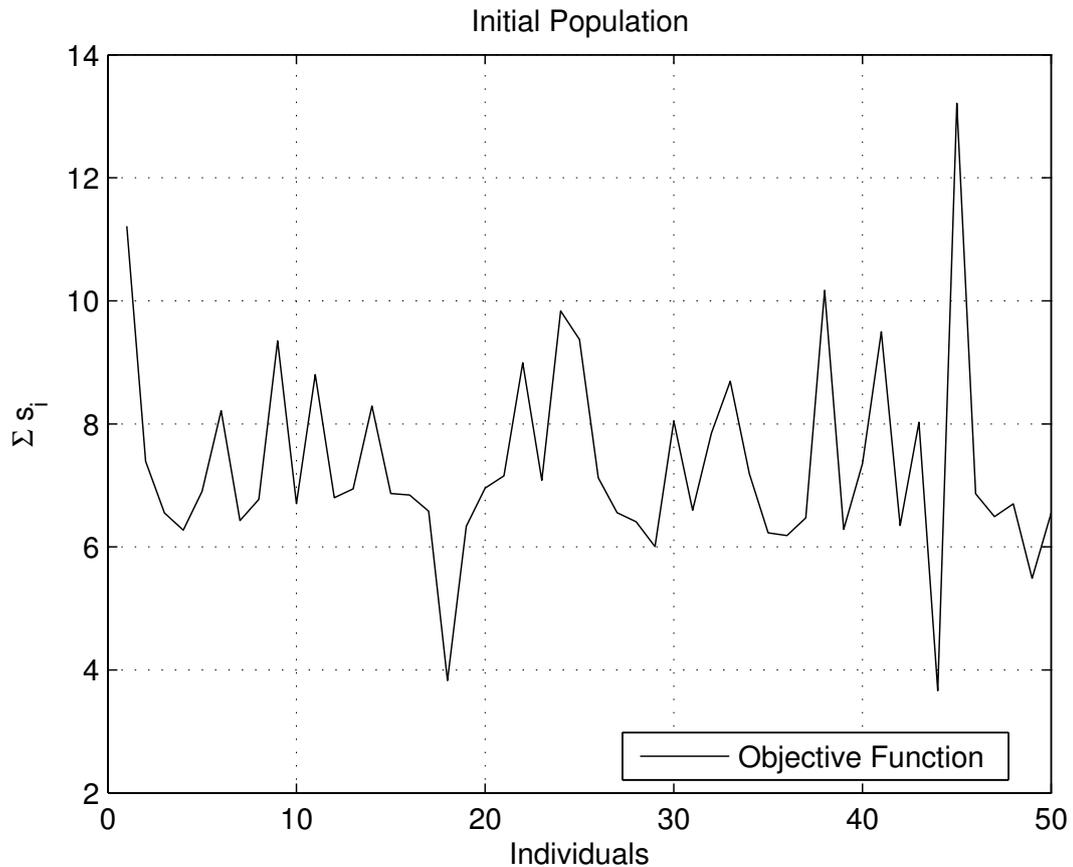
O perfil da população inicial pode ser definido pelos valores da função objetivo apresentados na Fig. 19. Percebe-se claramente uma diversidade genética, sendo a mesma baixa, entre o quinquagésimo e o vigésimo indivíduo e também percebe-se entre o quadragésimo segundo e o quadragésimo quinto indivíduo, aproximadamente. Outros indivíduos mostram melhor diversidade. Essas conclusões a respeito do processo de inicialização da população inicial, implicam em uma população satisfatória no processo de busca do indivíduo *QR* ótimo (ABREU et al., 2014).

### 5.2.1.2 Desempenho da População final

Os valores da função objetivo para a população final, em comparação com a média da função objetivo para cada indivíduo da população, durante o processo de busca, são apresentados na Figura 20. Os valores médios de cada indivíduo da população final apresentaram melhorias a partir do *sexagésimo* indivíduo; a partir deste indivíduo, não percebe-se muitas melhorias.

Utilizando o *AG*, estabeleceu-se como critério de parada a chegada na geração número 60, verificou-se que a partir de tal geração os valores das matrizes *Q* e *R* gerados eram muito próximos. Notou-se que esta solução gerou um indivíduo com característica bem próximas das restrições de sensibilidade e da função objetivo. Além disso, a condição de positividade das matrizes são mostradas em termos dos traços e autovalores. As matrizes de ponderação ótimas *Q*

Figura 19 – Sensibilidade total da população inicial.



Fonte: Autor

e  $R$  do melhor indivíduo factível, são dadas pela Eq. 5.8.

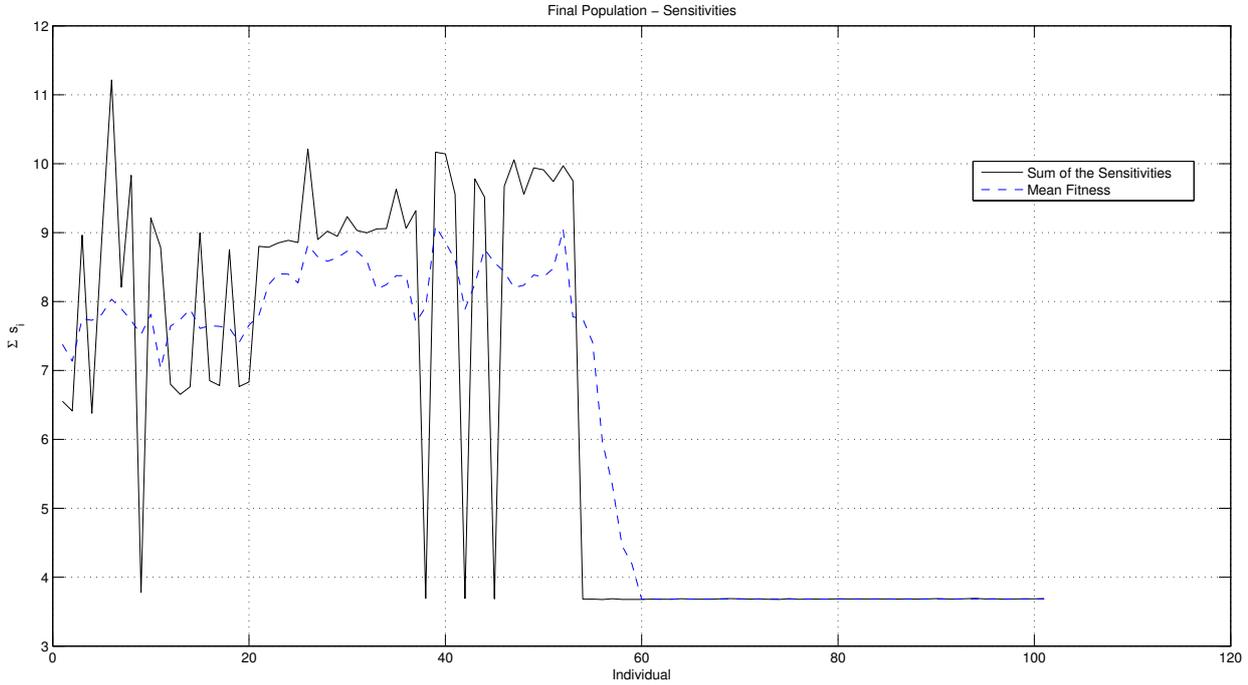
$$Q_{LQR} = \begin{bmatrix} 16.7449 & 2.0101 & 2.5171 & 2.6623 \\ 2.0101 & 45.0012 & 5.3850 & 5.5377 \\ 2.5171 & 5.3850 & 37.6232 & 4.0802 \\ 2.6623 & 5.5377 & 4.0802 & 23.8086 \end{bmatrix}, \quad R_{LQR} = \begin{bmatrix} 14.4476 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

O processo de busca do AG com a configuração de seus parâmetros, produziu soluções muito próximas uma das outras, ou seja, o conjunto solução matricial  $QR$  apresentada pelo AG, tem apenas pequenas discrepâncias. As sensibilidades da população final e a média da função de *fitness* de cada geração é apresentada na Fig. 21.

### 5.2.2 Projeto do Controlador LQR

Antes de mais nada, verificou-se que a planta ou manipulador robótico modelado é controlável, isto é, o posto da matriz  $n \times nr$  da Eq. 5.9 é igual a 4, onde  $n = 4$  é a dimensão da

Figura 20 – Evolução do processo-função objetivo média e melhor função objetivo das gerações.



Fonte: Autor

planta e  $r = 1$  é a dimensão da entrada do sistema.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

A partir daí, adotou-se as etapas de projeto *LQR* descritas na Subseção 4.3.2, como se segue:

1. Determinar a matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaz a Eq. 5.10, equação matricial reduzida de Riccati.

$$\mathbf{A}^*\mathbf{P} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

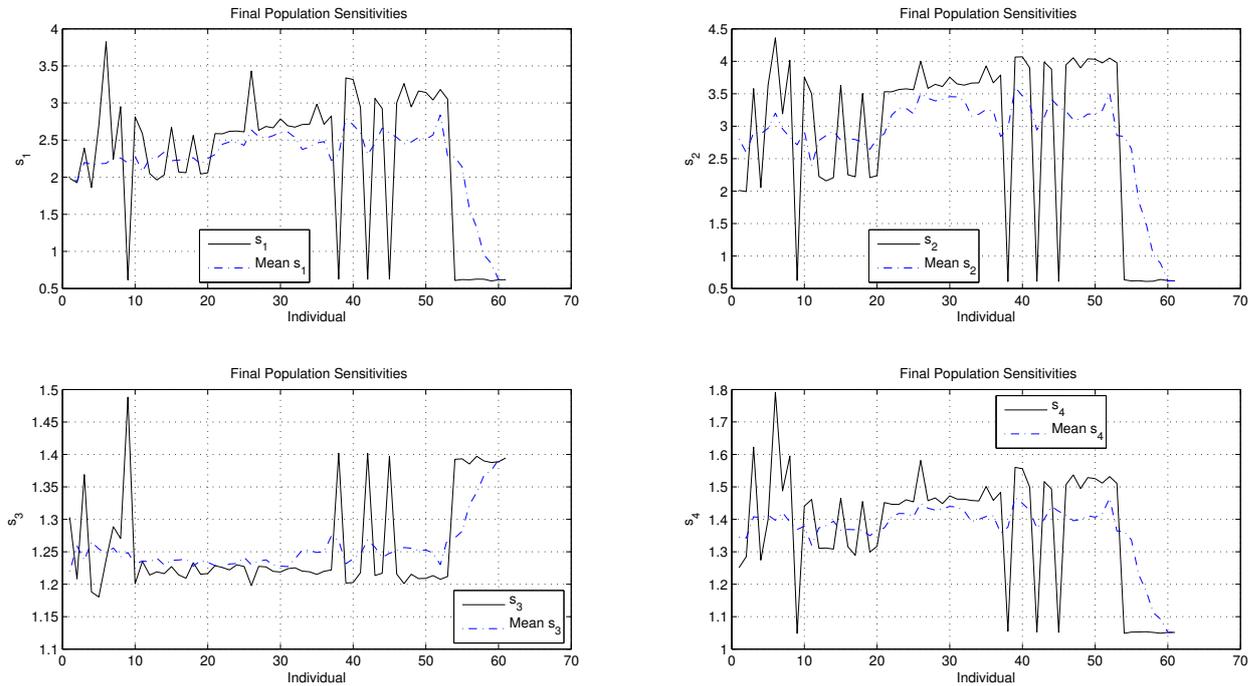
Assim, utilizou-se o *ToolBox de Controle Robusto* do software *Matlab R2013a* e para a solução do valor  $\mathbf{P}$ , o qual é dado pela Eq. 5.11.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 31.8340 & 7.4929 & 5.8765 & 8.5564 \\ 7.4929 & 18.9237 & 10.7237 & 20.2471 \\ 5.8765 & 10.7237 & 49.0525 & 25.5555 \\ 8.5564 & 20.2471 & 25.5555 & 43.5196 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

2. Substituir esta matriz  $\mathbf{P}$  dentro da Eq. 5.15. A matriz  $\mathbf{K}_e$  (matriz de ganho ótimo) resultante é a matriz ótima.

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}^*)^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^*\mathbf{P} \quad (5.12)$$

Figura 21 – Fitness normalizada de cada geração e de cada indivíduo.



Fonte: Autor

Dessa forma a matriz de ganho ótimo,  $K_e$ , é igual a Eq. 5.13.

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 0.5186 & 1.3098 & 0.7422 & 1.4014 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

O projeto  $LQR$  é caracterizado pela busca do vetor de entrada  $u$  que minimiza a função de desempenho  $J$ . Esta formulação é chamada de problema de controle ótimo. No caso do  $LQR$ , o índice de desempenho é um mapeamento dos espaços dos vetores de estados e de controle ponderados pelas matrizes  $Q$  e  $R$ , respectivamente. Aponta-se como vantagem do  $LQR$  a margem de estabilidade garantida, como será visto na seção 6.4. Contudo, este tipo de projeto apresenta uma desvantagem que é a necessidade de disponibilidade dos estados para medições na realimentação do sinal de controle, e que não haja nem ruídos nem perturbações no sistema.

### 5.3 Filtro de Kalman para estimação de estados

Na prática certas variáveis de estado não podem ser medidas ou são muito ruidosas. Por meio do controle  $LQG$ , mais especificamente através do Filtro de Kalman, é possível estimar estes estados. Tal fato faz o projeto  $LQG$  bem mais vantajoso que o  $LQR$ .

Nesta seção formula-se o Filtro de Kalman,  $FK$ , de forma a alocar os autovalores e autovetores no problema de estimação de estado estocástico. Este problema pode ser formulado,

como um problema de otimização, permitindo a determinação de um estimador estocástico  $K_f(\Xi, \Theta)$ . Para tanto, adotou-se os valores de ruído na Planta,  $\Xi = 7.10^{-4}dB$ , e do ruído na medição de saída,  $\Theta = 1.10^{-8}dB$ , conforme valores adotados em Xue, Chen e Atherton (2007, pg. 237).

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Inicialmente, verificou-se que a planta do manipulador robótico é *observável*, isto é, o posto da matriz  $nm \times n$  da Eq. 5.14 é igual a 4, onde  $n = 4$  é a dimensão da planta e  $m = 1$  é a dimensão da resposta do sistema. Como visto, a matriz de ganho do Filtro de Kalman ( $K_f$ ) é dada por

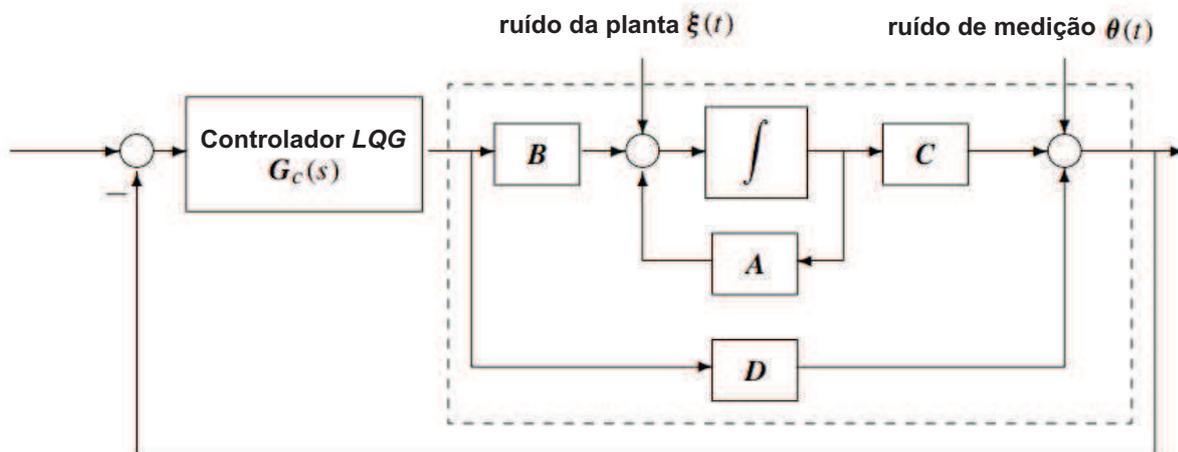
$$K_f = P_f C^T \Theta^{-1},$$

onde  $\Theta = 1.10^{-8}dB$  é a matriz de Covariância do sinal do ruído de medição de saída,  $C$  é a matriz resposta do manipulador robótico, e  $P_f$  é a solução da Equação Algébrica de Riccati resolvida no projeto *LQR*, conforme Eq. 5.11.

A partir destes valores pôde-se calcular  $K_f$ , cujo valor é dado pela Eq. 5.15.

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 59.77 \\ 135.1636 \\ 10.8430 \\ 58.7852 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Figura 22 – Estrutura de Controle LQG com Observador de Estados.



## 5.4 Projeto do Controlador LQG

Seja então a planta do manipulador robótico:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \xi(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \theta(t) \end{cases} \quad (5.16)$$

onde para o problema proposto, tem-se que o ruído na Planta é  $\xi = 7.10^{-4}$  e o ruído na medição de saída é  $\theta = 1.10^{-8}$ .

Usando o *princípio da separação*, a partir das Subseções anteriores, pôde-se encontrar a matriz de ganho com retroação de estados,  $\mathbf{K}_e$  (conf. Eq. 5.13), e a matriz de ganho do Filtro de Kalman,  $\mathbf{K}_f$  (conf. Eq. 5.15). Então, a equação dinâmica do Filtro de Kalman é escrita como

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}_f (\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{D}\mathbf{u}). \quad (5.17)$$

e o controlador LQG com Observador de Estados (Fig. 22) pode ser compactamente formulado como na Eq. 5.18.

$$G_c = \frac{298.5s^3 + 765.3s^2 + 939s + 233.7}{s^4 + 15.15s^3 + 112.7s^2 + 463s + 364.4} \quad (5.18)$$



## 6 SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a análise da resposta do sistema com o projeto do Controlador *LQG*, utilizou-se a metodologia de análise no domínio do tempo e análise no domínio da frequência. Para cada uma das metodologias utilizou-se o software **Matlab R2013a** e seu *ToolBox de Controle Robusto*. Assim, esta seção seguiu com a análise das barreiras de estabilidade e desempenho, estimação com Filtro de Kalman, análise do controlador *LQG* no domínio do tempo e no domínio da frequência, respectivamente.

### 6.1 Barreiras de desempenho e estabilidade

Tendo em vista que esta pesquisa se trata de um projeto de controlador robusto, é importante verificar os compromissos de desempenho e estabilidade robusta. Para esta análise, considerou-se como dinâmica desconhecida o efeito do ruído provocado por dois polos, em que

$$G_d = \frac{625}{s^2 + 50s + 625}$$

é a função de transferência do ruído de medição (CRUZ, 2005). Então, a proposta é, ainda segundo Cruz (2005), analisar o projeto do controlador LQG de maneira que o sistema real (Planta nominal,  $G_n$ , mais efeito do ruído,  $G_d$ ) em malha fechada, satisfaça as seguintes especificações:

- acompanhamento do sinal de referência e rejeição de perturbações com erro não superior a 10% para  $\omega \leq 0,5 \text{ rad/s}$ .
- sensibilidade a variações na planta não superior a 15% para  $\omega \leq 0,7 \text{ rad/s}$ .

Para se ter acompanhamento do sinal de referência e rejeição de perturbações com erro não superior a 10% para  $\omega \leq 0,5 \text{ rad/s}$ , ou seja,  $\delta_r$  e  $\delta_d \leq 0,1$ , a barreira de desempenho para estas condições é dada por:

$$20 * \log_{10}(0,1) \quad \text{para} \quad \omega \leq 0,5 \text{ rad/s}$$

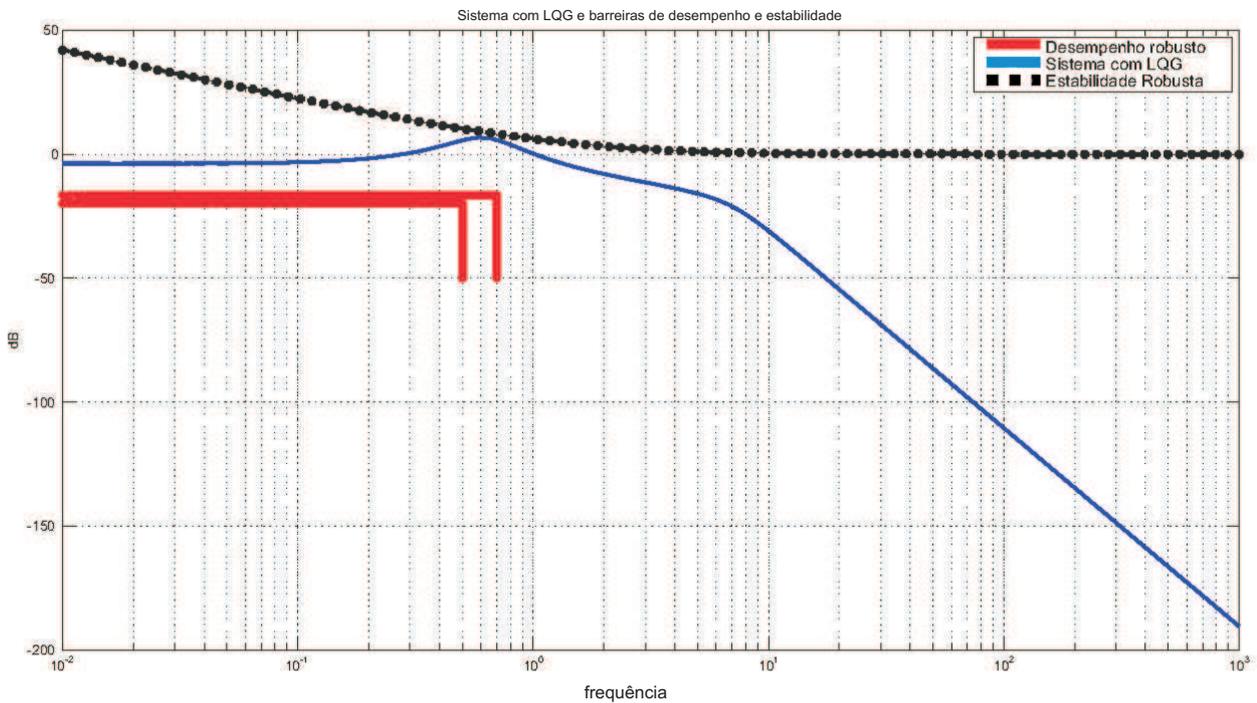
Para se ter sensibilidade a variações da planta com erro não superior a 15% para  $\omega \leq 0,7 \text{ rad/s}$ , ou seja,  $\delta_s \leq 0,15$ , a barreira de desempenho para estas condições é dada por:

$$20 * \log_{10}(0,15) \quad \text{para} \quad \omega \leq 0,7 \text{ rad/s}$$

A barreira da estabilidade foi determinada encontrando-se o inverso do maior valor singular do ruído de medição, variando-se a constante  $\zeta$  de 0,1 a 1,0, para uma dada frequência. A variação em toda a frequência fornece a barreira da estabilidade.

A Figura 23 mostra o valor singular do sistema nominal aumentado juntamente com as barreiras de desempenho e de estabilidade. Por esta figura, nota-se que o sistema nominal aumentado está dentro dos limites considerados para este projeto. Portanto, o sistema atende aos compromissos de sistema que consideram os erros com relação ao rastreamento do sinal de entrada, rejeição a perturbação e sensibilidade a variação da planta. Além disso, é importante destacar que o sistema se mantém estável mesmo na presença do ruído,  $G_d$ .

Figura 23 – Sistema nominal aumentado (azul) e as barreiras de desempenho (vermelho) e de estabilidade (preto).



Fonte: Autor

## 6.2 Estimação com Filtro de Kalman

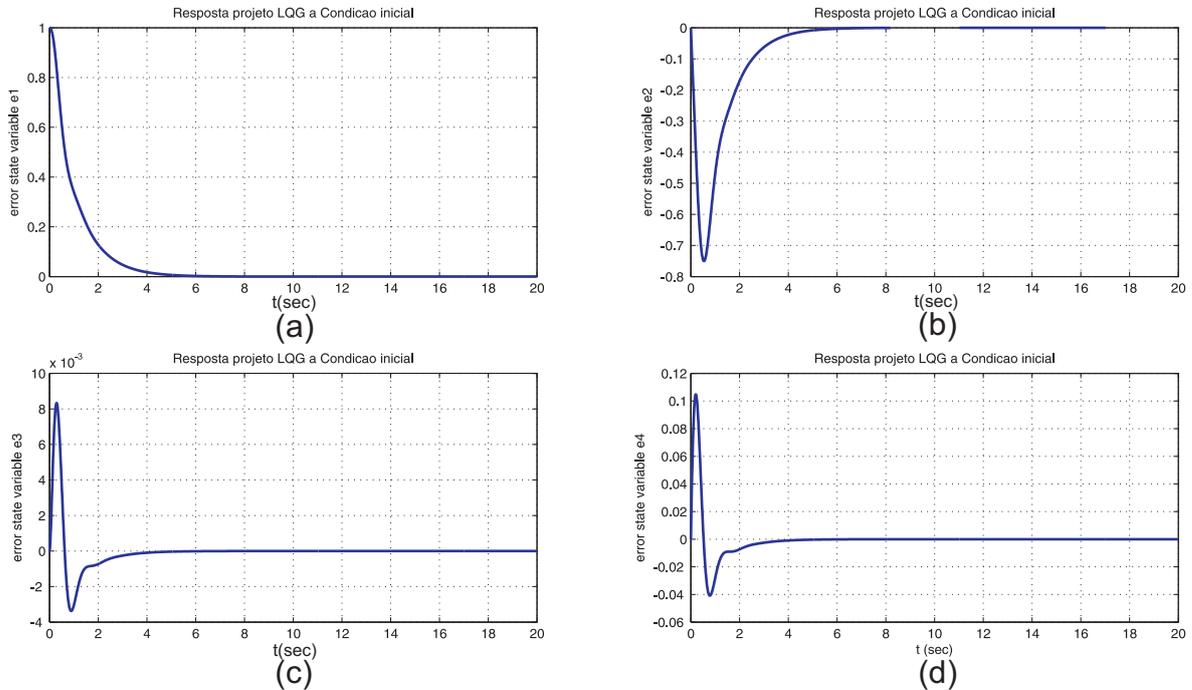
Tanto para os estados do sistema tidos como reais como para a estimação desses estados, foram consideradas as seguintes condições iniciais:

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Analisando o sinal do erro do sistema *LQG* com Observador de estados, verificou-se que o mesmo rapidamente atingiu o valor zero no regime permanente. Percebe-se que o erro para as

variáveis de estado  $x_3$  e  $x_4$  apresentaram melhores resultados, pois ambos tenderam a zero antes de  $t = 5s$ , como pode ser visto na Figura 24.

Figura 24 – Trajetórias do erro para as variáveis de estado.



Fonte: Autor

A Figura 25 exibe os resultados da Filtragem de Kalman. Nela verifica-se as trajetórias dos estados versus os estados estimados. Nota-se que, apesar da presença de ruídos, a ação reguladora é detectada em todos os estados.

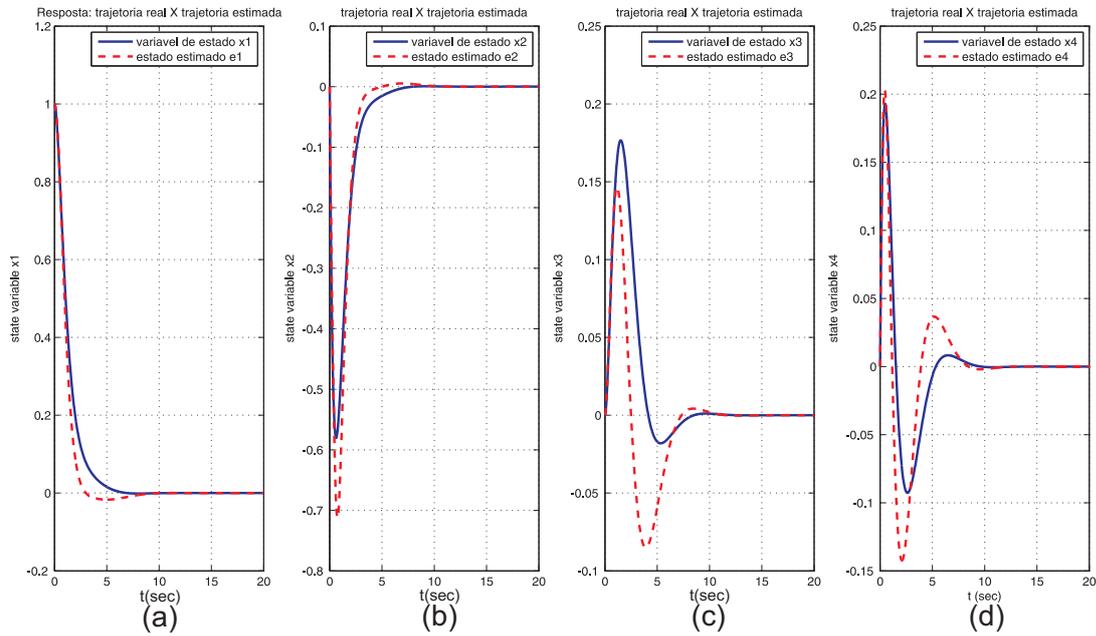
A Figura 25 exibe os resultados da Filtragem de Kalman. Nela verifica-se as trajetórias dos estados versus os estados estimados. Nota-se que, apesar da presença de ruídos, a ação reguladora é detectada em todos os estados. A Fig. 26 apresenta o melhor resultado de estimação, trajetória de estado  $x_1$  versus estado estimado  $e_1$ .

Em outras palavras, o projeto do Filtro de Kalman é importante em uma configuração prática, por exemplo, para solucionar problemas de controle em que há ausência de sensores de medição, tendo em vista que o mesmo permite uma estimação das variáveis de estado.

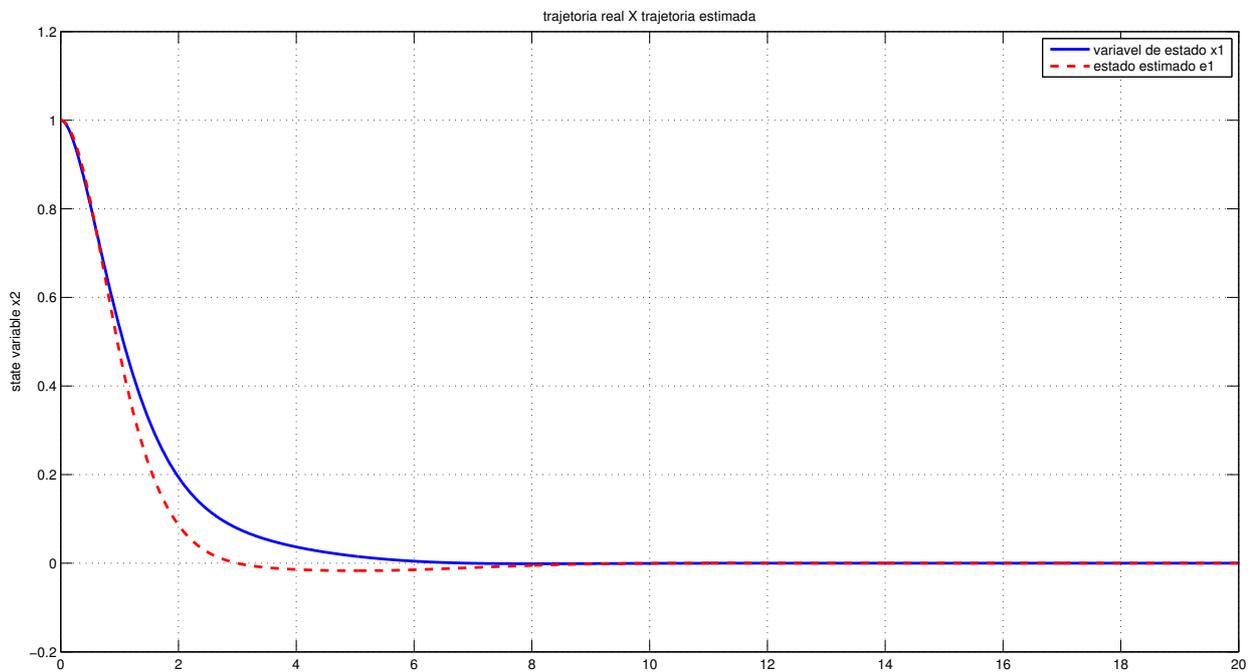
### 6.3 Resposta no Domínio do Tempo

No domínio do tempo, submeteu-se o sistema a uma entrada de referência impulso unitário e analisou a resposta do sistema.

Figura 25 – Trajetórias dos estados versus os estimados.



Fonte: Autor

Figura 26 – Trajetórias de estado  $x_1$  versus o estado estimado  $e_1$ .

Fonte: Autor

Primeiramente, tendo como base a resposta do sistema não compensado (planta) à referência adotada, analisou-se os seguintes parâmetros característicos: o *tempo de assentamento* ( $t_s$ ), *tempo de pico* ( $t_p$ ) e o *erro de estado estacionário*. Para tal, verificou-se que o sistema com controlador teve uma resposta cerca de 3 (três) vezes mais rápida, isto é, o tempo de assentamento do sistema com controlador é ( $t_{s_c} = 6,15s$ ), enquanto que o tempo de assentamento do sistema sem controlador é ( $t_s = 20,3s$ ). Considerando o *tempo de pico*, para o sistema com compensador, o valor é de  $t_{p_c} = 0,574s$  e sem compensador é de  $t_p = 2,32s$ . Além disso, percebe-se que o erro de estado estacionário é nulo, em outras palavras, ambas as respostas com retroação unitária tendem a zero no regime permanente (conforme Figura 27).

A Figura 27 apresenta as respostas do sistema sem compensação em azul e do sistema com compensação *LQG* em verde.

Com base no tempo de assentamento e tempo de pico, nota-se que a resposta do sistema compensado é mais rápida, pois a resposta chega mais rápido ao regime permanente considerando o critério dos 2% para o cálculo de  $t_s$ . Além disso, o desempenho do sistema é também satisfatório pelo fato do erro permanecer nulo mesmo com a inserção do Filtro de Kalman.

#### 6.4 Resposta no Domínio da Frequência

Analisando a resposta dos sistemas sem compensação e com compensação, verificou-se que a banda passante da planta é menor que a do sistema com Filtro de Kalman (FK). Isto é observado, analisando a *frequência de corte*, em que  $\omega_c = 0,958rad/s$  e  $\omega_{c_c} = 1,26rad/s$  representam as frequências de corte para o sistema sem e com FK, respectivamente (ver Figura 28). Além disso, notou-se que os pólos do sistema compensado ( $-0,1910 \pm 0,5878i, -1,0000, -1,3090 \pm 0,9511i, -3,3337 \pm 6,1296i, -7,4854$ ) estão mais a esquerda do semiplano complexo esquerdo, que os pólos do sistema não compensado ( $-0,1910 \pm 0,5878i, -1,3090 \pm 0,9511i$ ).

Uma vez que o projeto de controle robusto do manipulador robótico possui uma banda passante e largura de banda ( $\omega_{b_c} = 1,7650rad/s$  para o sistema compensado e  $\omega_{b_c} = 0,9561rad/s$ , para o não compensado) maiores, haja vista que seus polos possuem parte real mais a esquerda do semiplano complexo esquerdo, percebe-se, claramente, que a resposta ao impulso do sistema controlado, projeto *LQG*, é mais rápida que o sistema sem controlador, conforme Figura 29.

A margem de Ganho e margem de Fase do sistema compensado são respectivamente  $G_{m_c} = 6,6972dB$  e  $P_{m_c} = 86,8871^\circ$ . Enquanto que os mesmos dados para o sistema sem controlador são, respectivamente,  $G_m = 2,8541dB$  e  $P_m = 36,5803^\circ$ . Mais uma vez, considerando esses parâmetros o sistema com controlador *LQG* apresenta um desempenho bem melhor.

Outro parâmetro considerado foi a frequência de ressonância ( $\omega_r$ ), cujos valores foram  $0,556rad/s$  para o sistema sem compensação e  $0,614rad/s$  para o sistema compensado. Um outro dado de importância análoga, foi o pico de ressonância ( $M_r$ ), foram verificados  $5,42dB$  e  $6,72dB$  para o sistema sem compensação e compensado, respectivamente. A pequena varia-

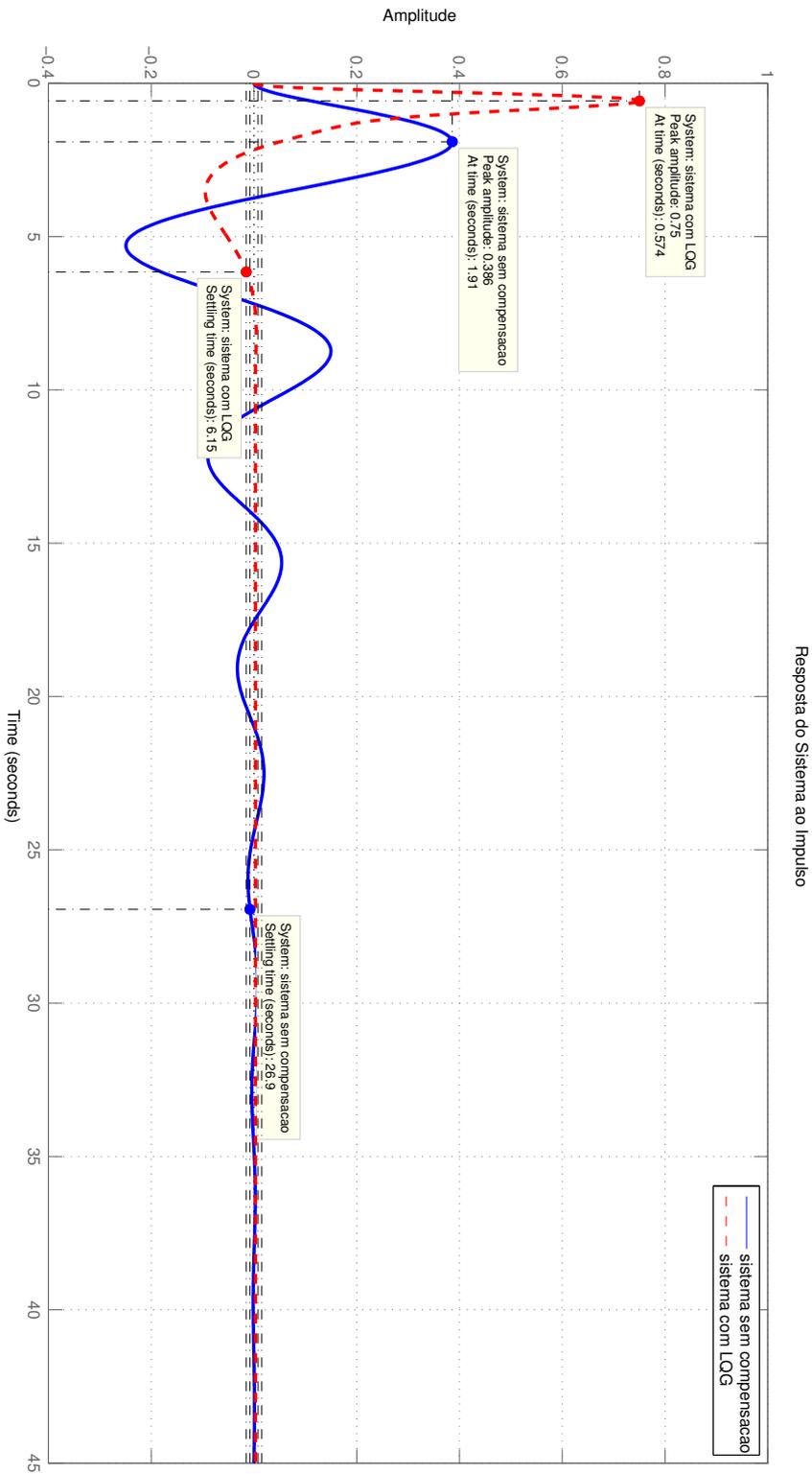
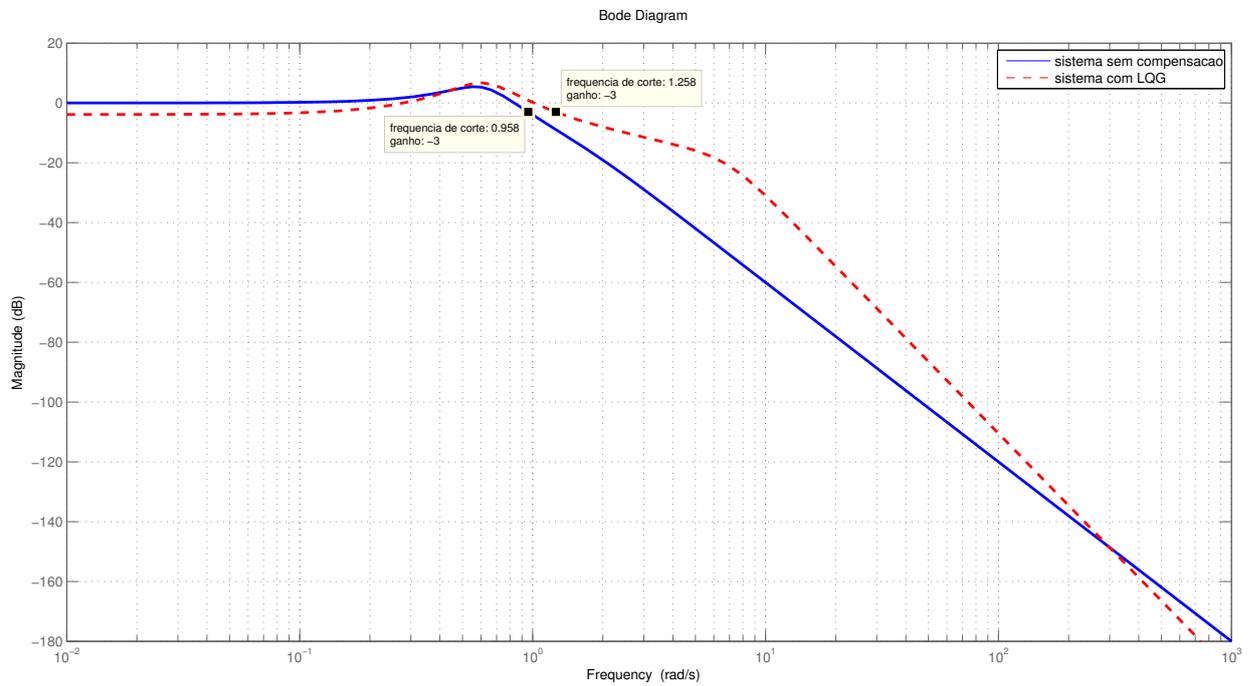


Figura 27 – Resposta do Sistema não compensado em azul e do sistema com compensação LQG em verde.

Fonte: Autor

Figura 28 – Frequências de corte dos sistemas não compensado (em azul) e do compensado (em verde).



Fonte: Autor

ção destes parâmetro (frequência de ressonância e pico de ressonância) dão um indicativo da manutenção da estabilidade do sistema, o que foi confirmado pelo software *Matlab R2013a*.

Tabela 1 – Resumo comparativo de desempenho no domínio do tempo.

	$t_s(seg)$	$t_p(seg)$
Sistema sem Comp.	20,3	2,32
Sistema com Comp.	6,15	0,574

Fonte: Autor.

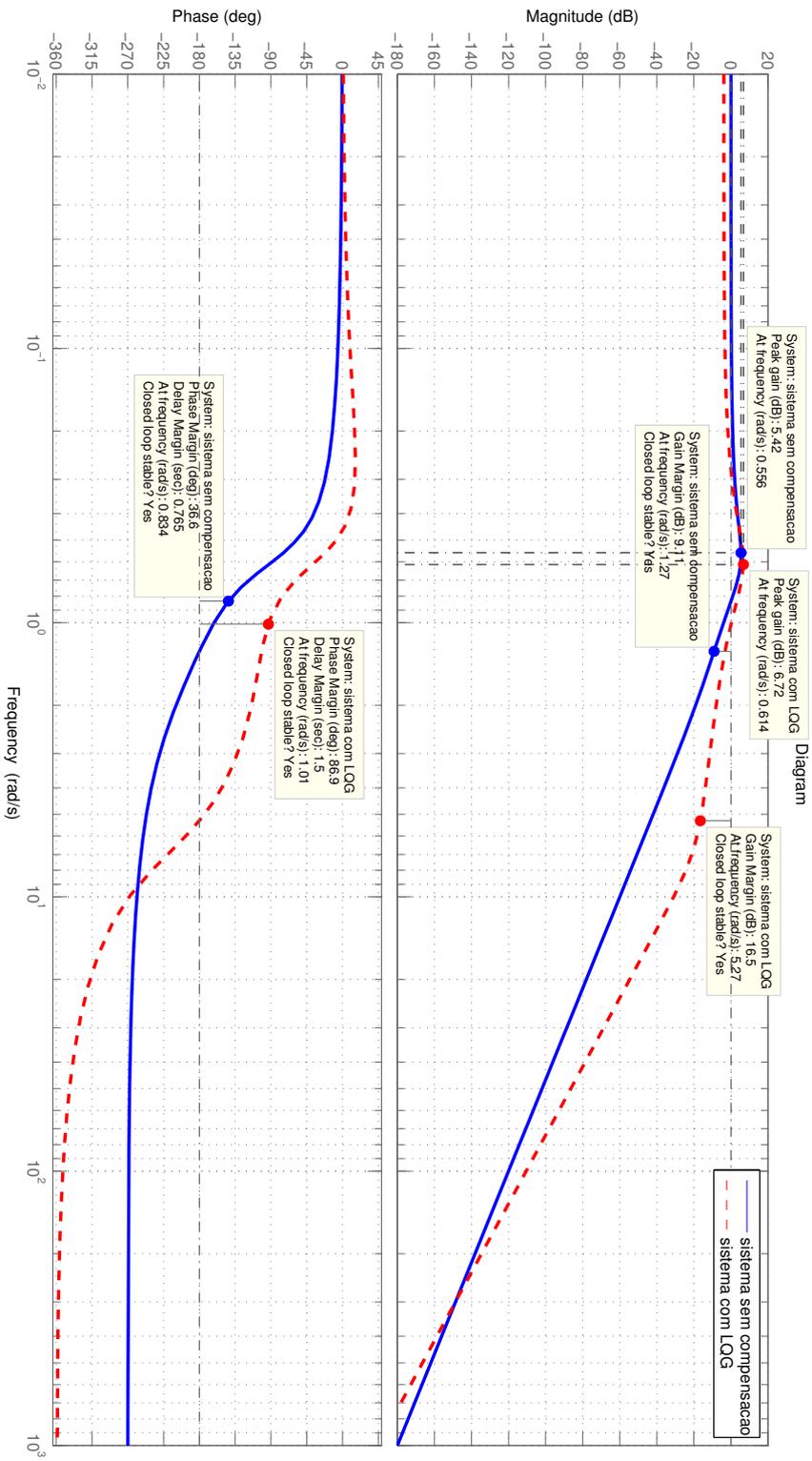
Tabela 2 – Resumo comparativo de desempenho no domínio da frequência.

	$\omega_c(rad/s)$	$\omega_b(rad/s)$	$\omega_r(rad/s)$	$M_r(dB)$	$G_m(dB)$	$P_m(^{\circ})$
Sistema sem Comp.	0,956	0,9561	0,556	5,42	2,8541	36,5803
Sistema com Comp.	1,26	1,7650	0,614	6,72	6,6972	86,8871

Fonte: Autor.

A Tabela 1 e Tabela 2, apresentam um comparativo dos parâmetros de desempenho considerados para este trabalho, onde  $t_s$  é o tempo de assentamento,  $t_p$  é o tempo de pico,  $\omega_c$  é a

Figura 29 – Diagramas de Bode do Sistema não compensado em azul e do sistema compensado com Controlador *LQG* em verde.



Fonte: Autor

frequência de corte,  $\omega_b$  é a largura de banda,  $\omega_r$  é a frequência de ressonância,  $M_r$  é o pico de ressonância,  $G_m$  é margem de Ganho, e  $P_m$  é a margem de Fase.

## 6.5 Conclusões

Nota-se que, de um modo geral, o projeto *LQG* permite que a ação integral possa ser introduzida facilmente (conforme Figura 22), o que é uma vantagem tendo em vista que esta ação pode contribuir com a atenuação dos ruídos da planta e na medição de saída, os quais na prática ocorrem nas altas frequências. Outra vantagem é que o controlador *LQG* considera ruídos aleatórios na planta e na medição, o que torna o controlador robusto. Além disso, a estimação de estados não disponíveis é de modo geral a grande vantagem e objetivo desta pesquisa.

Desta forma, através da análise do rastreamento dos estados estimados com relação aos estados reais e da avaliação do erro de estimação, percebeu-se bons resultados da inserção do controlador *LQG*. Além disso, o controlador permitiu melhorar, significativamente, a velocidade da resposta do sistema, através da diminuição do tempo de assentamento e tempo de pico, e manteve também o erro de estado estacionário nulo para uma entrada ao impulso unitário. Além disso, garantiu uma margem de estabilidade maior para ruídos nas altas frequências, o que foi comprovado, através das barreiras de desempenho e de estabilidade robusta.

Em contrapartida, a desvantagem do controle *LQG*, como apresentado por Xue, Chen e Atherton (2007), é o fato das margens de estabilidade serem muito pequenas, o que implica que, se o sistema é submetido a pequena perturbação, o mesmo pode se tornar instável. Além disso, ainda há o problema do tempo gasto com a estimação (FILHO; LUIS, 2006).



## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um Filtro de Kalman para estimar os estados não disponíveis para uma planta de um manipulador robótico. Como visto, o problema do Filtro de Kalman faz parte da teoria de controle robusto *LQG*. Mostrou-se também que esta metodologia consiste do projeto dual do Filtro de Kalman e do controlador *LQR*, e ela garanti que o desempenho do sistema se manterá desejável, satisfatoriamente, mesmo com a presença de ruídos aleatórios na planta e na medição e também com incertezas na modelagem.

Com relação ao projeto *LQR*, pode-se apontar como vantagem a margem de estabilidade garantida. Este tipo de projeto apresenta uma desvantagem que é a necessidade de disponibilidade dos estados para medições na realimentação do sinal de controle, e que não haja nem ruídos nem perturbações no sistema. Neste trabalho, isso foi resolvido através da inserção do Filtro de Kalman.

Demostrou-se que o projeto do Filtro de Kalman é importante em uma configuração prática para solucionar problemas de controle em que há ausência de sensores de medição, tendo em vista que o FK permite uma estimação das variáveis de estado.

Nota-se que, de um modo geral, o projeto *LQG* permite também que a ação integral possa ser introduzida facilmente (conforme Figura 22), o que é uma vantagem tendo em vista que esta ação pode contribuir com a atenuação dos ruídos da planta e na medição de saída, os quais na prática ocorrem nas altas frequências. Além disso, a estimação de estados não disponíveis é uma grande vantagem, o que foi percebido analisando o erro de estimação e a trajetória dos estados estimados com relação aos estados reais. Consequentemente, a outra vantagem é que o controlador *LQG* considera ruídos aleatórios na planta e na medição e incertezas na modelagem, o que torna o controlador robusto.

Dessa forma, conforme discussão da seção 6, atingiu-se o objetivo de estimar de forma ótima os estados não disponíveis através projeto do Filtro de Kalman. Além disso, a compensação permitiu melhorar, significativamente, a resposta do sistema, ao diminuir o tempo de assentamento e tempo de pico e ao manter também o erro de estado estacionário nulo para uma entrada ao impulso unitário. Percebeu-se ainda que o mesmo atendeu aos critérios de desempenho e estabilidade robusta, mesmo com a presença de ruídos. Isso demonstrou que as propriedades de robustez do controlador se mantiveram em condições aceitáveis de acordo com Cruz (2005).

Em contrapartida, a desvantagem do controle *LQG*, como apresentado por Xue, Chen e Atherton (2007), é o fato das margens de estabilidade serem muito pequenas, o que implica que, se o sistema é submetido a pequena perturbação, o sistema como um todo pode se tornar instável. Ainda a este problema, soma-se o tempo gasto com a estimação, o que retardaria o tempo de resposta do sistema (FILHO; LUIS, 2006).

Então, tendo em vista estas questões de projeto, sugere-se, como trabalhos futuros, a utilização da metodologia de Controle Robusto *LQG/LTR*, associada a uma técnica de inteligência artificial híbrida, com Redes Neurais e Algoritmo Genético, para recuperação da malha de transferência, permitindo melhoria quanto a inserção de perturbações e também com as perdas ocasionadas pela estimação através do Filtro de Kalman. Além disso, sugere-se também a investigação da estabilidade e desempenho robusto para este projeto, comparando os resultados com trabalhos relacionados.

## Referências

- ABREU, I.; FONSECA, N. Neural-genetic state space controllers synthesis based on linear quadratic regulatos design for eigenstrucutre assignment. *Systems, man, and Cybernetics, part B: Cybernetics, IEEE Transaction on*, 2010.
- ABREU, I. I. S. et al. Projeto de Controlador Robusto LQR/LTR em Manipulador Robótico via Modelo Genético Neuronal. *VIII Congresso Nacional de Engenharia Mecânica*), CONEM, p. 1–10, 2014.
- ABREU, I. S. Controle inteligente LQR neuro-genético para alocação de auto estrutura em sistemas dinâmicos multivariados. *Doutorado, Universidade Federal do Pará*, Belém - PA, 2008.
- BANZHAF, W. et al. Genetic Programming: an introduction. *Morgan Kaufmann*, p. 1–61, 1998.
- BARRETO, J. Inteligência Artificial. no limiar do século xxi. 1997.
- CARVALHO, J. S. F. de. *Controle Adaptativo Aplicado em um Robô Manipulador de Dois Graus de Liberdade Planar*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal da Paraíba, 2009.
- CHIU, D. K.; LEE, S. Design and Experimentation of a Jump Impact Controller. *IEEE*, 1997.
- CRUZ, J. J. da. Controle robusto multivariável. *DUSP*, 2005.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. Modern Control Systems. Prentice Hall, 2010.
- FILHO, J. G. B.; LUIS, S. Controle Robusto LQG/LTR com Recuperação do Ganho da Malha de Transferência. *Mestrado, Universidade Federal do Maranhão*, São Luís - MA, 2006.
- FONSECA, J. V. et al. A Genetic Algorithm Convergence and Models for Eigenstructure Assignment via Linear Quadratic Regulator (LQR). *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, IEEE, v. 6, n. 1, p. 1–9, 2008.
- GANESH, V.; VASU, K.; BHAVANA, P. Lqr based Load Frequency Controller for two Area Power System. *Int. J. Adv. Res. Electr., Electron., Instrum. Eng.*, v. 1, n. 4, 2012.
- GHOREISHI, S. A.; NEKOU, M. A.; BASIRI, S. O. Optimal Design of LQR Weighting Matrices based on Intelligent Optimization Methods. *International Journal of Intelligent Information Processing*, The International Association for Information, Culture, Human and Industry Technology, v. 2, n. 1, p. 63–74, 2011.
- HU, S.; JR, M. H.; KRISHNAN, H. Neural Network Controller for Constrained Robot Manipulators. *IEEE International Conference on Robotics and Automations, San Francisco, CA, USA*, p. 1906–1911, 2000.
- KALMAN, R. E. Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series A: Control*, SIAM, v. 1, n. 2, p. 152–192, 1963.
- MITCHELL, M. An introduction to genetic algorithms. *Cambridge: Mit Press*, p. 207, 1997.
- NISE, N.; SILVA, F. R. da. *Engenharia de sistemas de controle*. [S.l.]: LTC, 2012.
- OGATA, K.; YANG, Y. Modern control engineering. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 2010.

PASSOLD, F. Controle Neural de Posição e Força em Manipuladores Robóticos. *Universidade Federal de Santa Catarina. Santa Catarina, Florianópolis*, p. 12, 2003.

QUIGLEY, M. et al. Low-cost Accelerometers for Robotic Manipulator Perception. p. 6168–6174, 2010.

ROAN, P. et al. Manipulator State Estimation with Low Cost Accelerometers and Gyroscopes. p. 4822–4827, 2012.

ROTELLA, N. et al. State Estimation for a Humanoid Robot. *arXiv preprint arXiv:1402.5450*, 2014.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: Wiley New York, 2007.

TAYLOR, R. H.; STOIANOVICI, D. Medical robotics in computer-integrated surgery. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, IEEE, v. 19, n. 5, p. 765–781, 2003.

ULRICH, S.; SASIADEK, J. Z. Extended Kalman Filtering for Flexible Joint Space Robot Control. p. 1021–1026, 2011.

XUE, D.; CHEN, Y.; ATHERTON, D. P. *Linear feedback control: analysis and design with MATLAB*. [S.l.]: Siam, 2007. 235–241 p.

## **Apêndices**



## APÊNDICE A – Sistema Regulador Ótimo Quadrático

Uma vantagem do método de controle ótimo quadrático sobre o método de alocação é que o primeiro fornece um modo sistemático de cálculo da matriz de ganho de controle por realimentação de estado.

É considerado agora o problema do regulador ótimo quadrático que, dada a equação do sistema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (\text{A.1})$$

permite determinar a matriz  $\mathbf{K}$  do vetor de controle ótimo

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.2})$$

para minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (\text{A.3})$$

onde  $\mathbf{Q}$  é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica e  $\mathbf{R}$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica. Nota-se que o segundo termo do lado direito da Eq. A.3 representa o consumo de energia dos sinais de controle. Nesse problema, supõem-se que o vetor de controle  $\mathbf{u}(t)$  não seja limitado.

Será visto posteriormente, que a lei de controle linear dada pela Eq. A.2 é a lei de controle ótimo. Portanto, se os elementos não conhecidos da matriz  $\mathbf{K}$  forem determinados para minimizar o índice de desempenho, então  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$  será ótimo para qualquer estado inicial  $\mathbf{x}(0)$ . O diagrama de blocos mostrando a configuração ótima está indicado na Fig. 30.

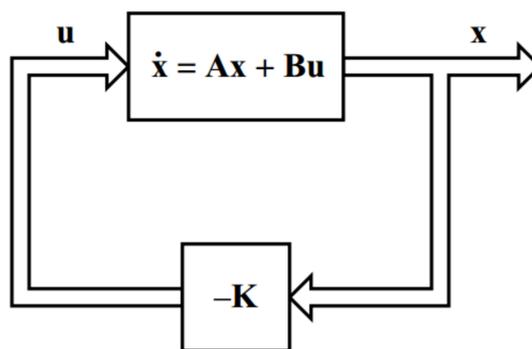


Figura 30 – Sistema Regulador Ótimo.

Fonte: (OGATA; YANG, 2010, p. 793)

Agora será resolvido o problema de otimização. Substituindo a Eq. A.2 dentro da Eq. A.1, obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$$

Nas derivações seguintes, assume-se que a Matriz  $A - BK$  é estável, ou que os autovalores de  $A - BK$  tem parte real negativa.

Substituindo Eq. A.2 dentro da Eq. A.3

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^* \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} dt \quad (\text{A.4})$$

Defini-se

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x})$$

onde  $\mathbf{P}$  é uma matriz Hermitiana definida positiva ou matriz simétrica real. Então, obtém-se

$$\mathbf{x}^* (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \mathbf{x} = -\dot{\mathbf{x}}^* \mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \dot{\mathbf{P}} \mathbf{x} = -\mathbf{x}^* [(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^* \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})] \mathbf{x}$$

Comparando ambos os lados da última equação e notando que esta equação deve ser verdadeira para qualquer  $\mathbf{x}$ , exige-se que

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K})^* \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) = -(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K}) \quad (\text{A.5})$$

Isso pode ser provado pelo fato que, se  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$  é uma matriz estável, então existe uma matriz definida positiva  $\mathbf{P}$  que satisfaça a Eq. A.5.

Daí o procedimento é encontrar os elementos de  $\mathbf{P}$  da Eq. A.5 e ver se  $\mathbf{P}$  é uma matriz definida positiva. É importante lembrar que várias matrizes  $\mathbf{P}$  podem satisfazer esta equação. Se o sistema é estável, sempre vai existir uma matriz definida positiva  $\mathbf{P}$  que a satisfaça. Isso significa que, resolvendo esta equação e encontrando  $\mathbf{P}$ , o sistema é estável. Outras matrizes  $\mathbf{P}$  que satisfazem esta equação não são definidas positivas e devem ser descartadas.

O índice de desempenho pode ser evoluído como

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{x}^* \mathbf{K}^* \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{x}) dt = -\mathbf{x}^* \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^{\infty} = -\mathbf{x}^*(\infty) \mathbf{P} \mathbf{x}(\infty) + \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (\text{A.6})$$

Desde que todos os autovalores de  $\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}$  possuem parte real negativa, tem-se que  $\mathbf{x}(\infty) \rightarrow \mathbf{0}$ . Entretanto, obtém-se

$$J = \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P} \mathbf{x}(0) \quad (\text{A.7})$$

Dessa forma, o índice de desempenho pode ser obtido em termos das condições iniciais  $\mathbf{x}(0)$  e  $\mathbf{P}$ .

Para obter a solução do problema de controle ótimo quadrático, os seguintes procedimentos são seguidos: Desde que  $\mathbf{R}$  tenha sido assumido ser uma matriz Hermitiana definida positiva ou matriz real simétrica, pode-se escrever

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}^* \mathbf{T}$$

onde  $\mathbf{T}$  é uma matriz não singular. Então a Eq. A.5 pode ser escrito como

$$(\mathbf{A}^* - \mathbf{K}^* \mathbf{B}^*) \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}^* \mathbf{T}^* \mathbf{T} \mathbf{K} = \mathbf{0}$$

a qual pode ser reescrita como

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}]^* [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}] - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

A minimização de  $J$  com respeito a  $\mathbf{K}$  requer a minimização de

$$\mathbf{x}^* [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}]^* [\mathbf{T} \mathbf{K} - (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}] \mathbf{x}$$

com respeito a  $\mathbf{K}$ . Desde que a última expressão seja não negativa, o mínimo ocorre quando ela é zero, ou quando,

$$\mathbf{T} \mathbf{K} = (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P}$$

Daí,

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} \quad (\text{A.8})$$

A Eq. A.8 dá a matriz ótima  $\mathbf{K}$ . Assim, a lei de controle ótimo para o problema de controle ótimo quadrático quando o índice de desempenho é dado pela Eq. A.3 é linear e é dada por

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} \mathbf{x}(t)$$

A matriz  $\mathbf{P}$  na Eq. A.8 deve satisfazer a Eq. A.5 ou a seguinte equação reduzida:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^* \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (\text{A.9})$$

A Eq. A.9 é chamada de equação matricial reduzida de Riccati. As etapas de projeto podem ser enunciadas como a seguir:

1. Determinar a matriz  $\mathbf{P}$  que satisfaz a Eq. A.9, equação matricial reduzida de Riccati.
2. Substituir esta matriz  $\mathbf{P}$  dentro da Eq. A.8. A matriz  $\mathbf{K}$  resultante é a matriz ótima.

Finalmente, note que, se o índice de desempenho é dado em termos de vetor de saída, em vez de o vetor de estado, isto é,

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^* \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{u}^* \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (\text{A.10})$$

então o índice pode ser modificado pelo uso da equação da saída

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$$

para

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^* \mathbf{C}^* \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (\text{A.11})$$

e os passos apresentados nessa subseção podem ser aplicados para obter a matriz ótima  $\mathbf{K}$ .