



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO**

VITOR RODRIGUES BARROS

**EFEITOS DE REALIMENTAÇÃO APLICADO AO MOVIMENTO DE ARTICULAÇÃO DO
JOELHO EM PACIENTES PARAPLÉGICOS**

**São Luís, MA
2016**

VITOR RODRIGUES BARROS

**EFEITOS DE REALIMENTAÇÃO APLICADO AO MOVIMENTO DE ARTICULAÇÃO DO
JOELHO EM PACIENTES PARAPLÉGICOS**

Monografia apresentada à Universidade Estadual do Maranhão como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação, com habilitação em Automação e Controle.

Orientador: Ivanildo Silva Abreu, PhD.

**São Luís, MA
2016**

Barros, Vitor Rodrigues.

Efeitos de Realimentação Aplicado ao Movimento de Articulação do Joelho em Pacientes Paraplégicos / Vitor Rodrigues Barros. – São Luís, 2016.

73 f.

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia da Computação, Universidade Estadual do Maranhão, 2016.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu.

1. Engenharia de Reabilitação. 2. Teoria de Controle 3. Matlab.
4. Realimentação. 5. Barreiras de Desempenho. I. Título.

CDU 681.51:616.7

VITOR RODRIGUES BARROS

**EFEITOS DE REALIMENTAÇÃO APLICADO AO MOVIMENTO DE ARTICULAÇÃO DO
JOELHO EM PACIENTES PARAPLÉGICOS**

Monografia apresentada à Universidade Estadual do Maranhão como requisito para obtenção do título de Bacharel em Engenharia de Computação, com habilitação em Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís, MA, 28 de Novembro de 2016:

Ivanildo Silva Abreu, PhD.
Orientador

Mauro Sérgio Silva Pinto, Dr.
Primeiro membro

Madson Cruz Machado, Eng.
Segundo membro

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais que muito contribuíram de forma direta ou indiretamente para a elaboração e execução desta monografia. Ao meu avó em memória dele. Aos professores, colegas e funcionários da UEMA. À Deus por ter me concedido o dom da vida e do entendimento.

Agradecimentos

A Deus pela saúde e perspicácia que tive durante todos esses anos de curso.

À minha família que sempre esteve ao meu lado, dando-me suporte e apoio para vencer em todas as etapas de minha vida, em especial durante os anos de graduação.

Aos meus amigos, especialmente os do curso de Engenharia de Computação, que me serviram como exemplo para concluir o curso e pelos momentos de descontração.

Ao meu orientador, Ivanildo Silva Abreu, pelo seu apoio, orientação, dedicação e o incentivo que me deu durante esse trabalho. .

A todos os professores do curso de Engenharia da Computação da UEMA, que além de contribuírem com o conhecimento acadêmico, também passaram suas experiências de vida.

*"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades,
lembrai-vos de que as grandes coisas do homem
foram conquistadas do que parecia impossível."
(Charles Chaplin)*

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso, tem como objetivo, analisar os efeitos da realimentação em um sistema de controle de malha fechada, intitulado Movimento De Articulação Do Joelho Em Pacientes Paraplégicos. Para este fim, utiliza - se a teoria de controle moderna, ou seja, a representação em espaços de estados. A teoria de controle utilizada, busca minimizar a quantidade de energia, no referido dispositivo. Uma vez que o mesmo é provido de equipamentos que consomem energia. Para isto, utiliza - se o projeto do Regulador Linear Quadrático (*LQR*), ferramenta indicada para esse fim. Este controlador tem como grau de dificuldade a resolução da Equação Algébrica de Ricatti (*EAR*), sendo que um dos grandes desafios da teoria de controle moderna é a seleção das matrizes de ponderação de estado e de entrada do referido sistema (*Q e R*). O projeto do LQR possui propriedades de robustez atrativas que são as margens de ganho infinita e margem de fase 60° . A análise dos resultados é feita com a utilização da ferramenta computacional Matlab[®], no domínio do tempo e no domínio da frequência, sendo que para o domínio do tempo, estes são avaliados em função dos índices de desempenho das respostas a uma excitação degrau unitário e no domínio da frequência, margem de ganho e margem de fase.

Palavras-chaves: 1. Engenharia de Reabilitação. 2. Teoria de Controle. 3. Matlab[®] 4. Realimentação 5. Barreiras de Desempenho

Abstract

This course conclusion work, aims to analyze the effects of feedback in a closed loop control system, titled Movement of Knee Joint in Paraplegic Patients. For this purpose, the modern control theory is used, that is, the representation in spaces of states. The control theory used seeks to minimize the amount of energy in said device. Since it is equipped with equipment that consume energy. For this, the design of the Quadratic Linear Regulator (LQR) is used, indicated tool for this purpose. This controller has the difficulty of solving the Ricatti Algebraic Equation (EAR), and one of the great challenges of modern control theory is the selection of state and input weights of said system (Q and R). The LQR design has attractive robustness properties which are the infinite gain margins and phase margin 60° . The analysis of the results is done using the Matlab[®] computational tool, in the domain of time and in the frequency domain, and for time domain, these are evaluated according to the performance indexes of the Responses to a unit step excitation and in the frequency domain, gain margin and phase margin

Key-words: 1. Rehabilitation Engineering. 2. Control Theory. 3. Matlab[®]. 4. Closed-Loop (Feedback). 5. Performance Barriers

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ilustração do Hardware Utilizado para Controle	22
Figura 2 – Sistema de Controle de Malha Aberta	25
Figura 3 – Sistema de Controle de Malha Fechada	25
Figura 4 – Antena Tendo o Efeito de uma Rajada de Vento (Ruído)	28
Figura 5 – Lugar das Raízes do Sistema não Compensado	32
Figura 6 – Diagrama de Bode para $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$, com $\tau = 1$	35
Figura 7 – Diagrama de Bode para $G(j\omega) = K_b = 1$	36
Figura 8 – Diagrama de Bode para $(j\omega)^\pm N$	38
Figura 9 – Diagrama de Bode para a) $G(j\omega) = (j\omega + a)$ e b) $G(j\omega) = (j\omega + a)^{-1}$	39
Figura 10 – Processo de Projeto de Sistemas de Controle.	42
Figura 11 – Diagrama de Bode para $G(j\omega) = (1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$	43
Figura 12 – Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle em Malha Fechada.	45
Figura 13 – Representação de um Sistema com Realimentação e um Grau de Liberdade.	46
Figura 14 – Projeto de compensações para função de transferência de malha multivariável GK.	48
Figura 15 – Sistema Regulador Ótimo.	50
Figura 16 – Esquema dos Membros Inferiores, para o Processo de Sistema de Controle.	53
Figura 17 – Projeto do Controlador LQR	58
Figura 18 – Resposta do Sistema em Malha Aberta.	60
Figura 19 – Diagrama do Lugar Geométrico das Raízes do Sistema.	60
Figura 20 – Resposta do Sistema em Malha Fechada com LQR.	61
Figura 21 – Diagrama de Bode do Sistema com LQR	62
Figura 22 – Barreiras de Desempenho. Sistema Nominal Aumentado (Azul). Barreiras de Desempenho (vermelho). Barreiras de Estabilidade (preto).	64
Figura 23 – Variação dos Parâmetros do Sistema em Malha Aberta.	65
Figura 24 – Variação dos Parâmetros do Sistema em Malha Fechada.	66

Lista de tabelas

Tabela 1 – Grandezas Antropométricas do Paciente (Ferrarin e Pedotti, 2000)	54
---	----

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivos	22
1.1.1	Objetivo Geral	22
1.1.2	Objetivos Específicos	22
1.2	Justificativa	23
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	25
2.1	Características de Sistemas de Controle com Realimentação	25
2.1.1	Análise do Sinal do Erro	26
2.1.2	Sensibilidade do Sistema de Controle a Variação de Parâmetros	27
2.1.3	Sinais de Perturbação em um Sistema de Controle com Realimentação	28
2.1.3.1	Rejeição a Perturbações em Sistemas de Controle com Realimentação	28
2.1.3.2	Atenuação de Ruídos de Medição em Sistemas de Controle com Realimentação	29
2.2	Erro em Regime Permanente	29
2.3	Controle da Resposta Transitória	30
2.4	O Custo da Realimentação	31
2.5	Método do Lugar das Raízes	31
2.6	Método da Resposta em Frequência	33
2.6.1	Diagrama de Bode	34
3	PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO	41
3.1	Especificações de Desempenho	41
3.2	Compensação do Sistema	41
3.3	Características de Sistemas de Controle com Realimentação	41
3.3.1	Especificações de Desempenho em Malha Fechada	43
4	PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTO	45
4.1	Compromisso de Controle com Realimentação	46
4.2	Controle Ótimo Quadrático	49
4.3	Controlabilidade	50
4.4	Observabilidade	51
5	MODELO MATEMÁTICO DO COMPLEXO CANELA-PÉ PARA PLANTA DA PERNA DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO	53
6	SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS	57
6.1	Projeto do Controlador LQR	57
6.2	Análise no Domínio do Tempo	60
6.3	Análise no Domínio da Frequência	62

6.4	Barreiras de Desempenho e Estabilidade	63
6.5	Sensibilidade a Variação de Parâmetros	64
7	CONCLUSÃO	67
	Referências	69

1 INTRODUÇÃO

A estimulação elétrica neuromuscular tem sido utilizada na recuperação de movimentos em pacientes com deficiência motora, utilizando a corrente elétrica para provocar a contração de músculos. É um assunto que está em crescimento na engenharia de reabilitação (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

Estudos têm sido realizados com o propósito do controle do movimento em pacientes paraplégicos utilizando a estimulação elétrica funcional (FES - Functional Electrical Stimulation) e diferentes modelos matemáticos de músculos e da articulação do joelho. A FES produz contração muscular semelhante à contração gerada por uma excitação enviada pelo Sistema Nervoso Central (SNC) (FERRARIN; PEDOTTI, 2000).

No Brasil, a Alberto Cliquet, obteve sucesso ao fazer com que uma pessoa voltasse a caminhar apoiado num andador, após sessões de estimulação neuromuscular (MARTIN, 1999). Embora sua técnica seja de malha aberta, com neuro estimulação aplicado ao músculo quadríceps.

A aplicação de estimulação elétrica no músculo de uma pessoa, mais particularmente em seus neurônios motores, provoca contração involuntária do músculo (GUYTON; HALL, 2006).

Na figura 1, temos a ilustração do diagrama do sistema de controle.

A eletroestimulação utilizada corretamente pode facilitar na recuperação de um paciente, como por exemplo: no sistema circulatório, aumentando a circulação de sangue no membro paralisado e controlando a atrofia muscular (CRAMERI R. et al., 2004).

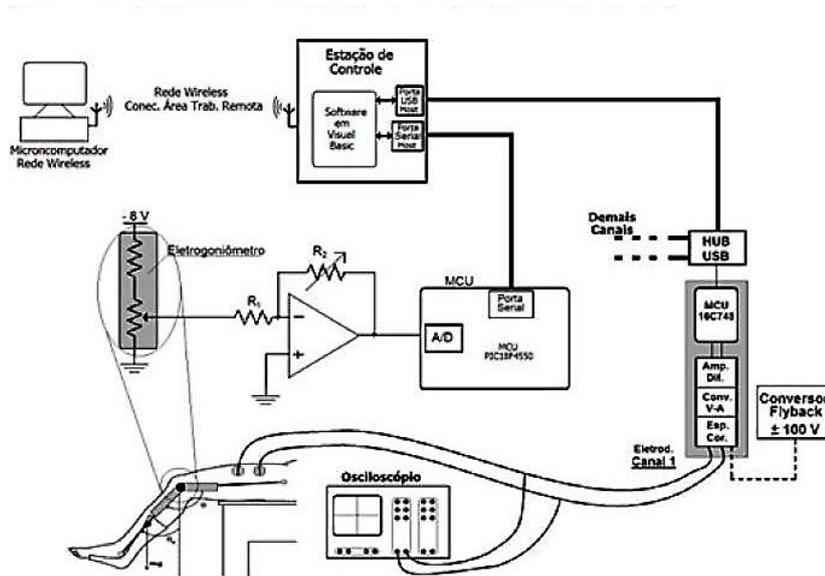
O controle em malha fechada precisa de técnicas de controle eficientes, pois a estrutura fisiológica humana e os modelos matemáticos musculares são muito difíceis (HUXLEY, 1957).

Neste trabalho, efetuou-se a implementação de um controlador linear em um sistema de controle em malha fechada da posição da perna de uma pessoa hígida.

Inicialmente, os parâmetros do modelo matemático foram identificados e o sistema de controle em malha fechada, utilizando um controlador LQR (Regulador Linear Quadrático), foi implementado. Assim estudando os efeitos da realimentação no sistema de controle.

O modelo de estudo foi de (TIAGO OLIVEIRA et al., 2014) que foi adaptado de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000) que é um sistema não-linear, logo é necessário linearizar o mesmo, para que assim seja possível projetar e utilizar a técnica do controlador PID. (GAINO, 2009)

Figura 1 – Ilustração do Hardware Utilizado para Controle



Fonte: (TIAGO OLIVEIRA et al., 2014) adaptado de (SILVA,2007)

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Estudar os efeitos da realimentação no sistema de controle aplicado ao movimento da articulação do joelho em pacientes paraplégicos

1.1.2 Objetivos Específicos

- Levantar o estado da arte em relação a análise e projetos de controle moderno e robusto;
- Implementar o controlador robusto LQR, no modelo proposto por Tiago C. de Oliveira (2014) que foi adaptado de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000);
- Representar o modelo proposto em função de transferência;
- Executar e simular as etapas do projeto no software MATLAB;
- Analisar os resultados no domínio do tempo e da frequência;

1.2 Justificativa

No Brasil, há um crescimento em trabalhos de pesquisa voltados para a melhoria de vida em pacientes paraplégicos.

A motivação para a realização deste trabalho visa na informação limitada existente no Brasil sobre pesquisas com aplicação de FES em pacientes paraplégicos com realimentação em malha fechada (GAINO, 2009). No Congresso Brasileiro de Engenharia Biomédica (CBEB), realizado em Uberlândia-MG em 2014, os únicos trabalhos publicados sobre reabilitação em pacientes paraplégicos com FES em malha fechada foram realizados por Gaino et al. (2008), com foco na solução dos problemas vivenciados por pacientes paraplégicos e hemiplégicos com a finalidade de melhorar a qualidade de suas vidas.

A deficiência motora apresentou como a segunda mais relatada pela população: mais de 13,2 milhões de pessoas afirmaram ter algum grau do problema, o que equivale a 7% dos brasileiros. Este grupo significativo inclui qualquer dificuldade de locomoção que a pessoa disse na pesquisa. (IBGE, 2010)

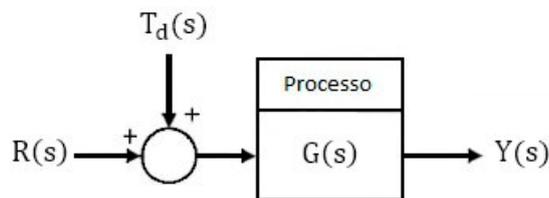
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Características de Sistemas de Controle com Realimentação

Um sistema de controle é definido como uma interconexão de componentes formando um sistema que fornecerá uma resposta desejada ao sistema. Visto que a resposta do sistema desejada é conhecida, um sinal proporcional ao erro entre a resposta real e a resposta desejada é determinada. A aplicação desse sinal para controlar o processo tem como resultado uma sequência de operações, esse processo assim chamado de sistema de controle com realimentação ou malha fechada. Frequentemente é necessária a introdução de realimentação para melhorar o sistema de controle (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

Um sistema sem realimentação, também chamado de sistema direto ou sistema de malha aberta, é apresentado na figura 2. Na figura, a perturbação $T_d(s)$, influencia diretamente na resposta do sistema. Sem uma realimentação, o sistema de controle fica altamente sensível a perturbações e alterações nos parâmetros do processo $G(s)$ (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

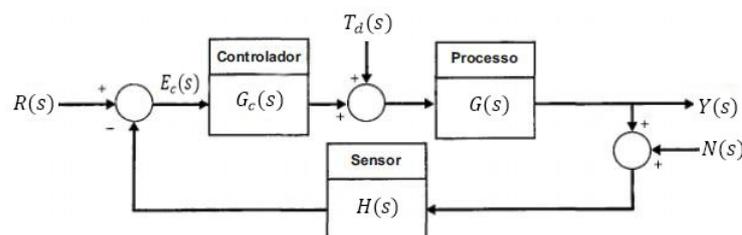
Figura 2 – Sistema de Controle de Malha Aberta



Fonte: Adaptado de DORF R. C.; BISHOP (2010).

Um sistema em malha fechada usa uma medida do sinal de saída e a compara com a saída desejada para gerar um sinal de erro que é usado pelo controlador para o ajuste do atuador, como mostra a figura 3. (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

Figura 3 – Sistema de Controle de Malha Fechada



Fonte:(DORF R. C.; BISHOP, 2010). $T_p(s)$ - Perturbação $N(s)$ - Ruído de Medida

Um sistema de controle com realimentação, apesar do seu custo e sua complexidade, o sistema de malha fechada, tem as seguintes vantagens:

- Diminui a sensibilidade do sistema a variações em parâmetros do processo;
- Melhora a rejeição a perturbações;
- Melhora a atenuação de ruídos de medição;
- Melhora a redução do erro em regime permanente do sistema;
- Fácil controle e ajuste da resposta transitória do sistema.

2.1.1 Análise do Sinal do Erro

O sistema de controle com realimentação, figura 3, possui três entradas - $R(s)$, $T_d(s)$, e $N(s)$ - e uma saída - $Y(s)$. Os sinais - $T_d(s)$, e $N(s)$ - são sinais de perturbação e ruído, respectivamente. É definido o erro de rastreamento dessa maneira:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (2.1)$$

Consideremos a realimentação unitária, ou seja, $H(s)=1$, para fácil compreensão.

Simplificando o diagrama de blocos, da figura 3, encontraremos a função descrita abaixo:

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_p(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), tem-se que

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_p(s) + \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (2.3)$$

Definimos a função $L(s)$, conhecida como **ganho de malha**, que tem papel fundamental em análises de sistemas de controle com realimentação.

$$L(s) = G_c(s)G(s) \quad (2.4)$$

Com (2.4) em (2.3), temos o **erro de rastreamento**

$$E(s) = \frac{1}{1 + L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)}T_p(s) + \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s) \quad (2.5)$$

2.1.2 Sensibilidade do Sistema de Controle a Variação de Parâmetros

A sensibilidade do sistema é definida pela relação entre a variação percentual na função de transferência do sistema pela relação percentual da função de transferência do processo (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

Temos a função de transferência do sistema

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad (2.6)$$

Com a sensibilidade do sistema definida como

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad (2.7)$$

Para pequenas variações incrementais, no limite, temos

$$S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G} \quad (2.8)$$

A sensibilidade de um sistema é a relação entre a mudança na função de transferência e a mudança na função de transferência do Processo (ou parâmetro) para uma pequena variação incremental (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

A sensibilidade do sistema de controle de malha aberta a mudança na planta $G(s)$ é igual a 1. A sensibilidade de um sistema de controle com realimentação, temos que calcular a partir da equação 2.8. A função transferência do sistema a malha fechada é

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (2.9)$$

Com isso temos que a sensibilidade deste tipo de sistema é

$$S_G^T = \frac{G_c}{(1 + G_c G)^2} \cdot \frac{G}{G_c G / (1 + G_c G)} \quad (2.10)$$

É importante destacar a seguinte relação

$$S(s) + C(s) = 1 \quad (2.11)$$

Sendo que $C(s)$ é a função de sensibilidade complementar, definida por

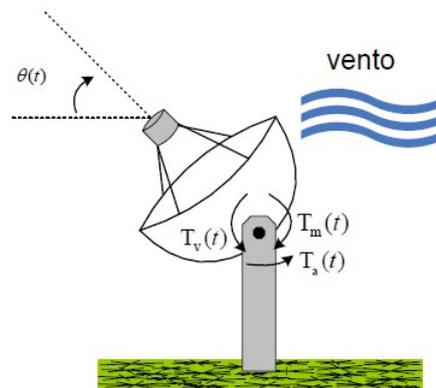
$$C = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (2.12)$$

Com isso em sistemas de controle de malha fechada, tem uma vantagem em relação aos sistemas de malha aberta, que o efeito da variação de parâmetros desses sistemas, que é a capacidade de reduzir o efeito da variação dos parâmetros ou erros, colocando uma realimentação de controle. No entanto em sistemas de malha aberta, devemos ter muito cuidado na escolha dos componentes, para atingir as especificações desejadas.

2.1.3 Sinais de Perturbação em um Sistema de Controle com Realimentação

Sinal de perturbação é um sinal de entrada indesejável que afeta a saída do sistema. Com esses sinais externos de perturbação fazem com que o sistema forneça uma saída incorreta. Como por exemplo, uma rajada de vento em uma antena, figura 4. A vantagem que os sistemas com realimentação trazem é o efeito da distorção, do ruído e de perturbações indesejadas, que pode ser reduzido com eficácia.

Figura 4 – Antena Tendo o Efeito de uma Rajada de Vento (Ruído)



Fonte: Apostila de Controle Linear 1. UNESP

2.1.3.1 Rejeição a Perturbações em Sistemas de Controle com Realimentação

Se temos $R(s)=N(s)=0$, da equação 2.5 temos

$$E(s) = -S(s)G(s)T_d(s) = -\frac{G(s)}{1 + L(s)}T_d(s) \quad (2.13)$$

Tendo um $G(s)$ fixo e um dado $T_d(s)$, com o aumento do ganho de malha $L(s)$, o efeito de $T_d(s)$ no erro de rastreamento diminui. Em outras palavras, a função de sensibilidade $S(s)$ é pequena quando o ganho de malha é grande. Diz-se que um ganho de malha grande leva a uma boa rejeição a perturbações. Mais precisamente, para se ter uma boa rejeição de perturbações, requer-se um ganho de malha grande sobre as frequências de interesse associadas com os sinais de perturbações esperados.

Na prática, os sinais de perturbação geralmente são de frequências baixas. Com isso, deseja-se projetar um controlador $G_c(s)$ de maneira em que a função de sensibilidade $S(s)$ seja pequena em baixas frequências.

2.1.3.2 Atenuação de Ruídos de Medição em Sistemas de Controle com Realimentação

Se temos $R(s)=N(s)=0$, da equação 2.3 temos

$$E(s) = C(s)N(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s) \quad (2.14)$$

Quando o ganho de malha vai diminuindo, o efeito de $N(s)$ no erro de rastreamento diminui. Isto é, a função de sensibilidade complementar $C(s)$ é pequena, no momento em que o ganho de malha $L(s)$ é pequeno.

Quando $G_c(s)$ for projetado e $L(s) \gg 1$, nesse caso, o ruído de medição diminui porque

$$C(s) \approx L(s) \quad (2.15)$$

Na realidade, os sinais de ruído de medida, são geralmente de altas frequências. Com isso, pede-se em altas frequências que o ganho de malha seja pequeno.

Sendo assim o ruído $N(s)$, como mostrado na figura 2, é

$$Y(s) = -\frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (2.16)$$

que aproximadamente é

$$Y(s) \approx -N(s) \quad (2.17)$$

2.2 Erro em Regime Permanente

O sistema de controle de malha fechada corrige as perturbações e ruído, medindo a resposta de saída, através de um circuito de realimentação, e compara essa resposta com a referência. Se houver alguma diferença, entre a resposta de saída e a referência, o sistema compensa o erro, fazendo a correção na planta. Se não existir nenhuma diferença, não há uma mudança na planta, uma vez que a resposta de saída, já condiz com a resposta desejada.

No sistema de controle de malha com realimentação, tem como vantagem o ajuste da resposta transitória como já vimos. Sendo assim, uma característica importante ao projetista de sistemas controle.

Definimos erro de estado estacionário como a diferença entre a entrada e a saída depois que os picos efetivamente desapareceram. Segundo (NISE, 2012), erro em estado permanente é a diferença entre a entrada e a saída para uma determinada entrada de teste com $t \rightarrow \infty$.

Geralmente, o erro de estado estacionário diminui com um aumento no ganho e aumenta com uma diminuição no ganho (NISE, 2012).

Considerando a figura 3, encontraremos $E(s)$, o erro entre a entrada, $R(s)$, e a saída, $Y(s)$, temos

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (2.18)$$

Também temos

$$Y(s) = R(s)G(s) \quad (2.19)$$

Substituindo a equação 2.18 na equação 2.19, simplificando e resolvendo, para $E(s)$, teremos o erro para um sistema de malha aberta

$$E(s) = R(s)[1 - G(s)] \quad (2.20)$$

Considerando um sistema de malha fechada, figura 3. Dado que a realimentação, $H(s)$, seja igual a 1, o sistema tem uma realimentação unitária e $T_d(s) = N(s) = 0$. Com isso o erro $E(s)$, estará entre a entrada $R(s)$ e a saída $Y(s)$.

Temos o erro de rastreamento, de acordo com a equação 2.3 dada por,

$$E_c(s) = -\frac{1}{1 + G_c(s)G(s)R(s)} \quad (2.21)$$

Para calcular o erro em regime permanente, para esse sistema, teremos que usar o **Teorema do Valor Final**, ou seja,

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (2.22)$$

A equação 2.22 nos permite calcular o erro em regime permanente, $e(\infty)$, com uma entrada, $R(s)$, e o sistema, $G(s)$.

O valor de $G(s)$, quando $s = 0$ é comumente chamado de ganho DC e é normalmente maior do que um. Portanto, os sistemas em malha aberta geralmente têm um erro de estado estacionário de magnitude significativa. Diferentemente, temos o sistema em malha fechada com um aceitável ganho de malha DC grande, $L(0) = G_c(0)G(0)$, terá um pequeno erro de estado estacionário. Isso porque o sistema a malha fechada ininterruptamente monitora o erro de estado estacionário e provê um sinal de atuação que reduz o erro de estado estacionário.

2.3 Controle da Resposta Transitória

A resposta temporal de um sistema de controle consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Entende-se por resposta transitória aquela que vai do estado inicial até o estado final. Por resposta transitória entende-se a maneira como o sinal do sistema se comporta quanto t tende a infinito. Visto que a finalidade dos sistemas de controle consiste em adequar a resposta desejada, a resposta transitória de sistemas de controle muitas vezes tem de ser ajustada até que ela seja satisfatória.

No sistema de controle de malha aberta, se não atender as condições desejadas, tem-se que trocar o processo, $G(s)$, ou fazer a inserção de outro controlador em cascata, até encontrar um mais adequado. No entanto em sistemas de controle de malha fechada, se o sistema não atender as respostas desejadas, pode ser ajustado para que assim possa fornecer uma resposta satisfatória, pelo ajuste dos parâmetros da malha de realimentação.

2.4 O Custo da Realimentação

Em sistemas de controle com realimentação, resulta em vantagens descritas nas subseções anteriores. No entanto, as vantagens introduzidas com o uso da realimentação têm um custo, o qual deve ser analisado.

Basicamente, as principais desvantagens da realimentação em relação a malha aberta são:

- Aumento da Complexidade;

Para adicionar a realimentação é necessário considerar vários componentes de realimentação; o componente de medição (sensor) é o componente principal para o funcionamento do sistema. O sensor é muitas vezes o componente mais caro em um sistema de controle. Além disso, o sensor apresenta ruído e imprecisões no sistema.

- Perda de Ganho;

Em um sistema em malha singular, o ganho em malha aberta é $G_c(s)G(s)$ e é reduzida para $G_c(s)G(s) = 1 + G_c(s)G(s)$ em um sistema de realimentação negativa unitário. O ganho de malha fechada é menor por um fator de $1 + G_c(s)G(s)$, que é exatamente o fator que reduz a sensibilidade do sistema a variações de parâmetros e perturbações. Normalmente, tem-se ganho em malha aberta extra, e se está mais do que dispostos a trocá-lo por um maior controle da resposta do sistema.

- Possibilidade de Instabilidade;

Considerando que o sistema em malha aberta é estável, o sistema de malha fechada geralmente é instável.

A adição de realimentação a sistemas dinâmicos coloque mais desafios ao projetar esse tipo de sistema. Contudo, na maioria dos casos, as vantagens superam as desvantagens, e um sistema com realimentação é desejável. Logo, é necessário considerar a complexidade adicional e o problema da estabilidade que um sistema de controle possa existir.

2.5 Método do Lugar das Raízes

Um poderoso método de análise e projeto visando à estabilidade e à resposta transitória, é o método do lugar geométrico das raízes, uma representação gráfica dos polos de malha fechada em função da variação de um parâmetro do sistema, no plano s (NISE, 2012) (Evans, 1948; 1950).

O método do lugar das raízes é amplamente utilizado na análise de sistemas de controle lineares. Sabe-se de (OGATA, 2010), que a resposta transitória de um sistema em malha fechada está intimamente ligada à localização dos polos em malha fechada. Se o sistema possuir um ganho de malha variável então a localização dos polos em malha fechada dependerá do ganho de malha escolhido.

O lugar das raízes fornece soluções para sistemas de qualquer ordem, tornando possível a descrição do desempenho de um sistema onde vários parâmetros são alterados, ou seja, analisando as raízes da equação característica da Função de Transferência de Malha Fechada, verifica-se o desempenho do sistema (NISE, 2012).

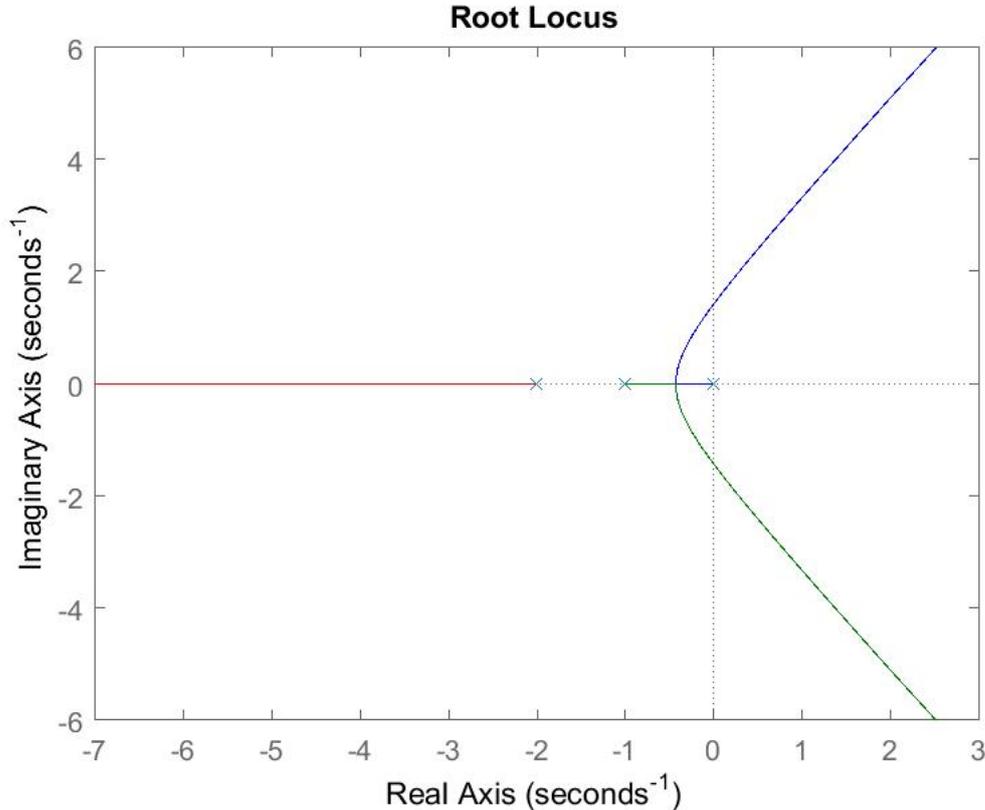
A estabilidade relativa e o desempenho transitório de um sistema de controle em malha fechada estão diretamente relacionados com a posição das raízes em malha fechada da equação característica no plano s .

Se a posição das raízes não for aceitável, podemos fazer os ajustes necessários rapidamente nos parâmetros, podem ser feitos a partir do lugar geométrico das raízes (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

Para a seguinte função de transferência:

$$\frac{1.06}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (2.23)$$

Figura 5 – Lugar das Raízes do Sistema não Compensado



Fonte: (OGATA, 2010)

2.6 Método da Resposta em Frequência

A resposta em frequência de um sistema é definida como a resposta de estado estacionário do sistema a um sinal de entrada sinusoidal. A senoide é um sinal de entrada único, eo sinal de saída resultante para um sistema linear, bem como sinais em todo o sistema, é sinusoidal no estado estacionário; Difere da forma de onda de entrada somente na amplitude e no ângulo de fase (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

Consideremos a saída de um sistema, $Y(s)=T(s)R(s)$ com uma entrada senoidal $r(t) = A \sin(\omega t)$. Temos $R(s) = A\omega/(s^2 + \omega^2)$ e $T(s) = m(s)/q(s) = m(s)/\prod_{i=1}^n (s + p_i)$ considerando p_i , polos distintos. Então na forma de frações parciais temos,

$$Y(s) = \frac{k_1}{s + p_1} + \frac{k_2}{s + p_2} \dots \frac{k_n}{s + p_n} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \quad (2.24)$$

fazendo a Transformada Inversa de Laplace, resulta,

$$y(t) = k_1 e^{-p_1 t} + \dots k_n e^{-p_n t} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (2.25)$$

sendo α e β , são constantes dependentes do problema. Tendo o sistema estável, logo todos os p_i tem parte real positiva e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\} \quad (2.26)$$

visto que os termos exponenciais $k_1 e^{-(p_1 t)}$ declina para zero à medida que $t \rightarrow \infty$.

Caso os polos da função $T(s)$ se encontrem no semi-plano esquerdo do plano imaginário, então a resposta natural do sistema tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. . Desta forma a parte de interesse no estudo de resposta em frequência é a parte forçada da saída. Calculando o limite em $y(t)$, onde $t \rightarrow \infty$ (estado estacionário).

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega^2} \right\} \\ &= \frac{1}{\omega} |A\omega T(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\ &= A |\omega T(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo que $\phi = \angle T(j\omega)$.

Assim, o sinal de saída em regime permanente depende somente da magnitude e da fase de $T(j\omega)$ na frequência específica ω . Convém observar que a resposta em regime permanente descrita na equação 2.6 só é verdade para sistemas $T(s)$ estáveis.

Uma vantagem, segundo (DORF R. C.; BISHOP, 2010), do método de resposta de frequência é a facilidade de se dispor de sinais de teste senoidais para várias faixas de frequência e amplitude. Assim a determinação experimental da resposta de frequência de um sistema é

facilmente realizada e constitui o método mais confiável e simples para a análise experimental de um sistema. Além disso, o projeto de controle no domínio de frequência fornece ao projetista o controle da banda passante do sistema e de algumas medidas da resposta à ruídos e perturbações indesejadas.

Uma das desvantagens deste método é a relação indireta entre a resposta em frequência e a resposta no domínio do tempo. Na prática, as características da resposta em frequência são ajustadas usando critérios de projeto que normalmente resultarão em uma resposta transiente desejável (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

As técnicas de resposta em frequência foram desenvolvidas entre as décadas de 30 e 40 por Bode, Nyquist, Nichols, dentre outros. Como visto a técnica examina a função de transferência $G(s)$ quando $s = j\omega$, o diagrama de Bode é uma das ferramentas utilizadas para representar o número complexo $G(s)$ à medida que ω varia, que relaciona a resposta em frequência a malha aberta $G(j\omega)H(j\omega)$ ao número de zeros e polos de $1+G(s)H(s)$ que estão no semiplano direito do semiplano s . Deste modo, é uma alternativa a técnica ao lugar das raízes, para análise e projetos de sistemas (DORF R. C.; BISHOP, 2010).

2.6.1 Diagrama de Bode

O diagrama de Bode, é um método gráfico que permite a análise da resposta em frequência de sistemas de controle lineares. Os diagramas de Bode consistem em dois gráficos que, conjuntamente, representam o módulo e o ângulo de fase de uma função complexa da frequência ω .

A função de transferência no domínio da frequência é

$$G(j\omega) = |G(\omega)e^{j\phi(\omega)}| \quad (2.28)$$

e pode ser representada por dois gráficos separados: módulo (magnitude) versus frequência e ângulo de fase (em graus) versus frequência. Assim um diagrama de Bode consiste em dois gráficos: um é um gráfico do logaritmo do módulo de uma função de transferência senoidal; o outro é um gráfico do ângulo de fase; ambos são construídos em função da frequência em escala logarítmica.

Tendo a seguinte função de transferência:

$$G(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)\dots(s + z_k)}{s^m(s + p_1)(s + p_2)\dots(s + p_n)} \quad (2.29)$$

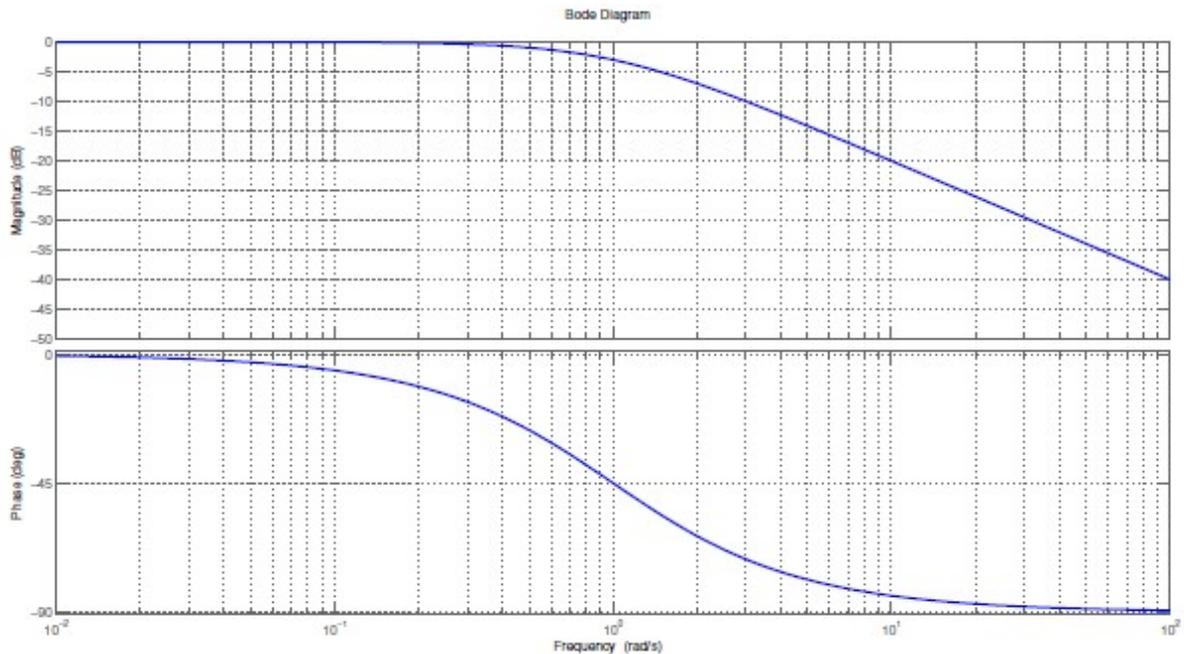
A magnitude da resposta em frequência é o produto da magnitude das respostas de frequência de cada termo, ou seja,

$$|G(s)| = K \frac{|(s + z_1)||s + z_2|\dots|(s + z_k)|}{|s^m||s + p_1||s + p_2|\dots|(s + p_n)|} \Bigg|_{s \rightarrow j\omega} \quad (2.30)$$

O módulo de $G(j\omega)$ pode ser também representado por $20\log_{10}|G(j\omega)|$. A unidade usada com essa representação do módulo é o de decibel (*dB*). A figura 6 apresenta um exemplo de diagramas de Bode para $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$, com $\tau = 1$.

A frequência $\omega = 1/\tau$, conhecida como frequência de corte. No exemplo da figura 6, a frequência de corte é $\omega = 1$.

Figura 6 – Diagrama de Bode para $G(j\omega) = 1/(j\omega\tau + 1)$, com $\tau = 1$



Fonte: Adaptado de DORF R. C.; BISHOP (2010).

A representação logarítmica é útil pelo fato de mostrar tanto o comportamento do sistema tanto em baixas frequências como para altas frequências em um único diagrama. A expansão da faixa de baixa frequência utilizando escala logarítmica é de grande vantagem, já que as características em baixas frequências são geralmente as mais importantes nos sistemas práticos.

Uma outra aplicação é a determinação experimental de uma função de transferência, que pode ser realizada de modo simples se os dados de resposta em frequência estiverem apresentados na forma de um diagrama de Bode.

Sabe-se que os quatro tipos de fatores diferentes são os que podem ocorrer em uma função de transferência são:

1. Ganho constante K_b ;
2. Polos (ou zeros) na origem ($j\omega$);
3. Polos (ou zeros) sobre o eixo real ($j\omega\tau + 1$);

4. Polos (ou zeros) complexos conjugados $\left[1 + \left(\frac{2\zeta}{\omega_n}\right)j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$.

Pode-se gerar o gráfico de magnitude logarítmica e de ângulo de fase para estes quatro fatores e então utilizá-los para obter diagramas de Bode para qualquer forma geral de função de transferência. Tipicamente, as curvas para cada fator são obtidas e em seguida adicionadas graficamente para obter as curvas relativas à função de transferência completa. Além disto, este procedimento pode ser simplificado usando aproximações assintóticas e obtendo as curvas reais somente em frequências específicas importantes

Ganho Constante K_b . O ganho logarítmico para a **constante K_b** é

$$20\log K_b = \text{constante em dB} \quad (2.31)$$

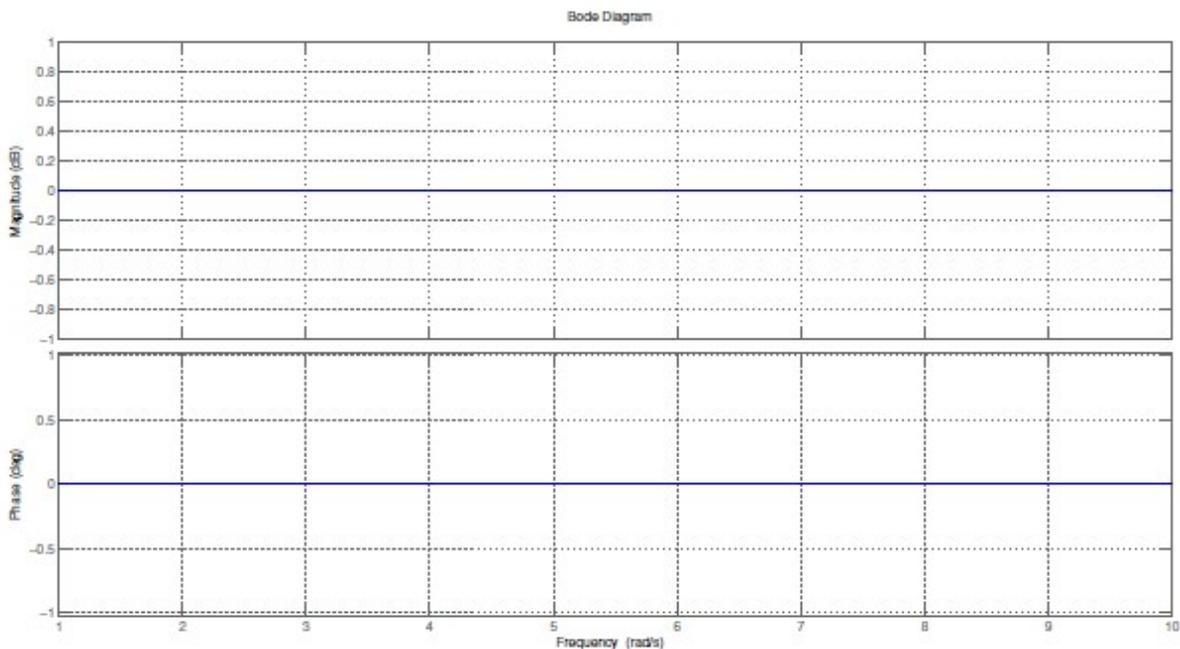
e o ângulo de fase

$$\phi(\omega) = 0 \quad (2.32)$$

A curva de ganho é simplesmente uma reta horizontal no diagrama de Bode de magnitude.

Se o ganho for um valor negativo, $-K_b$, o ganho logarítmico continua sendo $20\log K_b$. O sinal negativo é levado em conta no ângulo de fase, -180° . Os diagramas de Bode de magnitude e de ângulo de fase de K_b são apresentados na figura 7 para $G(j\omega) = K_b = 1$.

Figura 7 – Diagrama de Bode para $G(j\omega) = K_b = 1$



Polos (ou Zeros) na origem ($j\omega$). Um polo na origem possui uma magnitude logarítmica.

$$20\log \left| \frac{1}{j\omega} \right| \quad (2.33)$$

e o ângulo de fase

$$\phi(\omega) = -90^\circ \quad (2.34)$$

Observando função conclui-se que a reta de magnitude passa pela origem do gráfico logarítmico, com inclinação $-20\text{dB}/\text{dec}$. Analogamente, para um polo múltiplo na origem, tem-se

$$20\log \left| \frac{1}{(j\omega)^N} \right| = -20 N \log \omega \quad \text{dB} \quad (2.35)$$

e o ângulo de fase

$$\phi(\omega) = -90^\circ \quad (2.36)$$

A reta de magnitude tem inclinação de $-20 N \text{ dB}/\text{dec}$.

Já para um **zero na origem**, tem-se a seguinte magnitude logarítmica

$$20\log |(j\omega)| = +20 N \log \omega \quad (2.37)$$

sendo a inclinação é de $+20 \text{ dB}/\text{dec}$, e o ângulo de fase é

$$\phi(\omega) = +90^\circ \quad (2.38)$$

Na figura 8 são apresentados os diagramas de Bode e de ângulo de fase de $(j\omega)^{\pm N}$ para $N = 1$ e $N = 2$.

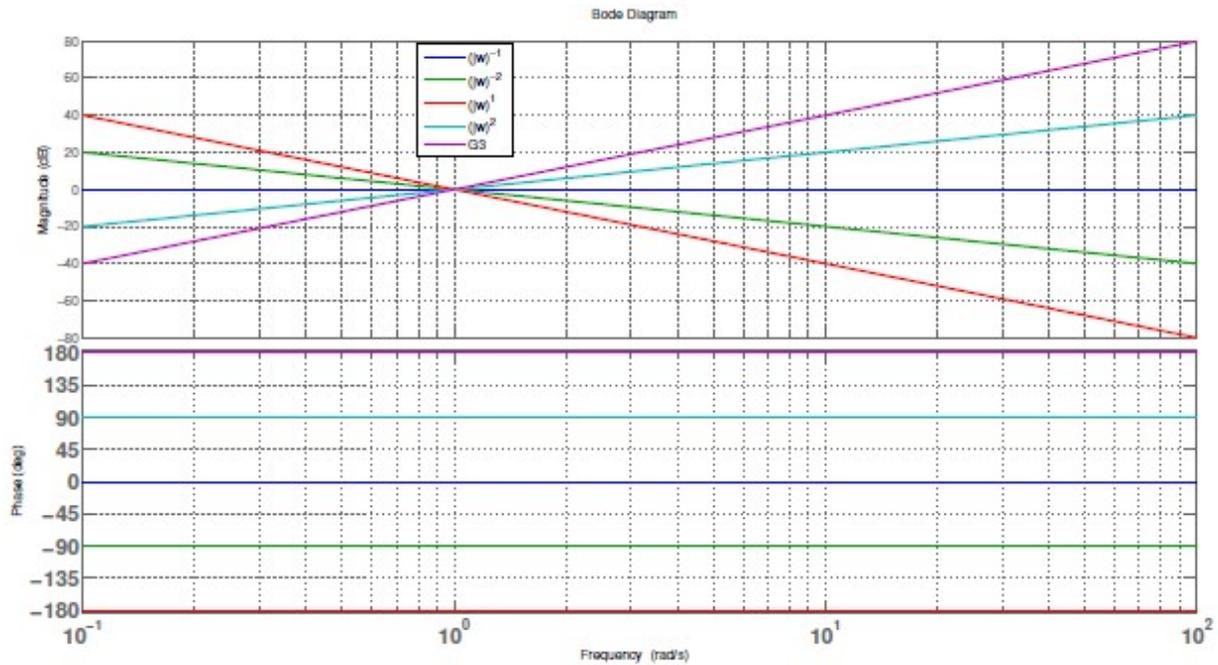
Polos (ou zeros) sobre o eixo real $j\omega a$. Seja uma função de transferência da forma

$$G(j\omega) = j\omega + a = j\frac{\omega}{a} + 1 \quad (2.39)$$

e magnitude

$$20\log \left| 1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right| = 10\log \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2} \right) \quad (2.40)$$

Para baixas frequências ($\omega \ll \frac{1}{\tau}$) pode-se aproximar o módulo por **-20 log 1 = 0 dB**. Para frequências elevadas ($\omega \gg \frac{1}{\tau}$) pode-se aproximar o valor do módulo por **-20 log $\omega\tau$** , que tem sua inclinação de **-20 db/dec**. Logo a representação da curva de módulo pode ser representada por duas retas assintóticas que se cruzam no ponto $\omega = \frac{1}{\tau}$ (conhecida como **frequência de corte**). O qual é importante para esboço de curvas de resposta em frequência logarítmica. O ângulo de fase pode ser calculado por $\phi = -\tan^{-1}(\omega\tau)$.

Figura 8 – Diagrama de Bode para $(j\omega)^{\pm N}$ 

Fonte: Adaptado de DORF R. C.; BISHOP (2010).

Os diagramas de Bode para polos e zeros no eixo real são apresentados na Figura 9, onde $a = 1$.

Polos (ou zeros) complexos conjugados. O fator quadrático devido a um par de polos complexos conjugados pode ser escrito na forma normalizada como

$$[1 + j2\zeta u - u^2]^{-1} \quad (2.41)$$

onde $u = \omega/\omega_n$. Logo, a magnitude logarítmica é

$$-20\log|G(j\omega)| = -10\log((1 + u^2)^2 + 4\zeta^2 u^2) \quad (2.42)$$

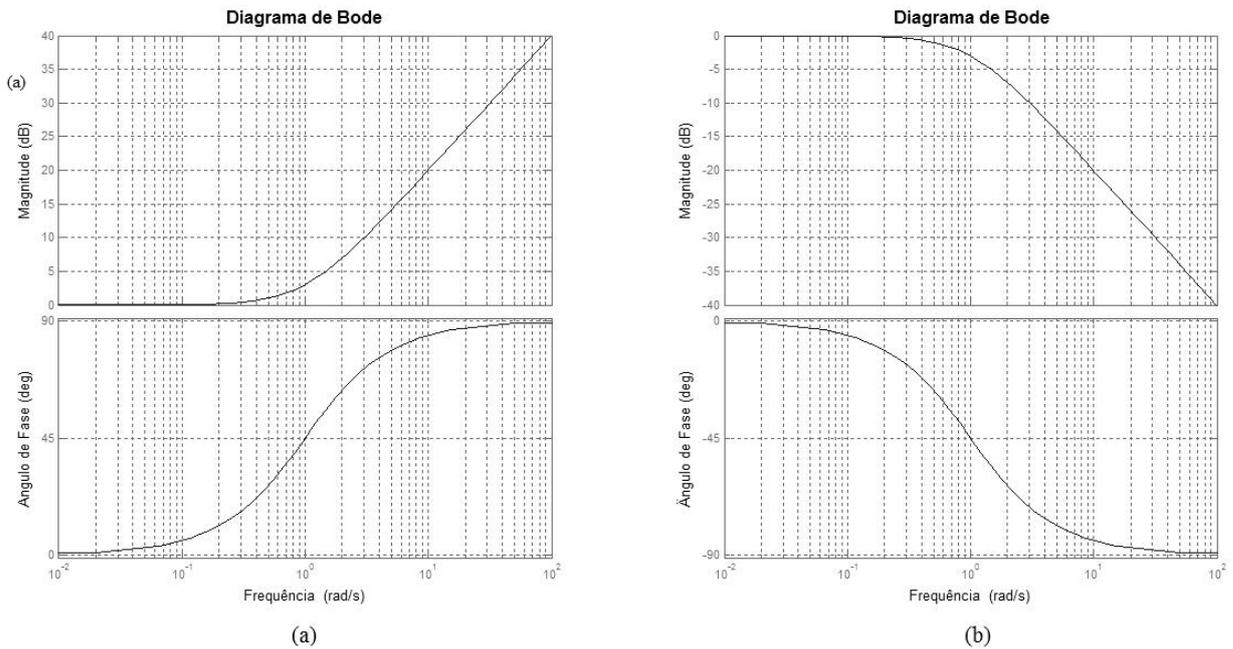
e o ângulo de fase

$$-\phi = -\tan^{-1} \frac{2\zeta u}{(1 - u^2)} \quad (2.43)$$

quando $u \ll 1$, a magnitude é

$$-20\log|G| = -10\log 1 = 0 \text{ dB} \quad (2.44)$$

e o ângulo de fase vai para 0° .

Figura 9 – Diagrama de Bode para a) $G(j\omega) = (j\omega + a)$ e b) $G(j\omega) = (j\omega + a)^{-1}$ 

Fonte: EVANGELISTA (2016. 75f.).

Quando $u \gg 1$, a magnitude logarítmica tende a

$$-20 \log |G| = -10 \log u^4 = -40 \log u \quad (2.45)$$

ou seja, resulta em uma curva de inclinação de -40dB/dec e o ângulo de fase tende a -180° .

O valor máximo da resposta de frequência, $M_{p\omega}$, ocorre na frequência de ressonância ω_r . A frequência de ressonância é representada por

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta < 0,707 \quad (2.46)$$

e o valor máximo da magnitude $|G(\omega_r)|$

$$M_{p\omega} = |G(\omega_r)| = \left(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}\right)^{-1}, \quad \zeta < 0,707 \quad (2.47)$$

O diagrama de Bode para um fator quadrático devido a um par de polos complexos conjugados é mostrado na figura 11.

3 PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO

3.1 Especificações de Desempenho

Sistemas de controle são projetados para realizar tarefas específicas. Tendo algumas especificações de desempenho ao sistema de controle. As especificações podem ser dadas em termos de requerimentos da resposta transitória (tal como máximo overshoot e tempo de assentamento em resposta ao degrau) e requerimentos de estado estacionário (tal como erro do estado estacionário) ou pode ser dado em termos de resposta em frequência.

As especificações de um sistema de controle devem ser dadas antes do início do projeto e, geralmente, as especificações de desempenho não devem ser muito mais rigorosas que o necessário para executar a tarefa. Se a precisão na operação em estado estacionário é de extrema importância em um dado sistema de controle, então nós não devemos requerer especificações desnecessariamente rigorosas na resposta transitória, pois tais especificações requerem componentes caros. Lembrando que a parte mais importante no projeto de um sistema de controle é definir os requerimentos de desempenho de forma que eles irão garantir um sistema ótimo para seu propósito (OGATA, 2010)).

3.2 Compensação do Sistema

Definir o ganho é o primeiro passo no ajuste do sistema para desempenho satisfatório. Em muitos casos práticos, no entanto, somente o ajuste do ganho poderá não prover alteração suficiente do comportamento do sistema para alcançar as especificações dadas. Como é frequentemente o caso, aumentar o valor do ganho pode melhorar o comportamento em estado estacionário mas irá resultar em estabilidade pobre ou até mesmo instabilidade. É, então, necessário reprojeter o sistema (por meio da modificação da estrutura incorporando dispositivos ou componentes adicionais) para alterar o comportamento geral de maneira que o sistema irá se comportar como desejado. Tal reprojeto ou adição de um dispositivo adequado é chamado compensação, a modificação das dinâmicas do sistema para satisfazer as especificações dadas. Um dispositivo inserido no sistema com o propósito de satisfazer as especificações é chamado de compensador (OGATA, 2010).

3.3 Características de Sistemas de Controle com Realimentação

Ao projetar um sistema de controle, diferentes características precisam ser avaliadas, de acordo com a seus requisitos e funcionalidade. As especificações mais comuns são relativas à precisão, estabilidade, desempenho, ou tempo de resposta.

Controlar um processo significa, então, atuar sobre ele, ou sobre as condições a que o processo está sujeito de modo a atingir algum objetivo. Logo, é preciso ter um conhecimento

claro do objetivo do sistema.

Um projeto de sistema de controle tem como objetivo projetar uma estrutura que acate de maneira satisfatória as especificações do sistema. Assim, a escolha de aparelhos adequados à aplicação, ajustando os parâmetros necessários para obter um bom desempenho do sistema (HAYKIN SIMON E VEEN, 2001).

Ao começar um projeto, determinadas especificações devem ser analisadas para que o sistema possa ser utilizado de forma segura e estável. O comportamento de um sistema pode ser analisado de acordo com a sensibilidade às variações de parâmetros e perturbações, ou seja, ao variar o valor de um determinado dispositivo, o sistema deve responder da maneira esperada. Do contrário, o processo poderá não ter o efeito desejado.

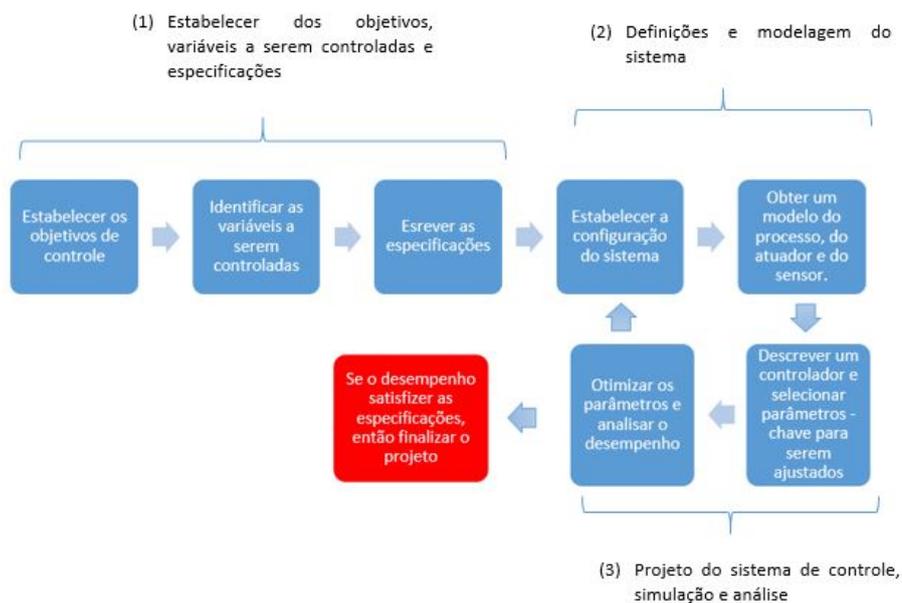
No projeto de sistemas de controle é considerada a parte principal é a etapa de modelagem, pois nessa etapa se tiver algum erro, irá afetar todo o processo. As especificações qualitativas podem definir vários atributos do sistema, tais como: tempo de resposta, tempo de assentamento, tempo de subida, sobressinal, faixa de operação, margem de erro, dentre outros.

As especificações quantitativas, temos algumas características que podem definir o funcionamento do sistema e os requisitos que o sistema deve atender, dentre elas, podem-se destacar: polos dominantes, zeros, banda passante, tempo de subida, tempo de resposta, margem de ganho, margem de fase e estabilidade relativa.

Considerando-o no domínio da frequência, o desempenho é medido em relação às margens de ganho e de fase, definindo assim a estabilidade relativa (HAYKIN SIMON E VEEN, 2001).

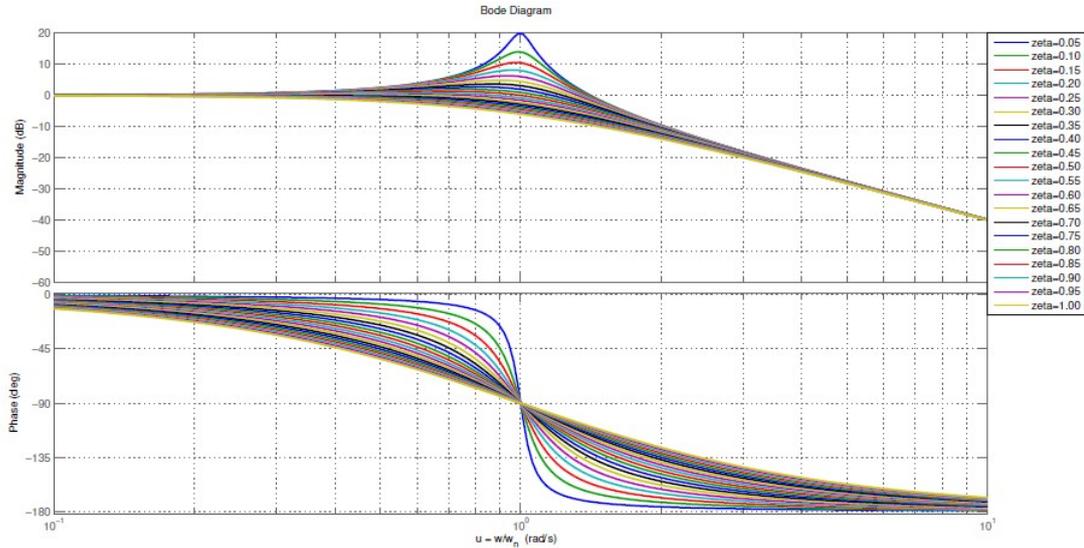
A figura 10 apresenta durante um projeto de sistemas de controle, as principais características a serem consideradas.

Figura 10 – Processo de Projeto de Sistemas de Controle.



Fonte: Adaptado de (DORF R. C.; BISHOP, 2010)

3.3.1 Especificações de Desempenho em Malha Fechada

Figura 11 – Diagrama de Bode para $G(j\omega) = (1 + (2\zeta/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2)^{-1}$ 

Fonte: Adaptado de (DORF R. C.; BISHOP, 2010)

Temos na figura 11 uma curva típica da resposta em frequência em sistemas de controle de malha fechada. Estes gráficos apresentam as seguintes grandezas de características:

PICO DE RESSONÂNCIA (M_r)

É definido como o maior valor de magnitude $M = |G(j\omega)/(1 + G(j\omega)H(j\omega))|$. Em regra, o máximo valor de M_r dá uma indicação de estabilidade relativa. Normalmente, um grande valor de M_r está relacionado com a fração de amortecimento, assim, correspondente também ao sobressinal da resposta temporal. O pico de ressonância só ocorre em sistemas de 2ª ordem sub amortecido com fração de amortecimento $\zeta \leq 0,707$. O valor de M_r é calculado pela expressão

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3.1)$$

FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA OU FREQUÊNCIA DE PICO (ω_r)

É a frequência onde ocorre o pico de ressonância e calculada pela expressão

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} \quad (3.2)$$

FREQUÊNCIA DE CORTE E LARGURA DE BANDA ω_b

É definida como frequência onde a magnitude de resposta cai para 70,7% do nível de frequência zero, ou seja, para 3dB do ganho de frequência zero. A largura de banda está associada com a velocidade da resposta temporal, onde quando maior a largura de banda, maior a velocidade de resposta do sistema. O valor de ω_b é expressa por

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} \quad (3.3)$$

MARGEM DE GANHO (G_m)

Define – se como a variação requerida no ganho de malha aberta para levar o sistema à instabilidade. Sistemas com margem de ganho grande possuem baixa sensibilidade para mudanças de parâmetros no sistema antes de ocorrer a instabilidade em malha fechada.

MARGEM DE FASE (P_m)

É o valor angular a ser acrescido ou decrescido à curva de fase da resposta em frequência de um sistema operando em malha aberta na frequência em que a curva de módulo da resposta em frequência deste mesmo sistema apresenta valor unitário (ou 0.0 dB).

4 PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE ROBUSTO

Segundo Dorf e Bishop (2010), no projeto e modelagem de um sistema de controle, o modelo obtido sempre será uma representação inexata do sistema físico real. Dito isso por causa de:

- Mudanças nos parâmetros;
- Dinâmica não modelada;
- Retardos não incluídos no modelo;
- Mudanças no ponto de equilíbrio;
- Ruídos do sensor;
- Perturbações imprevísíveis.

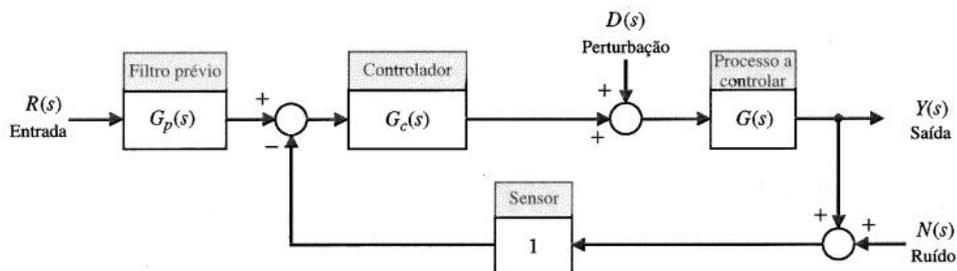
Dessa maneira, o objetivo do projeto de sistemas robustos é garantir que o sistema atue dentro da margem de desempenho esperado, mesmo na presença de incertezas no sistema físico real. Um sistema é dito robusto, segundo Dorf e Bishop (2010), quando:

- Apresenta baixa sensibilidade;
- É estável sobre grande faixa de variações de parâmetros;
- O desempenho do sistema continua a atender as especificações de desempenho mesmo na presença de um conjunto de mudanças nos parâmetros do sistema.

A figura 12 mostra as possíveis incertezas que atuam em um sistema de controle.

Nesta seção, as incertezas e perturbações serão explicita e quantitativamente tomadas em consideração durante o projeto do controlador. Isto é referido como projeto de controlador

Figura 12 – Diagrama de Blocos de um Sistema de Controle em Malha Fechada.

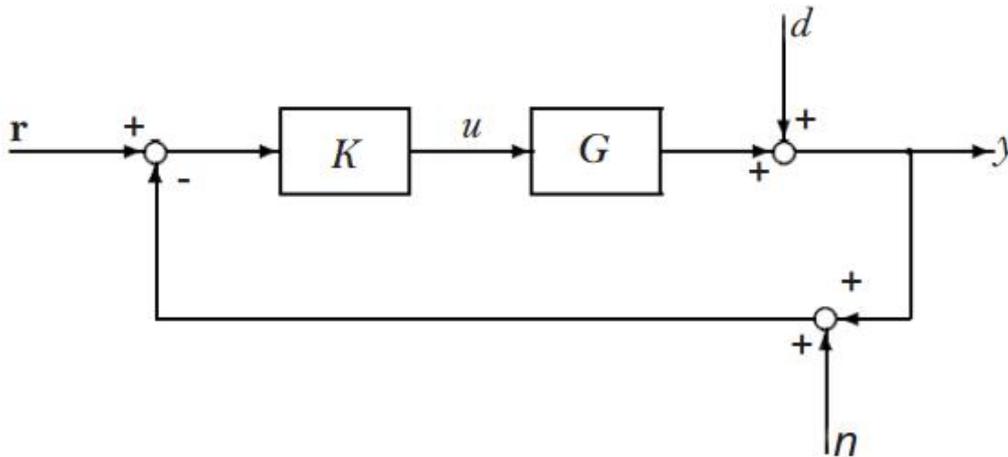


Fonte: (DORF R. C.; BISHOP, 2010)

robusto, e tem sido foco de pesquisa ao longo de décadas. Para resolução do problema do presente trabalho, será utilizado o controlador LQR.

4.1 Compromisso de Controle com Realimentação

Figura 13 – Representação de um Sistema com Realimentação e um Grau de Liberdade.



Fonte: (SKOGESTAD S.; POSTLETHWAITE, 2007)

Seja a configuração de um sistema com um grau de liberdade, mostrada na figura 13. A interconexão da planta do sistema, $G(s)$, com o controlador K , é acionada por um sinal de controle $r(t)$. Seja tomada a função de sensibilidade dada por $S = (I + GK)$, as seguintes relações podem ser tiradas:

$$Y(s) = T(s)r(s) + S(s)d(s) - T(s)n(s) \quad (4.1)$$

$$u(s) = K(s)S(s)[r(s) - n(s) - d(s)] \quad (4.2)$$

Visto isso, tomando em conta as relações assim, pode-se determinar vários objetivos de malha fechada, além do objetivo de encontrar o valor de K tal que G seja estável, os quais são:

1. Para a rejeição a perturbação, fazer $\bar{\sigma}(S)^1$ pequeno;
2. Para a atenuação do ruído, fazer $\bar{\sigma}(T)$ pequeno;
3. Para o rastreamento de referência, fazer $\bar{\sigma}(T) \approx \underline{\sigma}(T) \approx 1^2$
4. Para a redução de energia de controle, fazer $\bar{\sigma}(KS)$ pequeno;

Se a incerteza não estruturada no modelo da planta G é representado por uma perturbação aditiva, isto é, $G_p = G + \Delta$, em seguida, um objetivo da malha fechada é ainda.

5. Para estabilidade robusta de uma perturbação aditiva, fazer $\bar{\sigma}(KS)$ pequeno;

Alternativamente, se a incerteza é modelada por uma perturbação de saída multiplicativa de tal modo que $G_p = (I + \Delta)G$, então temos:

6. Para estabilidade robusta na presença de uma perturbação de saída multiplicativa, fazer $\bar{\sigma}(T)$ pequeno.

$\bar{\sigma}$: significa maior valor singular

$\underline{\sigma}$: significa menor valor singular

As requisições de malha fechada enumeradas acima, nem sempre todas poderão ser satisfeitas simultaneamente, pois os esses objetivos são conflitantes. O projeto de malha fechada é, portanto, uma compensação sobre frequência de objetivos conflitantes. Conciliar esses objetivos nem sempre é algo difícil, porque as faixas de frequência em que os objetivos são importantes pode ser bastante diferente. Por exemplo, rejeição a perturbação é tipicamente uma exigência de baixa frequência, enquanto que a mitigação de ruído é, frequentemente, só nas altas frequências (SKOGESTAD S.; POSTLETHWAITE, 2007).

O ganho de malha clássico é a magnitude dada pela função de transferência de malha aberta $L=GK$, a qual é conformada, ao passo que as exigências do projeto acima são todas referente a função de transferência de malha fechada. No entanto, sabe-se que

$$\underline{\sigma}(L) - 1 \leq \frac{1}{\bar{\sigma}(S)} \leq \underline{\sigma}(L) + 1 \quad (4.3)$$

Da equação 4.3 que $\bar{\sigma}(S) \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(L)}$ na baixa frequência sendo $\underline{\sigma}(L)$ é muito maior que 1.

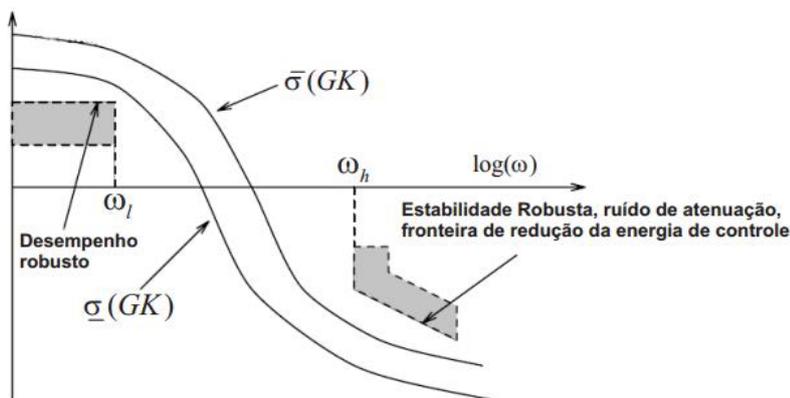
Visto também que na frequência de largura de banda (sendo $\frac{1}{\bar{\sigma}(S(j\omega_b))} = \sqrt{2} = 1.44$), tem - se que $\underline{\sigma}(L(j\omega_b))$ entre 0.41 e 2.41. Além disso de $T = L(I + L)^{-1}$, temos que $\bar{\sigma}(T) \approx \bar{\sigma}(L)$, nas frequências sendo $\bar{\sigma}(L)$ é pequeno. De tal modo, ao longo de frequência específica, é relativamente fácil de aproximar os requisitos de circuito fechado pelos seguintes objetivos em malha aberta:

1. Para a rejeição a perturbação, fazer $\underline{\sigma}(GK)$, grande; válido para frequências em que $(\bar{\sigma})(GK) \gg 1$;
2. Para a atenuação de ruído, fazer $(\bar{\sigma})(GK)$, pequeno; válido para frequências em que $(\bar{\sigma})(GK) \ll 1$;
3. Para o rastreamento de referência $\underline{\sigma}(GK)$, grande; válido para frequências em que $(\bar{\sigma})(GK) \gg 1$;
4. Para a redução da energia de controle, fazer $(\bar{\sigma})(GK)$ pequeno; válido para frequências em que $(\bar{\sigma})(GK) \ll 1$;

5. Para a estabilidade robusta a uma perturbação aditiva, fazer $(\bar{\sigma})(GK)$ pequeno; válido para frequências em que $(\bar{\sigma})(GK) \ll 1$;
6. Para a estabilidade robusta a uma perturbação multiplicativa, fazer $(\underline{\sigma})(GK)$ pequeno; válido para frequências em que $(\underline{\sigma})(GK) \ll 1$;

Caracteristicamente, as condições de malha aberta de 1 e 3, são válidas e importantes nas baixas frequências, $0 \leq \omega \leq \omega_l \leq \omega_B$, enquanto 2,4,5 e 4 são condições que são válidas e importantes nas altas frequências $\omega_B \leq \omega_h \leq \omega \leq \infty$, ilustrado na figura 14.

Figura 14 – Projeto de compensações para função de transferência de malha multivariável GK.



Fonte: (SKOGESTAD S.; POSTLETHWAITE, 2007)

Na figura, podemos observar que em uma frequência, que se deseja altos ganhos (baixas frequências), a direção do “pior caso” é relatada para $\underline{\sigma}(GK)$, enquanto que em frequências, sendo queremos ganhos baixos (em altas frequências) a direção de “pior caso” direção está relacionada com $\bar{\sigma}(GK)$.

Segundo SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007), com base na figura 14, o engenheiro de controle deve projetar K de modo que $(\bar{\sigma})$ e $\underline{\sigma}$ evitem as regiões sombreadas mostradas no gráfico. Para um desempenho aceitável $(\bar{\sigma})$ deve se situar acima do limite de desempenho para todo ω até ω_l e e para a estabilidade robusta forçamos o $(\bar{\sigma})$ a pertencer a um limite de robustez para todo ω até ω_l . A forma dos valores singulares de GK pela seleção de K é uma tarefa relativamente fácil, mas para fazer isso de uma forma que também garanta a estabilidade de malha fechada é difícil, geralmente. A estabilidade de malha fechada não pode ser determinada pelos valores singulares de malha aberta.

Para um sistema SISO, a estabilidade está intimamente relacionada com o ganho de malha aberta e do ângulo de fase perto do ponto de corte ω_c , sendo $\|GK(j\omega_c) = 1$. Em particular, a taxa de *roll-off* de alto a baixo ganho no corte é limitada por requisitos da fase de estabilidade e, na prática, o que corresponde a uma taxa de *roll-off* menor que 40dB/década. Uma consequência imediata disso, é que há um limite baixo para a diferença entre ω_h e ω_l na figura 14.

4.2 Controle Ótimo Quadrático

Controle Ótimo Quadrático, conhecido por Controle LQR, apresenta a vantagem de que o sistema a ser projetado sempre será estável exceto no caso em que o sistema não seja controlável (OGATA, 2010) (TIAGO OLIVEIRA et al., 2014).

Regulador Quadrático Linear (do inglês Linear Quadratic Regulator - LQR) é um dos métodos de controle ótimo baseado em espaço de estados. Nesta seção, se descreverá este método. Considera-se um sistema Linear Invariante no Tempo (LTI) dado por seu modelo no espaço de estados.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \quad (4.4)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ dada esta equação do sistema, o sinal de controle é definido de modo que u seja uma função das variáveis de estado x , desta forma:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.5)$$

O Regulador Linear Quadrático (LQR) é um tipo especial de controle ótimo que lida com sistemas lineares (no estado e no controle) e minimização da função objetivo ou custo que são quadrática ou o índice de desempenho quadrático

O projeto do sistema de controle ótimo consiste em escolher um vetor de controle $u(t)$ de modo que um dado índice de desempenho J possa ser minimizado.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.6)$$

sendo Q é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semi definida positiva, ou seja, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $Q \geq 0$ ou real simétrica e R é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica, ou seja, $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $R > 0$ e u não tem restrições

As matrizes Q e R determinam o consumo de energia dos sinais de controle, desta forma, Q e R definem o peso relativo que o estado e o sinal do controle têm no cálculo do critério J (ROSA FILHO, 2011).

A equação 4.5 será conhecida como a lei de controle ótimo. Utilizando a metodologia de controle ótimo para encontrar a matriz de ganho K garante que o sistema será estável para todo valor inicial $x(0)$ desde que o sistema seja de estados completamente controláveis (OGATA, 2010). A figura 15 mostra o diagrama de blocos do controle por LQR.

Considerando a função de custo, pode-se encontrar a solução da equação algébrica de Riccati (EAR) que é dada pela expressão:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.7)$$

A matriz P pode ser obtida através da EAR, desta forma pode-se calcular o valor da matriz de ganho K , dada por:

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (4.8)$$

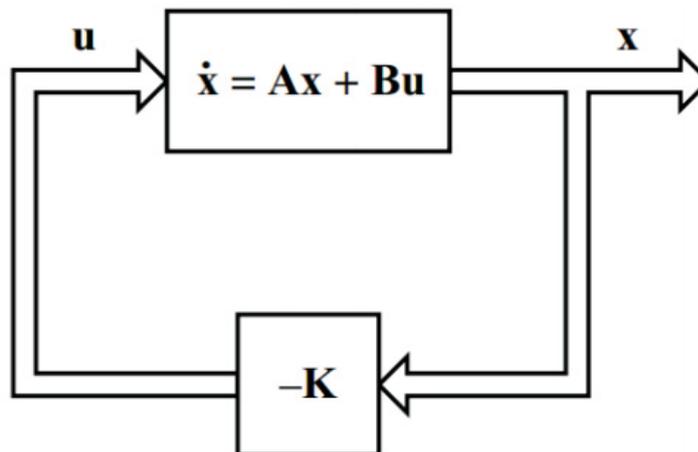
Em que os polos do Sistema em malha fechada são os autovalores da matriz $A - BK$.

No problema LQR, as matrizes de ponderação Q e R possuem um efeito profundo sobre o desempenho do controlador projetado. Desta forma, é necessário encontrar os melhores valores. Nisso, necessitando de muito esforço computacional e de tentativa e erro, o que é bastante dispendioso. Assim, utilização de métodos de otimização inteligente para encontrar Q e R é mais eficaz, conforme Ghoreishi, Nekoui e Basiri (2011) e eAbreu e Fonseca (2010).

Segundo (OGATA; YANG, 2010), as etapas de projeto LQR podem ser enunciadas como a seguir:

- Determinar as matrizes de ponderação Q e R .
- Determinar a matriz P que satisfaz a equação 4.8, equação matricial reduzida de Riccati.
- Determinar a matriz K pela equação 4.8.

Figura 15 – Sistema Regulador Ótimo.



Fonte: (DORF R. C.; BISHOP, 2010)

4.3 Controlabilidade

Segundo Dorf e Bishop (2010) Um modelo ou sistema é dito para ser completamente estado controlável ou simplesmente controlável, se e apenas se existe uma entrada de controle $u(t)$ que vai conduzir todo o estado inicial, $x(t_0)$ no tempo inicial, para, a qualquer final desejado

estaduais, $x(t_f)$, durante um intervalo de tempo finito $t_f - t_0 \geq 0$. Caso contrário, o modelo não é totalmente de estado controlável. (OGATA, 2010).

Técnicas avançadas de projetos de variáveis de estado podem lidar com situações em que o sistema não é completamente controlável, porém os estados (ou as combinações lineares dos mesmos) que não podem ser controlados são inerentemente estáveis. Estes sistemas são classificados como estabilizáveis. Se um sistema é completamente controlável, é também estabilizável.

Considere o sistema de tempo contínuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.9)$$

Onde:

x = vetor de estados (*vetor* – n)

u = sinal de controle (escalar)

A = matriz $n \times n$

B = matriz $n \times 1$

O sistema na equação 4.9 é considerado controlável em $t = t_0$ se for possível obter um sinal de controle amplo que irá transferir um estado inicial para qualquer estado final em um intervalo finito de tempo $t_0 \leq t \leq t_1$. Se todos os estados são controláveis, então é dito completamente controlável. Devemos derivar a condição para controlabilidade completa de estados. Sem perda de generalidade, assumiremos que o estado final é a origem do espaço de estado e que o tempo inicial é zero ou $t_0 = 0$. A solução da equação 4.9 é

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (4.10)$$

Prova - se para que para um sistema de ordem n seja completamente controlável, a denominada matriz de controlabilidade (M_c) deve ter posto n (pleno), ou seja deve ter n linhas (ou colunas) linearmente independentes. Se a matriz de controlabilidade for quadrada, isso equivale a seu determinante ser diferente de zero.

A matriz de controlabilidade tem a forma:

$$M_c = \left\{ [BA \quad BA^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \right\} \quad (4.11)$$

4.4 Observabilidade

Analogamente ao conceito de controlabilidade, temos outro conceito, o de **observabilidade**.

Um modelo é dito ser completamente observável ou simplesmente observável, se e apenas se todas as estado $x(t)$ do modelo pode ser reconstruído simplesmente pelo conhecimento

completo da entrada de controle $L(t)$ e a saída $y(t)$ ao longo de um intervalo de tempo finito $t_f - t_0 \geq 0$. Caso contrário, o modelo não é completamente observável.

O conceito de observabilidade é útil na resolução do problema de reconstrução de variáveis de estado que não podem ser medidas a partir de variáveis que podem ser medidas na menor duração de tempo possível. Nesta seção tratamos apenas sistemas lineares e invariantes no tempo. Logo, sem perda de generalidade, podemos assumir que $t_0 = 0$.

O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com controle por realimentação de estados é que algumas variáveis de estado não estão acessíveis para medições diretas, com o resultado de que se torna necessário estimar as variáveis de estado que não podem ser medidas a fim de construir os sinais de controle (OGATA, 2010).

Prova-se que para um sistema de ordem n seja completamente observável, a denominada matriz de observabilidade

$$M_{ob} = \begin{Bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

deve ter posto n (pleno), ou seja, deve ter n linhas (ou colunas) linearmente independente. Se a matriz de observabilidade for quadrada, isso equivale a seu determinante ser diferente de zero.

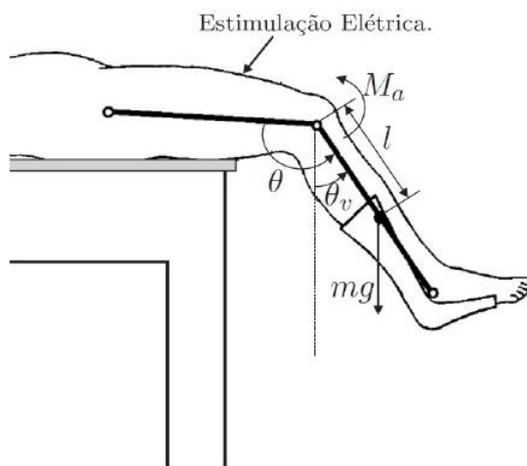
Para sistemas parcialmente observáveis, se os modos não observáveis forem estáveis e os modos observáveis forem instáveis, o sistema é dito detectável.

5 MODELO MATEMÁTICO DO COMPLEXO CANELA-PÉ PARA PLANTA DA PERNA DE UM PACIENTE PARAPLÉGICO

O controle dos movimentos da perna de pacientes paraplégicos através da estimulação elétrica é um assunto muito estudado dentro da área de Engenharia de Reabilitação. O uso de modelos matemáticos fornece uma previsão do comportamento do músculo estimulado, possibilitando escolher o melhor padrão de estímulos a ser utilizado (GAINO, 2009).

O modelo aqui trabalhado, foi proposto por Ferrarin e Pedotti (2000) e adaptado por Tiago C. de Oliveira (2014), compara o tamanho do pulso aplicado ao músculo do membro inferior com o torque gerado em torno da articulação do joelho. O modelo consiste em apenas dois segmentos, a coxa e o complexo canela-pé, desconsiderando o tornozelo, assim diminuindo o grau de liberdade do sistema. A figura 16 ilustra o sistema.

Figura 16 – Esquema dos Membros Inferiores, para o Processo de Sistema de Controle.



Fonte: Adaptado de (FERRARIN; PEDOTTI, 2000)

Na modelagem considerou-se o membro inferior como uma cadeia cinemática aberta composta de dois segmentos rígidos: a coxa, e o complexo canela-pé, conforme mostra a figura 16. Seguindo os valores encontrados, mostrados na Tabela 1, são apresentados valores antropométricos de um paciente paraplégico obtidos de maneira experimental por (Ferrarin e Pedotti, 2000),

J	$0.362[Kgm^2]$
i	$4.37[Kg]$
l	$23.5[cm]$
B	$0.27[Nms/rad]$
λ	$41.208[Nm/d]$
E	$2.024[1/rad]$
ω	$2.918[rad]$
τ	$0.951[s]$
G	$42500[Nm/s]$

Tabela 1: Grandezas Antropométricas do Paciente (Ferrarin e Pedotti, 2000)

sendo que:

- J é o momento inercial do complexo de canelapé;
- θ é o ângulo comum do joelho (ângulo entre a canela e a coxa no plano sagital);
- $\dot{\theta}$ é a velocidade angular comum do joelho;
- θ_v é o ângulo da canela (ângulo entre a canela e o sentido vertical no plano sagital);
- $\ddot{\theta}$ é a aceleração angular da canela;
- m é a massa do complexo canela-pé;
- g é a aceleração gravitacional;
- l é a distância entre o joelho e o centro da massa do complexo canela-pé;
- B é o coeficiente de atrito viscoso.
- λ e E são coeficientes do termo exponencial e
- ϖ o ângulo elástico de repouso do joelho.

Com esses valores foi possível chegar a um modelo em espaço de estados.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \check{f}_{21}(x_1(t)) & -\frac{B}{J} & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Sendo $\check{f}_{21}(x_1(t))$ uma não linearidade, que foi representada por

$$\check{f}_{21}(x_1(t)) = \frac{1}{Jx_1} \left[-mgl \sin(x_1) - \lambda e^{-Ex_1} e^{-E\frac{\pi}{2}} \left(x_1 + \frac{\pi}{2} - \omega \right) \right] \quad (5.2)$$

Em 5.2 temos uma indeterminação de $\check{f}_{21}(x_1(t))$, quando for atribuído valor 0 para x_1 , tornando nulo o denominador da função.

Em (GAINO, 2009), podemos ver a expansão em série de Taylor de quinta ordem, permitindo assim, cancelar o termo x_1 do denominador de $\check{f}_{21}(x_1(t))$, resolvendo o problema.

Sendo o valor obtido para o ponto de 30° (0.52 rad):

$$\check{f}_{21}(x_1(t)) = -24.3235 \quad (5.3)$$

Assim a função de transferência do modelo será dada por:

$$\frac{12.34}{s^3 + 1.797s^2 + 25.11s + 25.26} \quad (5.4)$$

Vários estudos demonstraram a dificuldade de se obter um modelo que represente o movimento sob contração muscular e sob a condição do estímulo artificial aplicado (HUXLEY, 1957)

6 SIMULAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS OBTIDOS

Vamos mostrar os resultados da simulação dos efeitos da realimentação com o controlador LQR e analisaremos os seus resultados.

Sendo o interesse deste trabalho estudar o efeito da realimentação no sistema de objeto de estudo (planta da perna do paciente paraplégico. equação 5.4, para tal, são estipulados índices de desempenho para poder avaliar seu desempenho.

Desta forma, são definidos os seguintes critérios de avaliação de desempenho para as respostas dos sistemas controlados:

- $t_e \leq 2s$ (Tempo de Assentamento)
- $PO \leq 10\%$ (Pico de Overshoot)

Estes índices de desempenho foram definidos devido o projeto ser de risco elevado e qualquer perturbação maior que o permitido pode causar danos irreparáveis ao paciente. O uso do software *Matlab*[®] R2015a permite simulação dos algoritmos de controle para observar através da resposta temporal a eficiência do sistema projetado.

Utilizou-se a metodologia de análise no domínio do tempo e análise no domínio da frequência. Utilizou – se o software *Matlab*[®] R2015a, assim segue a análise de desempenho em malha fechada, por meio de diagrama de Bode, e análise da resposta para entrada degrau.

6.1 Projeto do Controlador LQR

Nesta seção, é proposto o uso do Regulador Linear Quadrático (LQR) (OGATA, 2010), em malha fechada, para variação angular da articulação do joelho de pacientes paraplégicos, por meio de estímulos elétricos no músculo quadríceps. O regulador trabalha com uma referência desejada para realizar movimentos na articulação do joelho, partindo do repouso e estabilizando-se no ponto desejado.

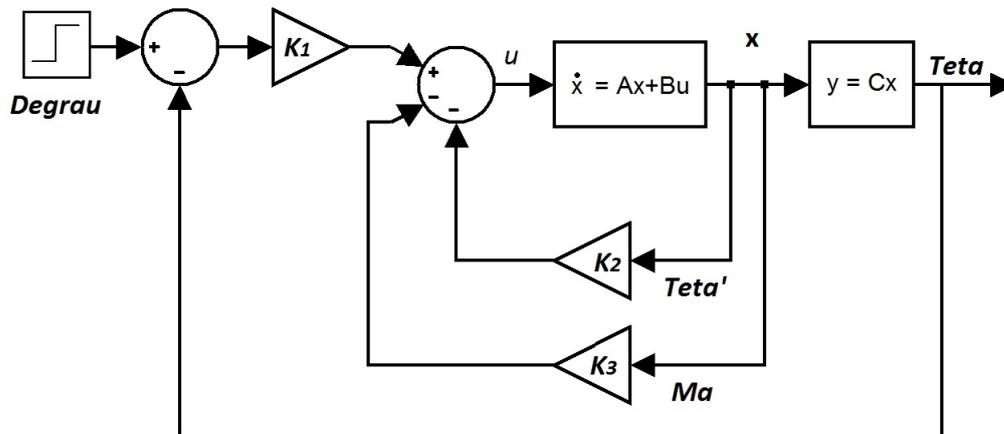
A sistemática empregada para a seleção da matriz de ganho constituiu, inicialmente, de várias simulações em busca dos melhores valores de Q e R.

A representação em diagrama de blocos do sistema em malha fechada, utilizando o regulador LQR, é ilustrada na figura 17, na qual a entrada $u(t)$ é o degrau e as variáveis de estado são representadas por θ , $\dot{\theta}$, Ma .

Temos o sistema da da articulação do joelho de um paciente paraplégico, em espaço de estados.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -24.32 & -0.746 & 2.762 \\ 0 & 0 & 1.051 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Figura 17 – Projeto do Controlador LQR



Fonte: (TIAGO OLIVEIRA et al., 2014)

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.469 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$D = [0] \quad (6.4)$$

A sistemática empregada para a seleção das matrizes pesos constituiu inicialmente de várias simulações, de tentativa e erro, em busca dos melhores valores de Q e R, adotou - se:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$R = 10^{-10}; \quad (6.6)$$

A matriz ótima $K = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]$ foi obtida com o auxílio do software Matlab, que fornece a solução da equação de Riccati (4.8) para sistemas contínuos no tempo. A matriz de ganho K, obtida a partir de Q e R é:

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 99998 & 7548 & 35 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

A matriz P é obtida resolvendo a Equação Algébrica de Riccati, 4.7:

$$P = \begin{bmatrix} 0.0755 & 0.0003 & 0 \\ 0.0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Assim com o sistema LQR em espaço de estados temos:

$$AA = 10^6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1.2340 & -0.0932 & -0.0004 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$BB = 10^6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.2340 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$CC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

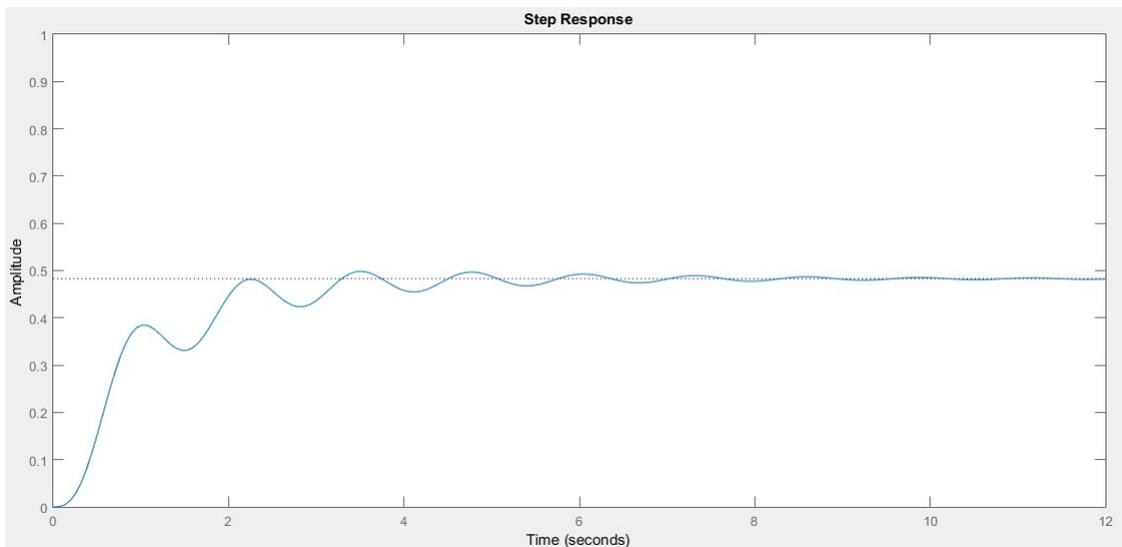
$$DD = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

6.2 Análise no Domínio do Tempo LQR

No domínio do tempo, submeteu-se o sistema à uma entrada de referência degrau analisou-se a resposta, do sistema em malha aberta, sem um controlador.

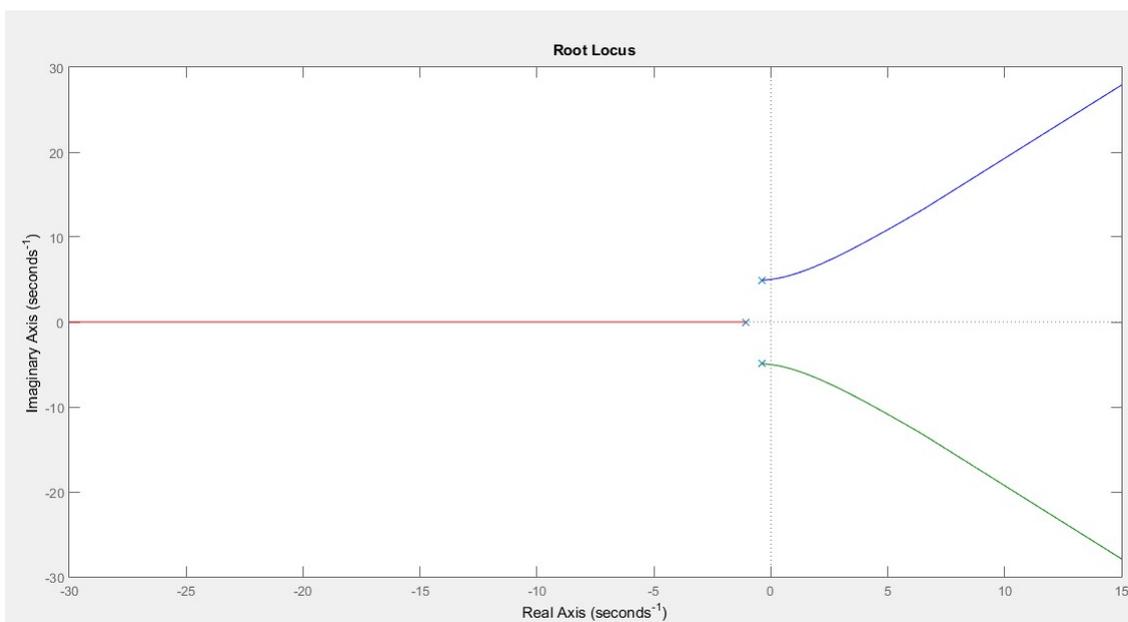
Primeiramente, tendo como base a resposta do sistema à uma entrada referência degrau, analisou-se os seguintes parâmetros característicos: o tempo de assentamento (T_r), tempo de subida (T_s) overshoot e o erro de estado estacionário. Podemos verificar na figura 18.

Figura 18 – Resposta do Sistema em Malha Aberta.



Fonte: Autor

Figura 19 – Diagrama do Lugar Geométrico das Raízes do Sistema.



Fonte: Autor

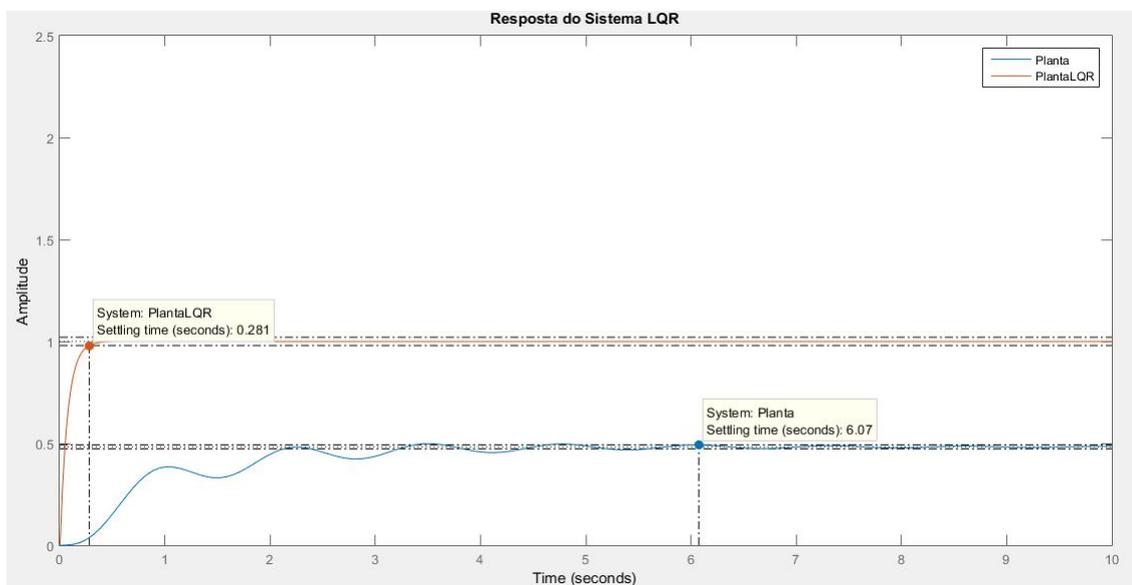
Com a função de transferência do sistema de malha aberta, encontrada na equação 5.4, em paralelo com a função de transferência do controlador LQR. Podemos fazer um sistema de controle de malha fechada.

A função de transferência do sistema em malha fechada, é

$$\frac{1234000}{s^3 + 431.8s^2 + 93160s + 1.234000} \quad (6.13)$$

Aplicando um sinal degrau unitário na equação 6.13. Podemos perceber na figura 20, que o erro em regime permanente, diminui bruscamente. Atentando para os índices de desempenho que foram atendidos.

Figura 20 – Resposta do Sistema em Malha Fechada com LQR.



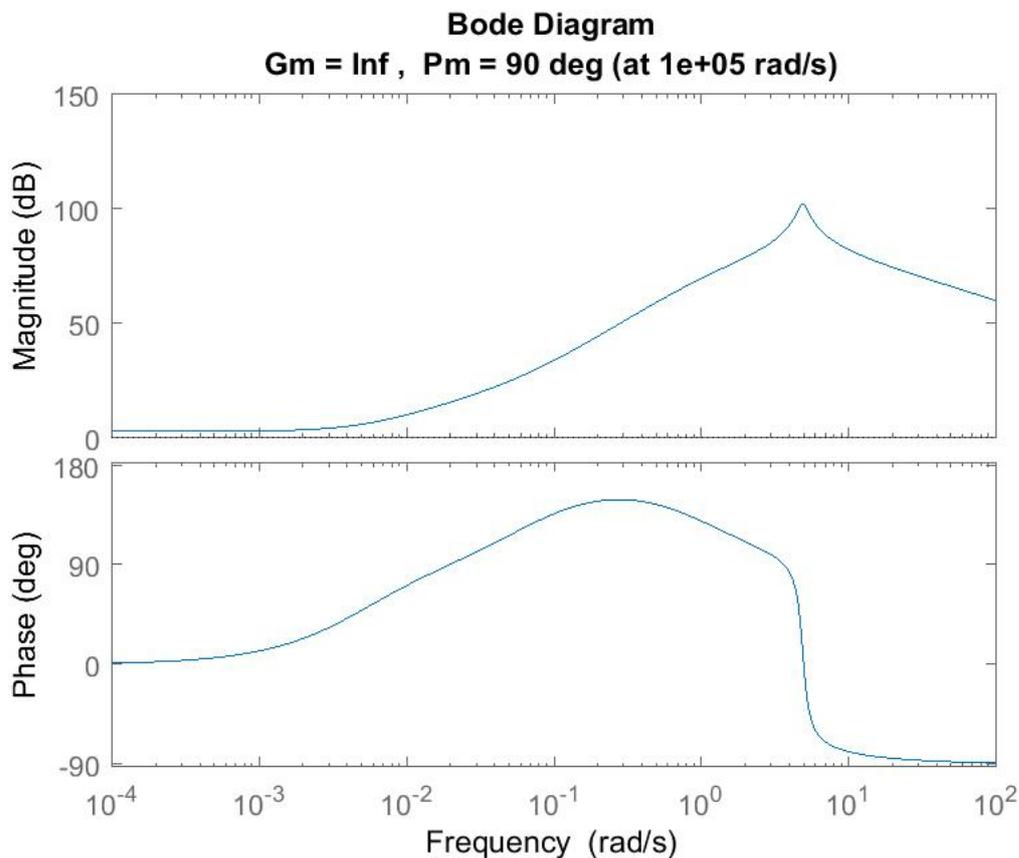
Fonte: Autor

6.3 Análise no Domínio da Frequência

Analisaremos o sistema no domínio da frequência. Demonstraremos que o sistema em malha fechada com um compensador, no caso o LQR, melhora o desempenho do mesmo, Para isso utilizaremos o diagrama de Bode como ferramenta para análise.

Na figura 21 é mostrado o diagrama de Bode do sistema com LQR, podemos ver então que o sistema possui Margem de Ganho Infinito e Margem de Fase de 90°. Podendo assim confirmar as propriedades de robustez, de Margem de Ganho.

Figura 21 – Diagrama de Bode do Sistema com LQR



Fonte: Autor

Porém devido a seleção das matrizes de ponderação de estado e de entrada do sistema (Q e R), não chegando a robustez que o controlador garante, que é a Margem de Ganho Infinita e Margem de Fase 60°. Outro fator que pode justificar esse mal condicionamento é analisando o determinante da matriz AA do sistema (equação 6.9).

$$\det(AA) = -1.2340e + 06 \quad (6.14)$$

6.4 Barreiras de Desempenho e Estabilidade

Como parte da proposta, é importante verificar os compromissos de desempenho e estabilidade robusta. Para esta análise, considerou-se como dinâmica desconhecida o efeito do ruído provocado por dois polos, em que

$$G_d = \frac{625}{s^2 + 50s + 625} \quad (6.15)$$

esta é a função do ruído de medição (CRUZ, 2005). A proposta segundo (CRUZ, 2005), analisaremos o projeto do controlador LQR de forma que o sistema real (Planta Nominal, G_n , mais o efeito do ruído, G_d) em malha fechada, satisfaça os seguintes critérios:

- acompanhamento do sinal de referencia e rejeição de perturbações com erro não superior a 10% para $w \leq 0.5rad/s$.
- sensibilidade a variações na planta não superior a 15% para $w \leq 0.7rad/s$.

Para o sistema acompanhar o sinal de referência e rejeição a perturbações com erro não superior a 10% para $w \leq 0.5rad/s$, ou seja, δ_r e $\delta_d \leq 0.1$, a barreira de desempenho para estas condições é dada por:

$$20\log_{10}(0.1) \text{ para } \leq 0.5rad/s \quad (6.16)$$

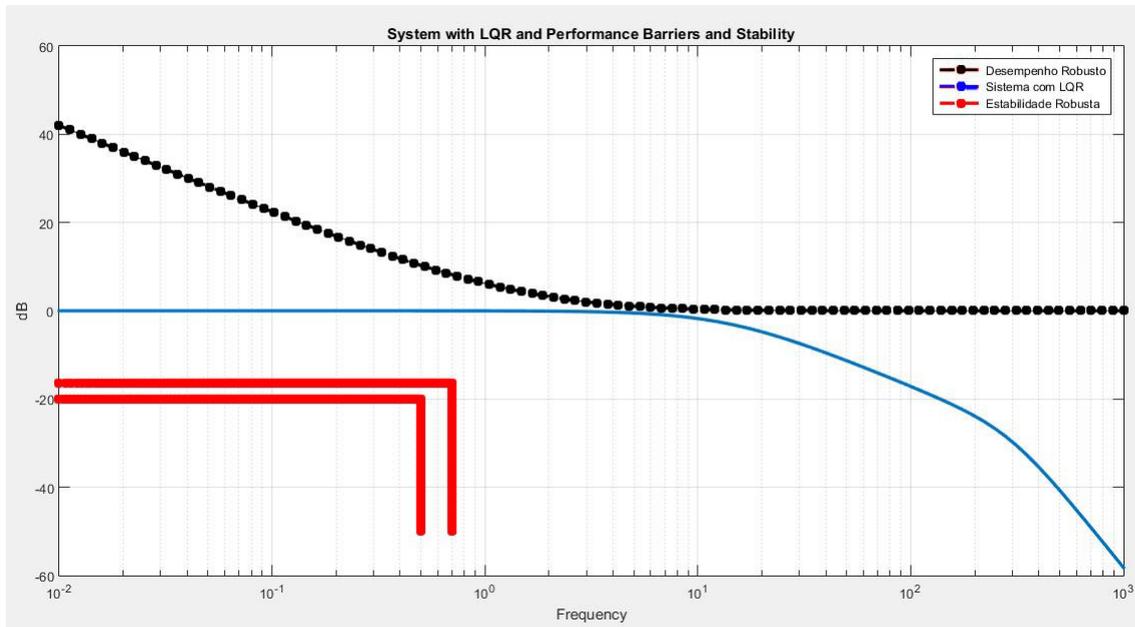
Para se ter sensibilidade a variações da planta com erro não superior a 15% para $w \leq 0.7rad/s$, ou seja, $\delta_s \leq 0.15$, a barreira de desempenho para estas condições é dada por:

$$20\log_{10}(0.15) \text{ para } \leq 0.7rad/s \quad (6.17)$$

A barreira da estabilidade foi determinada encontrando-se o inverso do maior valor singular do ruído de medição, variando-se a constante δ de 0.1 a 1, para uma dada frequência. A variação em toda a frequência fornece a barreira da estabilidade.

No diagrama de bode na figura 21, o sistema não satisfaz as características que um sistema robusto deve obter. Porém ao observar as barreiras de desempenho na figura 22, podemos assim comprovar a robustez do sistema. A figura 22, mostra o ganho de malha que é o valor singular, linha azul deve ficar entre a vermelha e a preta, também mostra o valor singular do sistema nominal aumentado juntamente com as barreiras de desempenho e de estabilidade. Por esta figura, nota-se que o sistema nominal aumentado está dentro dos limites considerados para este projeto. Portanto, o sistema atende aos compromissos de sistema que consideram os erros com relação ao rastreamento do sinal de entrada, rejeição a perturbação e sensibilidade a variação da planta. Além disso, é importante destacar que o sistema se mantém estável mesmo na presença do ruído, G_d

Figura 22 – Barreiras de Desempenho. Sistema Nominal Aumentado (Azul). Barreiras de Desempenho (vermelho). Barreiras de Estabilidade (preto).



Fonte: Autor

6.5 Sensibilidade a Variação de Parâmetros

Uma vantagem de usar realimentação em sistemas de controle é reduzir a sensibilidade do sistema em relação a variações de parâmetros e distúrbios indesejáveis. Essas variações podem ser resultantes da alteração da temperatura, umidade pressão, cargas, envelhecimento, etc.

Vamos analisar a variação do valor de regime quando ocorrer uma variação no parâmetro do sistema. Primeiramente analisaremos o valor de regime da saída de um sistema sem realimentação. Temos o sistema do movimento da articulação do joelho,

$$G = \frac{12.34}{(s + 1.051)(s^2 + 0.7463s + 24.33)} \quad (6.18)$$

Como o sistema é estável, podemos aplicar o *Teorema do Valor Final*, para encontrar o valor de regime permanente:

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s)$$

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s}$$

$$y(+\infty) = 0.4828 \quad (6.19)$$

Suponhamos que temos uma variação de 10% no valor do polo, devido à uma resistência elétrica, por exemplo:

A função de transferência do sistema com a variação no polo, seria

$$G = \frac{12.34}{(s + 1.1561)(s^2 + 0.7457s + 21.99)} \quad (6.20)$$

Sendo ainda estável,

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sy(s)$$

$$y(+\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s}$$

$$y_2(+\infty) = 0.4854 \quad (6.21)$$

Calculando a variação percentual que ocorreu no sistema,

$$\Delta y(+\infty) = \frac{|y(+\infty) - y_2(+\infty)|}{y(+\infty)} 100\%$$

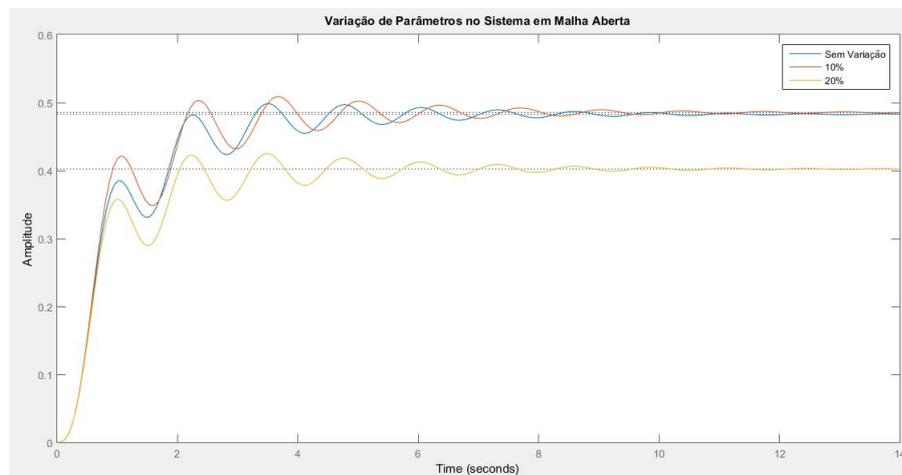
$$\Delta y(+\infty) = \frac{|0.4828 - 0.4854|}{0.4828} 100\%$$

$$\Delta y_2(+\infty)\% = 0.54\% \quad (6.22)$$

Portanto, no sistema realimentado, figura 24, uma variação de 10% no valor do polo, não teve variação no valor de regime da saída ($y(+\infty)$), enquanto para esta mesma variação do polo causou uma variação de 0.54% em $y(+\infty)$ para o sistema sem a realimentação.

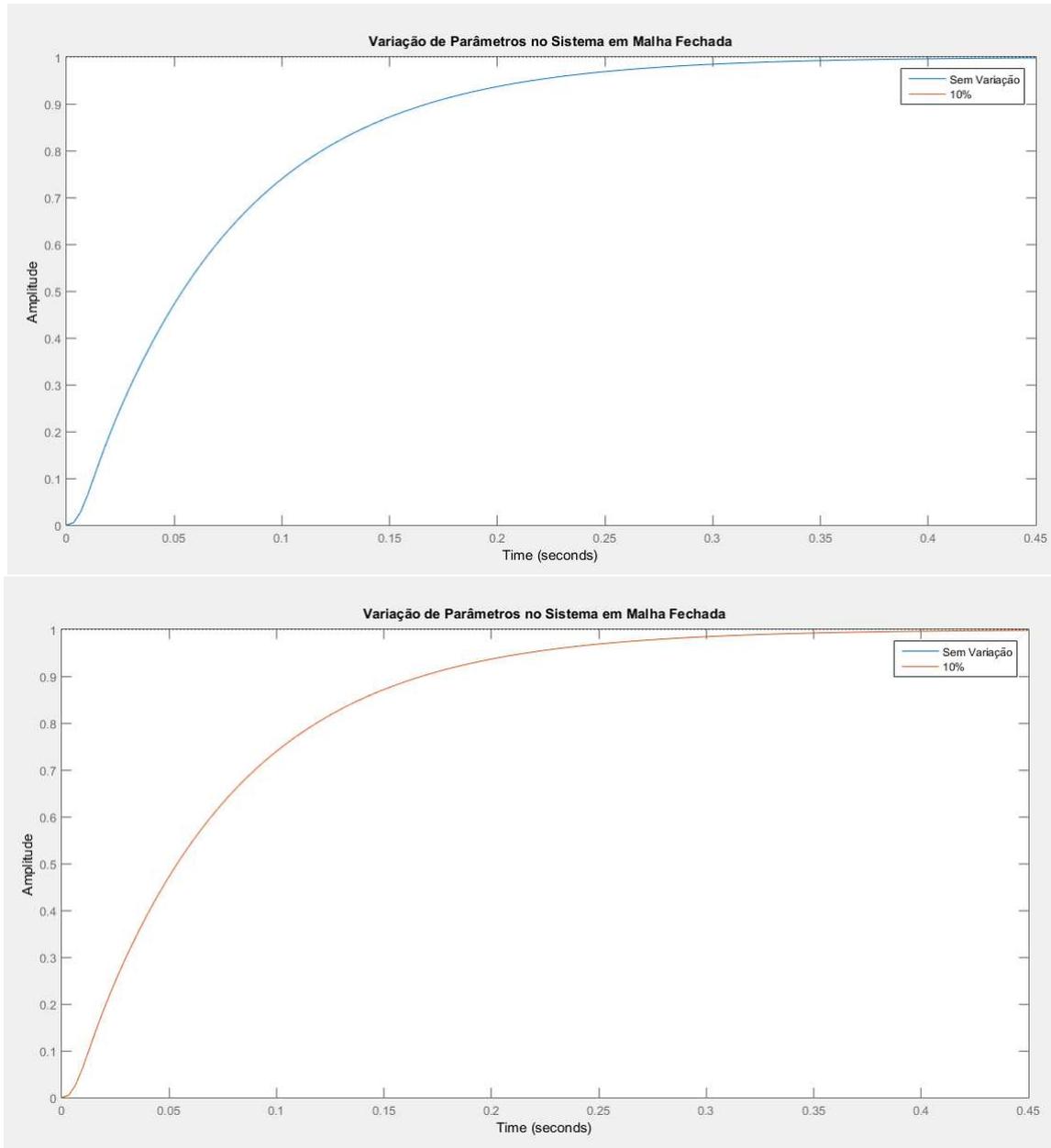
Na figura 23 podemos ver a variação no sistema em malha aberta.

Figura 23 – Variação dos Parâmetros do Sistema em Malha Aberta.



Fonte: Autor

Figura 24 – Variação dos Parâmetros do Sistema em Malha Fechada.



Fonte: Autor

Mesmo variando os parâmetros, percebe-se que o sistema em malha fechada não varia.

7 CONCLUSÃO

A eficiência de um controlador projetado é determinada pelo desempenho que se espera no projeto, ou seja, a eficiência é comprovada caso o controlador consiga regular a resposta de saída do sistema dentro dos índices de desempenho estipulados. Caso o controlador não consiga trabalhar dentro da faixa de desempenho determinada esta metodologia não é eficiente para este projeto e, portanto, deve-se optar por outra metodologia de desenvolvimento de controladores.

A teoria de controle foi utilizada no projeto do compensador necessário para compor os efeitos que teriam ao projeto. O LQR, embora seja uma técnica linear, mostrou-se por meio das simulações, um projeto de controle viável para aplicações no uso do FES em estímulos ao músculo quadríceps em pacientes paraplégicos, provocando movimentos na articulação do joelho.

Em um sistema em malha fechada, podemos implementar qualquer metodologia de controle para o dispositivo de tratamento em pacientes paraplégico utilizando FES, assim ajustando os erros de modelagem e ruídos, um sistema mal projetado e em malha aberta, pode ser um risco por não atingir os parâmetros estipulados para um controle eficaz do sistema, desta forma, o nível de intensidade de corrente elétrica pode ultrapassar valores de segurança causando danos aos músculos do paciente ou atingir um níveis muito abaixo do necessário para um tratamento eficaz, pois a qualquer erro de projeto pode-se acarretar danos irreparáveis nos músculos do paciente.

Durante o projeto, observou-se que as matrizes de ponderação Q e R causam grande impacto no desempenho do controlador final.

As simulações realizadas com o software Matlab mostraram a eficiência do controlador LQR em malha fechada para um determinado ângulo da articulação do joelho, neste caso o complexo canela-tornozelo parte do repouso e estabiliza no ponto de operação desejado, ou seja, 30° mostrando que o LQR é uma possível alternativa de controle da posição do complexo canela-tornozelo em pacientes, porém podemos perceber que o surgimento de robustez não são atingidas por completo, devido as escolhas das matrizes de ponderação, pela análise do determinante da matriz AA (6.9), do sistema com o controlador, podemos perceber que o resultado é negativo. Isso justificativa as margens de desempenho do projeto LQR no diagrama de bode não serem atendidas, porém ao analisarmos os gráficos das barreiras de desempenho o sistema o sistema garantiu uma margem de estabilidade maior para ruídos nas altas frequências.

Uma proposta de melhoras futuras seria a utilização de técnicas inteligentes, como algoritmo genético (ABREU, 2008), Redes Neurais Artificiais, para encontrar essas matrizes de ponderação para otimizar ainda mais o desempenho do sistema.

Referências

- ABREU, I. S. *Controle Inteligente LQR Neuro-Genético para Alocação de Auto Estrutura em Sistemas Dinâmicos Multivariados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Belém., 2008.
- CRAMERI R., M. et al. **Effect of load during electrical stimulation training in spinal cord injury**. *Muscle & Nerve*, 29:01, p. 104–111, 2004.
- CRUZ, J. J. da. *Controle robusto multivariável*. [S.l.]: DUSP, 2005.
- DORF R. C.; BISHOP, R. H. *Modern Control Systems*. *Prentice Hall*. [S.l.]: Prentice Hall, 2010.
- EVANGELISTA, A. P. F. *Estimação de estados do sistema dexterous hand master via projeto filtro de Kalman*. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso , Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2016., 2016. 75f.
- FERRARIN, M.; PEDOTTI, A. **The relationship between electrical stimulus and joint torque: a dynamic model**. *IEEE Transactions on Rehabilitation Engineering, San Diego*, v. 8, n. 3, p. 342–352., 2000.
- GAINO, R. *Controle de Movimentos de Pacientes Paraplégicos Utilizando Modelos Fuzzy T-S*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- GUYTON; HALL. *Tratado de Fisiologia Médica*. [S.l.]: Saunders Elsevier, 11^a Edição, 2006.
- HAYKIN SIMON E VEEN, B. V. *Sinais e Sistemas*. [S.l.]: Porto Alegre, Editora Bookman,, 2001.
- HUXLEY, A. F. **Muscle structure and theories of contraction**. *Progress and Biophysical Chemistry, Elmsford*, n. 7, p. 255–318, 1957.
- IBGE. *Censo Demográfico 2010*. 2010. 12/12/2012. Disponível em: <<http://g1.globo.com/brasil/noticia/2012/04/239-dos-brasileiros-declaram-ter-alguma-deficiencia-diz-ibge.html>>. Acesso em: 10.01.2016.
- MARTIN, P. S. **Pesquisadores da Unicamp desenvolveram aparelhos para recuperar paraplégicos**. *Jornal da Unicamp, Campinas*, 1999.
- NISE, N. S. *Control System Engineering*. [S.l.]: USA: John Wiley & Sons, 6^a Edição, 2012.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: São Paulo.Pearson Prentice Hall. 5^a Edição, 2010.
- ROSA FILHO, J. E. A. *Contribuições de Controle Ótimo*. [S.l.]: Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual de Londrina, 2011.
- SKOGESTAD S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. [S.l.]: [S.l.]: Wiley New York,, 2007.
- TIAGO OLIVEIRA, C. D. et al. **Controle LQR Aplicado ao Movimento da Articulação do Joelho de Pacientes Paraplégico**. 2014.