

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

PAULO RENATO PEREIRA SILVA

**BARREIRAS DE ROBUSTEZ E TÉCNICAS NO DOMÍNIO
DA FREQUÊNCIA EM SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS**

São Luís

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
CURSO DE ENGENHARIA DA COMPUTAÇÃO

PAULO RENATO PEREIRA SILVA

**BARREIRAS DE ROBUSTEZ E TÉCNICAS NO DOMÍNIO
DA FREQUÊNCIA EM SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia da Computação na UEMA, como registro para obtenção parcial do grau de Bacharelado em Engenharia da Computação com ênfase em Automação e Controle.

Orientador: Ivanildo Silva Abreu, PhD.

São Luís

2016

Silva, Paulo Renato Pereira.

Barreiras de robustez e técnicas no domínio da frequência em sistemas multivariáveis / Paulo Renato Pereira Silva. – São Luís, 2016.

75 f.

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia da Computação, Universidade Estadual do Maranhão, 2016.

Orientador: Prof. PhD. Ivanildo Silva Abreu.

1. Modelagem de aeronave. 2. Sistema MIMO. 3. Barreiras de Robustez. 4. Controlador LQR. I. Título.

CDU 681.511.2

PAULO RENATO PEREIRA SILVA

**BARREIRAS DE ROBUSTEZ E TÉCNICAS NO DOMÍNIO
DA FREQUÊNCIA EM SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia da Computação na UEMA, como registro para obtenção parcial do grau de Bacharelado em Engenharia da Computação com ênfase em Automação e Controle.

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 28 de novembro de 2016:

PhD. Ivanildo Silva Abreu
Orientador

PhD. Mauro Sergio Silva Pinto
Primeiro Membro da Banca

Eng. Madson Cruz Machado
Segundo Membro da Banca

Dedico este trabalho à minha família!

AGRADECIMENTOS

A Deus que permitiu que tudo isso acontecesse.

Ao meu orientador PhD. Ivanildo Silva Abreu pelo suporte, correções e incentivos em todos estes anos de graduação.

A esta universidade, seu corpo docente e à secretária do curso que sempre se empenhou na solução de possíveis problemas.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio durante todos os momentos de minha vida.

À Dra. Sônia Maria P. Cruz pela motivação e apoio nos momentos mais críticos como hemofílico.

A todos aqueles que viram a deficiência como empecilho.

E a todos os colegas que colaboraram direta ou indiretamente para a minha evolução, o meu sincero agradecimento.

“Whatever the mind of man can conceive and believe, it can achieve.”
(Napoleon Hill)

RESUMO

Este texto tem como objetivo a abordagem de técnicas de resposta em frequência e barreiras de robustez para sistemas multivariáveis, utilizando noções de SVD (*Singular Value Decomposition*), considerando que os diagramas de Bode SISO pouco contribuem para sistemas MIMO. Para a validação das técnicas, projetou-se um controlador LQR com realimentação de saída para a dinâmica de voo lateral de uma aeronave F-16 e analisou-se o comportamento do sistema no domínio do tempo e frequência, avaliando parâmetros como erro em estado estacionário, máxima ultrapassagem percentual, tempo de assentamento e tempo de subida. De modo geral, o controlador projetado balanceou os valores singulares em baixa frequência, garantiu resposta temporal de acordo com as especificações do projeto, boa robustez a perturbações e dinâmicas não modeladas e validou o uso das técnicas multivariáveis.

Palavras-chave: Modelagem de Aeronave. Sistemas MIMO. Barreiras de Robustez. Controlador LQR.

ABSTRACT

This text aims to present some frequency domain technique and robustness bounds for multi variable systems, using SVD (Singular Value Decomposition) approach, considering that Bode Plots have not much to do with MIMO systems. In order to validate the techniques, a LQR controller with output feedback was designed for a F-16 aircraft's lateral flight dynamics and the analysis was performed with time and frequency domain approaches, evaluating system specifications, such as, steady-state error, overshoot, settling time and rising time. In a sense, the designed controller balanced the system's singular values at DC, ensured suitable time domain response, good robustness for the case of disturbances and validated the multi variable techniques presented in this work.

Keywords: Aircraft Modelling. MIMO Systems. Robustness Bounds. LQR Controller

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Aeronave F-16.	26
Figura 2 – Sistema de Controle em Malha Aberta.	32
Figura 3 – Sistema de Controle em Malha Fechada.	34
Figura 4 – Sinais de entrada de teste.	38
Figura 5 – Resposta de Sistemas de Segunda Ordem para diversos valores de ζ . . .	39
Figura 6 – Medidas de Desempenho de Sistemas.	40
Figura 7 – Estabilidade de Sistemas de Controle.	41
Figura 8 – Valores singulares de Tanques Acoplados.	46
Figura 9 – Resumo das especificações de desempenho.	49
Figura 10 – Eixos, velocidades angulares e atuadores em aeronaves.	51
Figura 11 – Ângulos de rotação.	52
Figura 12 – Resposta ao Degrau do Sistema em Malha Fechada com LQR e Integrador	59
Figura 13 – Barreiras de Robustez.	61
Figura 14 – Valores Singulares da aeronave com LQR mais integrador	62
Figura 15 – Análise de Robustez do Sistema com LQR e Integrador.	63
Figura 16 – Diagramas de Bode para casos simples.	71
Figura 17 – Diagrama de Blocos da Aeronave.	73
Figura 18 – Diagrama de Blocos da Aeronave com LQR e Integrador.	73
Figura 19 – Ganho de Malha Aberta de todos os sistemas.	75
Figura 20 – Resposta ao Degrau de todos os sistemas.	75

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SISO	<i>Single-Input Single-Output</i> (Simples-Entrada e Simples-Saída)
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i> (Múltiplas-Entradas e Múltiplas-Saídas)
BIBO	<i>Bounded-Input Bounded-Output</i> (Entrada-Limitada e Saída-Limitada)
SVD	<i>Singular Value Decomposition</i> (Decomposição de Valores Singulares)
DC	Ganho de Baixas Frequências
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Linear Quadrático)
PI	<i>Performance Index</i> (Índice de Desempenho)

LISTA DE SÍMBOLOS

ω_n	Frequência Natural não amortecida
ω_d	Frequência Natural amortecida
ζ	Fração de Amortecimento
$\underline{\sigma}$	Valor Singular Mínimo
$\bar{\sigma}$	Valor Singular Máximo
K	Matriz de ganhos ótimos do LQR
P	Solução da Equação Algébrica de Riccati do Controlador LQR
Q	Matriz de Ponderação de Estados
R	Matriz de Ponderação de Controle

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
2	OBJETIVOS	27
2.1	Objetivo Geral	27
2.2	Objetivos Específicos	27
3	JUSTIFICATIVA	29
4	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	31
4.1	Sistemas de Controle	31
4.1.1	Modelo Matemático de Sistemas	32
4.1.1.1	Representação de Sistemas de Controle	32
4.2	Sistemas de Controle com Realimentação	33
4.2.1	Análise do Sinal de Erro	34
4.2.2	Sensibilidade à Variação dos Parâmetros	35
4.2.3	Rejeição a Perturbações	36
4.2.4	Atenuação do Ruído de Medição	36
4.2.5	Controle da Resposta Transitória	36
4.2.6	Erro em Regime Permanente	36
4.2.7	Custo da Realimentação	37
4.3	Desempenho de Sistemas de Controle com Realimentação	37
4.3.1	Sinais de Entrada de Teste	38
4.3.2	Desempenho de Sistemas de Controle	38
4.3.3	Estabilidade de Sistemas de Controle com Realimentação	40
4.4	Métodos da Resposta em Frequência	41
4.4.1	Diagramas da Resposta em Frequência	41
4.4.1.1	Diagramas de Bode ou Gráficos Logarítmicos	42
4.5	Controle Robusto e Técnicas de Controle Multivariável	42
4.5.1	Análise Multivariável no Domínio da Frequência	43
4.5.1.1	Sensibilidade e Sensibilidade Complementar para Sistemas MIMO	44
4.5.1.2	Resposta em Frequência de Sistemas Multivariáveis	44
4.5.1.3	Especificações de Desempenho no Domínio da Frequência	45
4.5.2	O LQR com Realimentação de Saída	49
4.6	Dinâmica de Voo	51
5	PROJETO DO LQR	53
5.1	Modelo da Aeronave F-16	53

5.2	Metodologia	54
5.3	Projeto do Controlador LQR	55
5.3.1	Elevação da dinâmica do sistema	55
5.3.2	Seleção das Matrizes Q e R	56
5.3.3	Matriz de Ganhos K	57
6	SIMULAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS	59
6.1	Análise no domínio do tempo	59
6.2	Análise no domínio da frequência	60
6.2.1	Barreiras de robustez	60
6.2.2	Análise de Robustez	61
6.3	Conclusões	64
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	65
	REFERÊNCIAS	67
	APÊNDICES	69
	APÊNDICE A – DIAGRAMAS DE BODE	71
	APÊNDICE B – DIAGRAMAS DE BLOCOS	73
	APÊNDICE C – RESUMO DO PROJETO	75

1 INTRODUÇÃO

Desde o princípio, o homem vem unindo esforços para adquirir conhecimento nas mais diversas áreas com o objetivo de criar utensílios e aparelhos que tornem suas atividades cotidianas mais simples e seguras. Como exemplo destas invenções que modificaram o dia a dia da humanidade, pode-se citar: os aparatos médicos, a Internet, os dispositivos móveis, os robôs e os meios de transporte. Todas essas criações foram resultados de anos, em alguns casos décadas, de estudos em ciências-base como matemática, física, química e biologia.

Da união destas ciências-base surgiram novas áreas de concentração. A engenharia, por exemplo, nasceu da combinação destas disciplinas e tem como objetivo aplicar os conhecimentos científicos adquiridos delas produzindo artefatos úteis para a sociedade. Nesse sentido, pode-se citar como exemplo de engenharias tecnológicas a engenharia elétrica, engenharia de telecomunicações, engenharia de computação, engenharia de controle, entre outras.

Com relação à engenharia de controle, almeja-se o projeto de controladores capazes de rastrear uma entrada de referência ou trazer todos os estados do sistema a zero, leia-se estabilizá-lo, mesmo na presença de sinais indesejados. Este controlador atua sobre o sistema com base no sinal de erro proveniente da diferença entre o valor de referência e a saída atual do sistema.

Em controladores é comum a adoção de alguma técnica no domínio do tempo ou da frequência para análise e projeto. Porém, em alguns casos algumas técnicas não respondem conforme desejado tornando a técnica inadequada para aquele sistema, como no caso de sistemas não lineares.

Para o caso de sistemas multivariáveis os diagramas de Bode não oferecem simplicidade para a análise no domínio da frequência. Isso se dá por causa do número de gráficos que devem ser analisados. Por exemplo, um sistema 4 entradas - 4 saídas resultaria em 16 diagramas, tornando o projeto dispendioso. Além disso, Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) afirmam que o uso desses diagramas nesses sistemas não são uma forma adequada de análise por conta das interações entrada e saída, deixando claro a necessidade de outra técnica mais adequada.

Este texto tem como objetivo a abordagem de técnicas no domínio da frequência e barreiras de robustez para sistemas multivariáveis. Para isso, serão utilizadas noções de SVD. Tal técnica tem contribuído fortemente para a análise de sistemas MIMO nas mais diversas áreas de controle tornando-se mais adequada para tal fim.

Para validação das técnicas será projetado um controlador LQR para aeronave F-16, Figura 1. Esta aeronave, de porte militar, é utilizada para a segurança do espaço aéreo sendo equipada com vários sensores que trazem diversas informações necessárias para o correto controle.

Figura 1 – Aeronave F-16.



Fonte – Wikipedia (2012).

A análise do projeto em questão será feita utilizando técnicas no domínio do tempo e da frequência, avaliando os parâmetros de desempenho que serão apresentados nas próximas seções. Estes parâmetros auxiliam na verificação de estabilidade do sistema bem como o efeito de ruídos e perturbações no desempenho do mesmo.

Desta forma, a estrutura deste texto segue da seguinte forma. No capítulo 2, os Objetivos são apresentados. O capítulo 3 apresenta as Justificativas e Motivações deste trabalho. No capítulo 4 todo o Referencial Teórico, que serve como base ao projeto do controlador, é exposto. O capítulo 5 relata o Projeto do LQR para a aeronave. No capítulo 6 são realizadas as Simulações e Análise do LQR projeto. As Considerações Finais são realizadas no capítulo 7. Finalizando com as Referências deste trabalho.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Projetar Controlador LQR para a dinâmica de voo lateral de uma aeronave F-16 que garanta robustez de desempenho e robustez de estabilidade de forma a validar as técnicas multivariáveis no domínio da frequência abordadas neste texto.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Levantar o estado da arte em relação a análise e projeto de controle multivariável e robusto.
2. Utilizar ambas as representações em função de transferência e espaço de estados para o projeto.
3. Projetar o controlador LQR encontrando matriz de ganhos K .
4. Analisar os resultados do controlador no domínio do tempo e da frequência.
5. Utilizar software *MATLAB* para simulação de resultados do controlador projetado.

3 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

Das áreas que a engenharia de controle mais tem beneficiado pode-se citar os setores automobilístico e a aviação. A última tem utilidades que vão do simples transporte de cargas até a defesa do espaço aéreo. A defesa do espaço aéreo é realizada por forças nacionais, que necessitam de pessoal capacitado não somente para pilotar aeronaves de combate, como também, para projetar as mesmas. Fica clara, a necessidade de sistemas de controle embarcados na aeronave com o objetivo de defender a nação.

A engenharia de controle tem contribuído fortemente em diversos setores. No caso da engenharia aeroespacial ela torna-se crucial, retirando do piloto da aeronave a necessidade de lidar com os inúmeros parâmetros do voo, haja vista a tri-dimensionalidade do movimento da mesma, garantindo assim maior precisão no controle. Complementarmente, faz-se necessário o controle automático da aeronave quando o piloto encontra-se incapaz de fazê-lo, seja por estresse, fadiga ou desmaio devido à exposição aos inúmeros G's de força gravitacional.

Grande parte dos sistemas de controle estão sujeitos à diversas perturbações que comprometem o desempenho do sistema, sendo necessário, portanto, um controlador robusto para superar os efeitos indesejados. Lewis, Vrable e Syrmos (2012) sugerem o uso de controladores *LQR* com integradores para boa resposta em regime permanente.

Aliado a todas estas motivações está o fato de o Maranhão possuir um dos centros de lançamento mais equatoriais do mundo situado em Alcântara.

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizou-se a metodologia de controle robusto *LQR* com integradores inseridos em cada canal de entrada como forma de garantir boa resposta mesmo na presença de dinâmicas indesejadas.

Desta forma, o presente texto aborda técnicas de resposta em frequência e barreiras de robustez para sistemas multivariáveis validando-as com o projeto de um controlador *LQR* para aeronave F-16.

4 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como objetivo explicar toda a teoria que serviu como base para a elaboração deste trabalho.

Inicialmente, serão abordados os sistemas de controle com realimentação, em seguida os parâmetros de desempenho desses sistemas, os métodos de resposta em frequência (embora estas primeiras seções abordem sistemas SISO, será evidenciado que o caso MIMO estende muito da teoria univariável), as técnicas de controle multivariável que serão validadas e, por fim, algumas noções de dinâmica de voo.

4.1 SISTEMAS DE CONTROLE

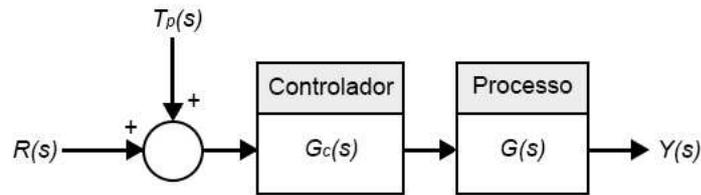
O controle automático é importante em qualquer campo da ciência e engenharia. Este controle é um componente essencial em sistemas de veículos espaciais, sistemas robóticos, sistemas de manufatura, sistemas biológicos e qualquer operação que envolva controle de temperatura, pressão, umidade, vazão, viscosidade, posição, velocidade, etc. A engenharia de controle é baseada em vários princípios e integra várias teorias e em virtude disto não está limitada a nenhum dos ramos da engenharia, sendo que, à medida que o entendimento acerca de um determinado sistema aumenta, também aumenta a capacidade do homem controlá-lo.

Dorf (2013) afirma que um sistema de controle é uma interconexão de componentes, formando um sistema que proporcionará uma resposta desejada. A base para a análise de um sistema são os princípios fornecidos pelas teorias de sistemas lineares a qual supõe uma relação entrada-saída para os componentes deste sistema, que consiste em processar um sinal de entrada e enviá-lo ao processo para que este forneça um sinal de saída. Desta forma, o processo a ser controlado pode ser representado por um bloco.

Um sistema de controle em malha aberta é comumente representado por dois blocos: o controlador, e o processo (representando o atuador e o sistema em si) como representado pela Figura 2. Ou seja, o sistema em malha aberta possui um dispositivo que atua diretamente no processo para controlá-lo. Diz-se que esta é a configuração mais simples. Mais adiante será retratado um sistema de controle mais complexo que possui mais entradas (perturbações e ruídos de medida) e mais componentes (sensores). A literatura comumente denota a entrada e saída destes sistemas por variável manipulada e variável controlada, respectivamente. Adicionalmente, no caso em que o sistema possui mais de uma entrada ou saída diz que o sistema de controle é multivariável.

Sistemas de controle vêm evoluindo há décadas e já foram utilizados para controle automático de embarcações, transporte, etc. A chegada do computador digital possibilitou o

Figura 2 – Sistema de Controle em Malha Aberta.



Fonte – Adaptado de Dorf (2013)

estudo de sistemas mais complexos, como o controle da extração de petróleo em plataformas *offshore* por Nunes, Medeiros e Araújo (2010), sistemas com comportamento autônomo projetado por Grzonka, Grisetti e Burgard (2012), ou a previsão de movimentos de um quadricóptero projetada por Alexis, Nikolakopoulos e Tzes (2012). O surgimento de novas metodologias que agora trabalham com sistemas estocásticos, controle adaptativo e aprendizagem de sistemas complexos junto com a chegada do computador digital têm tornando o controle ainda mais eficaz.

4.1.1 MODELO MATEMÁTICO DE SISTEMAS

Para o estudo de um sistema de controle é primordial que se obtenha sistemas dinâmicos em termos matemáticos e se analise suas características dinâmicas. Nise (2009) afirma que o modelo matemático de um sistema é a parte mais importante e é definido como um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema no mínimo razoavelmente bem. Este sistema pode ser modelado de diversas maneiras e por causa disto pode ter vários modelos, dependendo da perspectiva do projeto.

4.1.1.1 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE

É comum o uso de equações diferenciais para modelagem de sistemas de controle. Tais equações são obtidas por leis físicas, químicas, etc. – por exemplo, leis de Kirchhoff para sistemas elétricos ou La Grange para sistemas mecânicos.

Para representar modelos de sistemas é comum o uso de funções de transferência ou espaço de estados. Para o caso de funções de transferência, obtém-se o modelo por meio de equações diferenciais como citado anteriormente e utiliza-se o Teorema de La Place para converter estas equações em equações algébricas, Equação 4.1, que tornam o sistema bem mais fácil de ser visualizado e estudado.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (4.1)$$

Para o caso do espaço de estados, tem-se uma representação por matrizes utilizando conceitos de variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. As variáveis

de estado constituem o conjunto de variáveis capazes de determinar o estado do sistema dinâmico. Apesar de isto ser um ponto positivo para o método espaço de estados, na prática é conveniente escolher grandezas que sejam facilmente mensuráveis. A partir das variáveis de estado forma-se o vetor de estado que acomoda as variáveis de estado e o sistema pode ser representado pela Equação 4.4. Nesta equação, \mathbf{A} representa a matriz do sistema, \mathbf{B} a matriz de entradas, \mathbf{C} a matriz de saída e \mathbf{D} a matriz de retroalimentação.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ogata (2010) recomenda o uso de funções de transferência para representação de sistemas de controle SISO e espaço de estados para representação de sistemas de controle MIMO. Apesar desta recomendação, o projetista pode a qualquer momento transitar da representação de espaço de estados para função de transferência utilizando a equação abaixo.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.5)$$

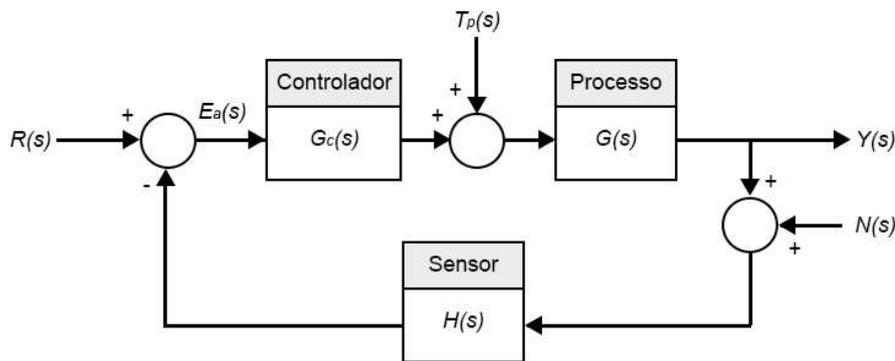
4.2 SISTEMAS DE CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO

Como já dito, um sistema de controle é estabelecido como uma interconexão de componentes que formam um conjunto com o objetivo de produzir uma resposta desejada. Uma vez que a resposta desejada é conhecida, um sinal proporcional ao erro é gerado a partir da diferença entre esta resposta e a resposta real (saída do sistema), obtida por meio de um sensor. Utiliza-se este sinal de erro para controlar processos com uma sequência de operações em malha fechada comumente conhecida como sistema com realimentação ou retroação. A inserção da realimentação se torna fundamental para melhorar a resposta do sistema (DORF, 2013).

Em um sistema sem realimentação ou sistema em malha aberta, representado na Figura 2, o sinal de saída não influi na ação de controle do sistema. Adicionalmente, a perturbação $T_p(s)$ influencia diretamente na saída, $Y(s)$. Claramente, a sensibilidade do sistema a perturbações e variações nos parâmetros de $G(s)$ é elevada devido à ausência da realimentação.

Em contraposição, um sistema de controle com realimentação, 3, envia ao controlador o sinal de erro, descrito anteriormente, para posterior ação.

Figura 3 – Sistema de Controle em Malha Fechada.



Fonte – Adaptado de Dorf (2013)

Embora estes sistemas de controle tenham maior custo e complexidade, o controle em malha fechada possui as seguintes vantagens que devem ser levadas em conta:

- Menor sensibilidade do sistema a variações nos parâmetros.
- Maior rejeição a perturbações.
- Melhor atenuação de ruídos de medição.
- Redução do erro em regime permanente do sistema.
- Facilidade em ajuste da resposta transitória do sistema.

4.2.1 ANÁLISE DO SINAL DE ERRO

O sistema de controle genérico, representado na Figura 3, possui três entradas, $R(s)$, $T_p(s)$ e $N(s)$, entrada ou setpoint, perturbação e ruído de medição, respectivamente, e uma saída $Y(s)$. Dorf (2013) define o erro de rastreamento como:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (4.6)$$

O autor utiliza $H(s) = 1$ e define a saída, $Y(s)$, do sistema como:

$$Y(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_p(s) - \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (4.7)$$

Substituindo este termo na Equação 4.6, tem-se:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}T_p(s) + \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}N(s) \quad (4.8)$$

Dorf (2013) define então

$$L(s) = G_c(s)G(s) \quad (4.9)$$

como o ganho de malha aberta que tem função fundamental na análise de sistemas de controle e será bastante utilizado neste texto.

4.2.2 SENSIBILIDADE À VARIAÇÃO DOS PARÂMETROS

De acordo com Nise (2009), a sensibilidade do sistema é definida como a razão entre a variação percentual da função do sistema, $T(s)$, e a variação percentual da função de transferência do processo, $G(s)$. Representada como:

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)} \quad (4.10)$$

com

$$T(s) = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (4.11)$$

Manipulando algebricamente a equação anterior, Nise (2009) define a sensibilidade em malha fechada como:

$$S_G^T = S = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} \quad (4.12)$$

Observando a equação anterior Dorf (2013), constatou que o aumento do ganho de malha, $L(s) = G_c(s)G(s)$, sobre a faixa de frequência de interesse resultará em uma redução da sensibilidade do sistema em malha fechada.

Destaca-se:

$$S + C = 1 \quad (4.13)$$

Sendo C a sensibilidade complementar, definida por Dorf (2013) como:

$$C = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)} = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (4.14)$$

Portanto, um sistema em malha fechada permite que os parâmetros de $G(s)$ sejam especificados com menor exatidão uma vez que a sensibilidade a variações de $G(s)$ é reduzida pelo ganho $L(s)$.

4.2.3 REJEIÇÃO A PERTURBAÇÕES

Na Figura 3, fazendo $R(s) = N(s) = 0$ e utilizando as equações de sensibilidade e sensibilidade complementar anteriormente apresentadas, tem-se:

$$E(s) = -S(s)G(s)T_p(s) = -\frac{G(s)}{1 + L(s)}T_p(s) \quad (4.15)$$

Dorf (2013) conclui que ganhos, $L(s)$, elevados sobre as frequências de interesse produzem sensibilidade, $S(s)$, reduzida que por sua vez produz boa rejeição a perturbações, ou seja, um erro de rastreamento pequeno mesmo na presença de perturbações.

Na prática, muitas das vezes sinais de perturbação são de baixa frequência e, portanto deseja-se projetar um controlador $G_c(s)$ de modo que a função de sensibilidade $S(s)$ seja pequena em baixas frequências.

4.2.4 ATENUAÇÃO DO RUÍDO DE MEDIÇÃO

Na Figura 3, seja $R(s) = T_p(s) = 0$, utilizando equações anteriores:

$$E(s) = C(s)N(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s) \quad (4.16)$$

Dorf (2013) conclui que à medida que o ganho de malha $L(s)$ diminui, a função sensibilidade complementar $C(s)$ também e por causa disto o ruído de medição $N(s)$ tem um efeito menor no erro de rastreamento.

Na prática, sinais de ruído de medição são usualmente de alta frequência e, portanto deseja-se projetar um controlador $G_c(s)$ de modo que a função sensibilidade complementar, $C(s)$, seja pequena em altas frequências.

4.2.5 CONTROLE DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

Esta é uma das características mais cruciais dos sistemas de controle. A resposta transitória de um sistema é uma resposta em função do tempo sendo frequentemente alterada até que seja satisfatória, pois o propósito de sistemas de controle em malha fechada é proporcionar uma resposta desejada com a inserção de um controlador $G_c(s)$.

4.2.6 ERRO EM REGIME PERMANENTE

Sistemas de controle com realimentação são de grande valia, pois fornecem ao projetista a capacidade de ajustar a resposta transitória para uma desejada. Fornecem também menor sensibilidade e reação a perturbações. Adicionalmente, o projetista deve checar o valor final da resposta e verificar se há diferença entre este valor e o valor de referência, a esta diferença dá-se o nome de erro em regime permanente.

Para um sistema em malha fechada quando $T_p(s) = 0$, $N(s) = 0$ e $H(s) = 1$, Nise (2009) define o erro de rastreamento como

$$E_f(s) = \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)}R(s) \quad (4.17)$$

E utilizando o teorema do valor final tem-se como erro em regime permanente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (4.18)$$

Portanto, sistemas de malha fechada com ganho estático $L(0) = G_c(0)G(0)$ elevado apresentarão erro em regime permanente reduzido, pois verificam continuamente o estado do erro e fornecem um sinal de atuação para reduzi-lo.

4.2.7 CUSTO DA REALIMENTAÇÃO

A inclusão da realimentação em um sistema de controle resulta em vantagens já mencionadas nas seções anteriores. Porém, estas vantagens apresentam custos associados. O sensor, por exemplo, apesar de adicionar ruído no sistema é a parte mais importante da realimentação. Outros custos associados são:

- Aumento da complexidade do projeto.
- Aumento do número de componentes do sistema.
- Perda de ganho.
- Possibilidade de inclusão de instabilidade.

Apesar dos custos acima mencionados, frequentemente os sistemas em malha fechada são necessários por suas vantagens.

4.3 DESEMPENHO DE SISTEMAS DE CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO

Dentre as diversas vantagens dos sistemas de controle com realimentação a maior delas é, indubitavelmente, a capacidade de ajustar o desempenho da resposta transitória e permanente. Para o projeto, define-se o desempenho e mensura-se o mesmo continuamente de modo a checar se ele está de acordo com o desejado. Baseado no desempenho desejado, os parâmetros do sistema podem ser alterados para produzir a resposta desejada.

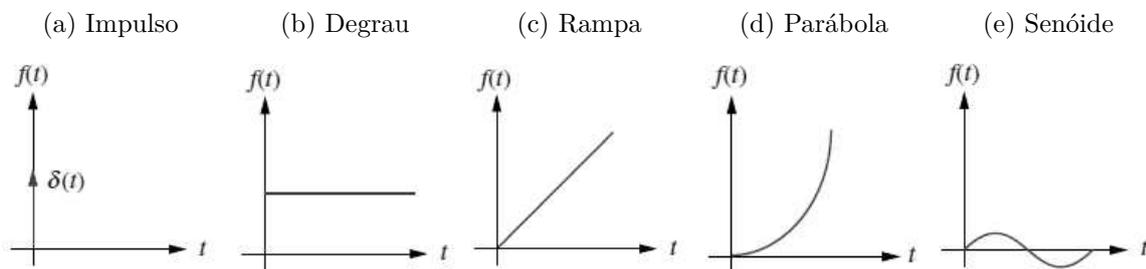
O desempenho do sistema está ligado com especificações de projeto que usualmente incluem índices de resposta no tempo para um comando de entrada específico, bem como a exatidão desejada em regime permanente. Ao longo do projeto, estas especificações de desempenho devem ser revisadas de forma a atingir certo compromisso. O compromisso neste caso pode ser visto como uma tentativa de solução de vários problemas simultaneamente.

4.3.1 SINAIS DE ENTRADA DE TESTE

Uma vez que não se conhece o sinal de entrada real o qual o sistema será submetido, o que se deve fazer é utilizar um sinal de entrada de teste padrão. Esta abordagem é útil, pois fornece uma correlação razoável entre este sinal de teste e o sinal de entrada em regime de operação normal de um sistema.

Ogata (2010) afirma que os sinais de entrada, $R(s)$, de teste frequentemente utilizados são função degrau, rampa, parábola de aceleração, impulso, senoíde e ruídos representados na Figura 4.

Figura 4 – Sinais de entrada de teste.



Fonte – Adaptado de Nise (2009)

4.3.2 DESEMPENHO DE SISTEMAS DE CONTROLE

Considere um sistema de segunda ordem com uma única malha e um sinal de entrada de teste degrau unitário. Um sistema de controle com realimentação foi definido anteriormente como:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} R(s) \quad (4.19)$$

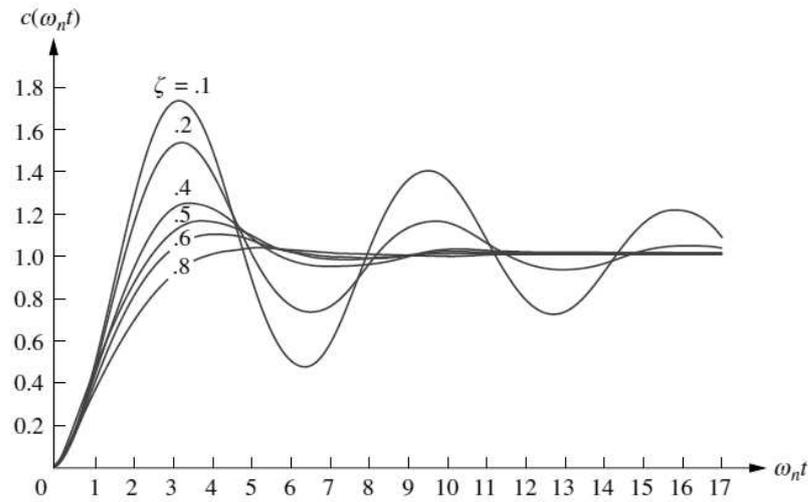
Reescrevendo esta equação, tem-se:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} R(s) \quad (4.20)$$

Uma vez que o sinal de teste é uma função degrau unitário, então:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)} \quad (4.21)$$

Utilizando diversos valores de ζ e observando a resposta transitória pode-se concluir que à medida que este parâmetro diminui, a resposta se torna cada vez mais oscilatória, Figura 5. A partir dessas observações Dorf (2013), Nise (2009), Ogata (2010) e outros desenvolveram relações entre as especificações de desempenho e a frequência natural, ω_n , e fração de amortecimento, ζ .

Figura 5 – Resposta de Sistemas de Segunda Ordem para diversos valores de ζ .

Fonte – Adaptado de Nise (2009)

As medidas de desempenho de um sistema comumente utilizadas são tempo de subida (T_r), tempo de pico (T_p), máxima ultrapassagem percentual ($M.U.P.$) e tempo de acomodação (T_s), e são definidas na literatura pelas equações a seguir:

$$T_{r1} = \frac{2,16\zeta + 0,60}{\omega_n} \quad (4.22)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.23)$$

$$M.U.P. = 100 \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \quad (4.24)$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (4.25)$$

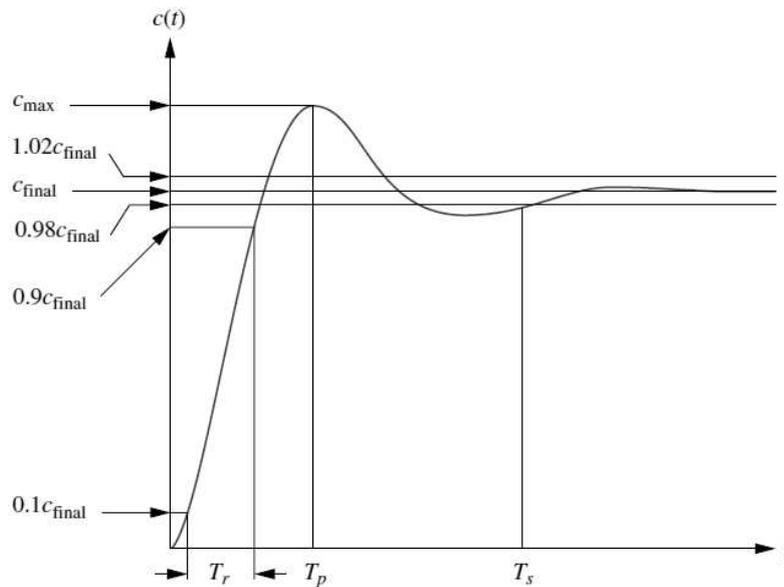
Cada medida de desempenho pode ser observada na Figura 6.

Para casos em que o sistema é de ordem maior que dois, o que se faz é tentar aproximar o sistema de um sistema de segunda ordem afastando-se os polos de ordem maior para no mínimo cinco vezes mais distantes que os polos dominantes, Nise (2009). O autor ainda afirma que quanto mais perto os polos de ordem superior estiverem do eixo imaginário maior será o seu efeito na resposta.

De acordo com as discussões feitas na seção anterior sabe-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_c(s)G(s)} R(s) \quad (4.26)$$

Figura 6 – Medidas de Desempenho de Sistemas.



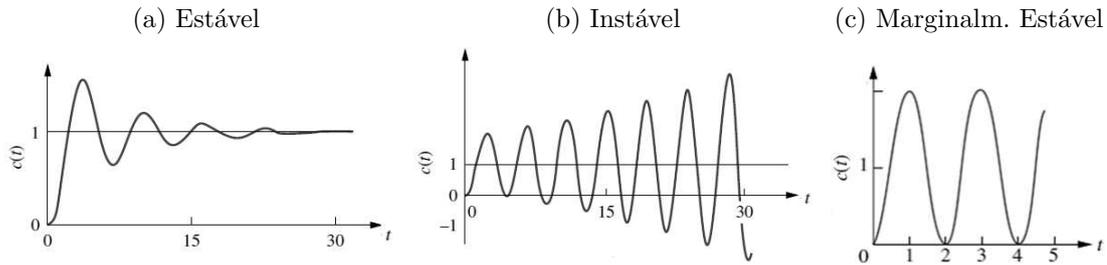
Desta forma, utilizando esta equação pode-se definir o erro em regime estacionário de um sistema de controle com realimentação unitária para os sinais de testes, $R(s)$, representados na Figura 4.

4.3.3 ESTABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO

A estabilidade de sistemas em malha fechada é importante para o projeto de sistemas de controle. Segundo Dorf (2013), a estabilidade de um sistema com realimentação está diretamente relacionada com a posição dos polos da equação característica do sistema no plano s , ainda, o sistema deve apresentar saída limitada para uma dada entrada limitada (estabilidade BIBO).

De acordo com Nise (2009), podem haver três graus de estabilidade para sistemas de controle. Quando o sistema é completamente estável significa que todos os polos em malha fechada estão no semiplano esquerdo do plano s . Há a forma marginalmente estável que ocorre quando um ou mais polos estão no eixo $j\omega$. E a forma instável ocorre quando há polos no semiplano direito do plano s . Os comportamentos destes tipos de estabilidade são representados na Figura 7.

Figura 7 – Estabilidade de Sistemas de Controle.



Fonte – Adaptado de Nise (2009)

4.4 MÉTODOS DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A resposta em frequência significa a resposta em regime permanente de um sistema a uma entrada senoidal. A resposta do sistema a este tipo de entrada também é senoidal com a mesma frequência de entrada em regime permanente diferindo apenas em amplitude e fase (OGATA, 2010).

Dorf (2013) afirma que uma vantagem básica deste método consiste na pronta disponibilidade de sinais de teste senoidais para várias faixas de frequências, o que facilita a determinação experimental da resposta em frequência. Além disso, para sistemas cuja função de transferência é desconhecida, pode-se utilizar estes métodos para a determiná-la experimentalmente.

4.4.1 DIAGRAMAS DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A função de transferência de um sistema, $G(s)$, qualquer pode ser descrita no domínio da frequência substituindo-se s por $j\omega$ e então representando o número complexo resultante na forma retangular ou polar, como segue:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = R(\omega) + jX(\omega) \quad (4.27)$$

onde

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \text{Re}[G(j\omega)] \\ X(\omega) &= \text{Im}[G(j\omega)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

Portanto

$$|G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)} = |G(j\omega)|\angle\phi(\omega) \quad (4.29)$$

onde

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= [R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2 \\ \phi(\omega) &= \tan^{-1} \frac{X(\omega)}{R(\omega)} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Substituindo diversos valores de ω na equação resultante, pode-se plotar o gráfico de magnitude e fase do sistema abordados na próxima seção.

4.4.1.1 DIAGRAMAS DE BODE OU GRÁFICOS LOGARÍTMICOS

Este diagrama é constituído de dois gráficos: um é o gráfico do módulo de uma função de transferência senoidal; o outro representa o ângulo de fase. Ambos traçados com relação à frequência em escala logarítmica.

O logaritmo do módulo ou magnitude é representado por $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ cuja unidade é o decibel ou dB .

Desta forma o ganho logarítmico em dB e o ângulo de fase, ϕ , podem ser traçados em função da frequência, ambos em gráficos separados.

Utilizando aproximações assintóticas propostas por Nise (2009) pode-se plotar o gráfico de Bode de qualquer função, $G(s)$. Estas aproximações assintóticas podem ser feitas separando-se a função de transferência em termos menores como os citados abaixo.

1. Ganho constante K
2. Fatores Integrais e Derivativos
3. Fatores de Primeira Ordem
4. Fatores Quadráticos

O Apêndice A apresenta o diagrama de Bode dos casos citados acima.

4.5 CONTROLE ROBUSTO E TÉCNICAS DE CONTROLE MULTIVARIÁVEL

A teoria de controle robusto surgiu com o objetivo de garantir o desempenho satisfatório do controlador na planta real apesar de inexatidões no modelo utilizado assegurando robustez de estabilidade e robustez de desempenho. Portanto assume-se que um sistema robusto apresenta inexatidões aceitáveis devido à modelagem e inclui essa incerteza no projeto de sistema de controle.

Como exemplo de controladores que garantem robustez tem-se um controlador que garante estabilidade de um submarino mesmo na presença de perturbações nas ondas do mar, proposto por Liceaga-Castro e Molen (1995), e um controlador que garante estabilidade de voo de um quadrirotor mesmo na presença de perturbações no voo, proposto por Zhang, Quan e Cai (2011).

Ogata (2010) afirma que sistemas projetados baseados na teoria de controle robusto apresentam as seguintes propriedades.

ROBUSTEZ DA ESTABILIDADE

Em sistemas de controle, é comum o uso de um modelo simplificado que rejeita algumas dinâmicas do sistema. Estas dinâmicas não modeladas podem agir e levar o sistema à instabilidade, uma vez que o sistema apresenta comportamento estável somente para o modelo utilizado do projeto.

Adicionalmente, sistemas não lineares alteram seus pontos de operação de equilíbrio e logo o modelo linearizado descrevendo o comportamento da planta também altera seus parâmetros. Esta variação de parâmetros faz com que o sistema se torne instável.

A robustez de estabilidade assegura que o controlador projetado fornece estabilidade mesmo na presença de dinâmicas não modeladas ou variações nos parâmetros da planta.

ROBUSTEZ DE DESEMPENHO

É importante atentar para situações que podem deteriorar o desempenho do sistema. Perturbações e ruídos de medição dos sensores ocorrem frequentemente e podem causar uma perda no desempenho do sistema que foi projetado sem levá-los em consideração. Desta forma, torna-se necessário projetar controladores que garantam um desempenho aceitável mesmo na presença de perturbações ou ruídos, resultando em robustez de desempenho.

PROJETO DE ROBUSTEZ MODERNA

O projeto de robustez moderna fornece uma abordagem simplificada para o projeto de controladores MIMO realimentando todas as malhas de controle simultaneamente e garantindo desempenho do sistema e estabilidade em malha fechada utilizando noções de decomposição de valor singular, que será descrita nesta seção.

4.5.1 ANÁLISE MULTIVARIÁVEL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) e Skogestad e Postlethwaite (2005) afirmam que esboçar os diagramas de Bode de cada sistema SISO que compõem o MIMO e então examinar seus ganhos de margem e fase separadamente além de ser uma tarefa árdua pode não ser tão eficaz por conta das interações entre pares entrada-saída. Por este motivo utiliza-se decomposição dos valores singulares do sistema, como já mencionado, para projeto de robustez MIMO que estende alguns conceitos de sistemas SISO.

Nesta seção serão abordadas as sensibilidades e o ganho de malha multivariável bem como a resposta no domínio da frequência destes sistemas. Adicionalmente, será mostrado algumas especificações para atingir robustez de desempenho e robustez de estabilidade utilizando noções de valor singular.

4.5.1.1 SENSIBILIDADE E SENSIBILIDADE COMPLEMENTAR PARA SISTEMAS MIMO

A Figura 3 mostrou um sistema em malhada fechada padrão onde a planta ou processo é $G(s)$ e o compensador por $G_c(s)$.

Skogestad e Postlethwaite (2005) definem as sensibilidade e sensibilidade complementar de sistemas MIMO, respectivamente, como:

$$S(s) = (I + GG_c)^{-1} \quad (4.31)$$

e

$$T(s) = GG_c(I + GG_c)^{-1} = (I + GG_c)^{-1}GG_c \quad (4.32)$$

Lembre-se que se trabalha agora com matrizes e não mais com constantes. Desta forma, pode-se concluir que esta é uma extensão direta de casos SISO, exceto pela ordem de multiplicação das matrizes GG_c , que se dá por causa da não-comutatividade ($\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$).

Adicionalmente:

$$S(s) + T(s) = (I + GG_c)(I + GG_c)^{-1} = I \quad (4.33)$$

O ganho de malha aberta, assim como no caso SISO, é representado por $L(s) = GG_c$.

Em função destas sensibilidades MIMO, tem-se as equações de saída e erro do sistema em malha fechada

$$Y(s) = T(s)(R(s) - N(s)) + S(s)G(s)T_p(s) \quad (4.34)$$

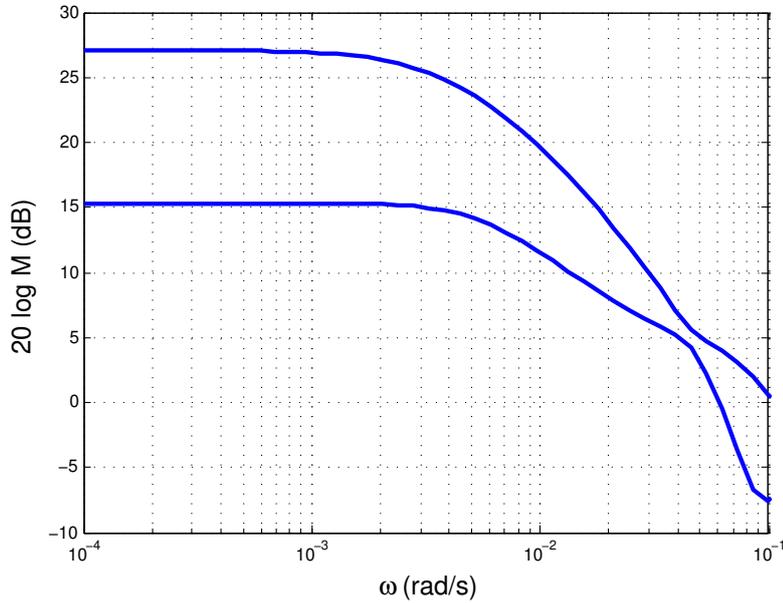
$$E(s) = S(s)(R(s) - G(s)T_p(s)) + T(s)N(s) \quad (4.35)$$

Observando as equações acima, fica claro que estas generalizações multivariáveis são estendidas das noções clássicas SISO, já citadas neste texto, que relatam que para assegurar boa rejeição a perturbações, deve-se ter $S(j\omega)$ pequeno (ganho de malha, G_cG , grande) para baixas frequências, e para boa rejeição a ruído de medição de sensores deve-se ter $T(j\omega)$ pequeno em altas frequências (ganho de malha pequeno).

4.5.1.2 RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS

Infelizmente, não é tão simples determinar o quão “pequeno” $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$ devem ser. Lembre-se que ambas são matrizes quadradas de ordem $m \times m$, com m o número de entradas de controle $u(t)$, que assume-se que é igual ao número de saídas $z(t)$ e entradas de referência $r(t)$. Adicionalmente, estas matrizes estão em função da frequência o que

Figura 8 – Valores singulares de Tanques Acoplados.



Fonte – Adaptado de Vo e Seshagiri (2008)

Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) afirmam que as noções clássicas de frequência de corte permanecem para o caso MIMO e que se a frequência de corte deve ser limitada devido às considerações de ruído de alta-frequência, o maior valor singular deve satisfazer $\bar{\sigma}(G(j\omega)) = 1$, na frequência de corte, $j\omega_c$, especificada.

Antes de iniciar a discussão. Skogestad e Postlethwaite (2005) definem

$$\bar{\sigma}(S) \approx \frac{1}{\underline{\sigma}(GG_c)} \quad (4.38)$$

e

$$\bar{\sigma}(T) \approx \bar{\sigma}(GG_c) \quad (4.39)$$

Ou seja, um valor grande de $\underline{\sigma}(GG_c)$ garante um valor pequeno de $\bar{\sigma}(S)$, e um valor pequeno de $\bar{\sigma}(GG_c)$ garante um valor pequeno de $\bar{\sigma}(T)$.

Isso significa que pode-se substituir os requisitos das sensibilidades, $S(j\omega)$ e $T(j\omega)$, por $\underline{\sigma}(GG_c)$ sendo grande em baixas frequências e $\bar{\sigma}(GG_c)$ sendo pequeno em altas frequências. Portanto, todas as especificações de desempenho serão em termos de valores singulares máximo e mínimo do ganho de malha aberta $GG_c(j\omega)$, trabalhando somente com estes dois valores e não mais com a sensibilidade.

Especificações de baixa frequência

Para baixas frequências, supondo que na equação 4.35 $N(s)$ é nulo devido a este termo ser de altas frequências, resulta

$$E(s) = S(s)(R(s) - G(s)T_p(s)) \quad (4.40)$$

Para manter $E(s)$ pequeno Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) afirmam que basta garantir que em baixas frequências, $\bar{\sigma}(S(j\omega))$ é pequeno, ou seja:

$$\underline{\sigma}(GG_c(j\omega)) \gg 1, \text{ para } \omega \leq \omega_d \quad (4.41)$$

onde $T_p(s)$ e $R(s)$ são aplicáveis para $\omega \leq \omega_d$.

Portanto, exatamente como na teoria de controle clássico pode-se especificar uma barreira de robustez que garante desempenho mesmo na presença de perturbações em baixas frequências. Os autores ainda citam que uma especificação de desempenho de baixa frequência pode ser pensada no que diz respeito ao erro em regime estacionário. Neste caso, pode-se garantir que o erro é nulo adicionando-se um integrador a cada canal do sistema $G(s)$. Infelizmente, em alguns casos a adição de um integrador em cada canal de $G(s)$ resulta num compensador de ordem elevada ou muito complexo. Desta forma, pode-se utilizar

$$\underline{\sigma}(GG_c(0)) > \frac{r}{\delta_\infty} \quad (4.42)$$

que garante que o erro em regime estacionário será menor que um valor aceitável δ_∞ .

Uma última especificação de baixa frequência diz respeito aos valores singulares do ganho de malha, GG_c , estarem próximos do mesmo valor. Isto assegura que a velocidade das respostas serão quase as mesmas em todos os canais do sistema e é conhecido como balanceamento de valores singulares em baixa frequência.

Especificações de alta-frequência

Para o caso de altas frequências o ruído de sensor $N(s)$ é aplicável e portanto a equação 4.35 torna-se

$$E(s) = T(s)N(s) \quad (4.43)$$

como deseja-se $T(s)$ pequeno em altas frequências, tem-se que

$$\bar{\sigma}(GG_c(j\omega)) \ll 1, \text{ para } \omega \geq \omega_n \quad (4.44)$$

Que garante robustez em alta-frequência. Porém, há outro ponto a ser considerado. O modelo que está em uso é uma aproximação da planta real e desconsidera várias dinâmicas

de alta frequência. Portanto, embora o controlador projetado garanta estabilidade em malha fechada, ele não garante estabilidade em altas frequências e podem ocorrer variações nos parâmetros da planta devido a dinâmicas não modeladas.

As incertezas devido a dinâmicas não modeladas podem ser do tipo aditivo, onde o modelo real da planta difere do modelo utilizado apenas por incertezas aditivas, ou multiplicativas do tipo

$$G'(j\omega) = [I + M(j\omega)]G(j\omega) \quad (4.45)$$

onde $M(j\omega)$ representa a incerteza que deve satisfazer

$$\bar{\sigma}(M(j\omega)) < m(j\omega) \quad (4.46)$$

com $m(\omega)$ conhecido para todo ω . Desta forma deve-se voltar a atenção em encontrar a barreira $m(\omega)$.

Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) afirmam que a robustez de estabilidade se dá de tal forma que a sensibilidade complementar $T(j\omega)$ esteja limitada superiormente pelo recíproco da incerteza multiplicativa de modelagem, $m(\omega)$, como segue

$$\underline{\sigma}[GG_c(I + GG_c)^{-1}] < \frac{1}{m(\omega)} \quad (4.47)$$

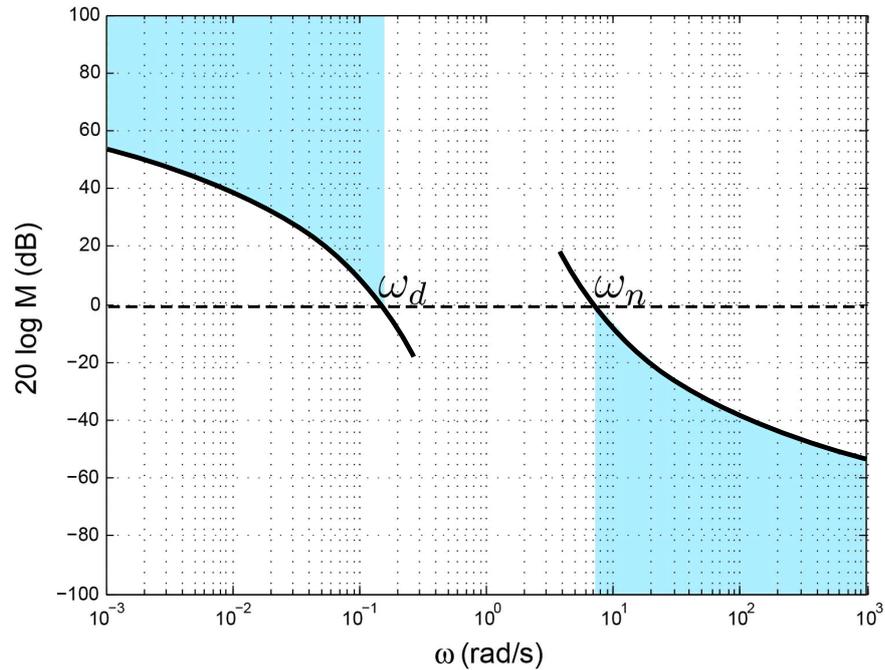
Para simplificar a equação acima e colocando-a em termos do ganho de malha, tem-se a especificação de estabilidade como:

$$\bar{\sigma}(GG_c(j\omega)) < \frac{1}{m(\omega)} \quad (4.48)$$

para todo ω tal que $m(\omega) \gg 1$.

Estas especificações podem ser compreendidas visualmente com a Figura 9.

Figura 9 – Resumo das especificações de desempenho.



Fonte – Adaptado de Hull (2007).

4.5.2 O LQR COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA

O LQR consiste em um método de controle ótimo utilizado no projeto de controle em espaço de estados.

Seja um sistema representado em espaço de estados como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.49)$$

Com lei de controle dada por:

$$u = -Ky \quad (4.50)$$

O LQR centra esforços em encontrar a matriz de ganhos K que minimize a função de custo quadrática ou PI do tipo:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (4.51)$$

Sendo Q e R matrizes de ponderação semidefinidas positivas simétricas que devem ser selecionadas de acordo com os requerimentos de desempenho do projeto. Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) afirmam que a matriz K garante que o sistema em malha fechada será

estável desde que o sistema possua estados completamente observáveis. A observabilidade é confirmada se o posto da Equação 4.52 é cheio:

$$O = \begin{bmatrix} \sqrt{Q} \\ \sqrt{Q}A \\ \vdots \\ \sqrt{Q}A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Pode-se então encontrar a matriz de ganhos K que minimiza a função de custo quadrática, 4.51, resolvendo as equações de Lyapunov:

$$A_c^T P + P A_c + C^T K^T R K C + Q = 0 \quad (4.53a)$$

$$A_c S + S A_c^T + X = 0 \quad (4.53b)$$

$$K = R^{-1} B^T P S C^T (C S C^T)^{-1} \quad (4.53c)$$

onde

$$A_c = A - B K C \quad (4.54)$$

$$X = x(0)x^T(0)$$

Conforme Skogestad e Postlethwaite (2005), no método LQR as matrizes Q e R possuem efeito primordial sobre o desempenho do controlador projetado. Desta forma, torna-se necessário encontrar os melhores valores possíveis de Q e R . Esta tarefa demanda um esforço elevado com tentativas e erros tornando-se bastante dispendiosa. O uso de inteligências artificiais neste caso se torna bastante eficaz na determinação destas matrizes, conforme Abreu (2008).

Com base no que foi dito, pode-se então resumir o método LQR nos seguintes passos:

1. Determinar as matrizes de ponderação Q e R ;
2. Encontrar P e S resolvendo as Equações 4.53a e 4.53b
3. Encontrar a matriz de ganhos K pela Equação 4.53c

Embora o LQR garanta estabilidade do sistema em malha fechada, nada se pode afirmar sobre o erro em regime permanente para o caso de rastreamento de entradas de referência. Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) afirmam que um bom rastreamento da entrada de referência pode ser alcançado inserindo uma malha de realimentação, que realimenta somente os estados que devem ser rastreados, com ganhos unitários e subtrai o mesmo do

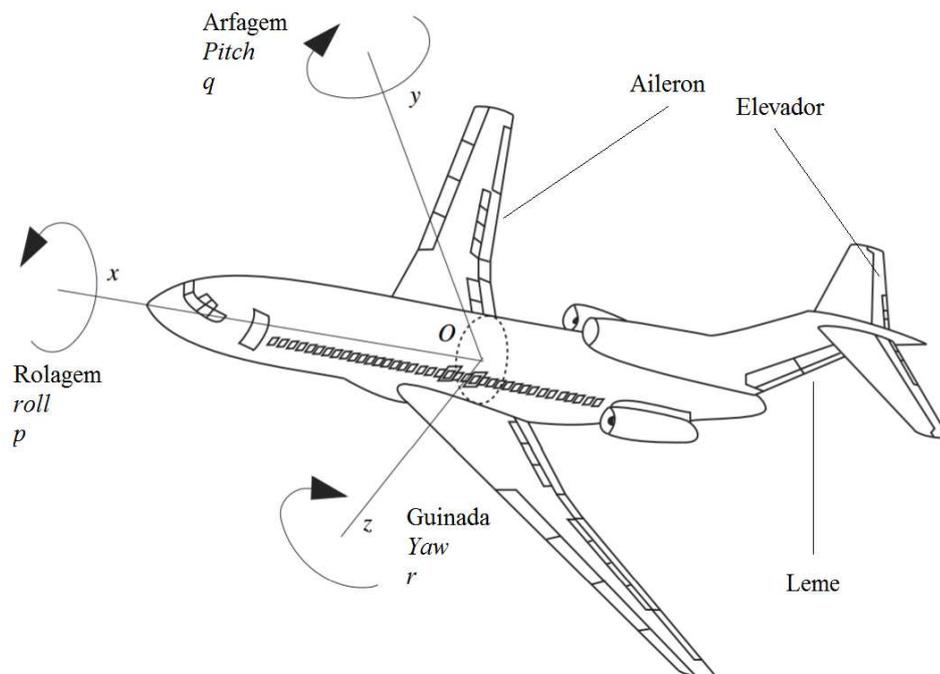
comando de referência, definindo então o erro que deve ser mantido pequeno ou anulado, se possível. Este sinal de erro será enviado a algum controlador, por exemplo um integrador, que irá agir em conjunto com o LQR.

4.6 DINÂMICA DE VOO

Por se tratar de um objeto tri-dimensional a aeronave possui três eixos, sendo eles: longitudinal, lateral e vertical, ou x , y e z . As velocidades angulares com relação a estes três eixos são rolagem, arfagem e guinada como pode ser visto na Figura 10. Nota-se que estas velocidades também podem ser representadas pelas letras p , q e r .

Ainda nesta figura pode-se observar o nome dos atuadores dos eixos citados. A nomenclatura varia com a literatura devido aos diferentes tipos de aeronaves. Embora, os eixos, ângulos e velocidades estejam ilustrados com um avião muito pouco mudaria para o caso de uma aeronave F-16.

Figura 10 – Eixos, velocidades angulares e atuadores em aeronaves.

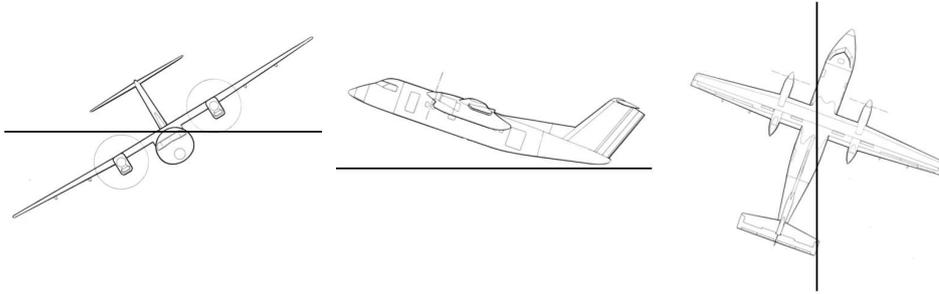


Fonte – Adaptado de Hull (2007).

Aliados aos eixos e velocidades, citados anteriormente, têm-se os ângulos de rotação da aeronave com relação aos seus respectivos eixos, representados na Figura 11. Um controlador robusto, neste caso, seria aquele que mantém o ângulo de rotação de acordo com o comandado pelo piloto e rejeita as perturbações devido às rajadas de vento ou incertezas devido às dinâmicas não modeladas.

Figura 11 – Ângulos de rotação.

(a) Ângulo de Rolagem (b) Ângulo de Arfagem (c) Ângulo de Derrapagem



Fonte – Adaptado de Stengel (2004).

Neste ponto finaliza-se a Fundamentação Teórica e portanto, considera-se que o leitor encontra-se apto a prosseguir para o projeto do controlador LQR, abordado no próximo capítulo, que irá validar as técnicas discutidas anteriormente.

5 PROJETO DO LQR

Este capítulo tem como objetivo validar as técnicas multivariáveis com o projeto de um controlador *LQR* que será introduzido na malha da aeronave F-16 com o intuito de garantir um bom rastreamento das entradas de referências.

Como especificações de projeto, considera-se, para uma entrada degrau um tempo de assentamento, T_s , menor que 4 s e erro em regime permanente, $e(\infty)$, nulo. Deseja-se ainda que o ângulo de rolagem e derrapagem rastreiem um sinal de entrada comandado pelo piloto, sem afetar significativamente os demais, com comportamento de sistema de primeira ordem, significando que a máxima ultrapassagem percentual, *M.U.P.*, deve ser nula.

As especificações fornecidas acima devem ser garantidas para todas as saídas do sistema.

5.1 MODELO DA AERONAVE F-16

A aeronave F-16 é composta por inúmeros sistemas de controle e por este motivo possui diversos modelos matemáticos. Porém, o modelo que será utilizado neste texto refere-se à dinâmica de voo lateral do sistema fornecido por Vo e Seshagiri (2008) em notação de espaços de estados. Este modelo foi linearizado pelos autores em torno de um ponto de operação e obedece a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{5.1}$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -0.3220 & 0.0640 & 0.0364 & -0.9917 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0037 \\ -30.6492 & 0 & -3.6784 & 0.6646 \\ 8.5396 & 0 & -0.0254 & -0.4764 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.7331 & 0.1315 \\ -0.0319 & -0.0620 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

com vetor de estados x e vetor de saídas y representados por:

$$\begin{aligned} x &= [\beta \quad \phi \quad p \quad r]^T \\ y &= [\beta \quad \phi]^T \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde:

β : ângulo de derrapagem

ϕ : ângulo de inclinação

p : velocidade angular de rolagem

r : velocidade angular de guinada

Os parâmetros de controle, u , são:

$$u = \begin{bmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

representando as respostas dos servo-atuadores de aileron, δ_a , e leme, δ_r , que possuem como função de transferência:

$$\frac{\delta_a}{u_a} = \frac{\delta_r}{u_r} = \frac{20.2}{s + 20.2} \quad (5.7)$$

Com esta configuração o sistema pode ser representado pela Figura 17 presente no Apêndice B.

5.2 METODOLOGIA

Para este projeto considerou-se a seguinte metodologia proposta por Lewis, Vrabie e Syrmos (2012):

1. Se necessário, eleve a dinâmica da planta para garantir o erro de estado estacionário desejado, ou para garantir valores singulares balanceados em DC.
2. Selecione as matrizes de ponderação Q e R .
3. Determine o ganho ótimo de realimentação de saída, K , utilizando as matrizes Q e R escolhidas no item anterior e algum método empírico ou método computacional.
4. Simule as respostas temporais do sistema em malha fechada para verificar se são satisfatórias. Caso não sejam, selecione outras matrizes Q e R e retorne ao Passo 3. Ou retorne ao Passo 1.

5. Determine as barreiras de baixa e alta frequência requeridas para robustez de desempenho e robustez de estabilidade. Simule a resposta no domínio da frequência do ganho de malha aberta para verificar se as barreiras e especificações de desempenho são satisfeitas. Caso não sejam, selecione novas matrizes Q e R e retorne ao Passo 3. Ou retorne ao Passo 1.

5.3 PROJETO DO CONTROLADOR LQR

5.3.1 ELEVAÇÃO DA DINÂMICA DO SISTEMA

Inicialmente inseriu-se uma malha de realimentação com ganhos unitários para a saídas de interesse, β e ϕ , e um controlador do tipo integrador para cada um destes canais de realimentação.

Adicionalmente, elevou-se a ordem do sistema com a adição de dois novos estados, β_w e ϕ_w , oriundos de filtros de amortecimento para grandes oscilações de β e ϕ , (Equação 5.8).

$$\frac{\beta_w}{\beta} = \frac{\phi_w}{\phi} = \frac{s}{s+1} \quad (5.8)$$

Desta forma as matrizes do sistema resultaram em:

$$A = \begin{bmatrix} -0.3220 & 0.0640 & 0.0364 & -0.9917 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0037 & 0 & 0 \\ -30.6492 & 0 & -3.6784 & 0.6646 & 0 & 0 \\ 8.5396 & 0 & -0.0254 & -0.4764 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.7331 & 0.1315 \\ -0.0319 & -0.0620 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

com vetor de estados e de saída dados por

$$\begin{aligned} x &= [\beta \quad \phi \quad p \quad r \quad \beta_w \quad \phi_w]^T \\ y &= [\beta \quad \phi \quad p \quad r]^T \end{aligned} \quad (5.12)$$

Com a adição de integradores, malha de realimentação e novos estados o sistema agora pode ser representado pela Figura 18 presente no Apêndice B.

5.3.2 SELEÇÃO DAS MATRIZES Q E R

A seleção destas matrizes é um grande desafio em teoria de controle. Segundo Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) o desempenho da matriz de ganhos K depende da seleção destas matrizes de ponderação. Os autores ainda afirmam que dentre as diversas técnicas existentes para a seleção destas matrizes a mais comum é fazer $Q = C^T C$ e $R = \sigma * I$, ajustando os valores de sigma até que o resultado esperado seja obtido.

Com algumas tentativas e erros finalizou-se com:

$$Q = \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

e

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Observabilidade

A observabilidade é dada pela equação 4.52. Para $n = 6$, a matriz de observabilidade possui 36 linhas e 6 colunas. Em seguida, verificou-se que a matriz de observabilidade possui posto cheio, $n = 6$, portanto esta matriz Q garante o sucesso do algoritmo LQR .

5.3.3 MATRIZ DE GANHOS K

Com as matrizes de ponderação definidas na subseção anterior e utilizando algoritmo fornecido por Lewis, Vrabie e Syrmos (2012) encontrou-se:

$$K = \begin{bmatrix} -1.711 \times 10^{17} & -2.004 & -7.832 \times 10^{15} & 1.385 \times 10^{16} \\ -93.2581 \times 10^4 & -20.6112 \times 10^4 & -30.8962 \times 10^4 & -14.6840 \times 10^4 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Utilizando a *Control System Toolbox* do *MATLAB* obteve-se os ganhos dos controladores de cada canal:

$$K_{pi} = \begin{bmatrix} K_{p\beta} & K_{i\beta} \\ K_{p\phi} & K_{i\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.0124 & -1.1138 \\ -13.2718 & -22.5497 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

6 SIMULAÇÕES E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta os resultados da simulação do projeto LQR bem como a análise dos mesmos. Para a avaliação da resposta do sistema com LQR, utilizou-se a metodologia de análise no domínio do tempo e análise no domínio da frequência.

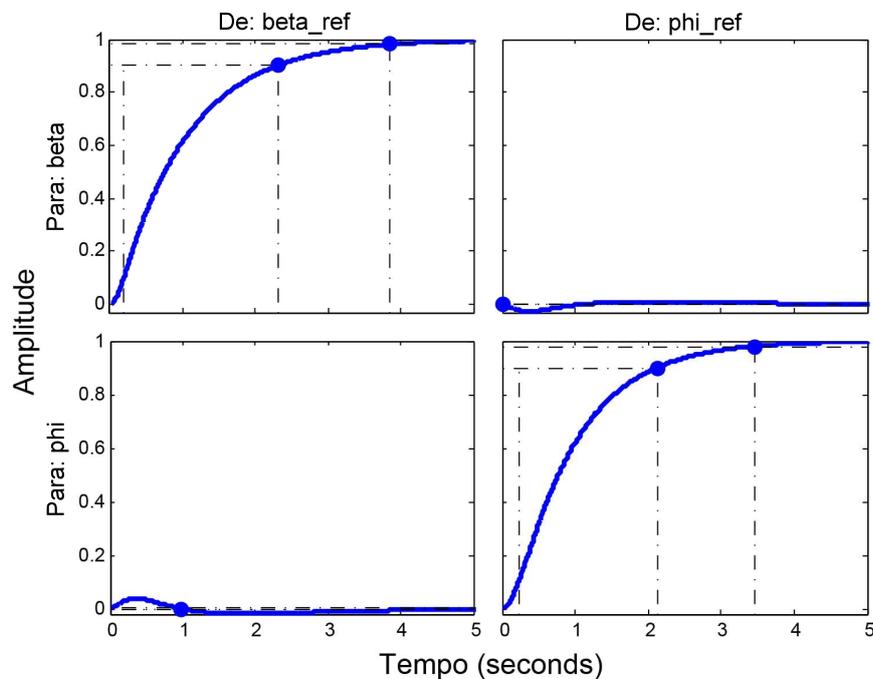
Para ambas as avaliações utilizou-se o *MATLAB*. Desta forma a seção segue com a execução da metodologia com análise temporal e análise de robustez no domínio da frequência.

6.1 ANÁLISE NO DOMÍNIO DO TEMPO

No domínio do tempo, submeteu-se o sistema a uma entrada de referência degrau unitário e analisou-se os seguintes parâmetros: tempo de assentamento, tempo de subida, *M.U.P.* e o erro estacionário.

Verificou-se que o controlador respondeu de forma satisfatória com erro em estado estacionário nulo, *M.U.P.* também nula, tempo de assentamento de 3.84 s para o canal β e 3.46 s para o canal ϕ , tempo de subida de 2.12 s para o canal β e 2 s para o canal ϕ .

Figura 12 – Resposta ao Degrau do Sistema em Malha Fechada com LQR e Integrador



Fonte – Autor

Diante disso, pode-se concluir que o controlador LQR projetado atende às especificações de projeto de forma satisfatória, com comportamento estável e erro nulo em estado

estacionário.

Prossegue-se agora ao último item da Metodologia onde verifica-se a robustez do sistema.

6.2 ANÁLISE NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Inicialmente, dar-se-á continuidade à execução da metodologia com a definição das barreiras de robustez e posterior análise no domínio da frequência.

6.2.1 BARREIRAS DE ROBUSTEZ

Barreira de Baixa Frequência

Para a análise de robustez levou-se em consideração uma perturbação do tipo rajada de ventos que se trata de um sinal estocástico. Leahy (2008) define o modelo destas rajadas como:

$$\Phi_v(\Omega) = \sigma_v^2 \frac{L_v}{\pi} \frac{1 + 3(L_v\Omega)^2}{[1 + (L_v\Omega)^2]^2} \quad (6.1)$$

onde Ω é a frequência espacial, σ é a intensidade da turbulência, L é a escala da turbulência dividida pela velocidade do ar.

Para esta análise, selecionou-se os seguintes parâmetros para a perturbação $\sigma = 10 \text{ ft/s}$ ou $3,048 \text{ m/s}$ e $L = 2.49 \text{ s}$.

Barreira de Alta Frequência

Para a barreira de alta frequência Vo e Seshagiri (2008) afirmam que o modelo é eficaz até um máximo de 10% acima da frequência de 2 rad/s . Depois deste ponto as incertezas crescem a uma taxa de 20 dB/década . Este tipo de incerteza se dá por conta de imperfeições do modelado atuador, aeronave, etc. Portanto, a incerteza multiplicativa é dada para a aeronave é dada por:

$$m(\omega) = \frac{s + 2}{20} \quad (6.2)$$

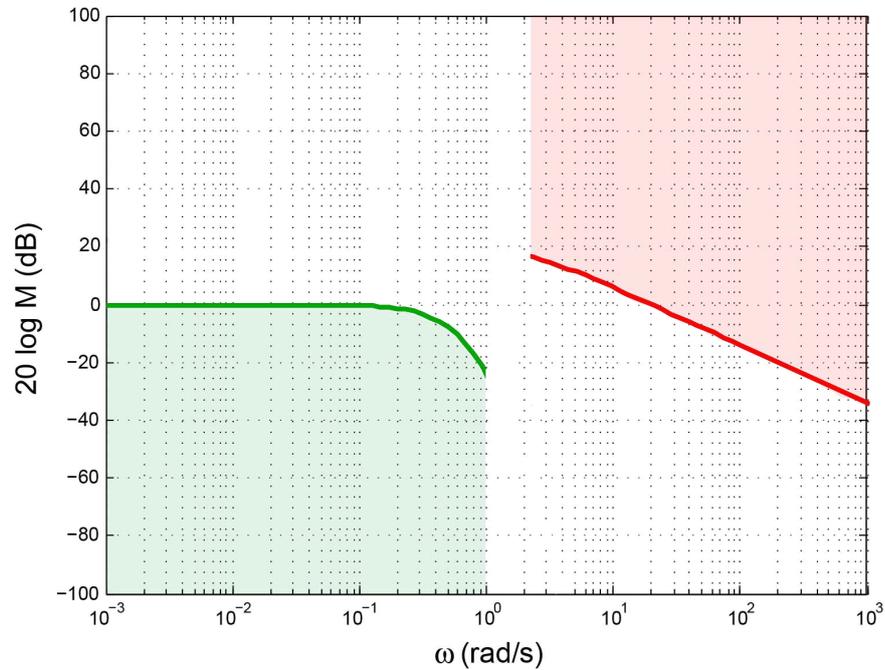
De acordo com as seções anteriores, para atingir as especificações de estabilidade deve-se garantir que:

$$\bar{\sigma}(GG_c(j\omega)) < \frac{1}{m(\omega)} = \det \frac{20}{s + 2} \quad (6.3)$$

quando $1/m(\omega) \ll 1$.

Portanto, tendo $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ e $\omega_d = 2.2 \text{ rad/s}$ a barreira de robustez é representada na Figura 13..

Figura 13 – Barreiras de Robustez.



Fonte – Autor

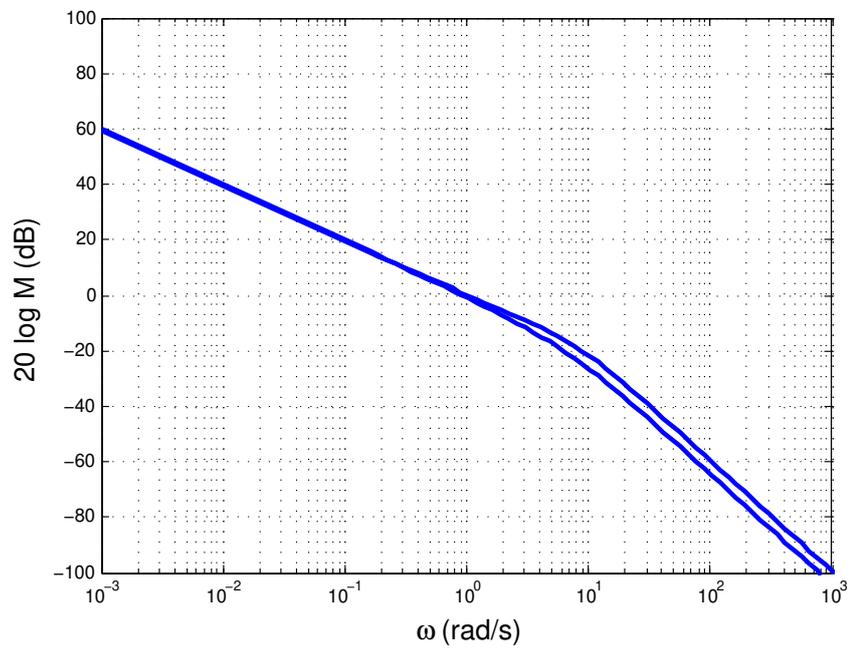
6.2.2 ANÁLISE DE ROBUSTEZ

Analisa-se os valores singulares do ganho de malha aberta do sistema com LQR e integradores, Figura 14. Constata-se que com o LQR e o integrador os valores singulares estão balanceados em baixas frequências.

Em seguida, plotou-se as respostas em frequência do ganho de malha aberta do controlador LQR com integradores projetado, da rajada de vento e a margem de alta frequência todas na mesma escala como prova de robustez.

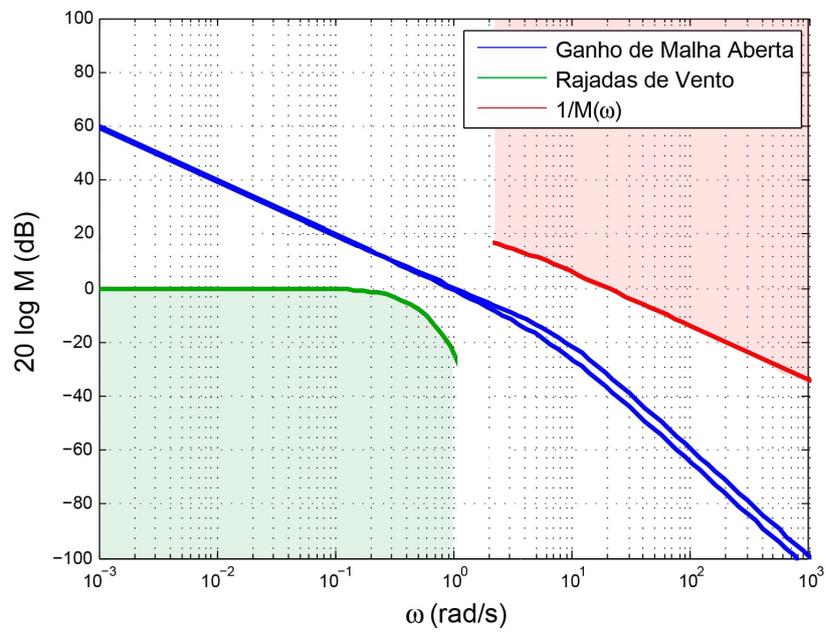
Com a Figura 15 pode-se notar que o ganho de malha obedece a todas as condições de robustez, sendo superior à magnitude de perturbação e inferior à de incertezas multiplicativas. Portanto, conclui-se que o sistema apresenta robustez de desempenho, garantindo bom funcionamento mesmo na presença de perturbações e robustez de estabilidade, garantindo bom funcionamento mesmo na hipótese de dinâmicas não modeladas.

Figura 14 – Valores Singulares da aeronave com LQR mais integrador



Fonte – Autor

Figura 15 – Análise de Robustez do Sistema com LQR e Integrador.



Fonte – Autor

6.3 CONCLUSÕES

Com base nos resultados observados na seção anterior deste capítulo, nota-se que o LQR em conjunto com os integradores projetados anulou o erro em regime permanente, fornecendo uma resposta estável para uma entrada do tipo degrau, atingindo todas as especificações de desempenho do projeto.

O controlador apresenta robustez de desempenho, garantindo bom comportamento na presença de rajadas de vento de 10 ft/s , uma vez que a magnitude do ganho de malha aberto foi superior à magnitude de rajadas de vento. E também robustez de estabilidade quanto às dinâmicas não modeladas, uma vez que o ganho de malha aberta foi inferior à margem de estabilidade. Ainda com relação à resposta em frequência, a inserção do LQR e integrador resultou em valores singulares balanceados em baixas frequências o que garantiu boa resposta temporal do controlador.

O controlador também garantiu um bom desacoplamento, uma vez que a entrada em um canal afetou o outro de forma não significativa.

Pode-se analisar todas as melhorias do projeto no Apêndice C, que apresenta as respostas dos sistemas sem compensação, com controlador LQR e LQR mais integrador tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. Os gráficos são superpostos de modo a possibilitar uma melhor visualização das mudanças.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram abordadas técnicas de resposta em frequência para sistemas multivariáveis por intermédio de SVD. Adicionalmente, explorou-se barreiras de robustez para um controlador LQR projetado para aeronave F-16.

O controlador LQR com integradores garantiu resposta temporal de acordo com as especificações de projeto. O projeto resultou em erro em estado estacionário e *M.U.P.* nulos para todos os canais, tempo de assentamento de 3.84 s para o canal β e 3.46 s para o canal ϕ , tempo de subida de 2.12 s para o canal β e 2 s para o canal ϕ .

Com base em gráficos, pode-se apontar que o controlador mais integrador obteve desempenho desejado de sistema de primeira ordem, respondendo muito bem a cada canal de entrada e não agindo sobre os demais, garantindo baixo acoplamento do sistema.

Observou-se com clareza, que o balanceamento dos valores singulares é necessário para que se tenha respostas com velocidades semelhantes no domínio do tempo.

Utilizou-se como barreiras de robustez de desempenho e estabilidade, as rajadas de ventos propostas por Leahy (2008) e as incertezas multiplicativas devido a dinâmicas não modeladas da aeronave F-16, respectivamente. A análise de robustez comprovou as especificações de desempenho no domínio da frequência para sistemas multivariáveis abordadas na Fundamentação Teórica.

Durante o projeto constatou-se que as matrizes de ponderação Q e R possuem grande impacto no desempenho do controlador final. Sugere-se como melhoria para o projeto o uso de inteligência artificial para seleção destas matrizes. Como possível técnica, pode-se utilizar o algoritmo genético utilizado em Abreu (2008) para este fim.

De forma resumida, o objetivo deste texto foi atingido validando as técnicas MIMO abordadas, que podem ser aplicadas não somente à aviação, mas a qualquer sistema multivariável. Espera-se que as técnicas aqui abordadas possam colaborar com o aprendizado de qualquer leitor em sua caminhada na engenharia de controle.

REFERÊNCIAS

- ABREU, I. S. *Controle inteligente LQR neuro-genético para alocação de auto estrutura em sistemas dinâmicos multivariados*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pará, Belém, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 65.
- ALEXIS, K.; NIKOLAKOPOULOS, G.; TZES, A. Model predictive quadrotor control: attitude, altitude and position experimental studies. *IET Control Theory & Applications*, Institution of Engineering and Technology, v. 6, p. 1812–1827(15), August 2012. ISSN 1751-8644. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-cta.2011.0348>>. Citado na página 32.
- DORF, R. C. *Sistemas de Controle Modernos*. [S.l.]: Edita LTC, 2013. Citado 9 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 40 e 41.
- GRZONKA, S.; GRISSETTI, G.; BURGARD, W. A fully autonomous indoor quadrotor. *IEEE Transactions on Robotics*, v. 28, n. 1, p. 90–100, Feb 2012. ISSN 1552-3098. Citado na página 32.
- HULL, D. G. *Fundamentals of Airplane Flight Mechanics*. [S.l.]: Springer Press, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 51.
- LEAHY, F. B. *Discrete Gust Model for Launch Vehicle Assessments*. 2008. [Online; acessado em 16 de Outubro de 2016]. Disponível em: <<http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20080014847>>. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 65.
- LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. *Optimal Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2012. Citado 12 vezes nas páginas 25, 29, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 54, 56 e 57.
- LICEAGA-CASTRO, E.; MOLEN, G. M. van der. Submarine h infin; depth control under wave disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 3, n. 3, p. 338–346, Sep 1995. ISSN 1063-6536. Citado na página 42.
- NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. [S.l.]: Editora LTC, 2009. Citado 9 vezes nas páginas 32, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42 e 72.
- NUNES, G. C.; MEDEIROS, J. L. de; ARAÚJO, O. D. Q. F. *Modelagem e Controle na Produção de Petróleo - Aplicações em MATLAB*. [S.l.]: Edgard Blucher, Ltda., 2010. Citado na página 32.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 33, 38, 41 e 42.
- SENTHILKUMAR, M.; LINCON, S. A. Design of stabilizing pi controller for coupled tank process. *International Journal of Engineering Research and Development*, v. 3, n. 10, p. 47–55, 2012. Citado na página 45.
- SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 43, 44, 46 e 50.
- STENGEL, R. F. *Flight Dynamics*. [S.l.]: Princeton University Press, 2004. Citado na página 52.

VO, H.; SESHAGIRI, S. Robust control of f-16 lateral dynamics. In: *Industrial Electronics, 2008. IECON 2008. 34th Annual Conference of IEEE*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 343–348. ISSN 1553-572X. Citado 3 vezes nas páginas 46, 53 e 60.

WIKIPEDIA, t. f. e. *General Dynamics F-16 Fighting Falcon operators*. 2012. [Online; acessado em 5 de Outubro de 2016]. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/General_Dynamics_F-16_Fighting_Falcon_operators>. Citado na página 26.

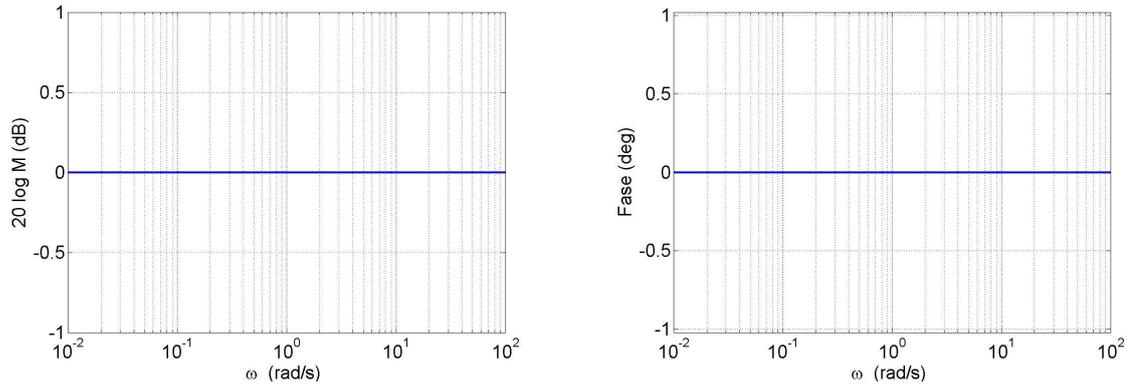
ZHANG, R.; QUAN, Q.; CAI, K. Attitude control of a quadrotor aircraft subject to a class of time-varying disturbances. *IET Control Theory & Applications*, Institution of Engineering and Technology, v. 5, p. 1140–1146(6), June 2011. ISSN 1751-8644. Disponível em: <<http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-cta.2010.0273>>. Citado na página 42.

Apêndices

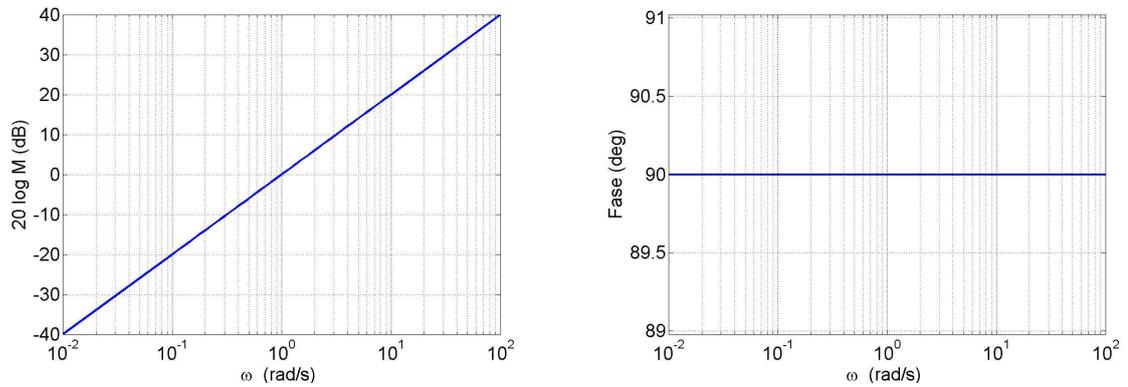
APÊNDICE A – DIAGRAMAS DE BODE

Figura 16 – Diagramas de Bode para casos simples.

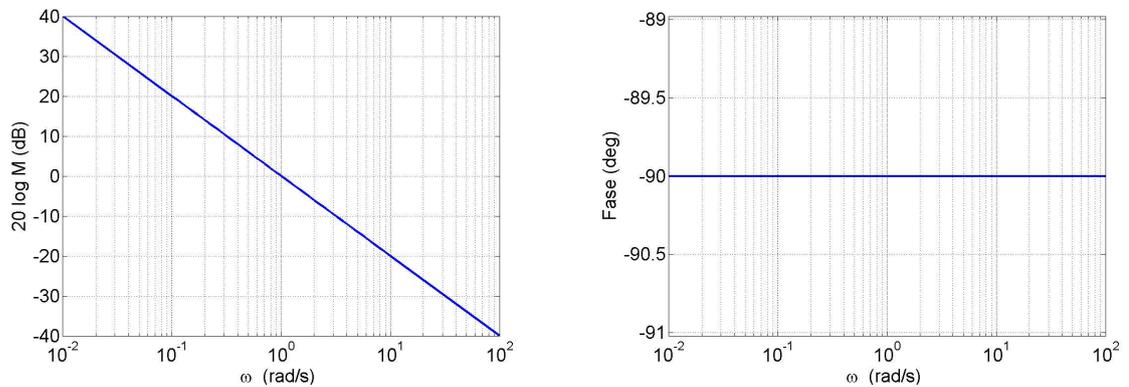
(a) Ganho constante K

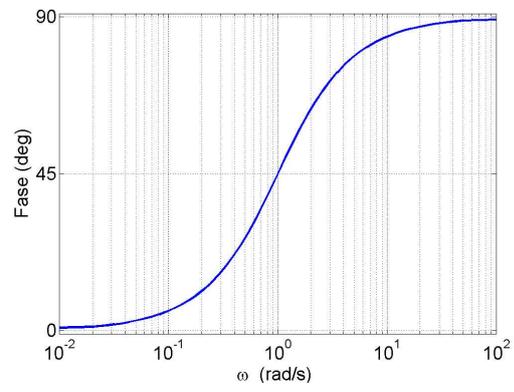
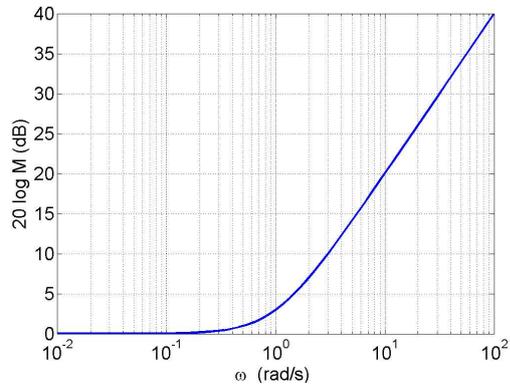


(b) Fator Integral

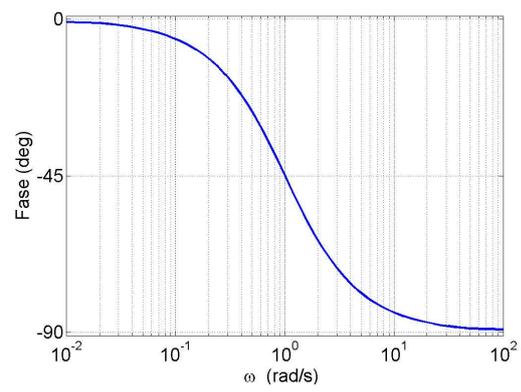
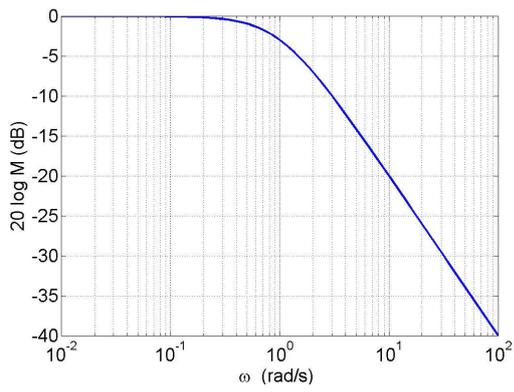


(c) Fator Derivativo

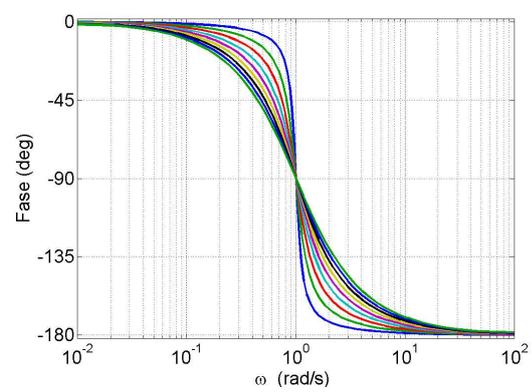
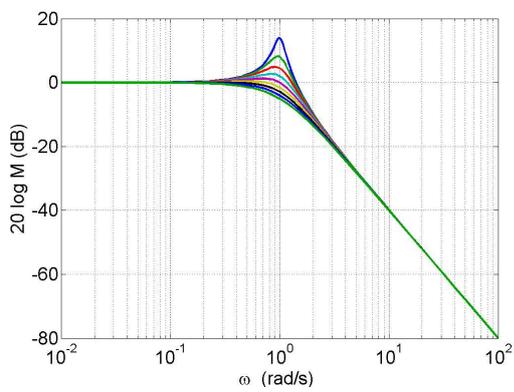




(a) Zero



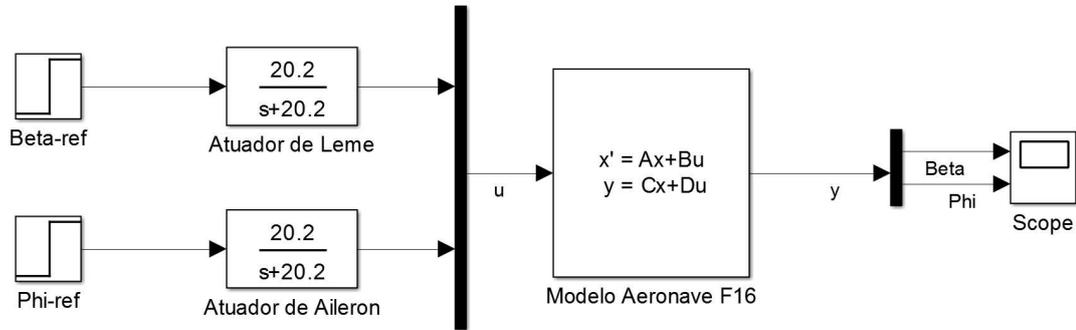
(b) Polo

(c) Fator quadrático (para $0.1 < \zeta < 0.9$)

Fonte – Nise (2009)

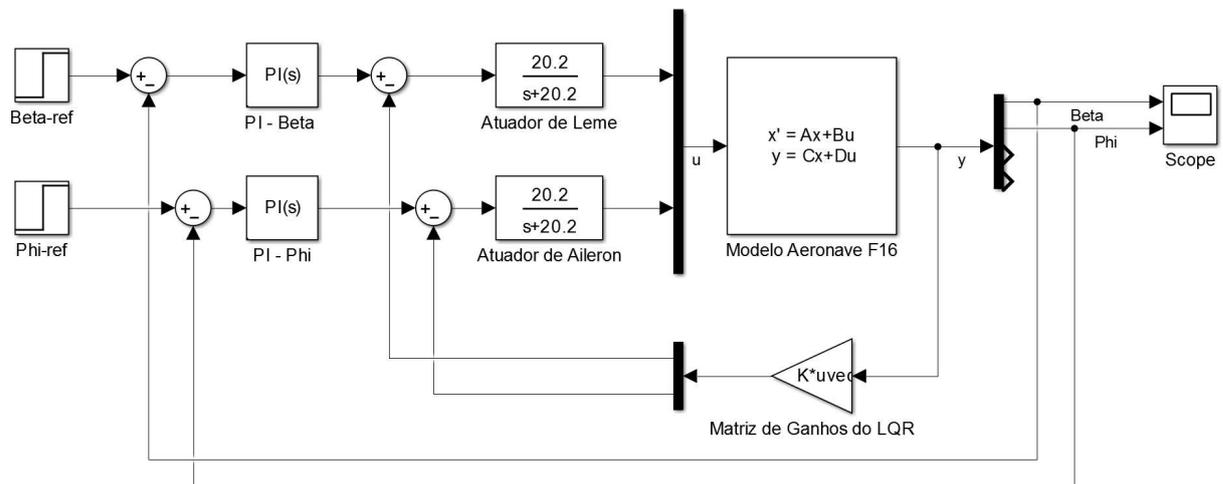
APÊNDICE B – DIAGRAMAS DE BLOCOS

Figura 17 – Diagrama de Blocos da Aeronave.



Fonte – Autor

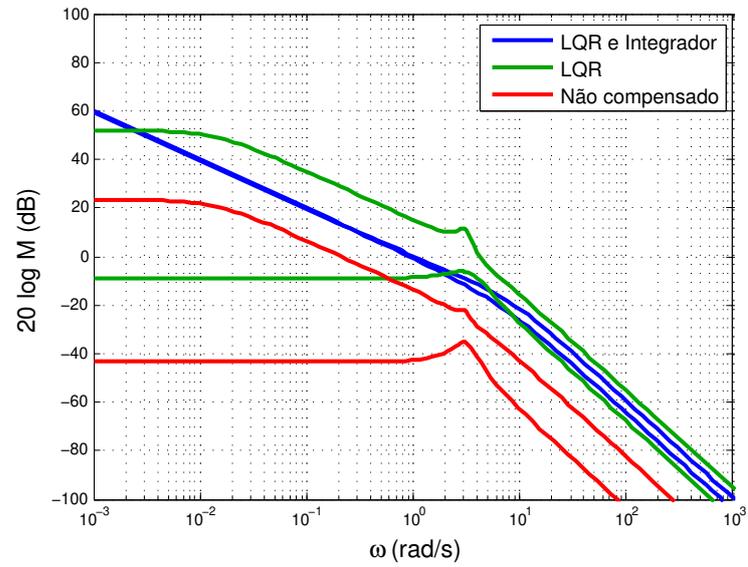
Figura 18 – Diagrama de Blocos da Aeronave com LQR e Integrador.



Fonte – Autor

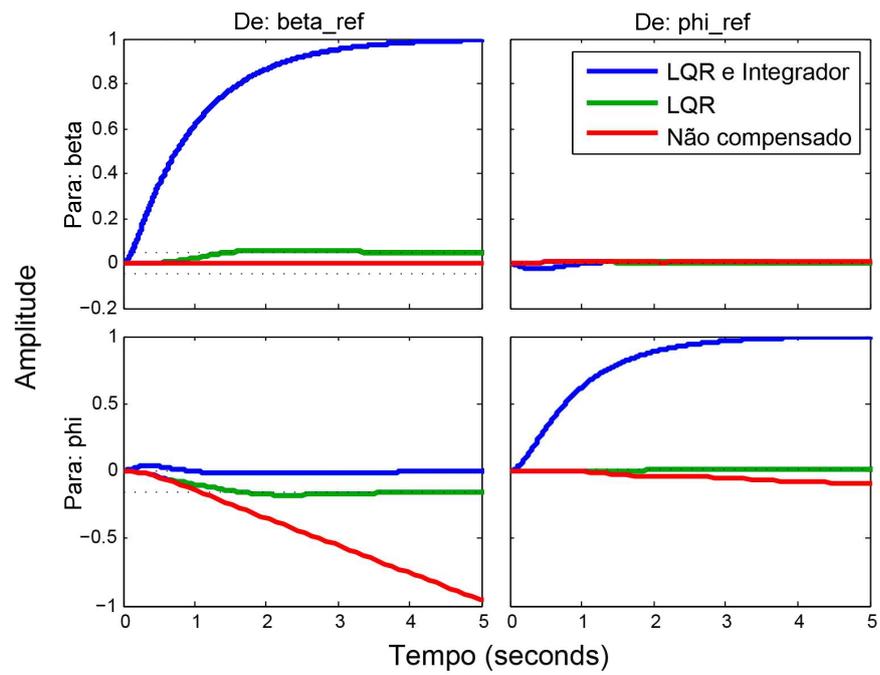
APÊNDICE C – RESUMO DO PROJETO

Figura 19 – Ganho de Malha Aberta de todos os sistemas.



Fonte – Autor

Figura 20 – Resposta ao Degrau de todos os sistemas.



Fonte – Autor