

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

**PAULA DA COSTA SOUSA**

**CONTROLADOR LQR VIA MÉTODO DE BRYSON EM UM MANIPULADOR  
ROBÓTICO IMPRESSO**

São Luís

2016



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
CURSO DE ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

**PAULA DA COSTA SOUSA**

**CONTROLADOR LQR VIA MÉTODO DE BRYSON EM UM MANIPULADOR  
ROBÓTICO IMPRESSO**

Monografia apresentada ao curso de Engenharia de Computação da Universidade Estadual do Maranhão, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Bacharel em Engenharia da Computação.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu.

São Luís

2016

Sousa, Paula da Costa

Controlador LQR via metodo de Bryson em um manipulador robotico impresso / Paula da Costa Sousa – São Luís, 2016.

63f

Monografia (Graduação) – Curso de Ciência da Computação, Universidade Estadual do Maranhão, 2016.

Orientadora: Prof.PHD Ivanildo Silva Abreu

1.Controle LQR.2.Metodo de Bryson .3. Diagrama de bode.4.Resposta de degrau.5.Manipulador robotico.

Paula da Costa Sousa

CONTROLADOR LQR VIA MÉTODO DE BRYSON EM UM MANIPULADOR  
ROBÓTICO IMPRESSO

Monografia apresentada ao curso de Engenharia de Computação da Universidade Estadual do Maranhão, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Bacharel em Engenharia da Computação.

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 5 de dezembro de 2016.

---

Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu  
Orientador

---

Prof. Dr. Mauro Sergio Silva Pinto  
Primeiro membro da banca

---

Prof. Madson Cruz Machado  
Segundo membro da banca



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele nada seria possível. Agradeço a minha mãe Lilia e meu pai Reginaldo pelo apoio e motivação. Agradeço ao meu querido Ricardo Frias, que caminhou sempre ao meu lado no decorrer do curso. Agradeço também ao meu orientador professor Ivanildo Abreu pela sua orientação, pelo exemplo de profissional e motivação durante esses seis anos de curso e pelo suporte para elaboração deste trabalho.

Agradeço profundamente aos meus professores e aos meus colegas das turmas 2010.2 e 2011.1 do curso de Engenharia de Computação da UEMA, que de alguma forma contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação.



*“Ao infinito e além!”  
(Buzz Lightyear)*



## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo projetar o Regulador Linear Quadrático para garantir as propriedades de robustez no modelo dinâmico obtido por FRIAS(2016) do manipulador robótico impresso EEZTbotAR. O LQR é um controlador que visa obter um controle ótimo de forma a minimizar a energia do atuador sobre a planta, resultando em melhor rendimento em sistemas que utilizam energia externa para a ação de controle. O desafio de controle encontra-se em determinar as matrizes de ponderação que garantam margem de ganho infinita e fase de pelo menos  $60^\circ$ . Para a seleção dos parâmetros matriciais Q e R do índice de desempenho quadrático utilizou-se o método heurístico do Quadrado Inverso de Bryson. Desta forma, pode-se observar que o método de Bryson, atuando no controle LQR, promoveu melhoras com relação as respostas temporal e frequencial.

**Palavras-chave:** Controle LQR. Método de Bryson. Diagrama de Bode. Resposta ao Degrau. Manipulador Robótico.



## ABSTRACT

The present work aims to design the Linear Quadratic Regulator in order to guarantee the robust properties on the robotic manipulator EEZTbotAR dynamic model calculated by FRIAS (2016). The LQR is a controller that aims to obtain an optimal control in order to minimize an actuator energy on a plant, resulting in better performance in systems that use external energy for a control action. The control challenge is concerned as weighting matrices that guarantee infinite gain margin and phase of at least  $60^\circ$ . In order to select the Q and R matrix parameters of the quadratic performance index, the Bryson Inverse Square heuristic method was used. Thus, it can be observed that the Bryson method, acting in the LQR control, promoted improvements regarding temporal and frequency responses.

**Keywords:** LQR Control. Bryson Method. Bode Diagram. Step response. Robotic Manipulator.



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Manipulador robótico EEZTbotARM.....	22
Figura 2- Descrição simplificada de um sistema de controle.....	29
Figura 3- Diagrama em blocos de sistema de malha fechada.....	30
Figura 4- Diagrama de blocos do sistema regulador ótimo .....	46
Figura 5- Algoritmo de Bryson.....	50
Figura 6- Diagrama de Bode de Sistema sem LQR .....	51
Figura 7- Diagrama de Bode de sistema com LQR.....	56
Figura 8- Diagrama de Bode de sistema com e sem controle LQR .....	56
Figura 9- Resposta ao degrau unitário .....	57
Figura 10- Comparação resposta ao degrau unitário com e sem LQR .....	58
Figura 11- Diagrama de Bode do sistema compensado .....	59
Figura 12- Banda passante em sistema com e sem LQR .....	60



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

EAR	Equação Algébrica de Riccati
EDR	Equação Diferencial de Riccati
K	Ganho do Regulador Linear Quadrático
LQ	Linear Quadratic (Linear Quadrático)
LQR	Linear Quadratic Regulator (Regulador Linear Quadrático)
P	Solução da Equação Algébrica de Riccati
Q	Matriz de Ponderação do Estado
R	Matriz de Ponderação do Controle
OS%	Overshoot
$T_s$	Tempo de Assentamento
e	Erro de estado estacionário



## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	22
2. OBJETIVO.....	25
2.1. Objetivo geral .....	25
2.2. Objetivos específicos.....	25
3. JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO.....	26
4. SISTEMAS DE CONTROLE .....	28
4.1. Configuração do sistema .....	29
4.2. Especificação de desempenho.....	30
4.3. Compensação do sistema.....	31
4.4. Modelagem em espaços de estado .....	32
4.4.1. Teoria de controle clássico e controle moderno .....	32
4.4.2. Variáveis de estado.....	33
4.4.3. Equação diferencial de estado .....	35
4.5. Modelo no espaço de estados .....	36
4.5.1. Representação no espaço de estados .....	37
4.5.2. Controlabilidade e Observabilidade.....	37
4.5.2.1. Controlabilidade .....	38
4.5.2.2. Observabilidade.....	40
5. CONTROLADOR LQR.....	43
5.1. Propriedades e uso do LQR .....	44
5.2. Estrutura do controlador.....	44
5.3. Problema linear quadrático .....	46
5.4. Matrizes de ponderação Q e R.....	47
6. MÉTODO DE BRYSON .....	48
6.1. Métodos heurísticos.....	48
6.1.1. Controle Ótimo Modal .....	48
6.1.2. Projeto Regulador com Estabilidade Prescrita .....	48
6.1.3. Método de Bryson.....	49

<b>7. PROJETO DO CONTROLADOR .....</b>	<b>51</b>
7.1. Modelo do sistema .....	51
7.2. Controle LQR .....	53
7.2.1. Seleção das matrizes de ponderação .....	54
7.2.2. Projeto do controlador .....	54
7.3. Simulação e análise .....	57
7.3.1. Análise no domínio do tempo .....	57
7.3.2. Análise no domínio da frequência .....	58
<b>8. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>61</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>62</b>



## 1. INTRODUÇÃO

Braços robóticos impressos, capazes de segurar e manipular objetos, são uma alternativa cada vez mais utilizada por universidades e laboratórios que abordam estudos sobre robótica, automação de processos e engenharia de controle. Para isso, as instituições de ensino podem se beneficiar do manipulador robótico EEZTbotARM.

O manipulador robótico impresso EEZTbotARM, desenvolvido por Carlo Franciscone, é uma opção que apresenta boa relação custo-benefício, além de apresentar relativa facilidade de construção. Projetado principalmente para ser um recurso educacional, o braço atende todos os requisitos dos estudantes de engenharia que pretendem começar a aprendizagem dos principais conceitos de robótica e controle.

Figura 1- Manipulador robótico EEZTbotARM



Fonte: Autor

O EEZTbotARM é capaz de se mover para várias posições devido à existência de uniões ou juntas que lhe permite executar diversas tarefas. As juntas utilizam servo motores do tipo *Micro Servo Motor Metal Gear Tower Pro MG90S*, capazes de uma rotação contínua de alta qualidade. Os vínculos, partes rígidas que ligam as juntas, são impressas e montadas de acordo com as especificações do projetista.

No entanto, o sistema proposto não possui nenhum tipo de controle, tornando-se, assim, um desafio na área de engenharia de controle. Então,

inicialmente, pode-se propor um controlador LQR (Linear Quadratic Regulator), pois esta é uma solução ótima que garante propriedades de robustez importantes, como margem de ganho infinita e pelo menos  $60^\circ$  de margem de fase (OGATA, 2010).

No problema LQR, partimos da suposição de que todas as variáveis do sistema estão disponíveis e podem ser medidas, e que a planta representa perfeitamente o sistema real, no entanto, isto não é verdade, possivelmente temos incertezas na planta, além de ruídos e perturbações atuando sobre a mesma que, conseqüentemente, irão impactar negativamente no desempenho esperado, gerando então a necessidade de se utilizar uma abordagem de controle robusto (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

Para aplicação do controlador LQR ao manipulador robótico é necessário conhecer a função que define o sistema. Em Frias (2016), é proposto então um projeto de identificação de sistemas, utilizando a ferramenta *System Identification Toolbox*, que garante um modelo matemático de alta compatibilidade com o sistema real.

Diante disso, propõe-se neste trabalho analisar como o sistema se comporta com a ausência de um controlador e posteriormente, aplicar as propriedades de robustez garantidas pelo LQR. Em seguida, analisar a resposta do controlador em relação a margem de ganho e de fase para o domínio da frequência, que são parâmetros úteis para verificar a estabilidade do sistema. Além disso, realizar a análise da resposta ao degrau unitário, verificando se esta atendeu às especificações de desempenho.

O desempenho do sistema LQR é fortemente dependente da seleção das matrizes de ponderação. Então, mais precisamente, devemos dizer que o LQR é ótimo em relação às matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  escolhidas. Assim uma solução LQR ótima com uma escolha de  $Q$  e  $R$ , normalmente, não será ótima para outras escolhas de matrizes  $Q$  e  $R$ . O problema é que a especificação para o desempenho de um sistema prático de controle não será em termos de  $Q$  e  $R$ , logo tem-se o problema de tentar encontrar os valores de  $Q$  e  $R$  que irão atender as especificações (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

As primeiras técnicas utilizadas para a seleção das matrizes peso da função custo quadrática foram de natureza heurística. Uma dessas técnicas é o

método "quadrático inverso" ou "método quadrático inverso de *Bryson*" (BRYSON,1975).

Logo, para o projeto do Regulador Linear Quadrático, é proposto neste trabalho a utilização do Método Heurístico de *Bryson* para determinação dos índices de desempenho quadrático.

A estrutura do trabalho continua da seguinte forma: no capítulo 2, os objetivos são apresentados. A justificativa e motivação são abordadas no capítulo 3. Nos capítulos 4 ao 8 é apresentado o referencial teórico que dá base ao projeto de controle. No capítulo 9 é apresentado o projeto LTQ. O capítulo 10 apresenta a simulação e análise dos resultados. As considerações finais estão no capítulo 11. E finalmente, no capítulo 12 são apresentadas as referências.

## 2. OBJETIVO

### 2.1. Objetivo geral

Este projeto tem como objetivo aplicar o controle LQR na planta obtida por Frias (2016) de um servo motor do manipulador robótico EEZTbotARM.

### 2.2. Objetivos específicos

- a) Levantar o estado da arte em relação a análise e projetos de controle moderno e robusto;
- b) Transferir o modelo da junta do manipulador robótico, identificado por Frias (2016) para obtenção de variáveis de estado;
- c) Aplicar as matrizes de controlabilidade e observabilidade para verificar se o sistema é controlável e observável;
- d) Projetar o controlador LQR, que garanta margem de ganho infinita e fase de pelo menos  $60^\circ$ ;
- e) Executar e simular as etapas do projeto no software MATLAB;
- f) Analisar os resultados no domínio do tempo e da frequência;
- g) Verificar se o controle atende às especificações de projeto:  $OS\% < 10$ ,  $t_s < 8s$  e  $e = 0$ .

### 3. JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

Na sociedade atual, é crescente a necessidade de realizar tarefas com eficiência e precisão. Existem também tarefas a ser levadas a cabo em lugares em que a ação humana é difícil, arriscada e até mesmo impossível, como no fundo do mar ou em meio à imensidão do espaço. Para executá-las, faz-se necessária a presença de dispositivos mecatrônicos (robôs), que as realizem sem risco de vida (ROSÁRIO, 2005).

Em virtude disso, muitas universidades e laboratórios têm investido no estudo da área de robótica, para aperfeiçoar o conhecimento dos alunos. O estudo da robótica traz consigo outras áreas de estudo importantes para seu aprimoramento, automação de processos e engenharia de controle.

Dentro deste vasto campo dos sistemas robóticos, podem-se destacar os dispositivos que são chamados de manipuladores robóticos, robôs de base fixa utilizados para mover objetos (manipular) ao seu redor. Esses encontram aplicações em diferentes campos desde a área industrial, onde desempenham as mais variadas funções. Muitos manipuladores robóticos apresentam preços elevados, proporcionando baixa acessibilidade aos estudantes. No entanto, instituições de ensino podem se beneficiar do EEZTbotARM, um braço robótico que é capaz de se mover para várias posições devido à existência de juntas que utilizam servo motores do tipo *Micro Servo Motor Metal Gear Tower Pro MG90S*.

Entretanto, os servos motores que compõe o manipulador robótico em questão não possuem nenhum tipo de controle, apresentando um desafio na área de controle. Deste modo, é possível a aplicação de um controle LQR para análise do comportamento de estabilidade e robustez em sistemas controlados e não controlados. Além disso, o LQR visa obter um controle ótimo de forma a minimizar a energia do atuador sobre a planta. Com o estudo do controlador LQR pode-se destacar minimização da energia demandada pelo sistema, resultando em melhor rendimento em sistemas que utilizam energia externa para a ação de controle.

Para isso, é preciso ter conhecimento do modelo matemático do sistema. Em Frias (2016), utiliza-se a metodologia de identificação de sistemas, utilizando a ferramenta *System Identification Toolbox* da plataforma Matlab em conjunto com o

microcontrolador Arduino UNO, para garantir um modelo matemático de alta compatibilidade com o sistema real. Dessa forma, tornando possível a aplicação do Regulador Linear Quadrático.

#### 4. SISTEMAS DE CONTROLE

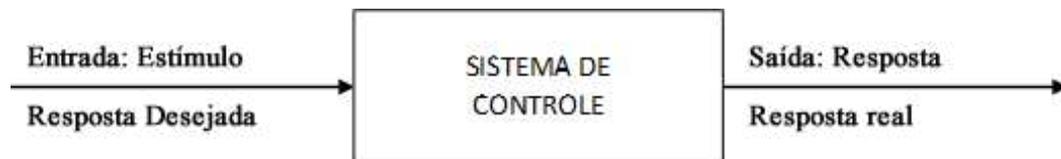
Diversas aplicações que atingem os alicerces da sociedade moderna se beneficiam de sistemas controlados automaticamente. O nosso dia-a-dia está repleto de objetivos a serem realizados, que necessitam de dispositivos que auxiliem ou tornem nossas vidas mais confortáveis. Um exemplo disso seria, no aspecto doméstico, a necessidade de regular temperatura e umidade de casas e prédios. Porém, os sistemas de controle alcançam um universo bem maior de aplicações, como lançamento de foguetes e naves espaciais em órbitas terrestres, veículos autônomos, controle de pressão e níveis de líquidos, controle de processos industriais, robótica móvel, entre outras.

Esses sistemas não são desenvolvidos apenas pelas mãos humanas, mas podem ser observados na própria natureza. O corpo humano possui diversos sistemas de controle, cada um com funções inquestionavelmente importantes para nossa sobrevivência, como exemplo do pâncreas que regula o açúcar do sangue. É entendível que até mesmo o mundo não-físico parece ser controlado de forma automática, o que serve de inspiração para o desenvolvimento e aplicação de controles automáticos em atividades do dia-a-dia, afim de torná-las mais simples e confortáveis ao ser humano.

Sistemas de controle, atribuídos ao mundo físico, não são apenas privilégios da sociedade moderna, mas suas aplicações remontam de eras mais antigas. As primeiras aplicações podem ser observadas, por exemplo, no desenvolvimento de mecanismos reguladores de níveis com boias na Grécia no período de 300 a 1 a.C. Já na indústria, os primeiros controles automáticos com realimentação, de que se tem notícia, foram o regulador de temperatura de Cornelis Drebbel (1572-1633), na Holanda e o regulador de pressão para caldeiras a vapor de Dennis Papin (1647-1712). Algumas fontes relatam que o primeiro sistema controlado automaticamente foram os reguladores de esferas, desenvolvido por James Watt em 1769. Outras falam dos reguladores de níveis de água com boia, inventado por I. Polzunov em 1765, na Rússia. Embora não se saiba ao certo qual foi o primeiro sistema de controle automático desenvolvido, é notável sua presença e sua necessidade no decorrer da história.

Um sistema de controle automático é um conjunto de dispositivos interconectados que formam uma configuração de sistemas, a fim de gerenciar outros dispositivos, produzindo uma resposta (saída) desejada com desempenho desejado. O controle de grandezas ou variáveis físicas significa alterar os seus valores de acordo com uma intenção. A intenção, relatada, é a representação da saída do sistema. Por exemplo, se considerarmos o movimento de um elevador, quando o botão de um determinado andar é pressionado, o elevador sai do andar de origem para o de destino em uma velocidade e precisão de nivelamento desenvolvidos para o conforto do passageiro. A pressão no botão do andar escolhido é a entrada que representa a saída desejada do sistema.

Figura 2- Descrição simplificada de um sistema de controle



Fonte: Autor

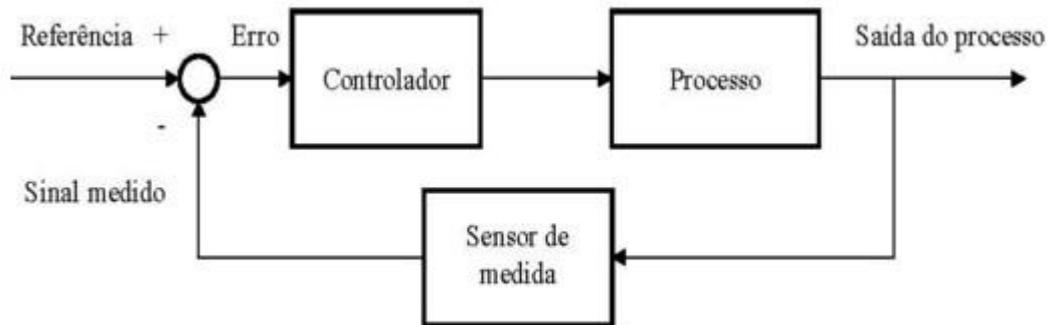
Em síntese, os sistemas de controle auxiliam as pessoas a executarem atividades que manualmente seriam impossíveis ou muito difíceis de realizar. Com esses sistemas é possível movimentar equipamentos de grande escala com mais precisão e maior velocidade. Sem a ajuda dos controladores, não seria possível atingir a potência necessária para mover uma carga na velocidade desejada. Dessa forma, os controladores são basicamente reguladores de variáveis, que tem como razões: amplificação de potência, o controle remoto, conveniência da forma de entrada e compensação por perturbações externas.

#### 4.1. Configuração do sistema

Texto Há dois grandes tipos de configuração dos sistemas de controle: malha aberta e malha fechada. Os sistemas que utilizam da configuração de malha aberta não podem gerar compensação a nenhuma perturbação que some ao sinal de acionamento do controlador, ou seja, não há como corrigir a saída real para que esta atenda a representação da saída desejada. Já o controle de malha fechada é uma arquitetura que possibilita a correção dessas perturbações, utilizando sensores para

medir a resposta da saída real e assim compará-la à entrada. Em virtude do objetivo deste projeto, faz-se necessário a aplicação de um controle com configuração de malha fechada (controle com realimentação), pois as variações na velocidade e posicionamento do braço robótico, precisam ser corrigidas.

Figura 3- Diagrama em blocos de sistema de malha fechada



Fonte: Autor

## 4.2. Especificação de desempenho

Os sistemas controlados automaticamente trabalham com especificações necessárias para um melhor desempenho. As especificações de sistema estão relacionadas a resposta transitória e ao estado estacionário. A resposta transitória é o comportamento do sistema no tempo a uma entrada  $R(s)$  do ponto inicial até o ponto de equilíbrio, caso o sistema seja estável. O Overshoot (tempo de pico), tempo de assentamento são especificações que devem ser ajustadas em termos de resposta transitória.

Um sistema de controle possui como vantagem o ajuste da resposta transitória, sendo uma característica importante para o projetista de sistemas de controle. Além disso, com a adição da malha de realimentação, é possível atenuar a influência de perturbações que podem atuar sobre o sistema e também reduz a sensibilidade do sistema a variações de parâmetros na planta. No entanto, é necessário comparar e analisar o erro de regime estacionário entre um sistema de malha aberta e um de malha fechada. O erro de regime estacionário é a diferença entre a entrada de referência e a saída do sistema quando este apresenta uma resposta contínua no tempo.

Contudo, as especificações podem ser dadas em termos de resposta em frequência.

As especificações de um sistema de controle devem ser dadas antes do início do projeto e, geralmente, as especificações de desempenho não devem ser muito mais rigorosas que o necessário para executar a tarefa. Se a precisão na operação em estado estacionário é de extrema importância em um dado sistema de controle, então nós não devemos requerer especificações desnecessariamente rigorosas na resposta transitória, pois tais especificações requerem componentes caros. Lembrando que a parte mais importante no projeto de um sistema de controle é definir os requerimentos de desempenho de forma que eles irão garantir um sistema ótimo para seu propósito (OGATA, 2010).

#### **4.3. Compensação do sistema**

Definir o ganho é o primeiro passo no ajuste do sistema para desempenho satisfatório. Em muitos casos práticos, no entanto, somente o ajuste do ganho poderá não prover alteração suficiente do comportamento do sistema para alcançar as especificações dadas. Como é frequentemente o caso, aumentar o valor do ganho pode melhorar o comportamento em estado estacionário mas irá resultar em estabilidade pobre ou até mesmo instabilidade. É, então, necessário reprojeter o sistema (por meio da modificação da estrutura incorporando dispositivos ou componentes adicionais) para alterar o comportamento geral de maneira que o sistema irá se comportar como desejado. Tal reprojeto ou adição de um dispositivo adequado é chamado compensação, a modificação das dinâmicas do sistema para satisfazer as especificações dadas. Um dispositivo inserido no sistema com o propósito de satisfazer as especificações é chamado de compensador (OGATA, 2010).

## **4.4. Modelagem em espaços de estado**

### **4.4.1. Teoria de controle clássico e controle moderno**

Os sistemas de controle com realimentação possuem duas abordagens disponíveis para a análise e projeto, o Controle Clássico e o Controle Moderno. O Controle Clássico é baseado no domínio da frequência, onde as equações diferenciais são convertidas em uma função de transferência, que é o modelo matemático do sistema em questão, relacionando a saída com a entrada. A maior vantagem das técnicas em domínio da frequência é um rápido retorno de informação sobre a estabilidade e reposta transitória. Dessa forma, é possível ver a decorrência da variação dos parâmetros dos sistemas até que uma configuração aceitável seja encontrada. No entanto, essa abordagem apresenta desvantagens nos termos de não aplicabilidade em sistemas invariantes no tempo ou em sistemas não lineares.

Os sistemas industriais, que se beneficiam de manipuladores robóticos, têm tido um grande crescimento tecnológico, com isso os sistemas ali implantados necessitam de um escopo maior. Em virtude disso, a investigação do espaço de estados aumentou a extensão dos requisitos a serem assistidos pelos sistemas de controle. Assim, as modelagens de sistemas via uso de equações diferenciais lineares e invariantes no tempo e as funções de transferência se tornam inapropriados. A metodologia de processo do espaço de estados, também conhecido como procedimento moderno ou no domínio do tempo, é um método unificado de modelagem, análise e projeto que pode ser aplicado a um universo de sistemas. Esse procedimento pode ser aplicado com o objetivo de representar sistemas não-lineares que possuam folgas, saturação e zona morta.

A pronta disponibilidade de computadores digitais fez com que seja prático considerar a formulação de equações no domínio do tempo para representar sistemas de controle. O domínio do tempo é o domínio matemático que incorpora a resposta e a descrição do sistema em termos do tempo,  $t$ . A representação de sistemas de controle no domínio do tempo é a base essencial da teoria de controle moderno e otimização de sistemas (DORF; BISHOP, 2010).

Há diversos sistemas que possuem múltiplas entradas e múltiplas saídas, e sua resolução por controle clássico não é viável. Dessa forma, é necessária uma

representação mais compacta no espaço de estados. O procedimento do método no domínio do tempo não é intuitivo como a abordagem clássica, logo o engenheiro projetista tem a necessidade da realização de vários cálculos antes que uma interpretação física do modelo seja aparente. Ao passo que no controle clássico alguns rápidos cálculos ou uma apresentação gráfica dos dados rapidamente rende uma interpretação física.

Procederemos agora para estabelecer a abordagem de espaço de estados como um método alternativo para representação de sistemas físicos. Essa seção apresenta a definição formal da representação em espaço de estados (NISE, 2011).

Segue a seguinte abordagem:

- a. O primeiro passo é selecionar um subconjunto particular de todas as possíveis variáveis do sistema. Essas variáveis são denominadas “variáveis de estado.
- b. Considerando um sistema de ordem  $n$ , deve-se escrever  $n$  equações diferenciais simultâneas de primeira ordem em função das variáveis de estado, denominadas equações de estado.
- c. Tendo a condição inicial conhecida para todas as variáveis de estado em  $t_0$ , bem como a entrada do sistema para  $t \geq t_0$ , é possível solucionar as equações diferenciais simultâneas para  $t \geq t_0$ .
- d. As variáveis de estado são combinadas algebricamente com as entradas do sistema para que seja determinado todas as outras variáveis do sistema para  $t > t_0$ . Essa equação algébrica é denominada de “equação de saída”.
- e. As equações de estado e as equações de saída são consideradas uma representação executável do sistema. Essa representação é denominada representação em espaços de estado.

#### **4.4.2. Variáveis de estado**

Na área de estudo de engenharia de controle, uma representação em espaço de estados é um modelo matemático de um sistema físico composto de um conjunto de variáveis de entrada, de saída e de estado relacionadas entre si por meio de equações diferenciais de primeira ordem.

De acordo com a literatura Dorf e Bishop (2010), o estado de um sistema é um conjunto de variáveis cujos valores, juntos com os sinais de entrada e equações que descrevem as dinâmicas, proverão o estado futuro e a saída desse sistema.

Assim, O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis linearmente independentes, também chamadas de variáveis de estado, que determina integralmente o comportamento do sistema em qualquer momento  $t \geq t_0$ , quando se tem o conhecimento dessas variáveis em  $t = t_0$  e o conhecimento da entrada para  $t \geq t_0$ . As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as que determinam a dinâmica do sistema. Para descrever em absoluto o comportamento do sistema, são necessárias no mínimo  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Uma grande vantagem do método de controle moderno, é a liberdade de escolha das variáveis, pois estas não precisam ser medidas fisicamente ou observáveis. No entanto, essa liberdade de escolha se dá somente se as variáveis forem linearmente independentes. Se as variáveis não atenderem a esse requisito, então na pior das hipóteses, o projetista não será capaz de completar a escrita das equações de estado.

Em termos práticos, no entanto, é conveniente, se possível, escolher quantidades facilmente mensuráveis para as variáveis de estado, porque as leis de controle ótimo irão requerer a realimentação de todas as variáveis de estado com ponderação adequada (OGATA, 2010).

As variáveis de estado descrevem a configuração presente de um sistema e podem ser usadas para determinar a resposta futura, dadas as entradas de excitação e as equações que descrevem o sistema (DORF; BISHOP, 2010).

O número mínimo necessário de variáveis de estado para aplicação da representação do espaço de estados é igual à ordem da equação diferencial que descreve o sistema. Se o sistema é descrito por uma equação diferencial de quarta ordem, logo são necessárias quatro equações diferenciais de primeira ordem concomitantes escritas em função de quatro variáveis de estado. Essas variáveis formam um vetor de estado, que determina exclusivamente o estado do sistema  $x(t)$  para qualquer tempo  $t \geq t_0$ , uma vez que o estado em  $t = t_0$  é dado e a entrada  $u(t)$  para  $t \geq t_0$  é especificada.

### 4.4.3. Equação diferencial de estado

O espaço de estado é um espaço  $n$ -dimensional cujo axis de coordenadas consiste dos axis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , onde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as variáveis de estado. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estado. A resposta de um sistema é descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem escritas em termos das variáveis de estado ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) e das entradas ( $u_1, u_2, \dots, u_n$ ). Essas equações diferenciais podem ser escritas de forma geral como:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

O sistema pode ser representado pela notação compacta de equação diferencial de estado como segue:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.2)$$

A equação diferencial 5.3 é também comumente chamada de equação de estado. A matriz  $A$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ , e  $B$  é uma matriz  $n \times m$ . A equação de estado relaciona a taxa de mudança do estado do sistema com o próprio estado do sistema e os sinais de entrada. Em geral, as saídas de um sistema linear podem ser relacionadas com as variáveis de estado e os sinais de entrada pela equação de saída 5.4 (DORF; BISHOP, 2010).

$$y = Cx + Du \quad (5.3)$$

Onde  $y$  é o conjunto de sinais de saída expressados em forma de vetor coluna. A representação de espaço de estados compreende a equação de estado e a equação de saída.

#### 4.5. Modelo no espaço de estados

Como mencionado na seção anterior, enquanto que a teoria clássica de controle é baseada no relacionamento entrada-saída, ou função de transferência, a teoria de controle moderno é baseada na descrição do sistema de equações em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, que podem ser combinadas em uma equação diferencial matriz-vetor. O uso de uma notação matriz-vetor simplifica imensamente a representação matemática de sistemas de equações. O aumento no número de variáveis de estado, o número de entradas, ou o número de saídas não aumenta a complexidade das equações (OGATA, 2010).

Os sistemas de controle moderno possuem várias entradas e várias saídas, assim o projeto e análise do mesmo necessita ser feito pela metodologia de espaços de estado. O processo do método do domínio do tempo, quando expresso em variáveis de estado, pode também ser usado para projetar esquemas de compensação aceitáveis para um sistema de controle. O objetivo em questão é o controle de um sistema com sinal de controle  $u(t)$ , que é a função de muitas variáveis de estado mensuráveis, a fim de operar na informação que estiver disponível.

Projeto de variáveis de estado tipicamente contém três passos. No primeiro passo, assumimos que todos as variáveis de estado estão disponíveis e são mensuráveis, e as utilizamos em uma lei de controle por realimentação de estados. Realimentação de estados é usualmente não prático porque, geralmente, é impossível medir todos os estados. Na prática, somente alguns estados (ou combinações lineares dos mesmos) são medidos e providos como saídas do sistema. O segundo passo no projeto é construir um observador para estimar os estados que não são diretamente medidos e disponíveis como saídas. O último passo é conectar apropriadamente o observador à lei de controle com realimentação de estados. O projeto de variáveis de estado gera um compensador como mostrado na figura 6 (DORF; BISHOP, 2010).

Os modelos na forma de espaço de estados facilitam nossa habilidade de utilizar plataformas computacionais como o MATLAB. O primeiro passo para o desenvolvimento dessa metodologia é desenvolver a lei de controle para o sistema que corresponde a uma resposta dinâmica satisfatória. Posteriormente, projeta-se um

estimulador para que seja combinada à lei de controle. Por fim, introduz-se a entrada de referência do sistema.

#### 4.5.1. Representação no espaço de estados

Há diversas técnicas de para a conversão de uma função de transferência em espaço de estados.

Considere o modelo matemático em função da frequência definido por

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s + p_1)^3 (s + p_4) (s + p_5) \dots (s + p_n)} \\ &= b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{(s + p_1)} + \frac{c_4}{(s + p_4)} + \dots + \frac{c_n}{(s + p_n)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde  $U$  é a entrada e  $Y$  é a saída.

Nesse caso, o denominador envolve apenas raízes múltiplas. O objetivo é fazer a representação em espaço de estados do sistema definido na Eq. 6.1. Para esse caso, deve-se usar a forma canônica de Jordan. Então a forma canônica de Jordan é dada pela representação

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & -p_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -p_4 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & -p_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6.2)$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u \quad (6.3)$$

#### 4.5.2. Controlabilidade e Observabilidade

Uma questão chave que surge no projeto de compensadores de variáveis de estado é se todos os polos do sistema de malha fechada devem ou não ser arbitrariamente alocados no plano complexo. Recorde-se que os polos do sistema de

malha fechada são equivalentes aos autovalores da matriz em formato de variáveis de estado. Se o sistema é controlável e observável, então podemos realizar o objetivo do projeto de alocar os polos precisamente nas localizações desejadas para alcançar as especificações de desempenho. Projetos por realimentação de estados comumente dependem de técnicas de alocação de polos. É importante notar que um sistema deve ser completamente controlável e completamente observável para permitir a flexibilidade para alocar todos os polos do sistema de malha fechada arbitrariamente (DORF; BISHOP, 2010).

Nessa seção iremos lidar com a controlabilidade e na seguinte discutiremos a observabilidade. No que segue, devemos definir as condições para a controlabilidade completa de estados. Então veremos formas alternativas da condição para a completa controlabilidade, seguido de discussões de controlabilidade completa da saída. E finalmente apresentaremos o conceito de estabilizabilidade (OGATA, 2010).

#### 4.5.2.1. Controlabilidade

De acordo com a literatura Dorf e Bishop (2010), um sistema é completamente controlável se existir um controle irrestrito  $u(t)$  que pode transferir qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outra localização desejada  $x(t)$  em um tempo finito,  $t_0 \leq t \leq T$ .

Em algumas situações, o projetista pode se deparar com sistemas que não são completamente controláveis, mas suas combinações lineares que não podem ser controladas são intrinsecamente estáveis. A literatura diz que se um sistema é completamente controlável, é também estabilizável, logo os sistemas citados são classificados como estabilizáveis.

Segue o seguinte sistema de tempo contínuo

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6.4)$$

Onde  $x$  = vetor de estados (vetor- $n$ )

$u$  = sinal de controle (escalar)

$A$  = matriz  $n \times n$

$B =$  matriz  $n \times 1$

Se todos os estados são controláveis, então o sistema é dito completamente controlável. Deve-se derivar a condição para controlabilidade completa de estados. Para dedução, admite-se que o estado final é a origem do espaço de estado e que o instante inicial  $t_0 = 0$ . Dada a solução da equação de estado:

$$x(t) = e^{-At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (6.5)$$

Aplicando a definição de controlabilidade de estado completa, nas condições determinadas, tem-se:

$$x(t) = 0 = e^{-At}x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (6.6)$$

Ou seja:

$$x(0) = 0 = - \int_0^{t_1} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (6.7)$$

Onde,  $e^{-At}$  pode ser escrita pela Eq. 6.8 abaixo:

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k \quad (6.8)$$

Assim substituindo a Eq. 6.8 em 6.7, tem-se

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau \quad (6.9)$$

Seja,

$$\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k \quad (6.10)$$

Então a Eq. 6.9 fica da seguinte forma

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k [B|AB|A^2B|\dots|A^k B] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Se o sistema for completamente controlável, então, dado um estado inicial qualquer  $x(0)$ , a Eq. 6.11 deve ser satisfeita. Para isso, a matriz  $n \times n$

$$M_c = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]$$

Tenha posto igual a  $n$ , ou seja, posto cheio. Essa matriz é denominada matriz de controlabilidade. Caso a condição de controlabilidade do sistema seja satisfeita, ou seja, posto da matriz  $M_c$  igual a  $n$ , então vai existir uma matriz  $T$  tal que transforme o sistema na forma canônica controlável, onde:

$$T = M_c (M'_c)^{-1}$$

Onde:

$M_c$  é a matriz de controlabilidade do sistema.

$M'_c$  é a matriz de controlabilidade do sistema na forma canônica.

#### 4.5.2.2. Observabilidade

Segundo Ogata (1998), um sistema é integralmente observável se qualquer estado  $x(t_0)$  pode ser determinado a partir da observação da saída do sistema  $y(t)$  durante um intervalo finito de tempo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por conseguinte, o sistema é dito completamente observável se todas as transições dos estados afetam cada um dos elementos do vetor saída. Essa formulação é útil em problemas de realimentação de estados onde existem estados do sistema que não podem ser medidos a partir de variáveis que podem ser medidas na menor duração de tempo possível.

O conceito de observabilidade é muito importante porque, na prática, a dificuldade encontrada com controle por realimentação de estados é que algumas variáveis de estado não estão acessíveis para medições diretas, com o resultado de que se torna necessário estimar as variáveis de estado que não podem ser medidas a fim de construir os sinais de controle (OGATA, 2010).

Considerando um sistema descrito pelas Eq. 6.12 e 6.13:

$$\dot{x} = Ax \quad (6.12)$$

$$y = Ax \quad (6.13)$$

Seja,

$$x(t) = e^{At}x(0) \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (6.14)$$

e

$$y(t) = C(e^{At}x(0) \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau) + Du(t) \quad (6.15)$$

Como as matrizes A, B, C e D são conhecidas e  $u(t)$  é também conhecido, os dois últimos termos do segundo membro da equação solução de  $y(t)$  são conhecidas.

Assim, pelo sistema descrito pelas Eq. 6.12 e 6.13, tem-se que o vetor saída é:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) \quad (6.16)$$

Como mostrado anteriormente, tem-se que

$$e^{-At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \quad (6.17)$$

Assim, resulta

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) CA^k x(0) \quad (6.18)$$

ou

$$y(t) = \alpha_0 Cx(0) + \alpha_1 CAx(0) + \alpha_2 CA^2x(0) + \dots + \alpha_{n-1} CA^{n-1}x(0) \quad (6.19)$$

Se o Sistema for completamente observável, então, dado um sinal de saída  $y(t)$  durante um intervalo finito de tempo  $t_0 \leq t \leq t_1$ , é possível determinar  $x(t)$ , apenas,

a partir da Eq. 6.19. Para que se mostre que um sistema é completamente observável, requer que o posto da matriz  $n \times m$  abaixo, denominada matriz de observabilidade

$$M_{ob} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Seja igual a  $n$ .

A partir dessa análise pode-se enunciar que a condição para um sistema descrito pelas Eq. 6.12 e 6.13 é observável se e somente se a matriz de observabilidade for de posto igual a  $n$ , ou seja, possui  $n$  vetores linearmente independentes.

Para um sistema que seja completamente observável, então existe uma matriz  $T$ , que transforma o sistema na forma canônica observável, onde

$$T = (M_{ob})^{-1} M'_{ob}$$

Onde  $M_{ob}$  é a matriz de observabilidade do sistema e  $M'_{ob}$  é a matriz de observabilidade do sistema na forma canônica.

## 5. CONTROLADOR LQR

O regulador linear quadrático LQR é um controlador ótimo que vem sendo amplamente difundido na literatura em diversas aplicações, que vão de controle de servomecanismos em robótica ao controle de processos químicos (UYGUN; MATTHEW; HUANG., 2006) e (SUN; GAN., 2010). Isto se deve às suas excelentes características de desempenho bem como à sua simples implementação. Este tipo de estratégia de controle inclui a realimentação dos estados, que são ponderados de forma a minimizar uma função custo (BURNS, 2001). Nesta estratégia de controle os ganhos associados aos estados para geração da lei de controle são obtidos através da solução de uma equação algébrica de Ricatti, relacionada ao problema. Basicamente, é possível estabelecer um compromisso entre a amplitude das variáveis de estado, a velocidade de resposta do sistema e a amplitude do sinal de controle, através da escolha adequada dos índices de desempenho relativos a estas variáveis. A utilização deste tipo de estratégia de controle, contudo é comprometida quando da presença de distúrbios e/ou quando houver variações paramétricas no sistema a ser controlado. Isto se deve ao fato de a lei de controle depender diretamente dos estados da planta, de forma que, havendo dinâmicas não consideradas, tal ação de controle é prejudicada por não conter todas as informações referentes ao sistema.

O projeto de sistemas de controle ótimo é uma função importante de engenharia de controle. O propósito do projeto é conceber um sistema de componentes práticos que fornecerá o desempenho de operação desejado. O desempenho desejado pode ser prontamente expresso em termos de índices de desempenho no domínio do tempo (DORF; BISHOP, 2011). Por exemplo, o máximo overshoot e tempo de subida para uma entrada degrau são índices valiosos. No caso de desempenho no estado estacionário e transitório, os índices são normalmente especificados no domínio do tempo, logo é natural que se deseje desenvolver procedimentos de projeto no domínio do tempo.

O projeto de um sistema baseado na minimização do índice de desempenho, e sistemas que são ajustados para prover mínimo índice de desempenho são chamados de sistemas de controle ótimo (DORF; BISHOP, 2010).

### 5.1. Propriedades e uso do LQR

- Ganho Estático: O LQR gera uma matriz de ganho estático  $K$ , que não é um sistema dinâmico. Assim, a ordem do sistema em malha fechada é a mesma que a da planta.
- Robustez: O LQR alcança margem de ganho infinito  $K_g = \infty$ , implicando que os locais geométricos se aproximam da origem ao longo do eixo imaginário. O LQR também garante a margem de fase  $\rho \rightarrow 60$  graus. Isso está de acordo com as diretrizes práticas para o projeto do sistema de controle.

### 5.2. Estrutura do controlador

O controle ideal deve sempre estabilizar o sistema de malha fechada, no entanto, por isso deve haver alguma conta feita para pólos de plantas instáveis. A solução de controle dispendiosa coloca pólos de malha fechada estáveis nas imagens espelhadas dos pólos instáveis da planta.

O Regulador Linear Quadrático (do inglês Linear Quadratic Regulator – LQR) é um método de controle ótimo utilizado no projeto de controle no modelo de espaço de estados. Nesta seção será descrito esse método.

Seja um sistema linear invariante no tempo (LIT) do pelo modelo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (7.1)$$

$$y(t) = Cx + Du \quad (7.2)$$

E seja a lei de controle dada por:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (7.3)$$

O objetivo desse método é encontrar a matriz de ganho  $K$  que minimize a função de custo quadrática:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (7.4)$$

Onde  $Q$  e  $R$  são as matrizes de ponderação para as variáveis de estado e variáveis de entrada respectivamente e  $t_f$  é o tempo final para a ação de controle, o que significa que a ação está em um intervalo finito de tempo. Sendo  $Q$  é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva, ou seja,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Q \geq 0$ ) ou real simétrica e  $R$  é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica, ou seja,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $R > 0$  e  $u$  não tem restrições. Utilizando a metodologia de controle ótimo para encontrar a matriz de ganho  $K$  garante que o sistema será estável para todo valor inicial  $x(0)$  desde que o sistema seja de estados completamente controláveis (OGATA, 1998).

Com o intuito de resolver esse problema ótimo LQ, deve-se construir a função Hamiltoniana:

$$H = -\frac{1}{2} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + \lambda^T(t)[Ax(t) + Bu(t)]] \quad (7.5)$$

Onde não há restrições no sinal de entrada, o valor ótimo (neste caso, o mínimo) pode ser resolvido tomando-se a derivada de  $H$  em relação a  $u$  e assim resolvendo a seguinte equação:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -Ru(t) + B^T \lambda(t) = 0 \quad (7.6)$$

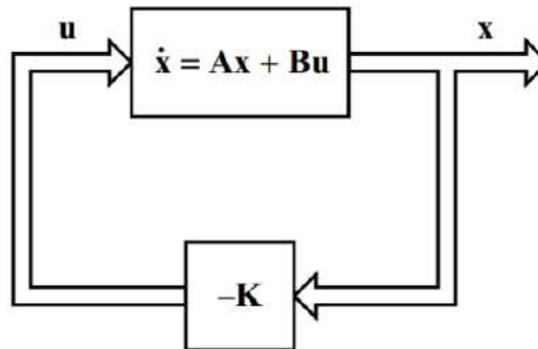
O sinal de controle ótimo  $K$  pode ser escrito como:

$$K = -Ru(t) + B^T \lambda(t) \quad (7.7)$$

Por outro lado, pode ser mostrado que o multiplicador Lagrangiano  $\lambda(t)$  pode ser escrito como  $\lambda(t) = -P(t)x(t)$ , onde  $P(t)$  é a matriz solução da equação diferencial de Ricatti (EDR):

$$P(t) = -P(t)A - A^T P(t) + P(t)BR^{-1}B^T P(t) - Q \quad (7.8)$$

Figura 4- Diagrama de blocos do sistema regulador ótimo



Fonte: (OGATA, 1998)

Com seu valor final  $P(tf) = S$ . Então, o sinal de controle ótimo pode ser escrito como:

$$K = -R^{-1}B^T P(t)x(t) \quad (7.9)$$

### 5.3. Problema linear quadrático

Quando tempo é finito, resolver o problema de controle ótimo LQ significa resolver a equação diferencial de Ricatti 7.8, demonstrando-se complexo. Porém muitas aplicações se preocupam com o desempenho regulatório que implica  $tf \rightarrow \infty$ , o que implica no problema do regulador linear quadrático (LQR).

No problema LQR, o sistema de malha fecha e  $tf = \infty$  serão assintoticamente estabilizado. A solução da matriz  $P(t)$  para a EDR tenderá à uma matriz constante, que nesse caso a EDR se reduz para a equação algébrica de Ricatti (EAR):

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (7.10)$$

Assim, o problema LQR pode ser solucionado utilizando uma realimentação linear de estados com uma matriz de ganho constante

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = -R^{-1}B^T P \quad (7.11)$$

Em suma, o sistema de malha fechada é claramente  $[(A-BK),B,C,D]$ . O sistema LQR resultante com realimentação de estados garante propriedades de robustez importantes, como margem de ganho infinita e  $60^\circ$  de margem de fase.

#### **5.4. Matrizes de ponderação $Q$ e $R$**

O desempenho do sistema LQR é fortemente dependente da seleção das matrizes de ponderação. Então, mais precisamente, devemos dizer que o LQR é ótimo em relação às matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  escolhidas. Assim uma solução LQR ótima com uma escolha de  $Q$  e  $R$ , normalmente, não será ótima para outras escolhas de matrizes  $Q$  e  $R$ . O problema é que a especificação para o desempenho de um sistema prático de controle não será em termos de  $Q$  e  $R$ , logo tem-se o problema de tentar encontrar os valores de  $Q$  e  $R$  que irão atender as especificações (XUE; CHEN; ATHERTON, 2007).

## 6. MÉTODO DE BRYSON

O método de *Bryson* usa metodologia heurística para encontrar as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ . Os métodos Heurísticos constituem uma das primeiras técnicas concebidas para a seleção das matrizes de ponderação. Nessa seção serão apresentadas as teorias de outros métodos heurísticos conhecidos, para então fazer uma fundamentação teórica do método *Bryson* e a apresentação de seu algoritmo.

### 6.1. Métodos heurísticos

#### 6.1.1. Controle Ótimo Modal

O Controle Ótimo Modal baseia-se na convencional alocação de polos, contudo ao invés de escolher o ganho de realimentação diretamente, os parâmetros do índice de desempenho quadrático do projeto (que são as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ ) são escolhidos para alcançar a alocação (Johnson 1987).

O problema do controle modal ótimo utiliza a especificação dos polos do sistema realimentado para determinar as matrizes peso  $Q$  e  $R$  apropriadas, ou seja, as matrizes  $Q$  e  $R$  são escolhidas de tal forma que o regulador coloca os polos em posições desejadas e exatas. Em alguns casos, é suficiente obter polos com certo grau de estabilidade. Essa classe de técnicas é conhecida como projeto regulador com estabilidade prescrita. Envolvendo estes dois tipos de técnicas, há diversas soluções para o problema de fixação de uma estrutura modal ótima. Uma característica comum da maioria destes algoritmos é o uso de um algoritmo de otimização não linear para obter a eventual solução.

#### 6.1.2. Projeto Regulador com Estabilidade Prescrita

O projeto do Regulador com Estabilidade Prescrita é fundamentado no Controle Ótimo, neste método troca-se a determinação das localizações exatas de todos os polos à malha fechada pela simples especificação de uma região do semiplano complexo esquerdo, onde deverão estar os polos a malha fechada. Este método explora ainda as propriedades do regulador de potência mínima, e a Equação de Riccati é usada para determinar as matrizes de ponderação apropriadas (Johnson 1987).

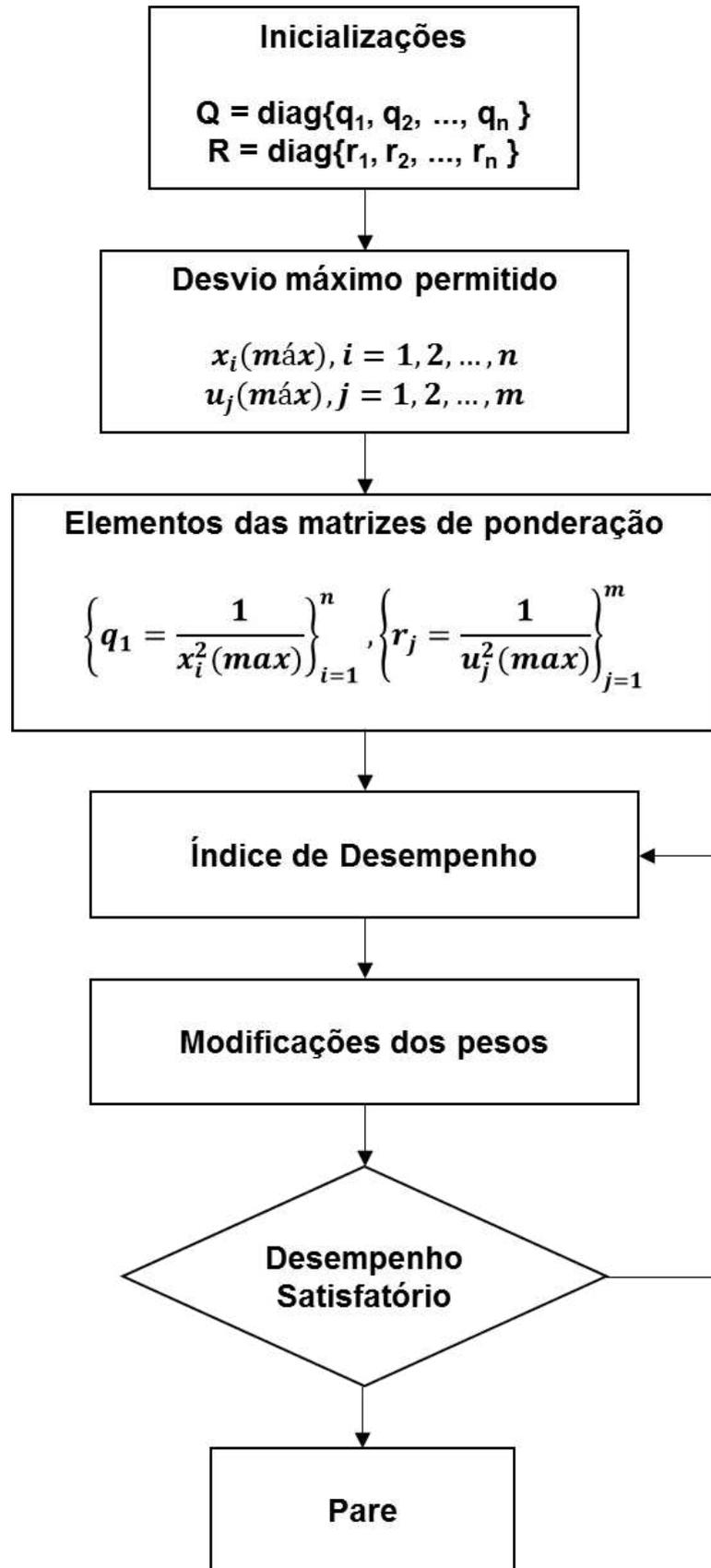
### 6.1.3. Método de Bryson

Uma abordagem dessa metodologia é o chamado quadrado do inverso ou Método de Bryson, cuja ideia básica é normalizar as saídas e o termo controle dentro da função de índice de desempenho quadrático (Johnson 1987). Arthur Earl Bryson, Jr., nascido em 7 de outubro de 1925, é o Professor de Engenharia emérito da Universidade de Stanford e o "pai da teoria moderna de controle ótimo".

Esta normalização é normalmente realizada usando o máximo de valores antecipados (ou derivados) do controle e das saídas individuais. Embora simples, o Método de Bryson apresenta uma desvantagem fundamental ao se deter à iteração repetida tentativa e erro (Johnson 1987).

Este método é ainda usado como uma primeira avaliação por muitos projetistas. O método quadrático inverso ainda persiste como um método largamente usado para a seleção das matrizes custo quadráticas. O conceito básico da técnica é normalizar a contribuição dos estados (ou saídas) e dos termos de controle, na função custo quadrática. Esta normalização é geralmente realizada usando os valores máximos dos estados e controles individuais.

Figura 5- Algoritmo de Bryson



## 7. PROJETO DO CONTROLADOR

### 7.1. Modelo do sistema

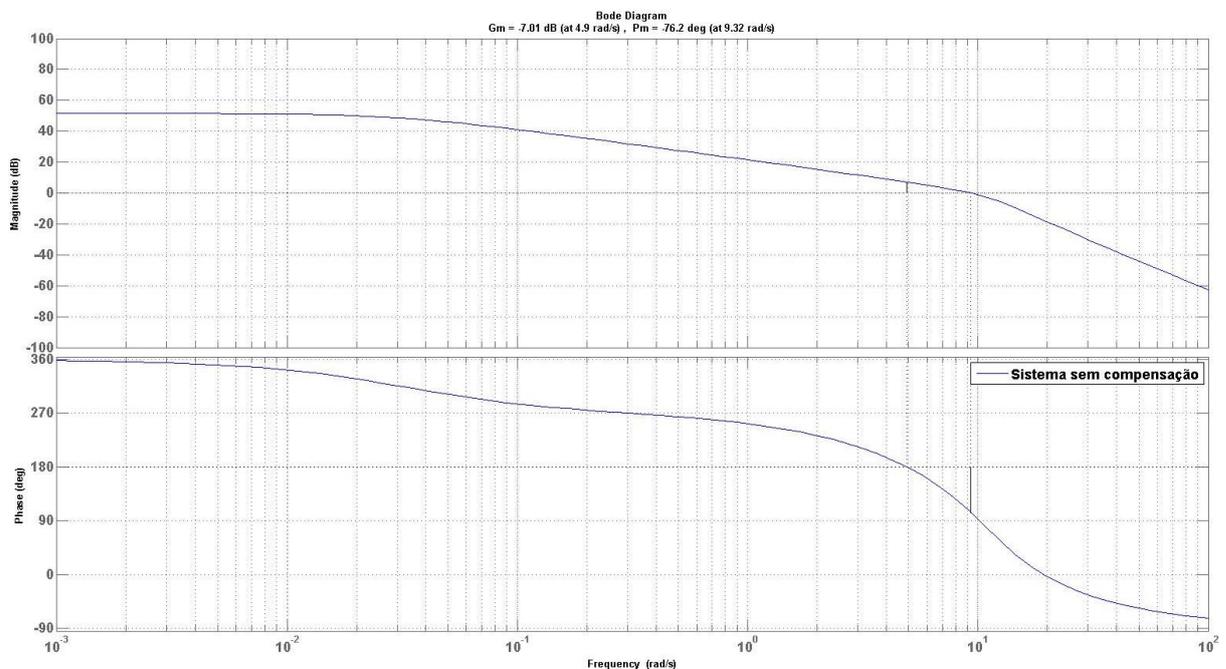
O objetivo deste trabalho é projetar o Regulador Linear Quadrático no sistema do servo motor utilizado em um manipulador robótico. Para isso, é necessário a obtenção do modelo matemático do sistema, o qual foi obtido por Frias (2016). O modelo obtido é uma função de transferência de quarta ordem, dada por:

$$G(s) = \frac{-747,8s + 8852}{s^4 + 17,18s^3 + 189,3s^2 + 746,8s + 23,55} \quad (9.1)$$

Como especificações de projeto, o sistema necessita, para uma entrada degrau, que o tempo de assentamento seja  $t_s < 8s$ ,  $overshoot < 10\%$  e erro em estado estacionário  $e=0$ .

Na figura 6, é mostrado o diagrama de bode para o modelo do sistema. Percebe-se que o sistema não apresenta a robustez esperada, pois apresenta margem de ganho  $-7.1 \text{ dB}$  e margem de fase de  $-72.2^\circ$ .

Figura 6- Diagrama de Bode de Sistema sem LQR



Fonte: Autor

Assim, é necessário a aplicação do Regulador Linear Quadrático. Para o projeto de controle LQR, é necessário que a representação do sistema seja feita em espaços de estados. Então a equação de estados é dada por:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17.180 & -189.300 & -746.8 & -23.550 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (9.2)$$

E a equação de saída:

$$y = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 595,3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0]u(t) \quad (9.3)$$

Com obtenção da representação do sistema em espaço de estados, é necessário verificar se o sistema é controlável e observável, antes de seguir para o desenvolvimento do LQR. É possível verificar se o sistema é controlável através da matriz de controlabilidade, que é dada por:

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (9.4)$$

Onde  $n$  é a ordem do sistema, então temos para o sistema proposto que  $n=4$ , logo

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (9.5)$$

Resultando na matriz

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -17.1800 & 105.8524 & 686.8298 \\ 0.0000 & 1.0000 & -17.180 & 105.8524 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 & -17.1800 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Observa-se então que a matriz de controlabilidade resultante possui ranque  $= n=4$ , logo o sistema é controlável.

Para verificar se o sistema é observável, usa-se então a matriz de observabilidade dada por:

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Para  $n=4$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad (9.8)$$

Resultando em

$$10^5 * \begin{bmatrix} 0.00000 & 0.00000 & -0.0075 & 0.0885 \\ 0.00000 & -0.0075 & 0.0885 & 0.0000 \\ -0.0075 & 0.08850 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.21700 & 1.41560 & 5.5846 & 0.1761 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

Observa-se então que a matriz de observabilidade resultante possui ranque  $n = 4$ , logo o sistema é, também, observável.

## 7.2. Controle LQR

Partindo dessa comprovação, pode-se então realizar o projeto do controle LQR de modo que esta garanta as propriedades de margem de ganho infinita e fase de pelo menos  $60^\circ$ .

- O primeiro passo no projeto LQR é selecionar as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ ;
- Em seguida deve-se determinar a matriz  $P$  solucionando a equação algébrica de Ricatti (EAR), equação 9.10.

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (9.10)$$

- Substituir esta matriz  $P$  na Eq. 9.11. O resultado será a matriz de ganho ótimo  $K$ .

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (9.11)$$

- O sistema de malha fechada é simplesmente  $[(A-BK), B, C, D]$ .

O desempenho do sistema LQR é fortemente dependente da seleção das matrizes de ponderação. Então, pode-se dizer que o LQR é ótimo em relação às matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  escolhidas. Assim uma solução LQR ótima com uma escolha de  $Q$  e  $R$ , normalmente, não será ótima para outras escolhas de matrizes  $Q$  e  $R$ . Diante disso, será utilizado a abordagem heurística do Método de *Bryson*.

### 7.2.1. Seleção das matrizes de ponderação

Um dos grandes desafios na teoria de controle, utilizando o projeto do regulador linear quadrático, é a seleção das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ . Existem diversas estratégias para a seleção das matrizes de ponderação, e uma das metodologias é a utilização do Método de *Bryson*.

### 7.2.2. Projeto do controlador

Etapas de elaboração do projeto LQR:

- a) O primeiro passo no projeto LQR é selecionar as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ , e conforme descrito anteriormente, a abordagem de *Bryson* rendeu melhores resultados, logo tem-se:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 15.3672 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.9064 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 2.0462 \end{bmatrix} \quad (9.12)$$

$$R = 10^{-5}$$

Observou-se após diversos testes, para melhores resultados, a necessidade da multiplicação da matriz  $Q$  encontrada pelo coeficiente de ajuste  $\rho$ , logo, no que segue considera-se o valor  $\rho = 383$ . Dessa forma, tem-se para  $Q * \rho$ :

$$Q = 10^3 * \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 5.8856 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.4962 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.7837 \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

Os autovalores de  $Q$  são definidos positivos, como segue:

$$10^3 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7837 \\ 1.4962 \\ 5.8856 \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

- b) Em seguida deve-se determinar a matriz  $P$  solucionando a equação algébrica de Ricatti, 9.15.

$$PA - A^T P + PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (9.15)$$

Assim, utilizou-se o ToolBox de Controle Robusto do software Matlab R2014a, resultando na matriz  $P$ :

$$P = 10^3 * \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0002 & 0.0002 & 0.0001 \\ 0.0002 & 0.0539 & 0.0532 & 0.0196 \\ 0.0002 & 0.0532 & 5.8926 & 2.1670 \\ 0.0001 & 0.0196 & 2.1670 & 2.1384 \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

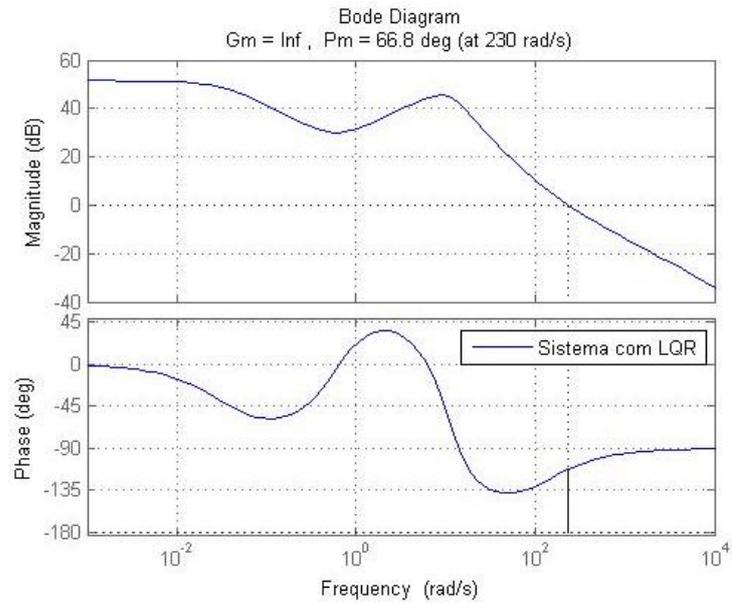
- c) Substitui-se então esta matriz  $P$  na Eq. 9.15. O resultado será a matriz de ganho ótimo  $K$ .

$$K = 10^4 [0.0204 \quad 2.4290 \quad 2.3411 \quad 0.8829] \quad (9.17)$$

- d) O sistema de malha fechada é simplesmente  $[(A-BK), B, C, D]$ .

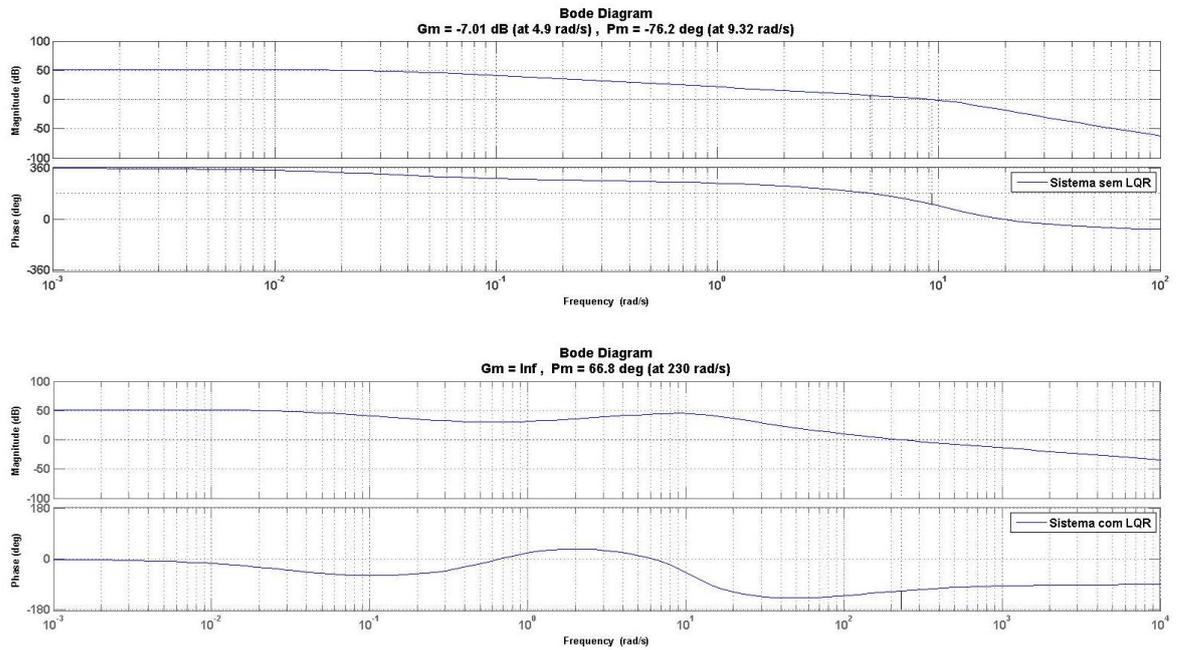
Na figura 7, é mostrado o diagrama de bode para o sistema resultante e é possível perceber então que o controlador LQR, garantiu de fato, a margem de robustez esperada, margem de ganho infinita e margem de fase de  $66,8^\circ$ .

Figura 7- Diagrama de Bode de sistema com LQR



Fonte: Autor

Figura 8- Diagrama de Bode de sistema com e sem controle LQR



Fonte: Autor

### 7.3. Simulação e análise

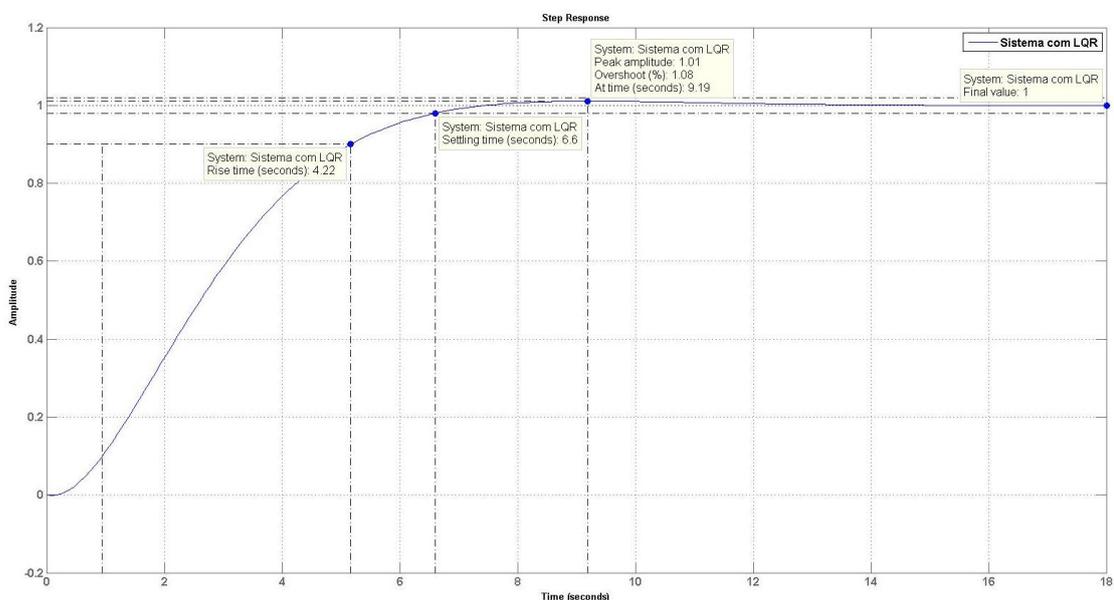
Nesta seção serão mostrados os resultados da simulação do projeto LQR analisando os seus resultados. Para a análise da resposta dos sistemas LQR, utilizou-se a metodologia de análise no domínio da frequência e análise no domínio do tempo. Para as metodologias citadas utilizou-se o software Matlab R2014a. Assim, esta seção segue com a análise da margem de robustez por meio do diagrama de Bode e análise da resposta para entrada degrau.

#### 7.3.1. Análise no domínio do tempo

No domínio do tempo, submeteu-se o sistema à uma entrada de referência degrau e analisou-se a resposta.

Tendo como base a resposta do sistema à uma entrada referência degrau, analisou-se os seguintes parâmetros característicos: o tempo de assentamento ( $t_s$ ), tempo de subida ( $t_r$ ), *overshoot* e o erro de estado estacionário.

Figura 9- Resposta ao degrau unitário

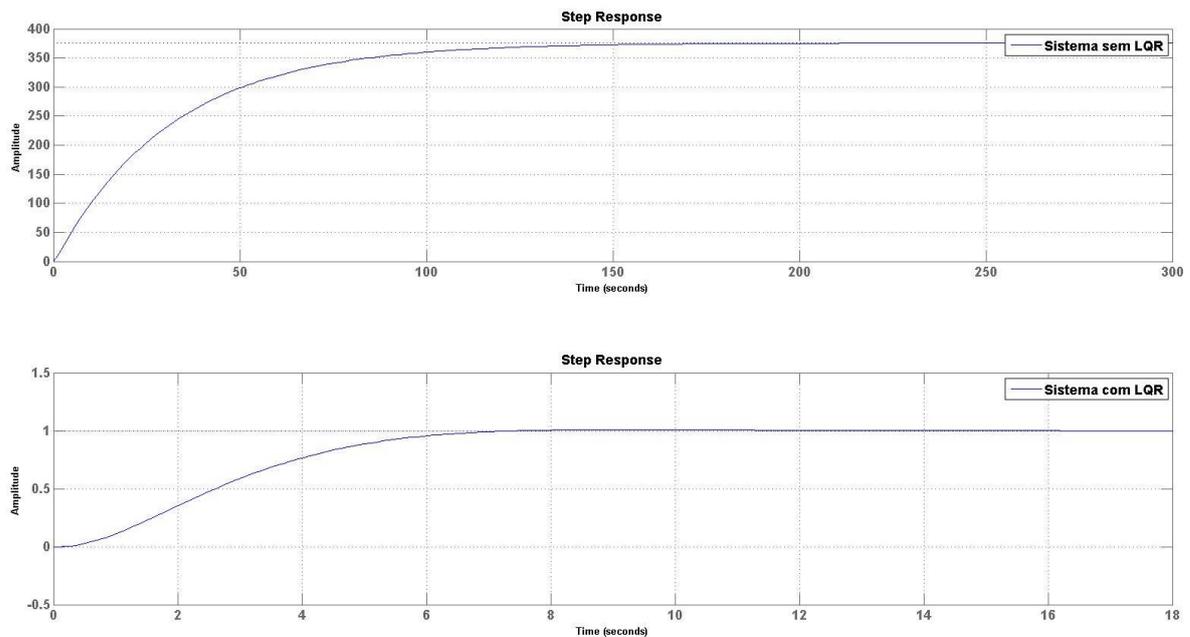


Fonte: Autor

O controlador respondeu de forma satisfatória com *overshoot* de 1,08%, tempo de assentamento de 6,6s, e tempo de subida de 4,22s e erro de estado estacionário apresentado foi nulo. Diante disso, pode-se concluir que o controlador

LQR projetado atende as especificações de projeto de forma satisfatória, demonstrando comportamento estável e erro nulo em regime permanente. Também fica claro, conforme figura 10, que o controlador LQR foi capaz de melhorar significativamente a resposta do sistema.

Figura 10- Comparação resposta ao degrau unitário com e sem LQR

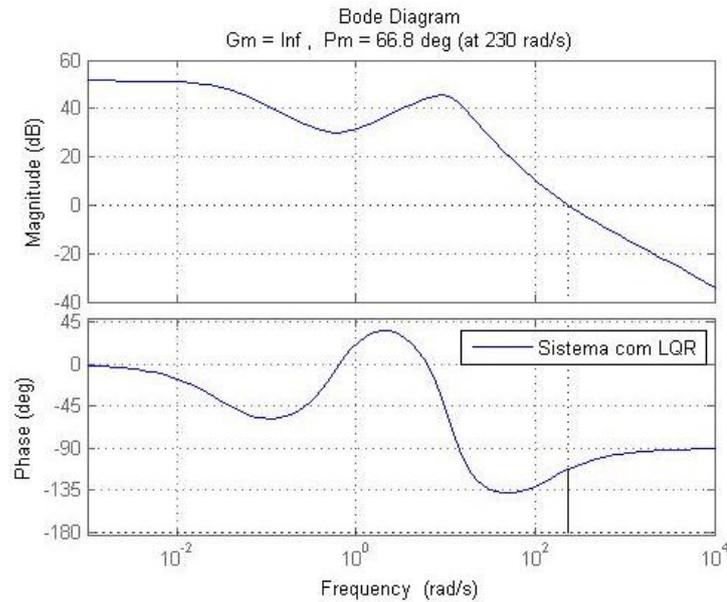


Fonte: Autor

### 7.3.2. Análise no domínio da frequência

Nesta seção será analisado o sistema LQR no domínio da frequência. Demonstra-se que as margens de robustez do controlador LQR foram alcançadas, apresentando margem de ganho infinita e fase de  $66,8^\circ$ , como apresentado no diagrama de Bode da figura 11.

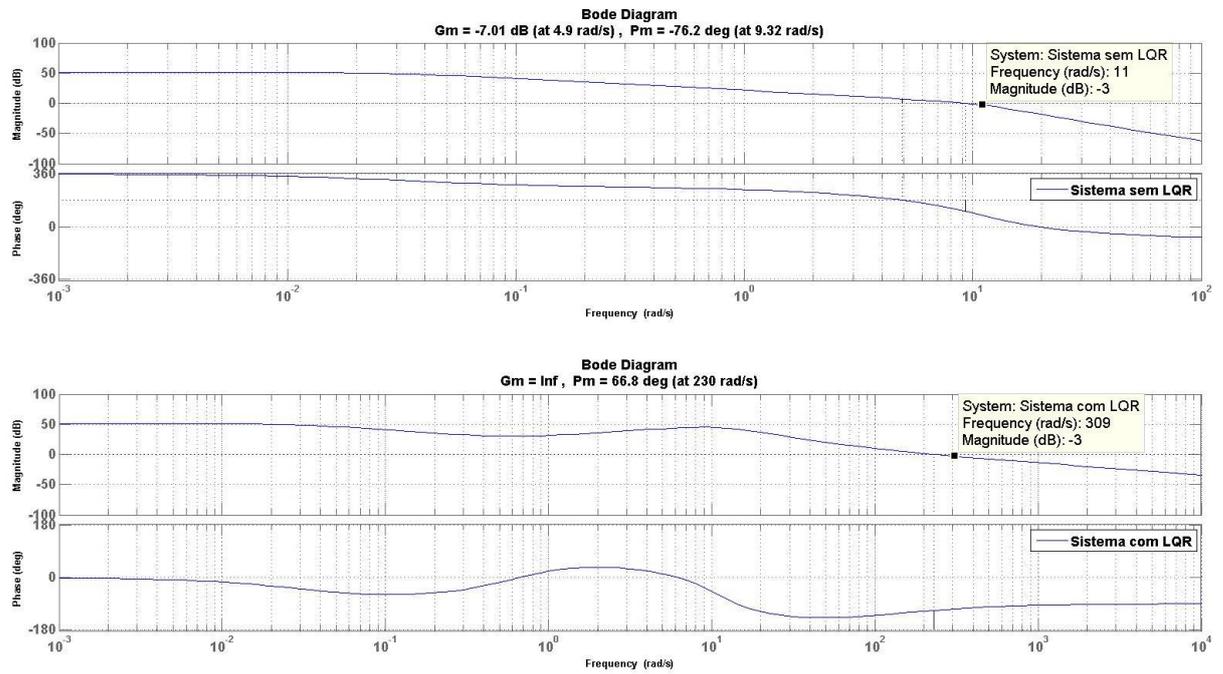
Figura 11- Diagrama de Bode do sistema compensado



Fonte: Autor

Fica claro, conforme figura 11, que o controlador LQR foi capaz de garantir as propriedades de robustez não contidas no sistema sem compensação. Analisou-se também a banda passante e a frequência de corte do sistema (FIG. 12). A banda passante é a faixa de frequência na qual um sistema  $G(j\omega)$ , é capaz de responder substancialmente a excitação dos sinais de entrada, sendo esta limitada pela frequência de corte  $\omega_c$ . A frequência de corte  $\omega_c$  é definida como aquela em que o ganho cai a  $1/\sqrt{2}$  (71%) do ganho em baixas frequências, que corresponde à transmissão de 50% da potência. Em decibéis este valor corresponde a  $-3dB$ . A frequência de corte fornece uma fronteira adequada para supressão de ruídos de altas frequências por meio de filtros (CASTRUCCI, 2011). Verifica-se que no sistema compensado, a banda passante na frequência de corte é maior que a banda passante no sistema não compensado, proporcionando uma resposta ao degrau unitário mais rápida, como visto na seção anterior.

Figura 12- Banda passante em sistema com e sem LQR



Fonte: Autor

## 8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi apresentado um projeto LQR via método de Bryson para garantir as propriedades de robustez no modelo dinâmico obtido por Frias (2016) do manipulador robótico impresso EEZTbotAR.

Para isso, o sistema foi inicialmente transformado em matriz de espaços de estado e induzido a testes de controlabilidade e observabilidade. Verificou-se que o sistema em análise é controlável, sendo possível o deslocamento dos seus polos por realimentação de estados para posições convenientes. Além disso, o sistema também se mostrou observável quando aplicado a matriz de observabilidade, tornando possível a determinação dos valores de todas as variáveis de estado, através das variáveis de saída e entrada.

Dessa forma, seguiu-se para o projeto do Regulador Linear Quadrático. Para esse fim, foram selecionadas as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  pelo método heurístico de *Bryson*, a fim de aplica-las na equação algébrica de *Riccati*, e assim encontrar o ganho ótimo  $K$ .

O controlador LQR projetado garantiu as propriedades de robustez, apresentando margem de ganho infinita e margem de fase igual a  $66,8^\circ$ . Ademais, proporcionou uma resposta mais rápida para a entrada degrau, apresentando erro nulo,  $OS(\%) = 1,08\%$  e tempo de assentamento  $t_s = 6,6s$ , atendendo todas as especificações de projeto.

Sabe-se que a motivação original do LQR é garantir as propriedades de robustez em sistema. E como mostrado neste trabalho, conclui-se que, a abordagem LQR, utilizando o Quadrado Inverso de *Bryson*, cumpriu o seu papel de forma satisfatória, garantindo de forma significativa as propriedades de robustez do sistema e ainda resultando em uma melhor resposta.

## REFERÊNCIAS

BURNS, R. S. **Advanced Control Engineering**. 1st. ed. London, UK: Butterworth, 2001

BRITO FILHO, Joaquim G. **Alocação de Auto-estrutura utilizando Controle Robusto LQG/LTR e Computação Evolutiva**. 2006. 109f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2006.

CASTRUCCI, Plínio de L.; BITTAR, Anselmo; SALES, Roberto M.; **Controle Automático**. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 2011.

CRAIG, John J.; **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**. 3. ed. USA: Ed. Prentice Hall, 2005.

DORF, Richard C.; BISHOP Robert H.; **Modern Control Systems**. 11. ed. New Jersey: Ed. Prentice Hall, 2008.

DORF, Richard C.; BISHOP Robert H.; **Modern Control Systems**. 13. ed. New Jersey: Ed. Prentice Hall, 2010.

FRIAS, Ricardo A. P. Interface entre Arduino e Identificação de Sistemas na Obtenção do Modelo Dinâmico de um Manipulador Robótico. 2016. 72f. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2016.

GOLNARAGHI, Farid; KUO, Benjamin C.; **Automatic Control Systems**. 9. ed. USA: Ed. John Wiley & Sons, 2010.

JOHNSON, M. A.; GRIMBLE, M. J. **Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design**. In: IEE Proceedings D-Control Theory and Applications. IET, 1987. p. 53-71.

NISE, Norman S.; **Control System Engineering**. 6. ed. USA: John Wiley & Sons, 2011.

OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 5. ed. New Jersey: Ed. Prentice Hall, 2010.

ROSÁRIO, João M.; **Princípios de Mecatrônica**. São Paulo: Ed. Prentice Hall, 2005.

XUE, Dingyü; CHEN, YangQuan; ATHERTON, Derek P.; **Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB**. Philadelphia: Ed. SIAM, 2007.

ROMERO, Roseli A. F.; PRESTES, Edson; OSÓRIO, Fernando; WOLF, Denis F.; **Robótica Móvel**. São Paulo: Ed. LTC, 2014.

SIQUEIRA, Edinice B. de. **Controle operacional otimizado de sistemas de canais**. 2006. 109f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2007.

SUN, L.; GAN., J. **Researching of two-wheeled self-balancing robot base on LQR combined with PID**. 2nd International Workshop on Intelligent Systems and Applications (ISA)., Wuhan, China, p. 1–5, May 2010.

WANG, Jun; WU, Guang. **A multilayer recurrent neural network for solving continuous-time algebraic Riccati equations**. *Neural Networks*, v. 11, n. 5, p. 939-950, 1998.