

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

**LUIS ANTONIO GOMES DA COSTA MOURA DA SILVA**

**MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA PROJETO DE PONTES EM VIGAS PRÉ-  
MOLDADAS COM CONTINUIDADE ESTABELECIDADA NO LOCAL**

São Luis

2024

**LUIS ANTONIO GOMES DA COSTA MOURA DA SILVA**

**MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA PROJETO DE PONTES EM VIGAS PRÉ-MOLDADAS COM CONTINUIDADE ESTABELECIDADA NO LOCAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual do Maranhão para o grau de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Me. Clodoaldo Cesar Malheiros Ferreira

São Luis

2024

Silva, Luis Antonio Gomes da Costa Moura da.

Modelagem computacional para projeto de pontes em vigas pré-moldadas com continuidade estabelecida no local./ Luis Antonio Gomes da Costa Moura da Silva – São Luis, MA, 2024.

180f.

Monografia (Curso de Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Estadual do Maranhão, 2024.

Orientador: Prof. Me. Clodoaldo Cesar Malheiros Ferreira.

1. Pontes protendidas. 2. Ferramentas computacionais. 3. Modelagem de elementos finitos. 4. Momentos dependentes do tempo. I.Título

CDU: 624.86

**Elaborado por Luciana de Araújo - CRB 13/445**

**LUIS ANTONIO GOMES DA COSTA MOURA DA SILVA**

**MODELAGEM COMPUTACIONAL PARA PROJETO DE PONTES EM VIGAS  
PRÉ-MOLDADAS COM CONTINUIDADE ESTABELECIDADA NO LOCAL**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Engenharia  
Civil da Universidade Estadual do  
Maranhão para o grau de bacharel em  
Engenharia Civil.

Aprovado em: 12/08/2024

**BANCA EXAMINADORA:**

---

Professor Me. Clodoaldo Cesar Malheiros Ferreira (Orientador)  
Mestre em Engenharia Civil  
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

---

Professor Dr. Eduardo Aurelio Barros Aguiar  
Doutor em Engenharia de Estruturas  
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

---

Professor Dr. Rodrigo de Azevedo Neves  
Doutor em Engenharia de Estruturas  
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

**SÃO LUÍS – MA**

**2024**

## RESUMO

Este trabalho aborda o uso de ferramentas computacionais para o desenvolvimento de projetos de pontes em vigas pré-moldadas com continuidade estabelecida no local. Este processo construtivo é descrito em detalhes para esclarecer o comportamento estrutural esperado e as vantagens em relação ao sistema usual de vigas biapoiadas. Aspectos fundamentais da análise de estruturas com auxílio de computador são discutidos com ênfase na modelagem da superestrutura de pontes em concreto protendido pré-fabricado. É apresentado um procedimento geral para análise de tensões e deformações em seções compostas, a partir das quais são determinados os momentos hiperestáticos de restrição devido à fluência, retração e relaxação do aço. Métodos simplificados são discutidos para validação dos resultados de análises computacionais. Um exemplo de dimensionamento da armadura ativa de longarinas pré-fabricadas e da conexão para momentos positivos é desenvolvido. Demonstra-se a capacidade de representar a construção de forma fiel por meio de um modelo de elementos finitos, extraindo informações necessárias para as verificações normativas. Evidencia-se também o impacto significativo dos fenômenos dependentes do tempo e da temperatura sobre o desempenho a longo prazo da estrutura.

**Palavras-chave:** pontes protendidas; ferramentas computacionais; modelagem de elementos finitos; momentos dependentes do tempo.

## **ABSTRACT**

This research addresses the use of computational tools for the development of bridge projects with precast beams made continuous. This construction process is detailed to clarify the expected structural behavior and advantages over the usual system of simply supported beams. Fundamental aspects of computer-aided structural analysis are discussed, with emphasis on modeling prestressed and prefabricated concrete bridge superstructures. A general procedure is presented for analyzing stresses and strains in composite sections, from which the hyperstatic moments due to creep, shrinkage, and steel relaxation are determined. Simplified methods are discussed for validating results from computational analyses. An example is provided for the design of prestressed reinforcement in prefabricated girders and their connection for positive moments. The ability to accurately represent construction using a finite element model is demonstrated, extracting necessary information for code compliance checks. The significant impact of time and temperature-dependent phenomena on the long-term structural performance is also emphasized.

**Keywords:** prestressed concrete bridges; computational tools; finite element modeling; time-dependent moments.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>PONTES DE CONCRETO COM CONTINUIDADE POSTERIOR</b> .....	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistema construtivo</b> .....	<b>10</b>
<b>2.2</b>	<b>Tensões máximas no concreto</b> .....	<b>16</b>
<b>2.3</b>	<b>Perdas de protensão e tensões máximas na armadura ativa</b> .....	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTOS PARA MODELAGEM ESTRUTURAL</b> .....	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Leis fundamentais</b> .....	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Análise estrutural de sistemas contínuos</b> .....	<b>26</b>
<b>3.3</b>	<b>Idealizações básicas de elementos estruturais</b> .....	<b>32</b>
<b>3.4</b>	<b>Classificação dimensional dos modelos estruturais</b> .....	<b>35</b>
<b>3.5</b>	<b>Propriedades geométricas de seções planas</b> .....	<b>39</b>
<b>4</b>	<b>TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM VIGAS AO LONGO DO TEMPO</b> .....	<b>41</b>
<b>4.1</b>	<b>Retração</b> .....	<b>41</b>
<b>4.2</b>	<b>Fluência</b> .....	<b>42</b>
<b>4.3</b>	<b>Método do coeficiente de envelhecimento</b> .....	<b>45</b>
<b>4.4</b>	<b>Relaxação do aço</b> .....	<b>48</b>
<b>4.5</b>	<b>Tensões e deformações de seções compostas</b> .....	<b>52</b>
<b>4.6</b>	<b>Variações de esforços internos dependentes do tempo</b> .....	<b>56</b>
<b>4.7</b>	<b>Efeitos da variação de temperatura</b> .....	<b>60</b>
<b>5</b>	<b>MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA ANÁLISE DE PONTES</b> .....	<b>65</b>
<b>5.1</b>	<b>Método Engesser-Courbon</b> .....	<b>65</b>
<b>5.2</b>	<b>Método Guyon-Massonnet-Bareš</b> .....	<b>67</b>
<b>5.3</b>	<b>Método do coeficiente de envelhecimento simplificado</b> .....	<b>70</b>
<b>6</b>	<b>APRESENTAÇÃO DA PONTE ESTUDADA</b> .....	<b>72</b>
<b>6.1</b>	<b>Propriedades dos materiais segundo a NBR 6118</b> .....	<b>74</b>
<b>6.2</b>	<b>Propriedades geométricas das longarinas</b> .....	<b>77</b>
<b>6.3</b>	<b>Cargas atuantes na superestrutura</b> .....	<b>82</b>
<b>6.3.1</b>	<b>Cargas permanentes diretas</b> .....	<b>82</b>
<b>6.3.2</b>	<b>Cargas variáveis</b> .....	<b>85</b>
<b>7</b>	<b>MODELAGEM E DIMENSIONAMENTO PRELIMINAR</b> .....	<b>92</b>
<b>7.1</b>	<b>Modelos unidimensionais</b> .....	<b>92</b>

7.1.1 Casos $g_1$ e $g_2$ : peso próprio da estrutura.....	93
7.1.2 Caso $q_2$ : efeito da temperatura.....	96
<b>7.2 Modelos de placa com vigas excêntricas .....</b>	<b>98</b>
7.2.1 Casos $g_3$ e $g_4$ : cargas permanentes adicionais .....	105
7.2.2 Caso $q_1$ : carga móvel.....	114
<b>7.3 Validação de resultados.....</b>	<b>123</b>
<b>7.4 Dimensionamento da armadura ativa longitudinal .....</b>	<b>135</b>
<b>8 ANÁLISE DOS MOMENTOS DE RESTRIÇÃO .....</b>	<b>145</b>
<b>9 CONCLUSÕES .....</b>	<b>157</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>159</b>
<b>APÊNDICE A – FLUÊNCIA E RETRAÇÃO SEGUNDO FIB (2012).....</b>	<b>165</b>
<b>A.1 Resistência a compressão e módulo de elasticidade.....</b>	<b>165</b>
<b>A.2 Retração.....</b>	<b>167</b>
<b>A.3 Fluência .....</b>	<b>168</b>
<b>APÊNDICE B – TABELAS PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO GMB.....</b>	<b>171</b>
<b>APÊNDICE C – RESULTADOS COM BASE NO MEF .....</b>	<b>175</b>
<b>C.1 Momentos devido às cargas estáticas.....</b>	<b>175</b>
<b>C.2 Deslocamentos devido às cargas estáticas .....</b>	<b>177</b>
<b>C.3 Momentos devido à carga móvel.....</b>	<b>179</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Elementos de concreto pré-moldado possuem diversos atrativos para construtores, como menor tempo de obra, melhor controle da qualidade dos componentes e diminuição do desperdício de materiais. O aumento na sua aplicação tende a acompanhar o desenvolvimento tecnológico e social do país, pois maior valorização da mão de obra e oferta de equipamentos são condições favoráveis a isso (Debs, 2022).

PCI (2023) aponta que, nos Estados Unidos, o concreto protendido é o único material a apresentar crescimento contínuo na sua utilização em pontes desde a década de 1950. A publicação lista diversas qualidades do concreto protendido e pré-moldado para explicar este contexto. O uso de seções I pré-moldadas no canteiro com pós-tração é uma das principais formas de construção de pontes no Brasil. Entretanto, a aplicação da pré-tração em elementos padronizados contribui para um melhor aproveitamento dos benefícios de industrializar o processo construtivo (Debs, 2022).

Conforme FIB (2020), uma prática difundida em vários países é a construção de pontes em vigas protendidas pré-fabricadas com estabelecimento de continuidade longitudinal entre vãos adjacentes após a concretagem das transversinas sobre os pilares internos. O principal desafio no projeto deste tipo de estrutura é a análise dos esforços adicionais que surgem após a mudança no sistema estático, que podem comprometer o desempenho a longo prazo da construção.

A análise estrutural é o conjunto de procedimentos matemáticos ou experimentais que permitem a determinação de solicitações, deformações e deslocamentos a partir de um modelo estrutural. Por sua vez, um modelo estrutural é uma composição de elementos básicos capaz de representar de maneira satisfatória o caminho das ações até os apoios da estrutura (ABNT, 2021, 2023).

Portanto, a modelagem de uma estrutura pode ser entendida como a transformação de um problema físico real em um problema físico teórico, a geração de um sistema matemático para auxiliar no dimensionamento ou verificação de uma construção. Deste modo, é fundamental que o engenheiro compreenda claramente as leis físicas, hipóteses, simplificações e ferramentas matemáticas envolvidas para aplicar corretamente modelos mais avançados em suas análises (Brasil, Balthazar e Góis, 2015).

Dentre os diversos programas para modelagem estrutural disponíveis, o Robot Structural Analysis (RSA) se destaca por ser distribuído em língua portuguesa e por ter uma versão gratuita sem limitações de recursos para acadêmicos. O estudo da sua aplicação em estruturas convencionais no Brasil é exemplificado pelos trabalhos de Sabadin (2018), Arruda (2019), Pinheiro (2022) e Fernandes (2022).

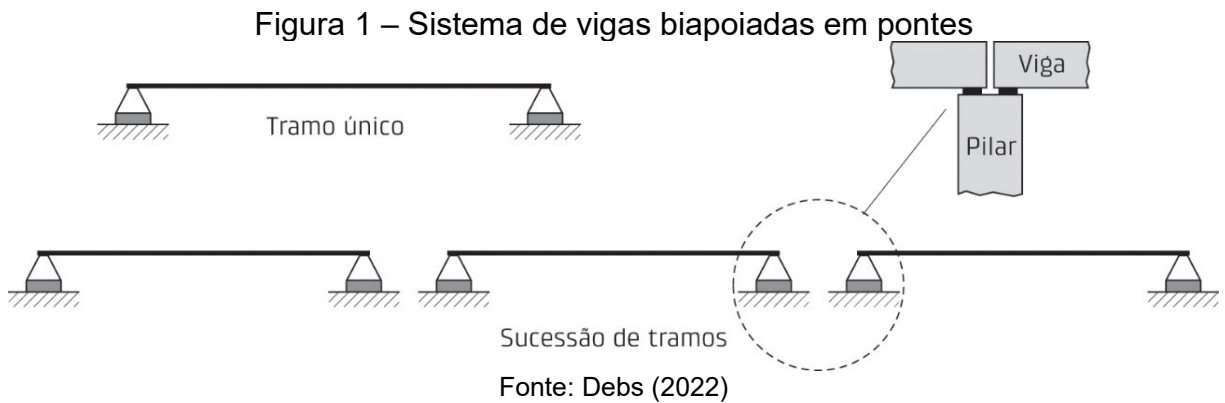
Por se tratar de um *software* generalista de elementos finitos, seu uso permite a aplicação prática dos fundamentos da modelagem computacional. A partir disso, o projetista pode compreender os procedimentos de geração automática de geometria e carregamentos empregados por programas dedicados à análise estrutural de pontes, permitindo análise crítica de seus resultados.

Este trabalho teve como objetivo discutir o procedimento de modelagem e análise estrutural para pontes em concreto protendido com continuidade posterior, utilizando ferramentas computacionais. Foi desenvolvido um exemplo de dimensionamento para a armadura longitudinal protendida de vigas principais e para a conexão de continuidade para momentos positivos, demonstrando formas simplificadas para validação de resultados. Além disso, são demonstrados os possíveis impactos da fluência, retração e relaxação do aço neste tipo de estrutura.

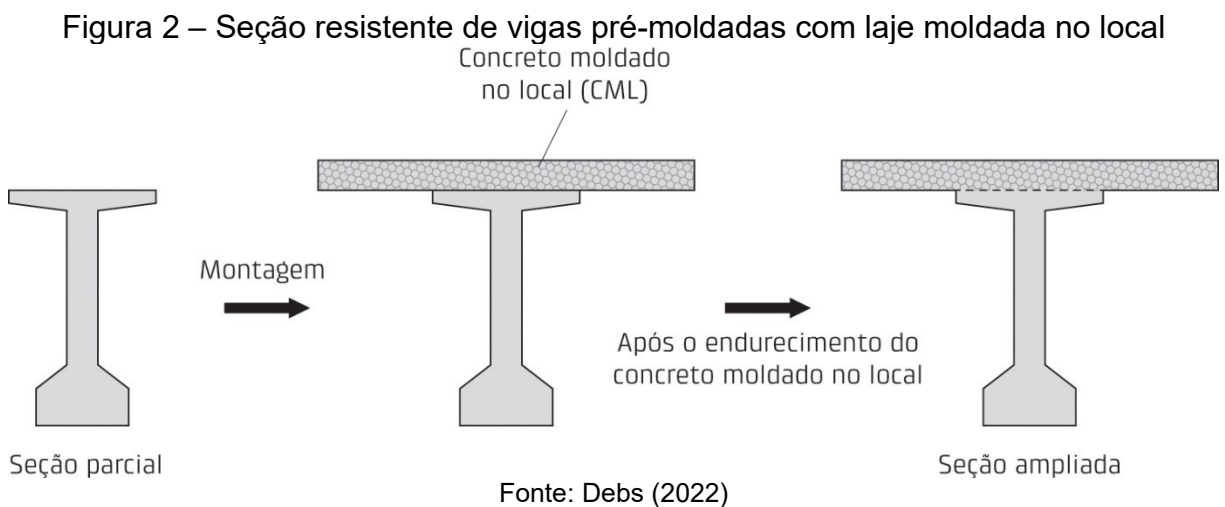
## 2 PONTES DE CONCRETO COM CONTINUIDADE POSTERIOR

### 2.1 Sistema construtivo

O emprego de vigas pré-fabricadas como longarinas de pontes resulta em sistemas isostáticos (Figura 1), nos quais não há interação estrutural entre vãos adjacentes.



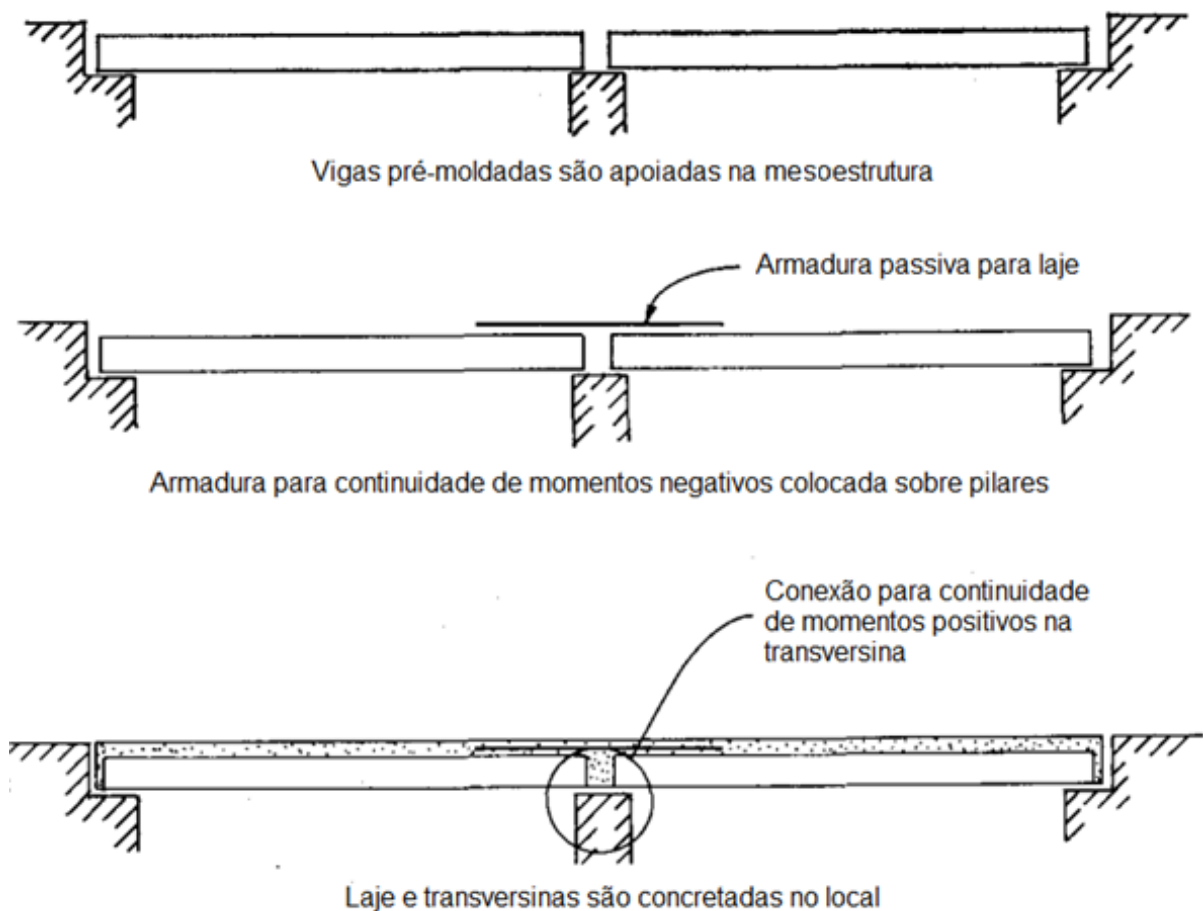
A distribuição transversal dos esforços é feita por uma capa de concreto moldada no local, que contribui para a seção resistente da viga após seu endurecimento (Figura 2). Nos projetos atuais, a tendência é não se utilizarem transversinas de vão para cumprir este propósito, sendo mantidas apenas nas extremidades das vigas para atender a outras necessidades da estrutura (Benaim, 2008; Reis e Pedro, 2019).



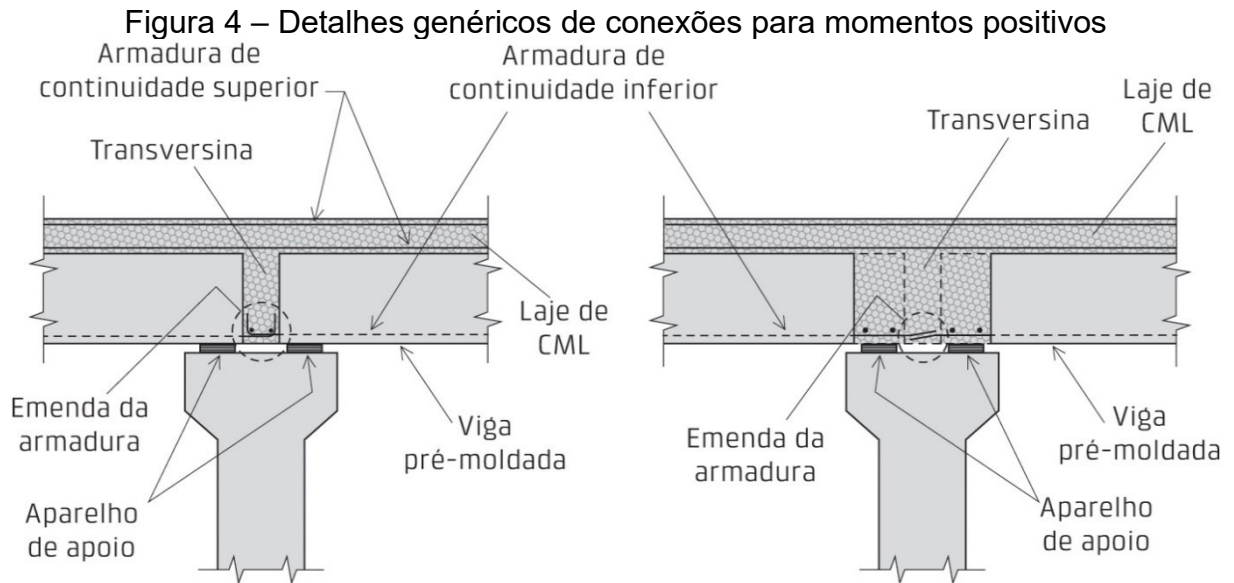
Apesar da sequência construtiva e comportamento estrutural simples, este arranjo exige que sejam utilizadas juntas de movimentação sobre os apoios internos devido à rotação livre da extremidade das longarinas. Tais dispositivos contribuem significativamente para a deterioração da estrutura, para o aumento dos custos de manutenção e comprometem o conforto dos usuários da ponte (Benaim, 2008; Reis e Pedro, 2019).

Segundo Benaim (2008), a forma mais eficiente de construir pontes com vigas pré-fabricadas envolve o estabelecimento posterior de continuidade para momentos positivos e negativos (Figuras 3 e 4). Além da redução do número de juntas, Hueste, Mander e Parkar (2012) listam como vantagens para este tipo de projeto a diminuição dos momentos positivos no meio dos vãos, aumento da reserva de resistência devido à possível redistribuição de esforços na estrutura hiperestática e uma melhor aparência.

Figura 3 – Construção de pontes com continuidade estabelecida no local



Fonte: Adaptado de Freyermuth (1969)



Fonte: Debs (2022)

As vigas são içadas e colocadas em sua posição final para eventual concretagem da laje e das transversinas. Como vigas adjacentes não estão conectadas antes do endurecimento do concreto moldado *in loco*, cada vão se comporta como biapoiado para resistir ao peso próprio da estrutura e às forças de protensão. Com o endurecimento da laje e das transversinas, estes elementos fazem com que a estrutura atue de forma contínua para carregamentos como a carga da pavimentação, barreiras rígidas e de veículos.

O estabelecimento efetivo da continuidade depende do uso de reforços ou ligações que garantam a transferência de esforços entre as vigas. Para os momentos negativos, é suficiente o uso de armadura passiva longitudinal no trecho sobre os pilares da laje moldada no local, ou de ligações soldadas quando são empregados painéis pré-moldados (Debs, 2022).

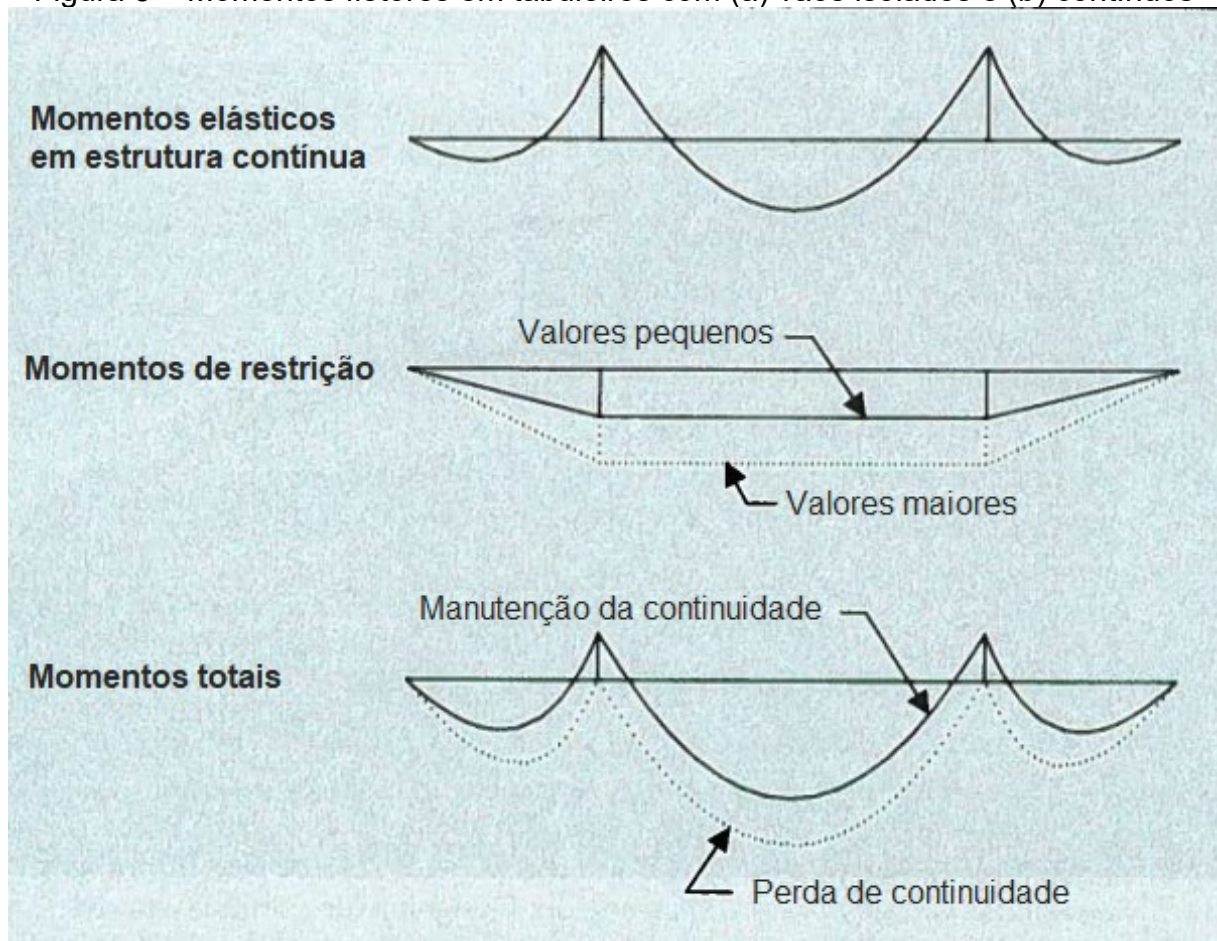
Como observado por Hueste, Mander e Parkar (2012) e Kytölä (2023), há maior debate quanto ao desempenho das conexões para momentos positivos. O ponto principal de discussão envolve o surgimento de momentos indiretos na ponte, causados pelo impedimento da rotação das longarinas nos trechos sobre apoios internos.

A tendência inicial das vigas sujeitas à protensão é apresentar deflexão para cima, ou curvatura negativa das seções de extremidade, que aumenta com o tempo devido à fluência do concreto. Conforme estudo analítico de Oesterle, Glikin e Larson (1989), restringir este deslocamento resulta em momentos positivos que

podem promover a fissuração na ligação com as transversinas. Para o reestabelecimento da continuidade, seria necessário que estas fissuras fossem fechadas pela deflexão para baixo da estrutura.

A depender da magnitude dos momentos e dos danos causados por eles, pode ser necessária rotação semelhante àquela da estrutura isostática, indicando a perda total de continuidade (Figura 5). Ainda segundo Oesterle, Glikin e Larson (1989), a consideração no projeto dos possíveis momentos de restrição positivos resultaria em esforços semelhantes àqueles do arranjo biapoiado, não havendo benefício estrutural no uso de conexões para momentos positivos.

Figura 5 – Momentos fletores em tabuleiros com (a) vãos isolados e (b) contínuos



Fonte: Adaptado de McDonagh e Hinkley (2003)

Entretanto, Miller *et al.* (2004) indicam que essa conclusão não foi aceita de forma unânime e apresentaram experimentos para avaliar o efeito destas conexões no desempenho das pontes. Observou-se que conexões dimensionadas

adequadamente contribuem para o controle da fissuração nas transversinas e mantêm grau considerável de continuidade mesmo próximas da falha.

Diversas indicações de AASHTO (2020) para pontes em vigas pré-moldadas com continuidade posterior foram sugeridas por Miller *et al.* (2004), sendo recomendado o uso de conexões para momentos positivos. Dois tipos são sugeridos pelo código americano: barras passivas adicionais ou extensão das cordoalhas das longarinas, que devem ser dobradas e embutidas nas transversinas (Figura 6).

Figura 6 – Conexão para momentos positivos com barras e cordoalhas dobradas



Fonte: Miller *et al.* (2004)

Segundo Miller *et al.* (2004) e Tadros *et al.* (2018), o uso das próprias cordoalhas de protensão pode ser preferível devido ao menor custo para execução e por minimizar as concentrações de tensão causadas por congestionamento de armadura. Outras alternativas podem ser empregadas, conforme trabalhos citados por Andrade (1994) e Hueste, Mander e Parkar (2012), por exemplo.

Entretanto, há casos em que o surgimento de momentos de restrição positivos é pouco provável. O peso próprio da estrutura induz curvatura contrária à da protensão, que sofre ainda com as perdas ao longo do tempo. A retração diferencial entre o concreto pré-moldado e moldado no local também tende a gerar curvatura positiva nas extremidades das longarinas, contribuindo para o surgimento de momentos de restrição negativos.

O principal fator na determinação dos momentos de restrição é a idade das vigas quando do estabelecimento da continuidade. Caso as vigas sejam jovens neste instante, grande parte das deformações por fluência causadas pelas forças de protensão serão restringidas, originando maiores momentos positivos. Em contrapartida, caso a continuidade seja estabelecida em tempo distante da

transferência, os efeitos do peso próprio da laje e da retração diferencial tornam-se preponderantes.

Geralmente, o projetista tem pouco controle sobre este parâmetro. Ainda assim, AASHTO (2020) permite que o dimensionamento seja simplificado caso exigido que a continuidade se estabeleça após, no mínimo, 90 dias da concretagem das vigas. Adota-se armadura de continuidade positiva que resista a 1,2 vez o momento de fissuração da longarina, considerando as propriedades do concreto do diafragma, e não são contabilizados os momentos de restrição.

A determinação de uma idade mínima na continuidade visa diminuir a magnitude de momentos positivos. A adoção do concreto da transversina no cálculo da armadura segue a expectativa de que a falha ocorra na interface com este elemento, cuja resistência geralmente é menor que das vigas principais. Pode-se discutir se a indicação do item 9.10.3.1 da NBR 7187/2021 deveria ser aplicada neste contexto, não sendo a prática observada na literatura internacional.

Alternativamente, FIB (2020) recomenda um procedimento analítico simples para o dimensionamento destas conexões. Os momentos de restrição  $M_{res}$  são calculados a partir da análise da seção de concreto não fissurado e reduzidos em até 10% para considerar a possível perda de rigidez. Então, aplica-se a expressão abaixo, que considera a distância  $z_s$  entre o centroide da armadura e a linha neutra da seção e a máxima tensão  $\sigma_{s,lim}$  admissível no aço para controle da fissuração.

$$A_{s,nec} = \frac{M_{res}}{z_s \cdot \sigma_{s,lim}}$$

Como observado por Andrade (1994), a adoção de um modelo de previsão para fluência e retração é outra causa do alto grau de incerteza associado aos valores dos momentos de restrição. Neste contexto, tais esforços não devem ser incluídos em análises nas quais seus efeitos são favoráveis à estrutura (AASHTO, 2020).

O projeto de pontes integrais, nas quais se estabelece continuidade entre o tabuleiro e os encontros, segue princípios semelhantes àqueles discutidos neste trabalho. Pinho (2011) e Coutinho (2019) discutem a aplicação de ferramentas computacionais na análise destas construções. Feitas as devidas adaptações, o mesmo pode ser dito sobre pontes mistas com vigas de aço.



## 2.2 Tensões máximas no concreto

Como aponta Debs (2022), as situações críticas para dimensionamento da armadura longitudinal em vigas pré-moldadas e protendidas costumam ser o estado limite último (ELU) na transferência da protensão e os estados limites de serviço (ELS). Em um projeto completo, várias outras verificações devem ser realizadas.

O ELU na transferência pode ser analisado aplicando seções não fissuradas e assumindo comportamento elástico linear, conforme o item 17.2.4.3.2 da NBR 6118/2023. Considera-se um coeficiente de majoração de 1,10 para as solicitações da protensão e o valor característico de outras ações desfavoráveis. Neste caso, a tensão máxima de compressão é definida a partir da resistência característica à compressão  $f_{ckj}$  no instante da transferência.

$$|\sigma_{c,\text{compressão}}| \leq \begin{cases} 0,7 f_{ckj} & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 0,7 f_{ckj} \left[ 1 - \frac{(f_{ckj} - 50)}{200} \right] & \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{cases}$$

Portanto, destaca-se que este item dispensa a minoração da resistência usualmente aplicada no ELU. A estimativa da resistência do concreto para uma idade  $t$  menor que 28 dias pode ser feita segundo o item 12.3.3 da NBR 6118/2023, no qual o coeficiente  $s$  é um parâmetro que considera o tipo de cimento utilizado na mistura.

$$f_{ckj}(t) = f_{ck} \cdot \beta_1(t)$$

$$\beta_1(t) = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t} \right)^{0,5} \right] \right\} \leq 1$$

$$s = \begin{cases} 0,38 & \text{para concreto de cimento CPIII e IV} \\ 0,25 & \text{para concreto de cimento CPI e II} \\ 0,20 & \text{para concreto de cimento CPV-ARI} \end{cases}$$

A tensão máxima de tração não pode ultrapassar 1,20 vez a resistência média à tração  $f_{ctm}$ , calculada a partir do item 8.2.5 considerando o valor

correspondente de  $f_{ckj}$ . Para aplicação das equações sugeridas, a resistência a compressão do concreto no instante analisado deve ser de, no mínimo, 7 MPa.

$$f_{ctm} = \begin{cases} 0,3 f_{ckj}^{2/3} & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 2,12 \ln[1 + 0,1(f_{ckj} + 8)] & \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

Tratando do ELS, os itens 17.2.4.4.1 e 17.2.4.4.2 da NBR 6118/2023 apresentam os critérios para verificação considerando seções não fissuradas. As tensões limites dependem do nível de protensão, cuja escolha deve levar em conta a classe de agressividade ambiental e o sistema de protensão para garantir a durabilidade da estrutura. Exigências mínimas são indicadas na Tabela 13.4 da NBR 6118/2023, reproduzida parcialmente no Quadro 1.

Quadro 1 – Exigências mínimas de durabilidade para estruturas protendidas

Tipo de concreto estrutural	Tipo de protensão	Classe de agressividade ambiental (CAA)	Exigências relativas à fissuração	Combinação de ações em serviço a utilizar
Concreto protendido nível 1 (protensão parcial)	Pré-tração	CAA I	ELS-W $w_k \leq 0,2 \text{ mm}$	Combinação frequente
	Pós-tração	CAA I e CAA II		
Concreto protendido nível 2 (protensão limitada)	Pré-tração	CAA I e CAA II	Verificar as duas condições abaixo	
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-F	Combinação frequente
Concreto protendido nível 3 (protensão completa)	Pré-tração	CAA I a CAA IV	ELS-D <sup>a</sup>	Combinação quase permanente
	Pós-tração	CAA I a CAA IV	ELS-F	Combinação rara
<p>Para as classes de agressividade ambiental CAA-III e IV, exige-se que as cordoalhas não aderentes tenham proteção especial na região de suas ancoragens.</p> <p>No caso de pré-tração em estruturas de concreto pré-fabricado, devem ser atendidos os requisitos da ABNT NBR 9062.</p> <p>NOTA 1 As definições de ELS-W, ELS-F e ELS-D encontram-se em 3.2.</p> <p>NOTA 2 No projeto de lajes lisas e cogumelo protendidas, basta ser atendido o ELS-F para a combinação frequente das ações, em todas as classes de agressividade ambiental.</p>				
<p><sup>a</sup> A critério do projetista, o ELS-D pode ser substituído pelo ELS-DP com <math>a_p = 50 \text{ mm}</math> (ver Figura 3.1).</p>				

Fonte: Adaptado de ABNT (2023)

O quadro também apresenta os estados limites e combinações de ações a serem verificados. As combinações em serviço para estruturas de concreto estão resumidas na Tabela 11.4 da NBR 6118/2023, reproduzida parcialmente no Quadro 2. Os fatores de combinação para verificação dos estados limites de serviço em pontes, com base na NBR 8681/2003, são apresentados no Quadro 3.

Quadro 2 – Combinações de serviço para estruturas de concreto

Combinações de serviço (ELS)	Descrição	Cálculo das solicitações
Combinações quase permanentes de serviço (CQP)	Nas combinações quase permanentes de serviço, todas as ações variáveis são consideradas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gi,k} + \Sigma \psi_2 F_{qj,k}$
Combinações frequentes de serviço (CF)	Nas combinações frequentes de serviço, a ação variável principal $F_{q1}$ é tomada com seu valor frequente $\psi_1 F_{q1k}$ e todas as demais ações variáveis são tomadas com seus valores quase permanentes $\psi_2 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gik} + \psi_1 F_{q1k} + \Sigma \psi_2 F_{qjk}$
Combinações raras de serviço (CR)	Nas combinações raras de serviço, a ação variável principal $F_{q1}$ é tomada com seu valor característico $F_{q1k}$ e todas as demais ações são tomadas com seus valores frequentes $\psi_1 F_{qk}$	$F_{d,ser} = \Sigma F_{gik} + F_{q1k} + \Sigma \psi_1 F_{qjk}$

Fonte: Adaptado de ABNT (2023)

Quadro 3 – Fatores de combinação para ações variáveis em OAEs

Ações	$\psi_0$	$\psi_1$	$\psi_2^{3), 4)}$
Vento	0,6	0,3	0
Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral			
Temperatura			
Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3
Cargas móveis e seus efeitos dinâmicos			
Passarelas de pedestres	0,6	0,4	0,3
Pontes rodoviárias	0,7	0,5	0,3
Pontes ferroviárias não especializadas	0,8	0,7	0,5
Pontes ferroviárias especializadas	1,0	1,0	0,6
Vigas de rolamentos de pontes rolantes	1,0	0,8	0,5

Fonte: Adaptado de ABNT (2004)

O valor absoluto da tensão máxima de compressão é definido em função da combinação analisada.

- a) Na combinação quase-permanente:  $0,45f_{ck}$ ;
- b) Na combinação frequente:  $0,60f_{ck}$ ;
- c) Na combinação rara:  $0,60f_{ck}$ .

No estado limite de descompressão (ELS-D), não devem ocorrer tensões de tração. Para o estado limite de formação de fissuras (ELS-F), o valor máximo admitido é de  $0,7 \alpha_t f_{ctm}$ , sendo  $\alpha_t$  o fator geométrico definido no item 17.3.1 da NBR 6118/2023 que relaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta para cálculo do momento de fissuração  $M_r$ .

$$\alpha_t = \begin{cases} 1,2 & \text{para seções T ou duplo T} \\ 1,3 & \text{para seções I ou T invertido} \\ 1,5 & \text{para seções retangulares} \end{cases}$$

$$M_r = \frac{0,7 \alpha f_{ctm} I_y}{z} = 0,7 \alpha f_{ctm} W_y$$

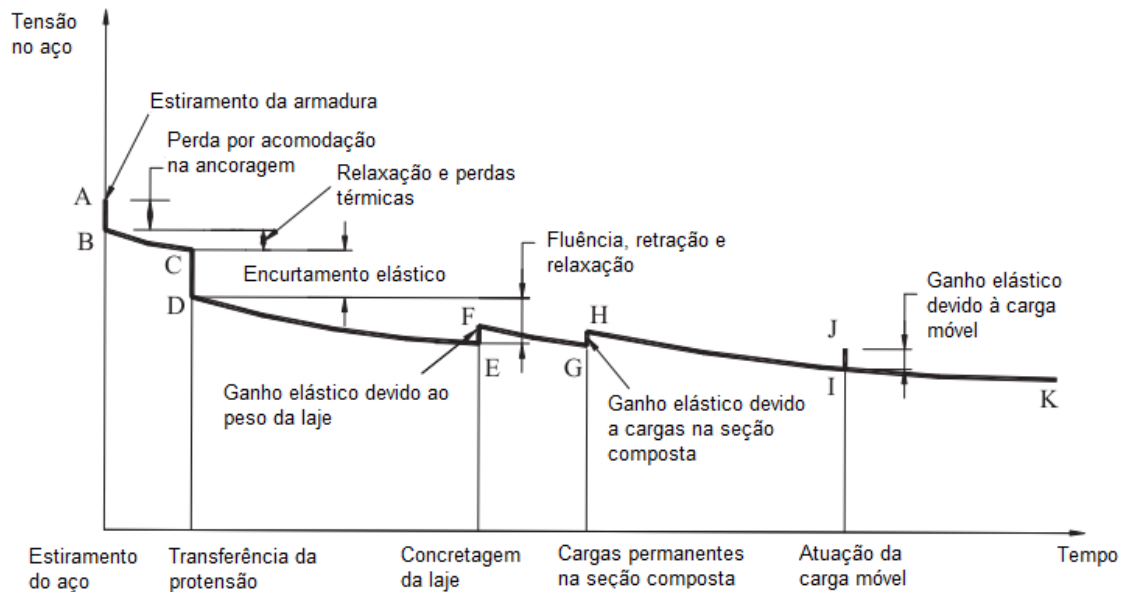
### 2.3 Perdas de protensão e tensões máximas na armadura ativa

Na primeira errata de sua versão vigente, a NBR 6118 apresenta os seguintes limites para a tensão inicial aplicada na armadura de protensão:

- a) Pré-tracionada:  $0,77f_{ptk}$
- b) Pós-tracionada aderente:  $0,74f_{ptk}$
- c) Pós-tracionada não aderente:  $0,80f_{ptk}$
- d) Barras de aço CP-85/105:  $0,72f_{ptk}$

Porém, devido à relaxação do aço e às deformações do concreto, a tensão nos cabos de peças protendidas varia com o passar do tempo. As perdas de protensão se referem a diminuições na compressão do aço. Da mesma forma, um ganho de protensão não implica no aumento das tensões de compressão no concreto, mas sim na armadura. A Figura 7 apresenta o desenvolvimento com o tempo previsto para a tensão na armadura pré-tensionada de pontes com seção concretada em etapas.

Figura 7 – Histórico de tensão na armadura pré-tensionada de longarina



Fonte: Adaptado de Tadros *et al.* (2003)

As perdas iniciais ocorrem devido à acomodação na ancoragem, retração do concreto e relaxação do aço anteriores à liberação do dispositivo de tração. As perdas devido a retração inicial tendem a ser desprezadas no caso de pré-tração, pois o vínculo entre aço e concreto não foi completamente estabelecido antes do processo de cura.

Variações de temperatura anteriores à formação deste vínculo também resultam em perdas, mas podem ser evitadas com o aquecimento da armadura antes do estiramento. O deslizamento da ancoragem causa perdas relativamente pequenas, dependendo da extensão dos cabos e do tipo de equipamento de ancoragem.

$$\Delta\sigma_{p,anc} = E_p \frac{\epsilon_{anc}}{L_{cabo}}$$

Na expressão acima,  $\epsilon_{anc}$  é o recuo das cunhas durante a fixação da ancoragem dos cabos, cujo valor deve ser obtido experimentalmente ou fornecido pelo fabricante do dispositivo. Como referência, Debs (2022) indica o intervalo de 4 mm a 6 mm. Segundo AASHTO (2020), este valor pode variar entre aproximadamente 3,2 mm e 9,5 mm.

A perda imediata que ocorre na transferência é consequência do encurtamento do concreto ao ser comprimido. Durante a vida útil da construção,

outras perdas e ganhos elásticos de tensão ocorrem devido à aplicação de carregamentos em etapas posteriores. Após o término da operação de protensão, a tensão na armadura não deve superar  $0,74f_{ptk}$ , independente do sistema de protensão empregado.

As deformações do concreto devido à fluência e retração também alteram a tensão nos cabos. Haja vista que a seção composta de pontes com vigas pré-moldadas é estabelecida em mais de uma etapa de concretagem, não pode ser aplicado o método simplificado da NBR 6118/2023 para cálculo das perdas progressivas.

Neste caso, decide-se utilizar o método para análise de tensões e deformações em seções compostas proposto originalmente em Ghali e Favre (1986), conforme sugestão de Andrade (1994). Além do cálculo das perdas de protensão, o procedimento também será empregado neste trabalho para determinar os momentos de restrição, sendo descrito integralmente na seção quatro. A relaxação do aço da armadura ativa também sofre influência dos fenômenos reológicos do concreto e será discutida na mesma seção.

### 3 FUNDAMENTOS PARA MODELAGEM ESTRUTURAL

#### 3.1 Leis fundamentais

Alves Filho (2013) apresenta três leis fundamentais que devem ser aplicadas aos modelos matemáticos de sistemas estruturais discretizados: equilíbrio de ações, compatibilidade de deslocamentos e as leis de comportamento do material. Uma apresentação preliminar será feita para elementos unidimensionais, com base também em Assan (2010).

O equilíbrio estático de um sistema é descrito pelo princípio da inércia ou primeira lei de Newton. Em um espaço tridimensional, existem seis condições de equilíbrio a serem satisfeitas.

$$\sum_i^n F_{x,i} = \sum_i^n F_{y,i} = \sum_i^n F_{z,i} = 0$$

$$\sum_i^n M_{x,i} = \sum_i^n M_{y,i} = \sum_i^n M_{z,i} = 0$$

O mecanismo que permite a manutenção do equilíbrio quando são aplicadas ações externas à estrutura é a restrição do movimento em pontos específicos, originando reações de apoio devido ao princípio da ação e reação ou terceira lei de Newton. As componentes de translação ou rotação de um ponto são denominadas graus de liberdade, sejam estas livres ou restritas. As deslocabilidades da estrutura correspondem às componentes livres.

A compatibilidade de deslocamentos é um conceito importante sobretudo para solução de problemas hiperestáticos. A fim de manter a integridade da estrutura, as extremidades comuns a diversos elementos não podem ser separadas na configuração deformada. Por este motivo, uma estrutura com membros conectados possui menos deslocabilidades do que a simples soma das componentes de deslocamento de cada parte.

O comportamento de um material pode ser descrito através de suas propriedades mecânicas. Cada material tem características próprias, conhecidas

através de ensaios experimentais que originam modelos teóricos utilizados como base para elaboração de projetos. Um aspecto importante para o desempenho estrutural é a relação entre o desenvolvimento das tensões internas e das deformações.

A hipótese mais simples é que a deformação axial resultante  $\varepsilon$  e a tensão normal aplicada  $\sigma$  variem de forma linearmente proporcional entre si. Esta relação dá origem à equação constitutiva conhecida como lei de Hooke, na qual a constante de proporcionalidade  $E$  é chamada de módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

De forma análoga, o ângulo de distorção  $\gamma$  causado por uma tensão média de cisalhamento  $\tau$  pode ser expresso em função de um coeficiente  $G$ , denominado módulo de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento. A relação de dependência entre o módulo longitudinal e transversal é definida pelo coeficiente de Poisson  $\nu$ , tratado como uma constante conhecida de cada material. Segundo CEN (2004), FIB (2012) e AASHTO (2020), seu valor pode ser adotado como 0,20 para concreto não fissurado e 0 para concreto fissurado.

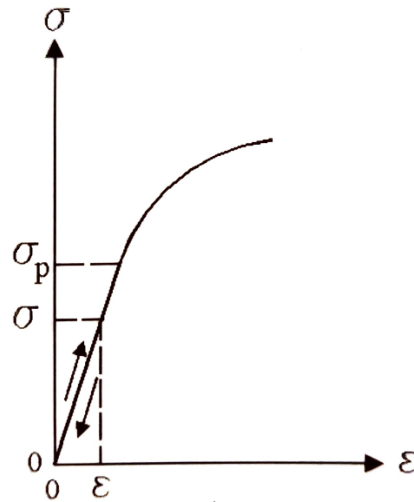
$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Os módulos elásticos recebem este nome pois observa-se que a hipótese de variação linear geralmente é razoável para casos de pequenas deformações, em que a tensão atuante é inferior à tensão proporcional  $\sigma_p$  do material. Dentro deste intervalo, a remoção da carga resultaria no retorno à configuração inicial, sem deformações residuais, caracterizando um regime elástico (Figura 8).



Figura 8 – Tensões e deformações em material com comportamento elástico linear



Fonte: Assan (2010)

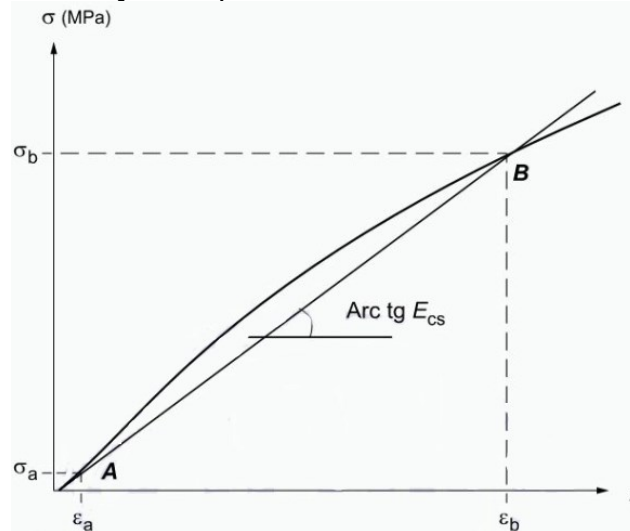
À medida que a tensão cresce além deste limite, o aumento das deformações é acelerado e se torna não linear. Kimura (2018) define a não linearidade física de estruturas como a alteração das propriedades mecânicas dos materiais por consequência da aplicação de carregamentos. Destaca-se ainda que, a exemplo do concreto e do aço, os materiais usualmente aplicados nas estruturas não apresentam, de fato, comportamento elástico.

Portanto, a fim de permitir cálculos mais simples e garantir a segurança, um dos objetivos da imposição de tensões e deslocamentos máximos pelos códigos de engenharia é aproximar o comportamento real ao elástico linear. Segundo o item 8.2.10.1 da NBR 6118/2023, a tensão proporcional de compressão no concreto pode ser considerada como 50% de sua resistência.

Neste contexto, grandezas análogas aos módulos de elasticidade são definidas para aplicação no cálculo de estruturas. Para o concreto, as normas brasileiras utilizam dois conceitos: módulo de deformação tangente inicial  $E_{ci}$  e módulo de deformação secante  $E_{cs}$ , cujas definições e métodos de ensaio constam na NBR 8522/2017.

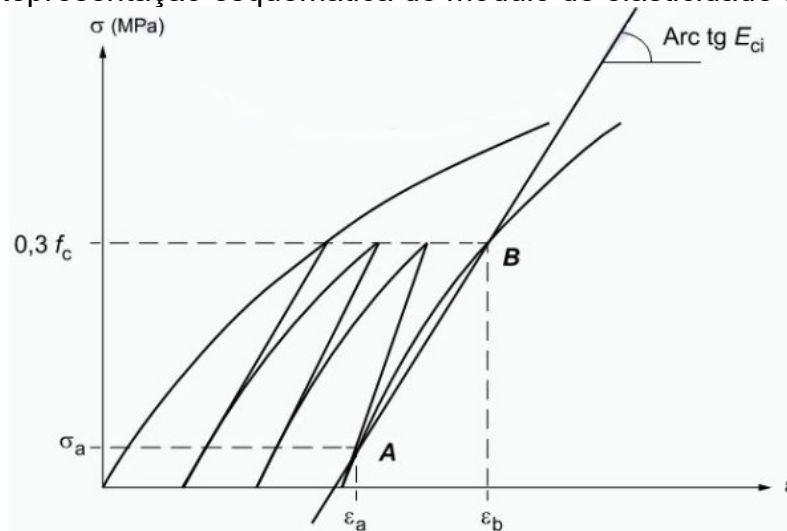
O módulo de deformação secante é definido genericamente como o coeficiente angular da reta secante ao diagrama tensão-deformação em dois pontos de interesse (Figura 9). O módulo tangente inicial equivale ao módulo secante considerando uma tensão  $\sigma_A$  igual a 0,5 MPa e  $\sigma_B$  igual a 30% da resistência do concreto, conforme o procedimento de carregamento descrito pela norma (Figura 10).

Figura 9 – Representação esquemática do módulo de deformação secante



Fonte: ABNT (2017)

Figura 10 – Representação esquemática do módulo de elasticidade tangente inicial



Fonte: ABNT (2017)

Para fins de projeto, o módulo de elasticidade secante é aplicado em análises lineares. Quando não existirem dados experimentais, seu valor deve ser estimado a partir de expressões sugeridas pelo item 8.2.8 da NBR 6118/2023, nas quais  $\alpha_E$  é um coeficiente que considera a natureza do agregado utilizado na mistura.

$$E_{ci}(t) = \begin{cases} \alpha_E \cdot 5600 \sqrt{f_{ck}} \cdot \beta_1^{0,5} & \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ 21500 \cdot \alpha_E \cdot (f_{ck}/10 + 1,25)^{\frac{1}{3}} \cdot \beta_1^{0,3} & \text{para } f_{ck} > 50 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$E_{cs}(t) = \left( 0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{ck}}{80} \right) E_{ci}(t) \leq E_{ci}(t)$$

$$\alpha_E = \begin{cases} 1,2 & \text{para basalto e diabásio} \\ 1,0 & \text{para granito e gnaisse} \\ 0,9 & \text{para calcário} \\ 0,7 & \text{para arenito} \end{cases}$$

Além da não linearidade física, existe ainda a não linearidade geométrica. Uma análise linear convencional aplica o princípio do equilíbrio de forças na estrutura em sua posição original. Entretanto, na realidade, o equilíbrio sempre é atingido com a estrutura deformada, originando efeitos de segunda ordem e uma resposta não linear (Kimura, 2018). Novamente, a consideração destes efeitos se torna desprezível caso as tensões e deformações sejam suficientemente limitadas.

Adotando a hipótese de que esforços, deslocamentos, tensões e deformações variam linearmente com as cargas aplicadas, o efeito único da atuação simultânea de diferentes casos de carregamento pode ser calculado como o somatório dos efeitos de cada caso isolado. Este procedimento recebe o nome de superposição de efeitos e permite que a análise de problemas hiperestáticos seja simplificada (Assan, 2010).

### 3.2 Análise estrutural de sistemas contínuos

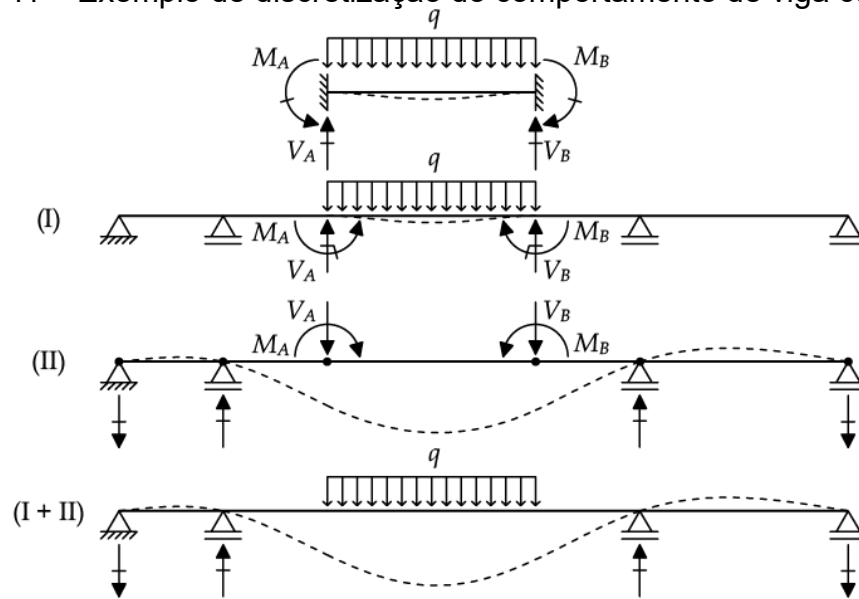
A conversão de um problema físico real em um modelo matemático computacional envolve a transformação de um sistema contínuo em um sistema discretizado por elementos básicos conhecidos. Conforme Alves Filho (2013), a subdivisão da realidade em partes menores facilita o entendimento de problemas complexos. Além disso, essa abordagem pode superar as limitações de geometria e carregamentos específicos impostas pelas soluções exatas das teorias clássicas.

Como explica Martha (2018), a análise de estruturas hiperestáticas com auxílio de computador baseia-se no método dos deslocamentos. Em comparação com o método das forças, sua implementação computacional é mais eficiente devido à facilidade de definir um procedimento padronizado de discretização. Os elementos são divididos com base nos pontos de apoio, conexão de elementos e nos limites geométricos dos carregamentos, que passam a ser chamados de nós da estrutura.

Ainda segundo Martha (2018), dois estágios de carregamento podem então ser analisados para obtenção do comportamento estrutural completo (Figura 11). No estágio I, a estrutura é submetida ao carregamento externo original mais as reações

de engastamento perfeito nas extremidades de membros carregados. Os valores destas reações são obtidos a partir de soluções triviais da isostática. No estágio II, as reações de engastamento são aplicadas com sinal contrário como carregamentos na estrutura completa.

Figura 11 – Exemplo de discretização do comportamento de viga contínua



Fonte: Martha (2018)

Esforços e deslocamentos em trechos descarregados são completamente descritos pelos resultados do estágio II, assim como as reações de apoio na estrutura. Nos trechos carregados, os esforços e deslocamentos são obtidos a partir da superposição da análise isolada do membro engastado e dos resultados do estágio II.

Quando é adotada a formulação matricial do método dos deslocamentos, este é conhecido como Método da Rigidez Direta (MRD). A origem deste nome está na equação de equilíbrio aplicada na solução de cada estágio: a matriz coluna  $\{F\}$  das forças que atuam nos nós se relaciona à matriz coluna de deslocamentos nodais  $\{U\}$  através da capacidade resistente da estrutura, expressa por uma matriz quadrada  $[K]$  chamada de matriz de rigidez.

$$\{F\} = [K] \{U\}$$

De forma geral, a rigidez pode ser definida como o esforço necessário para gerar uma componente unitária de movimento. Portanto, conforme Alves Filho (2013), um termo genérico  $k_{ij}$  de uma matriz de rigidez representa o esforço no grau de

liberdade  $i$  devido a um deslocamento unitário imposto no grau de liberdade  $j$ , enquanto todos os outros graus de liberdade são bloqueados.

Primeiramente, a matriz de rigidez de cada membro discreto é definida de forma isolada, para que a matriz de rigidez da estrutura completa seja conhecida a partir do somatório de suas partes. Conforme Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013), este procedimento deu origem ao termo “elementos finitos”, apesar de também ser empregado no método da rigidez direta. De fato, como aponta Martha (2018), este último pode ser entendido como um caso particular do Método dos Elementos Finitos (MEF) que se restringe à análise de estruturas reticuladas.

Nestas estruturas, os nós de discretização são identificados naturalmente no encontro ou nas extremidades das barras. Além disso, as deslocabilidades nodais, que de fato são as incógnitas calculadas através do MRD, podem ser interpoladas para descrever de forma exata os deslocamentos e rotações de qualquer ponto interno em barras prismáticas (Martha, 2018).

Por outro lado, em modelos estruturais que não podem ser compostos apenas por barras, a discretização da estrutura é feita de forma arbitrária, a partir da geração de uma malha de elementos com formas simples. Os deslocamentos nos vértices da malha são a solução discreta do problema estrutural e, diferentemente das estruturas reticuladas, as funções para interpolação destes deslocamentos até os pontos internos geralmente não são compatíveis com a idealização matemática proposta pela teoria da elasticidade.

Este fato possibilita a aplicação do MEF para casos de geometria e carregamentos irregulares, mas a solução do problema contínuo através da discretização em elementos finitos representa sempre uma aproximação da solução analítica prevista pela mecânica dos sólidos. De forma geral, a precisão dos resultados acompanha o grau de discretização da estrutura (Zienkiewicz, Taylor e Zhu, 2013).

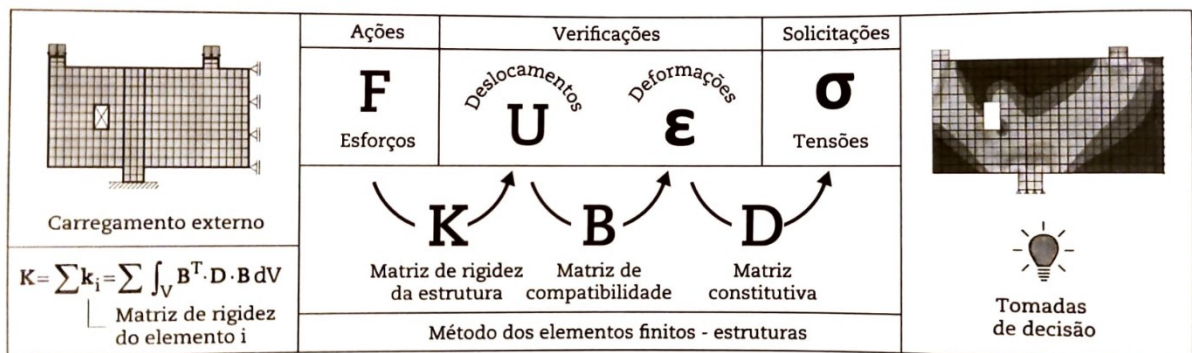
Conforme Pappalardo Júnior (2024), as funções aproximadas de deslocamento  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  e  $\tilde{w}$  para um ponto qualquer no domínio de um elemento finito tridimensional são calculadas com base na matriz coluna  $\{u\}_n$  dos deslocamentos nodais e de uma matriz  $[N]$  definida a partir de funções polinomiais de interpolação associadas a cada grau de liberdade do elemento.

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}(x, y, z) \\ \tilde{v}(x, y, z) \\ \tilde{w}(x, y, z) \end{bmatrix} = [N] \{u\}_n$$

Outra diferença entre os métodos de análise indicada por Martha (2018) é que o estágio I do MRD é substituído no MEF pela conversão do carregamento original em carregamentos nodais equivalentes. Esta etapa incorpora à solução discreta novas aproximações sensíveis ao processo de geração da malha.

A formulação geral do MEF será apresentada segundo Pappalardo Júnior (2024), sendo importante para o entendimento prático quanto da aplicação das leis fundamentais dentro do método. O procedimento de análise no MEF está sintetizado na Figura 12.

Figura 12 – Fluxo de operações em uma análise estrutural pelo MEF



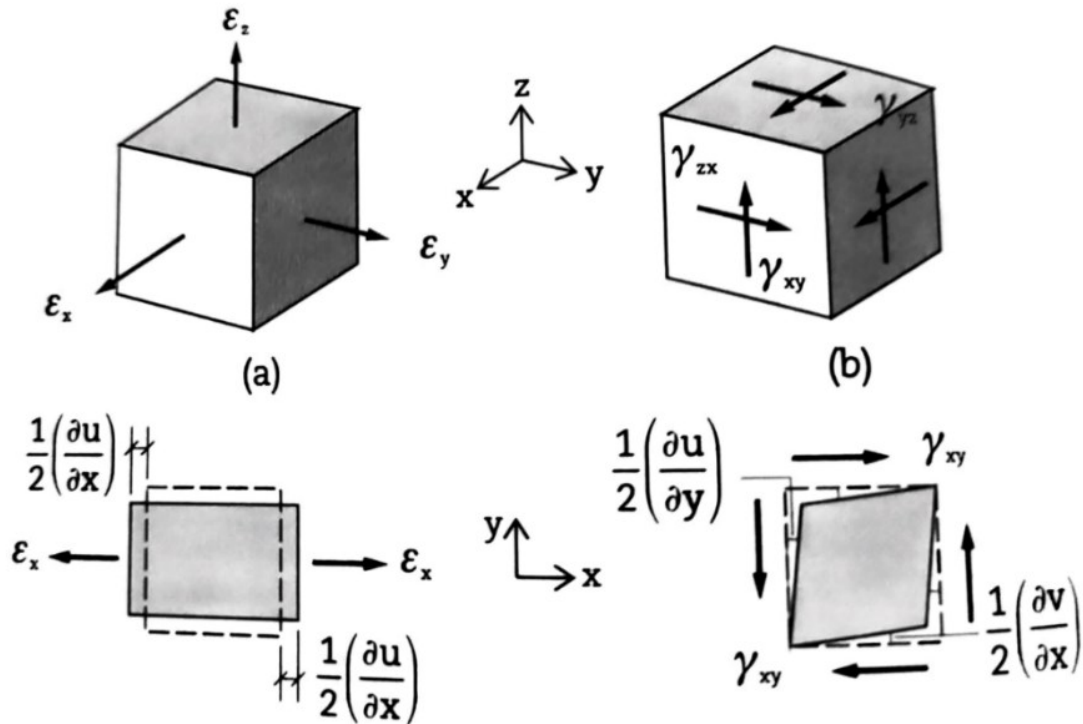
Fonte: Pappalardo Júnior (2024)

A expressão geral para cálculo da matriz de rigidez  $[k_i]$  de um elemento finito qualquer é deduzida a partir da aplicação do princípio da conservação de energia. Elementos finitos básicos possuem matrizes de rigidez conhecidas, cuja definição é feita a partir das formulações para seu comportamento mecânico.

$$[k_i] = \int_V [B]^T \cdot [D] \cdot [B] \, dV$$

A matriz de compatibilidade  $[B]$  é calculada através das equações que relacionam o campo dos deslocamentos com as deformações lineares e angulares. São apresentadas a seguir expressões para um elemento finito tridimensional com material elástico linear e comportamento isotrópico (Figura 13).

Figura 13 – Relações de compatibilidade para deformações lineares e angulares



Fonte: Pappalardo Júnior (2024)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \approx L \cdot \begin{bmatrix} \tilde{u}(x, y, z) \\ \tilde{v}(x, y, z) \\ \tilde{w}(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}$$

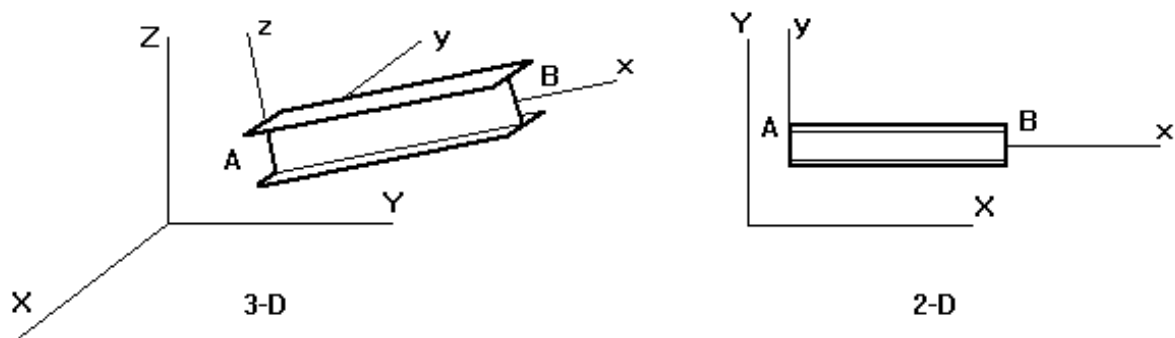
$$[B] = L \cdot [N]$$

Aplicando a lei de Hooke generalizada para o estado triplo de tensões, a matriz constitutiva  $[D]$  é obtida ao relacionar as tensões normais às deformações lineares e as tensões de cisalhamento às deformações angulares. A expressão a seguir novamente descrever um elemento tridimensional com material elástico linear e comportamento isotrópico.

$$D = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix}$$

As análises individuais de elementos isolados no MDR e no MEF são feitas segundo sistemas de coordenadas locais, com base nos eixos do membro em estudo. Desta forma, é possível aplicar formulações gerais que independem da posição do elemento em relação à estrutura completa. A distinção entre o sistema de coordenadas global e local é exemplificada na Figura 14.

Figura 14 – Sistemas locais e globais de coordenadas para análise de estruturas



Fonte: Autodesk (c2024a)

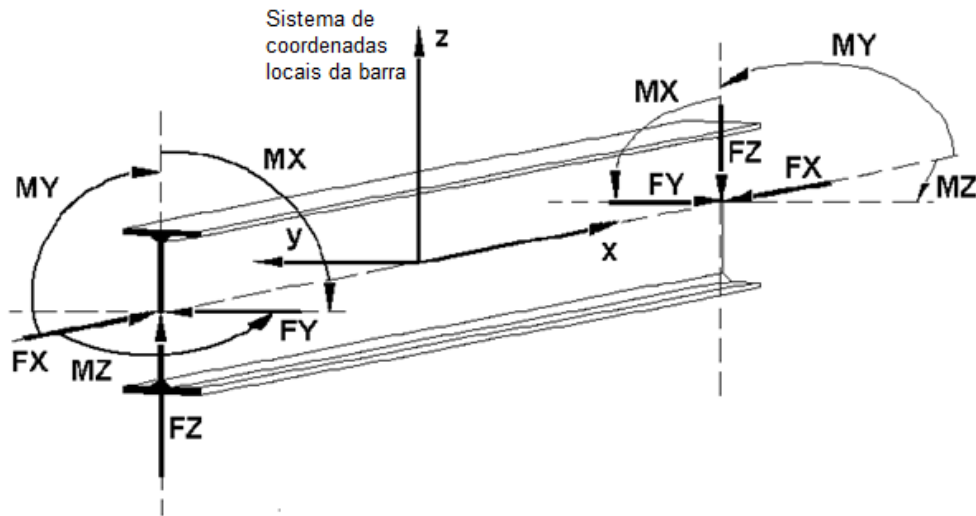
A conversão da matriz de rigidez de um elemento em relação ao seu sistema local para o sistema global da estrutura envolve o uso de uma matriz de transformação  $[T]$  que depende do tipo de elemento analisado (Pappalardo Júnior, 2024).

$$[k_i]_{\text{global}} = [T]^T \cdot [k_i]_{\text{local}} \cdot [T]$$

Em alguns casos, a entrada de dados e saída de resultados pode ser feita tanto em relação ao sistema local ou global, dependendo das configurações do *software* empregado. Com base nos eixos locais, as convenções aplicadas pelo RSA para o sentido de esforços positivos em barras e elementos de superfície, respectivamente, são apresentadas nas Figuras 15 e 16.

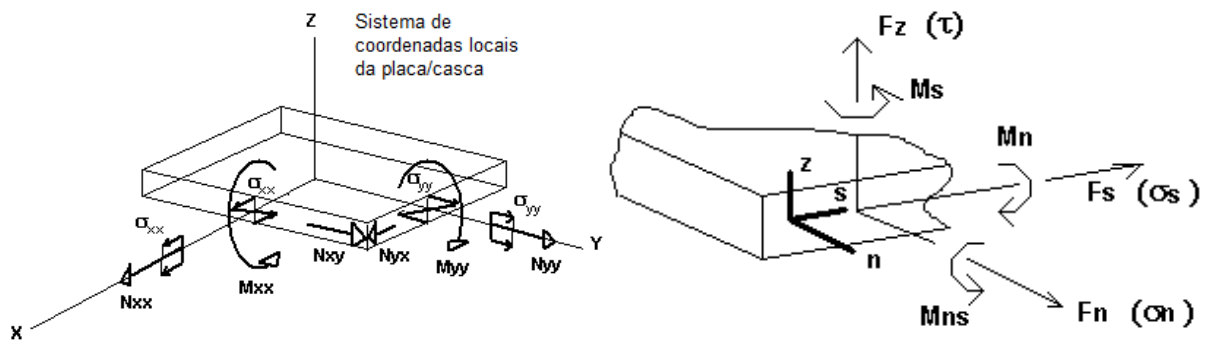


Figura 15 – Convenção para esforços em barras no RSA



Fonte: Adaptado de Autodesk (c2024b)

Figura 16 – Convenção para esforços em elementos de superfície no RSA



Fonte: Adaptado de Autodesk (c2024c)

### 3.3 Idealizações básicas de elementos estruturais

No desenvolvimento de modelos estruturais refinados, Adams *et al.* (2019) consideram a existência de quatro classes principais de elementos: pontos, linhas, superfícies e volumes. Estes últimos não compõem o escopo deste trabalho e, como será discutido, possuem aplicações específicas no projeto de pontes de concreto.

Os pontos não possuem comprimento efetivo e são responsáveis por conectar ou caracterizar os outros elementos do modelo. Sob a perspectiva dos métodos de análise estrutural, tratam-se dos nós da estrutura e podem acrescentar diferentes graus de liberdade e condições de contorno ao problema.

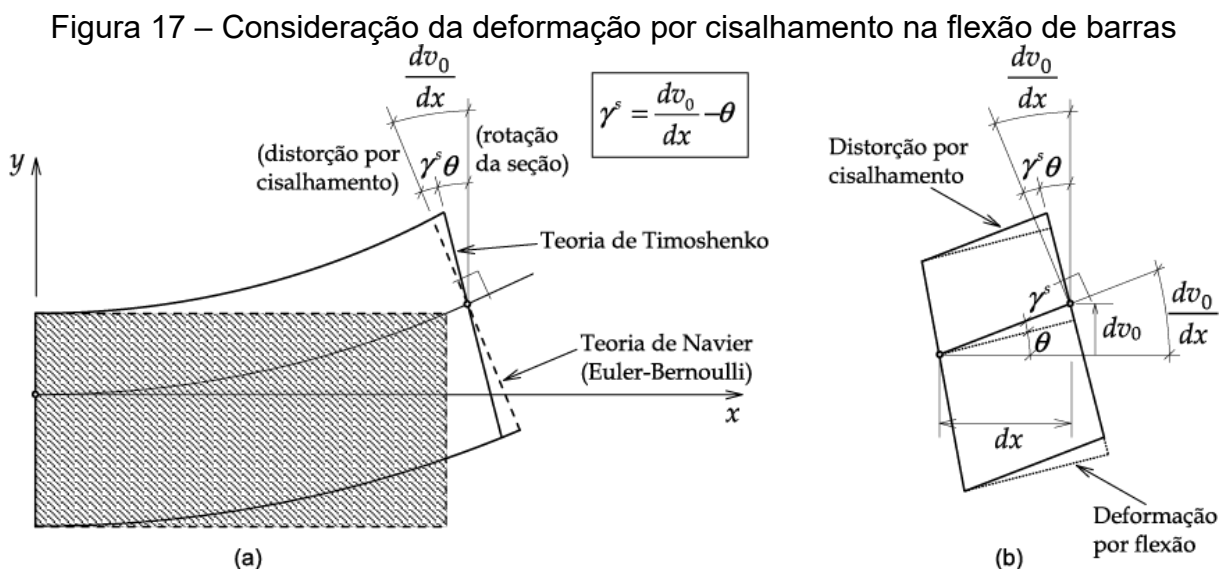
As linhas são utilizadas para representar membros estruturais nos quais o comprimento é amplamente superior às dimensões da seção transversal. Sua definição geométrica é feita através dos nós de extremidade, do formato de seu eixo

baricêntrico e das propriedades geométricas da seção transversal, as quais serão discutidas separadamente devido à sua importância na previsão do comportamento da estrutura.

Na superestrutura das pontes de concreto, os elementos lineares apresentam comportamento de viga sob flexão. Duas formulações costumam ser aplicadas a estes elementos: vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Segundo Martha (2018), as seguintes hipóteses são comuns às duas teorias:

- Deslocamentos pequenos em relação às dimensões da seção transversal;
- Material em regime elástico linear;
- Seções transversais permanecem planas na configuração deformada, conhecida como hipótese de Bernoulli.

Desprezando a ocorrência de empenamento, a teoria de Timoshenko admite que as seções transversais não se mantenham perpendiculares ao eixo da viga e considera as deformações axiais que surgem devido ao cisalhamento, incorporadas como uma rotação adicional da seção (Figura 17).



Fonte: Martha (2018)

Conforme Assan (2010), a determinação do coeficiente aplicado no cálculo destas deformações é complexa para seções e materiais arbitrários. A aplicação do método dos elementos finitos no cálculo das propriedades de cisalhamento é

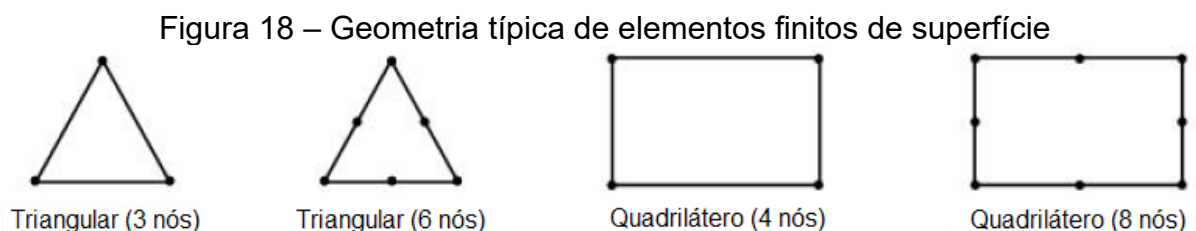
detalhada por Pilkey (2002) e geralmente está incorporada aos programas de análise estrutural que utilizam o MEF.

As deformações por cisalhamento são menos significativas à medida que o comprimento da barra cresce em relação à seção transversal. Segundo Adams *et al.* (2019), quando a razão entre vão e altura da seção é superior a 8, os resultados obtidos através da teoria de Euler-Bernoulli costumam ser suficientemente precisos, mas a consideração das deformações por cisalhamento geralmente possui impacto mínimo no tempo de processamento computacional.

Os elementos de superfície modelam o comportamento de membros nos quais a espessura é consideravelmente menor que as outras dimensões. Como apontam Chapelle e Bathe (2011), existem na literatura diversas formulações para estes elementos. Quando empregados *softwares* de análise estrutural, deve-se consultar a documentação do programa para aplicação adequada dos recursos disponíveis ao engenheiro.

De forma análoga às linhas, Adams *et al.* (2019) recomendam que sejam adotados modelos com base na teoria de Mindlin-Reissner, que considera as deformações por cisalhamento ao longo da espessura. As malhas devem ser tão regulares quanto possível e o uso de elementos com geometria distorcida deve ser evitado. Segundo AASHTO (2020), a razão entre comprimento e largura não deve superar cinco, enquanto Wassef *et al.* (2003) indicam três como valor máximo e recomenda que os ângulos internos do elemento estejam entre  $60^\circ$  e  $120^\circ$ .

No caso do RSA, o programa determina automaticamente a formulação empregada com base no comportamento estrutural sob análise, cabendo ao usuário escolher o formato e dimensão dos elementos finitos. Podem ser empregados elementos triangulares ou quadriláteros com três e quatro nós, respectivamente (Figura 18). A listagem completa das referências adotadas pelo *software* em cada caso pode ser consultada em Autodesk (c2024e).

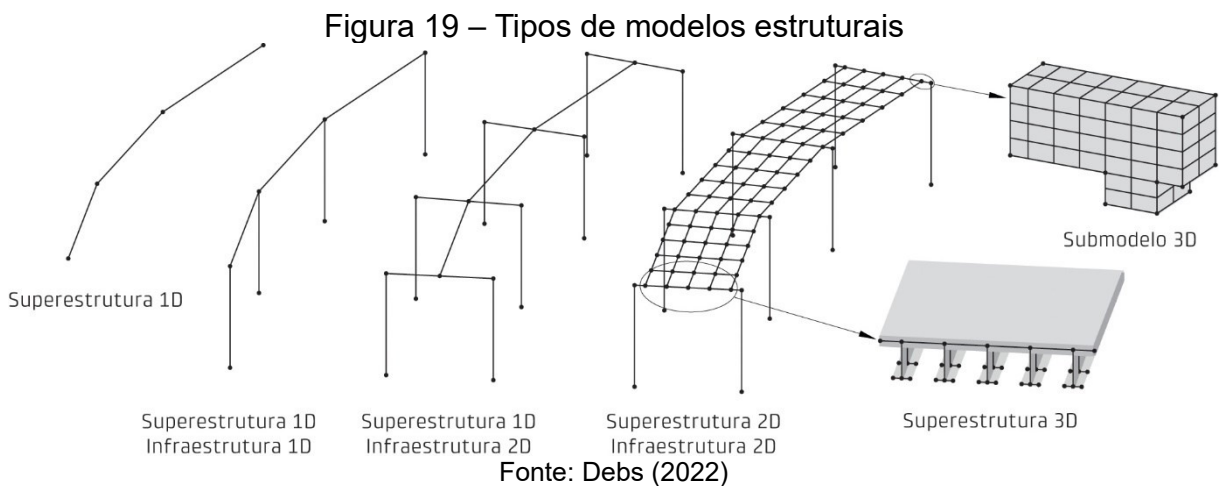


Fonte: Adams *et al.* (2019)

Adams *et al.* (2019) consideram ainda uma quinta classe de elementos, referente a restrições e vínculos rígidos, que são utilizados para impor relações de compatibilidade entre os graus de liberdade de diferentes nós. Este tipo de ferramenta é aplicado, por exemplo, para modelar a ação composta entre duas partes da estrutura definidas por elementos cujos eixos estão afastados ou para rotular nós internos de estruturas contínuas.

### 3.4 Classificação dimensional dos modelos estruturais

De acordo com Debs (2022), os modelos estruturais podem ser caracterizados como unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais com base nas classes de elementos utilizados e na forma como estes são dispostos no espaço, que sempre pode ser entendido como tridimensional. Exemplos de possíveis arranjos para o projeto de pontes são apresentados na Figura 19.



Modelos unidimensionais são compostos por elementos lineares ao longo de um único eixo longitudinal. Já modelos bidimensionais podem empregar tanto elementos lineares como de superfície, sobre um ou mais planos arbitrários do espaço. Uma representação explícita da geometria real da estrutura é possível com a elaboração de modelos tridimensionais, compostos por sólidos volumétricos.

De forma geral, os modelos unidimensionais são menos precisos e exigem mais idealizações para modelagem. Ainda assim, podem apresentar resultados satisfatórios e de fácil interpretação para análises simples, sendo empregados em

avaliações preliminares como ferramentas de suporte e validação de modelos mais complexos.

Por outro lado, o uso de modelos tridimensionais implica no aumento considerável do rigor necessário à definição da geometria dos elementos. Como consequência, o tempo de processamento computacional também cresce, apesar dos resultados serem semelhantes aos de modelos bidimensionais equivalentes bem condicionados (Debs, 2022).

Por este motivo, em fases preliminares de projeto, elementos volumétricos costumam ser aplicados apenas na análise local de membros cuja geometria difere consideravelmente de linhas ou superfícies. Em construções de porte e sensibilidade estrutural fora do comum, nas quais um nível máximo de precisão pode ser indispensável, modelos tridimensionais geralmente são associados a formulações matemáticas que incorporam integralmente não linearidades físicas e geométricas.

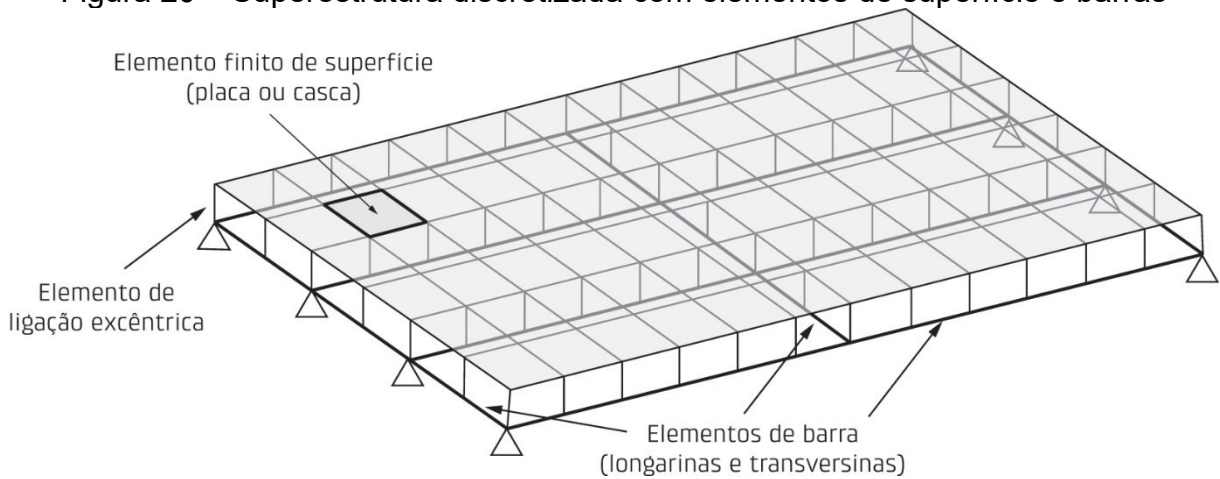
Na literatura nacional, existem diversas abordagens sobre a aplicação de modelos unidimensionais para análise de pontes de concreto, a exemplo de Marchetti (2018), Cavalcante (2019), Valeriano (2021) e Debs (2022). Com o emprego do método dos elementos finitos, diversas alternativas podem ser sugeridas para modelagem da superestrutura.

No caso de pontes em vigas e laje, um arranjo proposto por Adams *et al.* (2019) é o modelo de placa com vigas excêntricas, no qual a laje é representada por elementos finitos de superfície posicionados no plano médio de sua espessura, enquanto as vigas são modeladas como barras ao longo de seu eixo baricêntrico real. A ação composta entre os elementos é imposta com o uso de vínculos rígidos (Figuras 20 e 21).

Um estudo comparativo desenvolvido em Chung e Sotelino (2006) demonstrou que esta técnica possibilita a convergência para resultados satisfatórios com grau de discretização muito menor que a modelagem das vigas também como elementos de superfície. A mesma tendência foi observada por Bapat (2009).

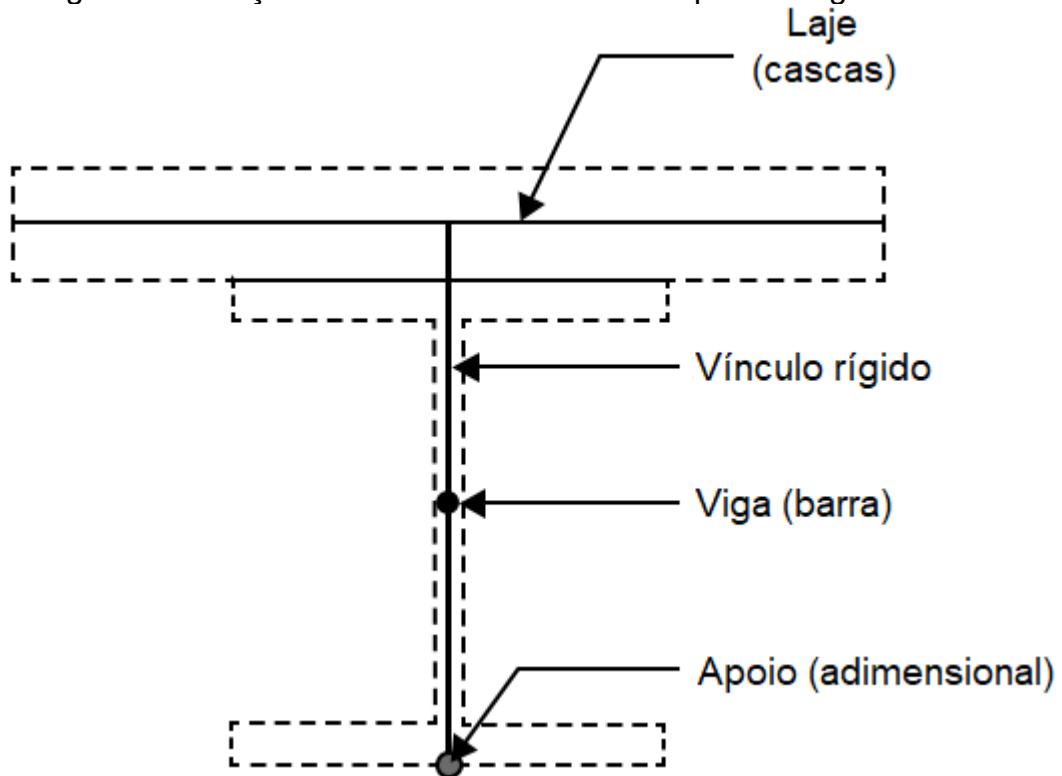
Quando há interesse em analisar as tensões localizadas na alma ou na mesa das longarinas, como costuma ser o caso em pontes com vigas de aço, outras técnicas que aplicam elementos finitos de superfície são discutidas por Bapat (2009) e Fu e Wang (2015).

Figura 20 – Superestrutura discretizada com elementos de superfície e barras



Fonte: Valeriano (2021)

Figura 21 – Seção transversal modelada com placa e viga excêntrica



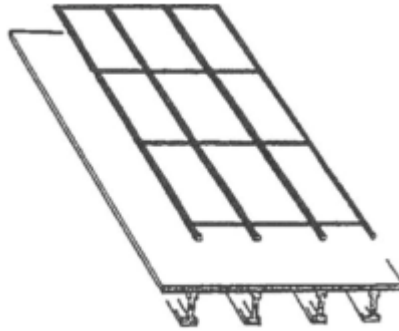
Fonte: Adaptado de Fu e Wang (2015)

O método proposto é descrito por Adams *et al.* (2019) como uma evolução da consolidada modelagem por analogia de grelhas (Figura 22), cuja aplicação na análise de pontes é tratada em detalhes por Hambly (1991), Surana e Agrawal (1998) e OBrien, Keogh e O'Connor (2015).

Entretanto, conforme OBrien, Keogh e O'Connor (2015), a disposição dos elementos finitos em mais de um plano resulta numa representação mais fiel do

comportamento da estrutura e dispensa algumas idealizações durante a modelagem. Adams *et al.* (2019) destacam, por exemplo, que o uso dessa técnica independe da estimativa de larguras colaborantes da laje, já que as próprias rigidezes dos elementos garantem uma distribuição realista dos esforços.

Figura 22 – Idealização da superestrutura como grelha plana

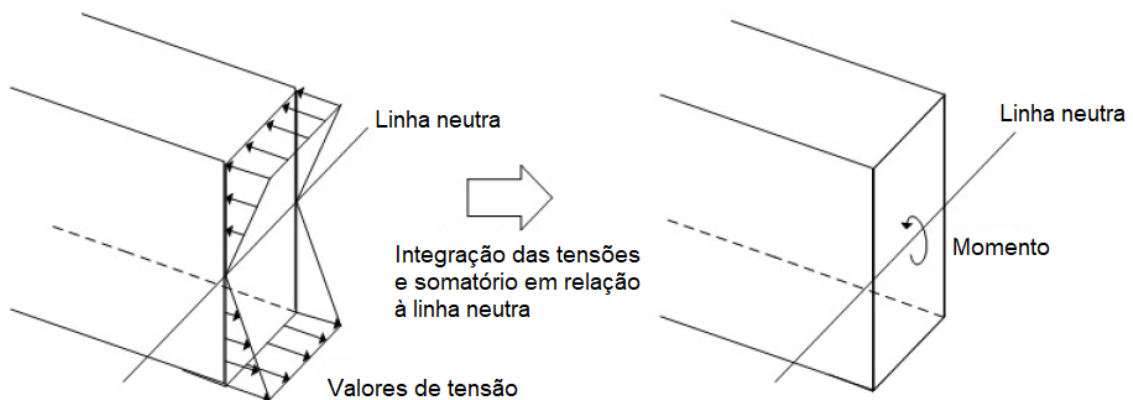


Fonte: Adaptado de Fu e Wang (2015)

Como discutido por Adams *et al.* (2019), a preferência por outras técnicas pode ser atribuída à dificuldade na aplicação direta dos resultados. As verificações normativas, em muitos casos, precisam ser feitas em função dos esforços resultantes para a seção completa, sendo necessário considerar o efeito da atuação conjunta de momentos e forças normais em cada elemento.

Para obtenção destes esforços resultantes, diversos programas de elementos finitos apresentam ferramentas que automaticamente integram as tensões sobre uma região arbitrária (Figura 23). Caso necessário, estes valores também poderiam ser calculados manualmente, o que tornaria o processo consideravelmente mais trabalhoso.

Figura 23 – Cálculo de momentos a partir de tensões no MEF



Fonte: Adaptado de Adams *et al.* (2019)

### 3.5 Propriedades geométricas de seções planas

Assan (2010) explica que os momentos de segunda ordem de uma área, usualmente denominados momentos de inércia, podem representar uma medida do esforço necessário para rotacionar uma barra em relação a um eixo de flexão. Com base na convenção de coordenadas locais aplicada pelo RSA,  $I_y$  se refere à flexão longitudinal e  $I_z$  à flexão transversal.

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

A partir do conhecimento das soluções exatas para seções simples, aplica-se o teorema dos eixos paralelos ou teorema de Steiner para cálculo das propriedades de seções compostas.

$$I_y = \sum_i I_{y,i} + A_i(z_{cg} - z_{cg,i})^2$$

$$I_z = \sum_i I_{z,i} + A_i(y_{cg} - y_{cg,i})^2$$

O momento de primeira ordem ou momento estático é definido como o produto da área pela distância de seu centroide ao eixo de referência.

$$B_y = \int_A z dA = \sum_i A_i(z_{cg} - z_{cg,i})$$

$$B_z = \int_A y dA = \sum_i A_i(y_{cg} - y_{cg,i})$$



O momento de inércia à torção, aqui tratado como  $I_x$ , é equivalente à constante torcional de Saint Venant, não devendo ser confundido com o momento polar  $I_p$  ou o momento centrífugo de inércia  $I_{yz}$ , também conhecido como produto de inércia.

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z$$

$$I_{yz} = \int_A yz dA$$

Conforme Pilkey (2002), a relação entre o momento torçor  $T$  aplicado e o ângulo de giro  $\theta$  resultante em uma seção sem simetria radial sofre influência das deformações axiais de empenamento devido à torção. Nestes casos, o momento de inércia à torção deixa de ser equivalente ao momento polar.

$$T = G I_x \frac{d\theta}{dx}$$

$$I_x = \int_A \left[ \left( \frac{d\omega}{dz} + y \right) y - \left( \frac{d\omega}{dy} - z \right) z \right] dA$$

Haja vista a complexidade para determinação da função de empenamento  $\omega$ , a constante de torção possui solução fechada conhecida para poucas seções. AASHTO (2020) apresenta equações aproximadas para aplicação no cálculo de pontes, cujas deduções podem ser vistas em Pilkey (2002). Para seções sólidas ou abertas com paredes esparsas:

$$I_x = \frac{A^4}{40I_p}$$

Entretanto, como demonstrado por Brice e Pickings (2021), estas expressões podem resultar em erros consideráveis quando comparadas ao uso de métodos computacionais.

## 4 TENSÕES E DEFORMAÇÕES EM VIGAS AO LONGO DO TEMPO

### 4.1 Retração

O conceito de retração do concreto é apresentado por Rüsçh, Jungwirth e Hilsdorf (1983) como uma redução gradual de volume que independe de carregamentos externos, causada principalmente pela perda de água após a exposição de sua superfície ao ar.

Esta definição considera temperatura ambiente constante. Assim, as deformações axiais  $\epsilon^0$  do concreto que independem da aplicação de carga são expressas abaixo, sendo  $\alpha$  o coeficiente de expansão térmica do material e  $\epsilon_{cs}$  a deformação por retração.

$$\epsilon^0(t) = \epsilon_{cs}(t) + \epsilon_T(\Delta T)$$

$$\epsilon^0(t) = \epsilon_{cs}(t) + \alpha \Delta T$$

Para fins de projeto, admite-se que a retração seja uniforme para cada parte de concreto em uma seção transversal. Os valores comumente são apresentados como deformações adimensionais negativas, equivalentes ao encurtamento por unidade de comprimento. Valores positivos de retração representam processos de expansão causados, por exemplo, pelo ganho de umidade caso o concreto seja mantido submerso em água (ACI, 2005).

O modelo de previsão da retração sugerido na NBR 6118 é uma adaptação da formulação apresentada em CEB (1978), que foi elaborada com base na proporcionalidade entre retração e secagem. Segundo ACI (2005), sobretudo a partir da década de 1990, os estudos da retração passaram a considerar os efeitos da componente autógena, consequência das reações de hidratação do cimento e que não sofre influência de variações no teor de umidade do material.

Para concretos de resistência normal, com  $f_{ck}$  inferior a 50 MPa, esta parcela geralmente é desprezível. Entretanto, valores menores para relação a água/cimento e o uso de aditivos possibilitam que a retração autógena até supere a retração por secagem em concretos de alto desempenho (Ghali, Favre e Elbadry, 2012; Bazant e Jirásek, 2018).

Sendo usual o emprego de concretos de alto desempenho no sistema de pré-tração, a adequação do modelo da NBR 6118 para este contexto é questionável. Debs (2022) apresenta um exemplo de dimensionamento em que utiliza expressões de CEN (2004) para considerar, por exemplo, os efeitos da cura a vapor. Entretanto, não são discutidas as incompatibilidades conceituais entre os modelos de previsão.

Neste trabalho, foi aplicada a formulação de FIB (2012) para previsão da retração, discutida em detalhes no Apêndice A. Para determinar os momentos de restrição, o mesmo será feito para fluência, módulo de elasticidade e resistência a compressão, outras propriedades cujo desenvolvimento com o tempo afeta sensivelmente a resposta esperada da estrutura.

Como as deformações por retração se desenvolvem gradualmente, seus valores são reduzidos pela fluência. Como detalhado em Bazant e Jirásek (2018), a fluência também sofre influência das variações de umidade no concreto. Portanto, como recomendado por ACI (2008) e AASHTO (2020), ambos os fenômenos devem ser estudados em conjunto e adotando uma única base para previsão.

## 4.2 Fluência

Bazant e Jirásek (2018) definem a fluência como o aumento gradual nas deformações observadas após a aplicação de uma tensão  $\sigma_c$  mantida constante. Bazant (1988) apresenta todas as componentes de deformação do concreto ao longo de um período entre  $t_0$  e  $t$ . A soma da parcela elástica instantânea  $\epsilon_E$ , por ocasião de um carregamento externo, com a deformação por fluência  $\epsilon_{cc}$  é chamada de deformação mecânica  $\epsilon_\sigma$ .

$$\epsilon_c(t) = \epsilon_E(t_0) + \epsilon_{cc}(t) + \epsilon^0(t)$$

$$\epsilon_\sigma(t) = \epsilon_E(t_0) + \epsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \epsilon_{cc}(t)$$

Ainda segundo Bazant (1988), e como discutido anteriormente, a proporção entre as deformações mecânicas e a tensão atuante pode ser aproximada como linear para situações usuais em serviço. Neste caso, a deformação mecânica em qualquer

instante pode ser caracterizada através de uma função da fluência  $J$ , equivalente ao desenvolvimento da deformação causada por uma tensão unitária constante.

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \epsilon_{cc}(t)$$

$$\epsilon_\sigma(t) = J(t, t_0) \sigma_c(t_0)$$

O coeficiente de fluência  $\varphi$ , por sua vez, é definido por Bazant e Jirásek (2018) como a razão entre a deformação por fluência e a deformação elástica imediata. É possível, portanto, desenvolver relações entre o coeficiente e a função da fluência.

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\epsilon_{cc}(t)}{\epsilon_E(t_0)}$$

$$\epsilon_\sigma(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)]$$

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t, t_0)}$$

A NBR 7197/2021 indica que a hipótese de comportamento viscoelástico linear é adequada para tensões de compressão, sob combinações quase permanentes, menores que  $0,45f_{ck}$ . A depender do concreto, este limite pode variar entre 30% e 60% da resistência (Freudenthal e Roff, 1958 apud ACI 2005). Com esta simplificação, também é possível aplicar o princípio da superposição de efeitos para tratar de casos em que a tensão varia com o tempo.

$$\epsilon_c(t) = \int_0^t J(t, t_0) d\sigma(t_0) + \epsilon^0(t)$$

Uma questão abordada em Bazant e Jirásek (2018) é a preferência dos códigos de engenharia por descrever as deformações a partir do coeficiente em vez da função de fluência. Haja vista sua definição, o emprego do coeficiente de fluência

depende da separação entre as parcelas de deformação instantânea e gradual. Porém, como pode ser visto na integral anterior, a análise da estrutura depende apenas dos valores totais da função fluência.

Os autores enfatizam que a fluência tem efeito significativo mesmo para durações de carregamento extremamente pequenas e que não há consenso entre os códigos de engenharia sobre qual tempo corresponde à deformação elástica inicial. Conseqüentemente, os valores dos módulos de elasticidade aplicados na determinação da componente instantânea podem não representar o mesmo dado experimental quando códigos diferentes são comparados.

Por este motivo, em cada cálculo, deve ser aplicada uma única fonte para previsão do desenvolvimento com o tempo das propriedades mecânicas do concreto, a fim de garantir que os termos empregados correspondem a uma única função de fluência. Deste modo, os resultados serão compatíveis com os ensaios que embasaram o modelo de previsão.

Além disso, Ghali, Favre e Elbadry (2012) destacam que alguns códigos empregam o termo “coeficiente de fluência” com significado diferente do apresentado anteriormente. Em FIB (2012) e nas normas brasileiras, por exemplo, a deformação por fluência é descrita em função da deformação imediata caso o carregamento fosse aplicado aos 28 dias. Este coeficiente será representado pela simbologia  $\varphi_{28}$ .

$$\epsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c28}} \varphi_{28}(t, t_0)$$

Ao aplicar as outras equações neste trabalho, deve ser feita a conversão abaixo para ajustar os valores calculados segundo os códigos em questão.

$$\varphi(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{E_{c28}} \varphi_{28}(t, t_0)$$

Outro fenômeno presente nos materiais sujeitos à fluência é a relaxação, definida por Bazant e Jirásek (2018) como a tendência de redução das tensões no material caso as deformações sejam mantidas constantes. De forma análoga à fluência, define-se a função de relaxação  $R$  como o desenvolvimento da tensão causada pela imposição constante de uma deformação unitária.

$$\sigma_c(t) = R(t, t_0) \epsilon_\sigma(t_0)$$

$$R(t, t_0) = \frac{1}{J(t, t_0)}$$

Novamente, é possível aplicar o princípio da superposição para tratar de históricos com deformação variável. As deformações por retração e variações de temperatura devem ser subtraídas do valor total, pois não geram tensões.

$$\sigma_c(t) = \int_0^t R(t, t_0) [d\epsilon(t_0) - d\epsilon^0(t_0)]$$

### 4.3 Método do coeficiente de envelhecimento

Conforme Bazant e Jirásek (2018), o envelhecimento no concreto tem efeitos diferentes daquele na maioria dos materiais, causando aumento gradual da resistência e do módulo de elasticidade. Com o passar do tempo, a taxa de aumento diminui, sendo a reação química de hidratação a principal causa do fortalecimento da microestrutura.

Os autores apresentam de forma rigorosa o tratamento integral a ser utilizado para análises incrementais considerando o comportamento viscoelástico linear com envelhecimento. Entretanto, admitem que métodos aproximados, em alguns casos, são mais adequados à prática de projeto.

Aspectos como a não linearidade da secagem, fissuração e incerteza estatística dos coeficientes de fluência e retração muitas vezes são ignorados ou tratados de forma simplificada. Por estas razões, os erros inerentes à análise estrutural com fluência tornam pouco significativos os ganhos devido à adoção de uma formulação matemática mais precisa (Bazant e Jirásek, 2018).

Como alternativa ao cálculo incremental, o método do coeficiente de envelhecimento é a opção mais assertiva para pontes de médio porte sensíveis à fluência. A NBR 7187/2021 prevê sua utilização no cálculo de pontes com vigas pré-moldadas e lajes concretadas no local, assim como em estruturas que sofrem alterações nas condições de apoio.

A formulação original do método foi feita em Bazant (1972), como uma modificação daquele proposto em Trost (1967). O desenvolvimento apresentado a seguir é feito segundo Ghali, Favre e Elbadry (2012). Substituindo a função de fluência pelo coeficiente e desenvolvendo o primeiro termo da integral, a deformação do concreto para um histórico de tensões variáveis pode ser escrita conforme a equação abaixo:

$$\epsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \int_0^{\Delta\sigma_c(t)} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} d\sigma_c(\tau) + \epsilon^0(t)$$

Observa-se que o primeiro termo da soma representa a deformação mecânica final caso a tensão aplicada no tempo  $t_0$  fosse mantida constante até o tempo  $t$ . O segundo termo equivale à deformação instantânea mais fluência causada pela variação de tensão, cujo valor se desenvolve com o tempo de zero até  $\Delta\sigma_c$ .

Devido ao envelhecimento do concreto, a fluência sobre uma tensão aplicada gradualmente é menor que aquela caso seu valor total fosse introduzido no início do período. Portanto, os efeitos da variação de tensão podem ser aproximados como a deformação causada por uma tensão constante e aplicada inteiramente no instante  $t_0$ , mas com fluência reduzida por um coeficiente de envelhecimento  $\chi$ .

$$\epsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \Delta\sigma_c \frac{1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \epsilon^0(t)$$

Este procedimento também é conhecido como método do módulo efetivo ajustado à idade, pois a análise das variações de tensão considerando o efeito da fluência pode ser substituída por uma análise estática convencional. Para isso, é necessário o uso de um módulo de elasticidade  $\bar{E}_c$  ajustado pelo coeficiente de envelhecimento.

$$\epsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\Delta\sigma_c}{\bar{E}_c(t, t_0)} + \epsilon^0(t)$$

$$\bar{E}_c(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)}$$

Considerando apenas as deformações que dependem de ações externas e empregando as definições de módulo de elasticidade e função de relaxação, a expressão pode ser manipulada para descrever o valor exato do coeficiente de envelhecimento.

$$\epsilon_{\sigma}(t) = \epsilon_{\sigma}(t) \cdot [1 + \varphi(t, t_0)] + \epsilon_{\sigma}(t) \cdot [R(t, t_0) - E_c(t_0)] \frac{1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)}$$

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - \frac{R(t, t_0)}{E_c(t_0)}} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)}$$

Como demonstrado originalmente por Bazant (1972), os resultados obtidos através desta análise, que dispensa o tratamento integral inerente à variação com o tempo de tensões e deformações, correspondem exatamente à solução do problema caso a hipótese de superposição seja válida.

Para que isso ocorra, Bazant (1988) indica critérios a serem respeitados além do limite de proporcionalidade. Não devem ocorrer descarregamentos, entendidos como reduções nos valores absolutos de deformação. Também não devem haver mudanças significativas no teor de umidade do concreto durante a fluência. Por fim, sendo este o fator menos crítico, não deve haver grande aumento de tensão passado tempo considerável após o carregamento inicial.

Ainda que estas condições não sejam completamente atendidas, a experiência indica que o coeficiente de envelhecimento pode ser assumido como uma constante igual a 0,7 ou 0,8 para a maioria das aplicações (Tadros *et al.*, 2018; PCI, 2023). Este último é o valor sugerido pela NBR 7187/2021 para análises no tempo infinito.

Conforme Bazant e Jirásek (2018), o valor exato do coeficiente depende da função de relaxação e costuma variar entre 0,5 e 1. Portanto, qualquer tabela ou fórmula analítica para cálculo do coeficiente de envelhecimento se relaciona a um modelo específico de previsão da fluência.

Ghali, Favre e Elbadry (2012) detalham o cálculo incremental necessário para determinar a função de relaxação a partir de sua definição, que pode então ser aplicada no cálculo do coeficiente de envelhecimento. O procedimento foi



implementado pelos autores em um código FORTRAN que pode ser adaptado para emprego de qualquer modelo de previsão da fluência desejado.

#### 4.4 Relaxação do aço

Conforme Ghali, Favre e Elbadry (2012), o efeito da fluência sobre o aço de protensão geralmente é avaliado através de testes de relaxação, nos quais os cabos são alongados e mantidos com deformação e temperatura constante por um período de tempo determinado. Para um intervalo de 1000 horas a 20 °C, valores base de relaxação são apresentados na Tabela 8.3 da NBR 6118/2023 (Quadro 4), variando com o nível de tensão atuante.

Quadro 4 – Relaxação intrínseca do aço após 1000 horas a 20 °C, em porcentagem

$\sigma_{p0}$	Cordoalhas		Fios		Barras
	RN	RB	RN	RB	
0,5 $f_{ptk}$	0	0	0	0	0
0,6 $f_{ptk}$	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
0,7 $f_{ptk}$	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
0,8 $f_{ptk}$	12,0	3,5	8,5	3,0	7,0

Onde  
RN é a relaxação normal;  
RB é a relaxação baixa.

Fonte: ABNT (2023)

Com base no coeficiente  $\psi_{1000}$  extraído do quadro, o valor absoluto da perda  $\Delta\sigma_{pr}$  devido à relaxação durante um intervalo de tempo qualquer, em dias, pode ser determinado.

$$\Delta\sigma_{pr}(t, t_0) = \sigma_{p0} \psi(t, t_0)$$

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \cdot \left(\frac{t - t_0}{41,67}\right)^{0,15}$$

Quando o aço está sujeito a altas temperaturas, como é o caso durante a cura a vapor de vigas protendidas, a relaxação aumenta significativamente. FIB (2012) determina um tempo a ser somado ao tempo efetivo na função de cálculo para

representar a relaxação acelerada pelo aquecimento. Na expressão,  $T_{max}$  é a temperatura máxima durante o período em análise.

$$t_{eq} = \frac{1,14^{(T_{max}-20)}}{T_{max} - 20} \cdot \sum_i (T_i - 20) t_{ef,i}$$

Ainda segundo FIB (2012), a cura térmica tem maior influência nas idades iniciais, resultando em aumento pouco significativo do valor final em cordoalhas de relaxação baixa. O item 9.6.3.4.5 da NBR 6118/2023 permite que o valor da relaxação no infinito seja estimado como  $2,5\psi_{1000}$ .

Porém, a relaxação descrita até aqui é a relaxação intrínseca, que ocorre caso a tensão no aço seja mantida constante. Em estruturas de concreto protendido, as tensões na armadura ativa variam devido às deformações do concreto pela retração, fluência e acréscimos posteriores de carga. A tendência é que a tensão atuante no aço diminua, resultando em valores de relaxação  $\Delta\bar{\sigma}_{pr}$  reduzidos por um fator  $\chi_r$ .

$$\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t, t_0) = \chi_r \Delta\sigma_{pr}(t, t_0)$$

$$\chi_r = \frac{\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t, t_0)}{\Delta\sigma_{pr}(t, t_0)}$$

Ghali, Favre e Elbadry (2012) apresentam uma fórmula aproximada para cálculo do coeficiente de redução. A expressão foi sugerida por Treviño e Ghali (1985), que adotaram CEB (1978) como referência para previsão da relaxação intrínseca no tempo infinito. O parâmetro  $\lambda$  equivale ao nível de tensão no início do período, enquanto  $\Omega$  avalia as perdas de protensão causadas pela retração e fluência do concreto.

$$\chi_r = \exp[(-6,7 + 5,3\lambda)\Omega]$$

$$\lambda = \frac{\sigma_{p0}}{f_{ptk}}$$

$$\Omega = - \frac{\Delta\sigma_{ps}(t) - \Delta\sigma_{pr}(t)}{\sigma_{p0}}$$

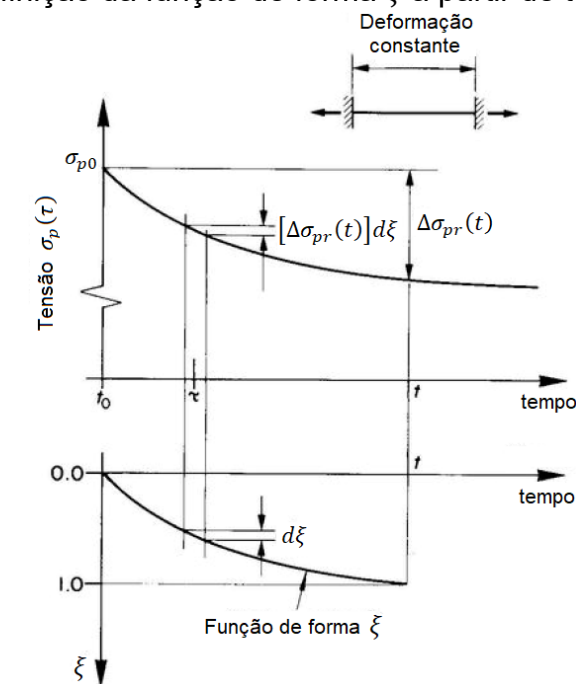
Como o valor total  $\Delta\sigma_{ps}$  das perdas progressivas depende da relaxação reduzida, um primeiro valor deve ser arbitrado para o coeficiente de redução, permitindo que  $\Omega$  seja determinado. O coeficiente de relaxação é recalculado através da fórmula simplificada e procede-se com cálculo iterativo das perdas até que haja convergência de  $\Omega$ .

Para obter maior precisão, o procedimento original de Treviño e Ghali (1985) foi aplicado para gerar uma nova fórmula simplificada. A equação abaixo é uma aproximação da relaxação intrínseca para cordoalhas RN ou RB, tomando como base as indicações da NBR 6118/2023. O sinal negativo representa o decréscimo das tensões no aço.

$$\Delta\sigma_{pr}(t) = -\sigma_{p0} \eta_t(t) (\lambda - 0,5)^{1,024}$$

O coeficiente  $\eta_t$  indica o desenvolvimento com o tempo da relaxação e o tipo de cordoalha. Define-se  $\xi$  como a função adimensional do tempo que descreve o formato da curva tensão-tempo na armadura (Figura 24).

Figura 24 – Definição da função de forma  $\xi$  a partir de teste de relaxação



Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2012)

As expressões analíticas de  $\eta_t$  e  $\xi$  não alteram a dedução, mas são apresentadas abaixo para um instante  $\tau$  entre o início e o fim da relaxação.

$$\xi(\tau) = \frac{n_t(\tau)}{\eta_t(t)} = \left( \frac{\tau - t_0}{t - t_0} \right)^{0,15}$$

$$\eta_t(\tau) = \frac{k_{rs}}{2,5} \left( \frac{\tau - t_0}{41,67} \right)^{0,15}$$

$$k_{rs} \cong \begin{cases} 0,970 & \text{para cordoalhas de relaxação normal} \\ 0,315 & \text{para cordoalhas de relaxação baixa} \end{cases}$$

Admite-se que tanto a relaxação intrínseca quanto as perdas totais de protensão possuem a mesma função de forma.

$$\Delta\sigma_{pr}(\tau) = [\Delta\sigma_{pr}(t)] \xi(\tau)$$

$$\Delta\sigma_{ps}(\tau) = [\Delta\sigma_{ps}(t)] \xi(\tau)$$

Como a redução da relaxação é resultado do encurtamento das cordoalhas dentro do concreto, o que diminui o nível de tensão na armadura, a relaxação reduzida pode ser entendida como a relaxação intrínseca resultante de um nível menor de tensão inicial.

$$\bar{\sigma}_{p0}(\tau) = \sigma_{p0} [1 - \Omega \xi(\tau)]$$

Utilizando a equação aproximada com base nos valores de relaxação da NBR 6118, é possível definir os diferenciais das relaxações intrínseca e reduzida.

$$d[\sigma_{pr}(\tau)] = [-\sigma_{p0} \eta_t(\tau) (\lambda - 0,5)^{1,024}] d\xi$$

$$d[\bar{\sigma}_{pr}(\tau)] = \{-\sigma_{p0} (1 - \Omega\xi) \eta_t(\tau) [\lambda(1 - \Omega\xi) - 0,5]^{1,024}\} d\xi$$

Integrando as expressões, calcula-se o coeficiente de redução da relaxação a partir de sua definição.

$$X_r = \int_0^{H(\lambda, \Omega)} (1 - \Omega\xi) \left[ \frac{\lambda(1 - \Omega\xi) - 0,5}{\lambda - 0,5} \right]^{1,024} d\xi$$

$$H(\lambda, \Omega) = \begin{cases} \frac{\lambda - 0,5}{\lambda\Omega}, & \frac{\lambda - 0,5}{\lambda\Omega} < 1 \\ 1, & \frac{\lambda - 0,5}{\lambda\Omega} \geq 1 \end{cases}$$

Mantendo o formato da expressão desenvolvida por Treviño e Ghali (1985) para ajustar as curvas descritas pela integral do valor exato de  $X_r$ , o ganho de precisão não se mostrou suficiente para justificar o uso de uma nova fórmula. A equação sugerida abaixo é ligeiramente mais complexa e também deve ser aplicada iterativamente.

$$X_r = -27,9e^{-7,7\lambda} + 0,92e^{-4,3\Omega} + 0,30$$

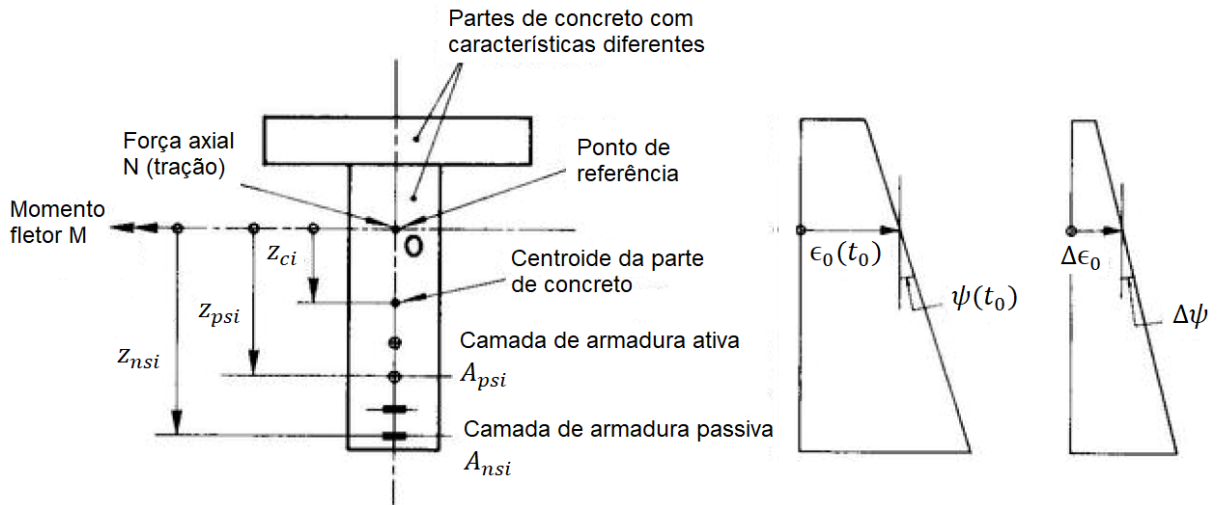
#### 4.5 Tensões e deformações de seções compostas

A formulação a seguir foi originalmente proposta por Ghali e Favre (1986) e será apresentada segundo Ghali, Favre e Elbadry (2012). Considera-se uma seção transversal composta por  $n$  partes de diferentes concretos e aços, simétrica em relação ao eixo da sua altura, sem fissuras no concreto e que se mantém plana após as deformações.

Curvaturas e momentos positivos correspondem a tração nas fibras inferiores. Deformações axiais positivas representam o alongamento do membro estrutural. As coordenadas  $z$  são positivas abaixo de um ponto de referência arbitrário  $O$ , contido no eixo de simetria da seção (Figura 25).

No cálculo de seções compostas, aplica-se o conceito de seção homogeneizada. Um dos materiais é tomado como referência, geralmente o concreto da viga pré-moldada, enquanto os outros são substituídos por uma área equivalente deste material para cálculo das propriedades da seção.

Figura 25 – Elementos da seção de concreto protendido e convenção de sinais



Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2012)

$$A_h = \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_i}{E_{ref}} A_i \right)$$

$$B_h = \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_i}{E_{ref}} B_i \right)$$

$$I_h = \sum_{i=1}^n \left( \frac{E_i}{E_{ref}} I_i \right)$$

Ao utilizar o método do coeficiente de envelhecimento, várias análises são superpostas. Diferentes módulos de elasticidade são aplicados a uma mesma seção transversal, o que resultaria na flutuação do centroide da seção homogeneizada. Por este motivo, as equações são descritas em função do ponto de referência O, garantindo que as análises possam ser somadas.

Para uma fibra qualquer a uma distância  $z$  do eixo horizontal que passa pelo ponto de referência, a deformação axial e tensão são determinadas a partir da deformação axial  $\epsilon_o$  no ponto de referência e da curvatura  $\psi$  da seção.

$$\epsilon(z) = \epsilon_o + \psi z$$

$$\sigma(z) = E_i (\epsilon_o + \psi z)$$

Em análises instantâneas, é possível determinar a força normal  $N$  e o momento fletor  $M$  resultantes integrando as tensões por toda a seção. As propriedades da seção homogeneizada são calculadas em relação ao eixo que passa por  $O$ .

$$N = \epsilon_o \sum_{i=1}^n E_i \int dA + \psi \sum_{i=1}^n E_i \int z dA$$

$$M = \epsilon_o \sum_{i=1}^n E_i \int z dA + \psi \sum_{i=1}^n E_i \int z^2 dA$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = E_{ref} \begin{bmatrix} A_h & B_h \\ B_h & I_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_o \\ \psi \end{Bmatrix}$$

Quando os esforços são conhecidos e deseja-se calcular a deformação e curvatura, o sistema pode ser manipulado para gerar a expressão matricial a seguir:

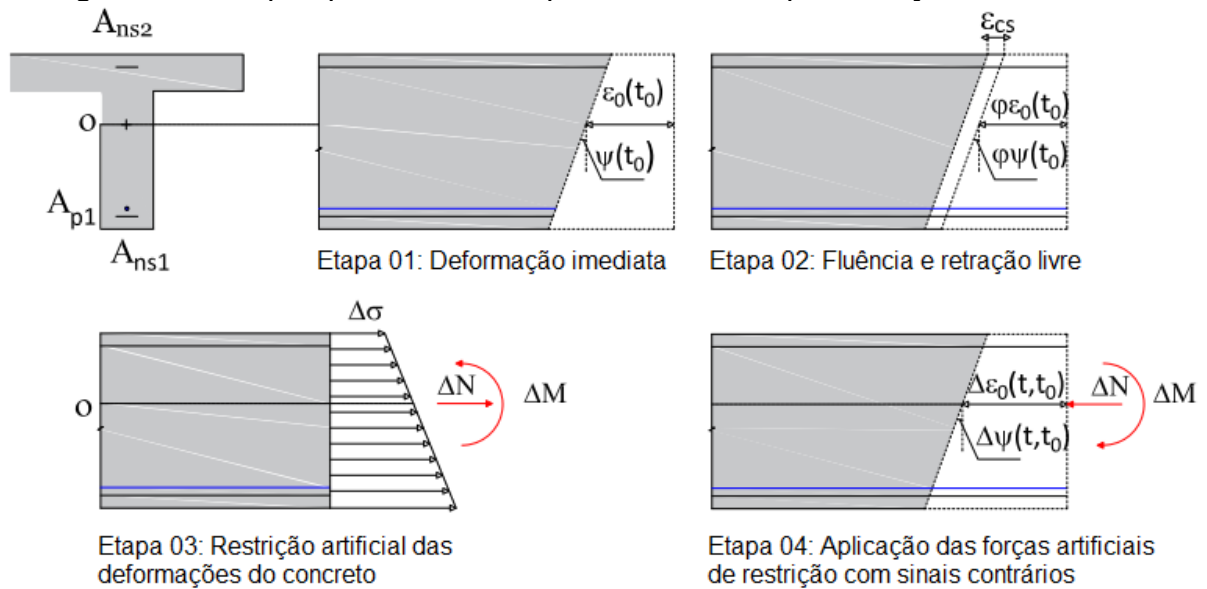
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_o \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{E_{ref}(A_h I_h - B_h^2)} \begin{bmatrix} I_h & -B_h \\ -B_h & A_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}$$

Conhecidas as tensões e deformações iniciais, podem ser determinados os efeitos da fluência, retração e relaxação ao longo do intervalo entre dois instantes a partir do método do coeficiente de envelhecimento. O procedimento consiste em aplicar na seção transversal, com sinais contrários, carregamentos  $\Delta N$  e  $\Delta M$  equivalentes às forças necessárias para restringir as deformações livres do concreto durante o período (Figura 26).

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_o \\ \Delta \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{E}_{ref} (\bar{A}_h \bar{I}_h - \bar{B}_h^2)} \begin{bmatrix} \bar{I}_h & -\bar{B}_h \\ -\bar{B}_h & \bar{A}_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\Delta N \\ -\Delta M \end{Bmatrix}$$

$$\bar{E}_{ref}(t, t_0) = \frac{E_{ref}(t_0)}{1 + \chi_{ref}(t, t_0) \varphi_{ref}(t, t_0)}$$

Figura 26 – Etapas para análise dependente do tempo de seções de concreto



Fonte: Adaptado de Beteta *et al.* (2022)

Neste caso, são utilizadas as propriedades da seção homogeneizada e ajustada à idade em relação ao eixo que passa pelo ponto de referência. As forças artificiais de restrição se opõem aos efeitos da fluência, retração e relaxação do aço.

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{\text{fluência}} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{\text{retração}} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{\text{relaxação}}$$

O aumento de deformação causado pela fluência pode ser restringido pelos esforços abaixo, que dependem das propriedades de cada uma das  $n_c$  partes de concreto da seção.

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{\text{fluência}} = - \sum_{i=1}^{n_c} \left\{ \bar{E}_c(t, t_0) \varphi(t, t_0) \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ B_c & I_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_o(t_0) \\ \psi(t_0) \end{Bmatrix} \right\}_i$$

A expressão anterior é válida caso todas as cargas sejam aplicadas no instante  $t_0$ . Caso outros carregamentos atuem na seção desde um tempo prévio, o vetor  $\varphi(t, t_0) \{\epsilon_o(t_0) \psi(t_0)\}$  deve ser substituído pelo somatório dos produtos entre as deformações de cada etapa anterior e o coeficiente de fluência adequado. O módulo ajustado à idade também é utilizado na análise da força para restringir a retração pois as deformações ocorrem gradualmente.



$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{\text{retração}} = - \sum_{i=1}^{n_c} \left\{ \bar{E}_c(t, t_0) \epsilon_{cs} \begin{Bmatrix} A_c \\ B_c \end{Bmatrix} \right\}_i$$

Para  $n_{ps}$  camadas de armadura de protensão, calculam-se também os esforços necessários para equilibrar os efeitos da relaxação reduzida do aço. A excentricidade  $z_{ps}$  de cada camada é medida em relação ao ponto de referência.

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix}_{\text{relaxação}} = \sum_{i=0}^{n_{ps}} \left\{ \begin{Bmatrix} A_{ps} \Delta \bar{\sigma}_{pr} \\ A_{ps} z_{ps} \Delta \bar{\sigma}_{pr} \end{Bmatrix} \right\}_i$$

A tensão necessária para restringir a fluência e retração em uma fibra de concreto pode ser calculada pela expressão abaixo, novamente apresentada para o caso em que todas as cargas são aplicadas no início da etapa em estudo.

$$\sigma_{rest} = -\bar{E}_c(t, t_0) [\varphi(t, t_0) \epsilon_c(t_0) + \epsilon_{cs}]$$

Os incrementos totais de tensão ao final do período em uma fibra qualquer de concreto, camada de armadura ativa e camada de armadura passiva são descritos a seguir.

$$\Delta \sigma_c(t, t_0) = \sigma_{rest} + \bar{E}_c(t, t_0) (\Delta \epsilon_o + z_c \Delta \psi)$$

$$\Delta \sigma_{ps}(t, t_0) = \Delta \bar{\sigma}_{pr} + E_{ps} (\Delta \epsilon_o + z_{ps} \Delta \psi)$$

$$\Delta \sigma_{ns}(t, t_0) = E_{ns} (\Delta \epsilon_o + z_{ns} \Delta \psi)$$

#### 4.6 Variações de esforços internos dependentes do tempo

O desenvolvimento com o tempo de tensões e deformações em seções compostas discutido anteriormente se aplica ao cálculo de estruturas isostáticas. Nestes casos, as deformações causadas pela fluência e retração originam

redistribuições de tensão entre as partes da seção transversal sem que haja mudança das resultantes de esforços internos e reações nos apoios.

Por outro lado, para estruturas contínuas ou de seção composta por materiais com diferentes propriedades de fluência, esforços hiperestáticos são gerados gradualmente devido à restrição destes deslocamentos adicionais. O mesmo acontece em estruturas que sofrem alterações nas condições de apoio durante o processo construtivo.

O procedimento para cálculo de esforços dependentes do tempo em estruturas contínuas tem como base o método do coeficiente de envelhecimento e a análise de seções compostas com concreto não fissurado. A metodologia adotada é análoga à sugerida por Menkulasi, Patel e Baghi (2018) para cálculo dos momentos de restrição em pontes com continuidade posterior. Definem-se quatro etapas de construção:

- a) 1º etapa: Transferência da protensão;
- b) 2º etapa: Período entre a transferência da protensão e a concretagem da laje e transversinas;
- c) 3º etapa: Concretagem no local da laje e transversinas;
- d) 4º etapa: Período entre a concretagem no local e o tempo final em serviço.

A primeira e terceira etapa possuem duração igual a zero, ou seja, são instantâneas, enquanto as outras se referem a intervalos de tempo nos quais fluência, retração e relaxação do aço atuam na estrutura. O período entre a concretagem da laje e o início efetivo da ação composta com a viga geralmente é desconsiderado e, segundo Beteta *et. al* (2022), depende principalmente do tipo de cimento empregado na mistura.

Como explica Tadros *et al.* (2018), apenas carregamentos aplicados antes do estabelecimento da continuidade geram momentos hiperestáticos devido à fluência. Portanto, os deslocamentos adicionais que resultam em esforços hiperestáticos são aqueles que ocorreriam na estrutura simplesmente apoiada após o início da quarta etapa devido a carregamentos aplicados até o final da terceira.

Simplificadamente, considera-se que as concretagens da laje e das transversinas acontecem suficientemente próximas para serem consideradas um

único evento. Não foram observadas por Miller *et al.* (2004) relações claras entre os momentos de restrição e a adoção de regimes específicos para concretagem destes elementos.

Aplicando o método da rigidez direta, Ghali, Favre e Elbadry (2012) calculam os esforços hiperestáticos na estrutura a partir da superposição dos momentos de engastamento necessários para restringir os deslocamentos de cada membro isolado e os resultados da aplicação destes esforços como carregamentos externos com sinais contrários na estrutura completa. Esforços adicionais devido ao recalque diferencial de fundações não são objeto deste trabalho, mas poderiam ser determinados com a mesma metodologia.

Para o cálculo dos esforços de engastamento nos membros isolados, considera-se um elemento linear simplesmente apoiado, sujeito a carregamentos permanentes aplicados em um instante  $t_0$ . Caso suas extremidades sejam fixadas em um tempo  $t_1$ , os esforços de engastamento  $\{\Delta F\}$  que devem se desenvolver gradualmente até um tempo posterior  $t_2$  para restringir os deslocamentos adicionais são obtidos a partir da equação de equilíbrio.

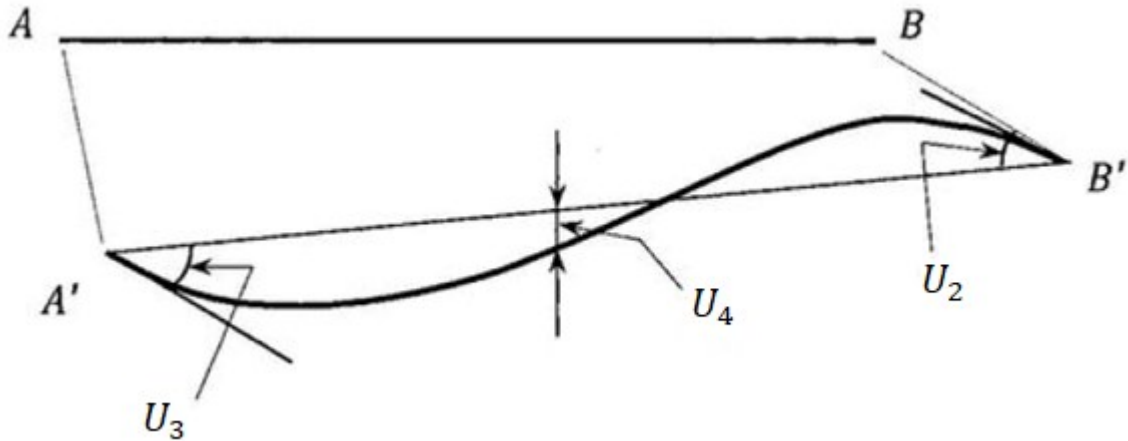
$$\{\Delta F\} = [\overline{K}] \{-\Delta U\}$$

A matriz  $\{\Delta U\}$  representa os deslocamentos nodais que ocorreriam entre  $t_1$  e  $t_2$  caso não houvesse mudança das condições de apoio e pode ser aproximada em função da deformação e curvatura de um certo número de seções transversais. Esta aproximação tem como base o princípio dos trabalhos virtuais e também é abordada por Collins e Mitchell (1997).

São apresentadas expressões desenvolvidas por Ghali, Favre e Elbadry (2012) para o caso em que se conhece onze seções igualmente espaçadas e se assume variação linear de  $\Delta\epsilon_o$  e  $\Delta\psi$  entre seções.

Fórmulas que consideram variação parabólica de  $\Delta\epsilon_o$  e  $\Delta\psi$  também podem ser desenvolvidas e são apresentadas pelos autores para números menores de seções. Na convenção empregada (Figura 27), rotações positivas são causadas por momentos no sentido horário,  $U_1$  equivale ao deslocamento axial e  $U_4$  corresponde à flecha da barra.

Figura 27 – Configuração inicial e deformada de um membro linear



Fonte: Adaptado de Ghali, Favre e Elbadry (2012)

$$U_1 = \frac{L}{20} [1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1] \{\epsilon_o\}$$

$$U_2 = -\frac{L}{600} [1 \ 6 \ 12 \ 18 \ 24 \ 30 \ 36 \ 42 \ 48 \ 54 \ 29] \{\psi\}$$

$$U_3 = \frac{L}{600} [29 \ 54 \ 48 \ 42 \ 26 \ 30 \ 24 \ 18 \ 12 \ 6 \ 1] \{\psi\}$$

$$U_4 = \frac{L^2}{1200} [1 \ 6 \ 12 \ 18 \ 24 \ 28 \ 24 \ 18 \ 12 \ 6 \ 1] \{\psi\}$$

$$\{-\Delta U\} = - \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Ao tratar de elementos de seção composta sujeita à fluência, a análise de deslocamentos dependentes do tempo é feita aplicando propriedades da seção homogeneizada, para considerar a presença de armadura na seção, e ajustada à idade a partir do coeficiente de envelhecimento. Para barras de seção prismática, a matriz de rigidez ajustada à idade  $[\bar{K}]$  é expressa abaixo.

$$[\bar{K}] = \frac{\bar{E}_{ref}(t_2, t_1)}{L} \begin{bmatrix} \bar{A}_h & 0 & 0 \\ 0 & 4\bar{I}_h & 2\bar{I}_h \\ 0 & 2\bar{I}_h & 4\bar{I}_h \end{bmatrix}$$

Andrade (1994) comparou o uso do procedimento descrito com o método PCA de Freyermuth (1969) e CTL de Oesterle, Glikin e Larson (1989), discutindo as hipóteses simplificadoras adotadas nestes trabalhos. Outro método analítico para solução dos momentos de restrição foi sugerido por McDonagh e Hinkley (2003). Como destacam Menkulasi, Patel e Baghi (2018), realizar a análise de múltiplas seções pelo método geral possui as seguintes vantagens:

- a) Fluência e retração podem ser previstas a partir de qualquer formulação, sendo consideradas curvas separadas para o concreto da viga e da laje;
- b) Os coeficientes de fluência empregados consideram o estágio de aplicação de cada carregamento;
- c) A restrição da armadura às deformações do concreto é incluída;
- d) Qualquer perfil de protensão pode ser utilizado e as perdas de protensão são calculadas a partir da análise, sem a necessidade de estimativas;
- e) Os vãos da ponte podem ter comprimentos diferentes entre si.

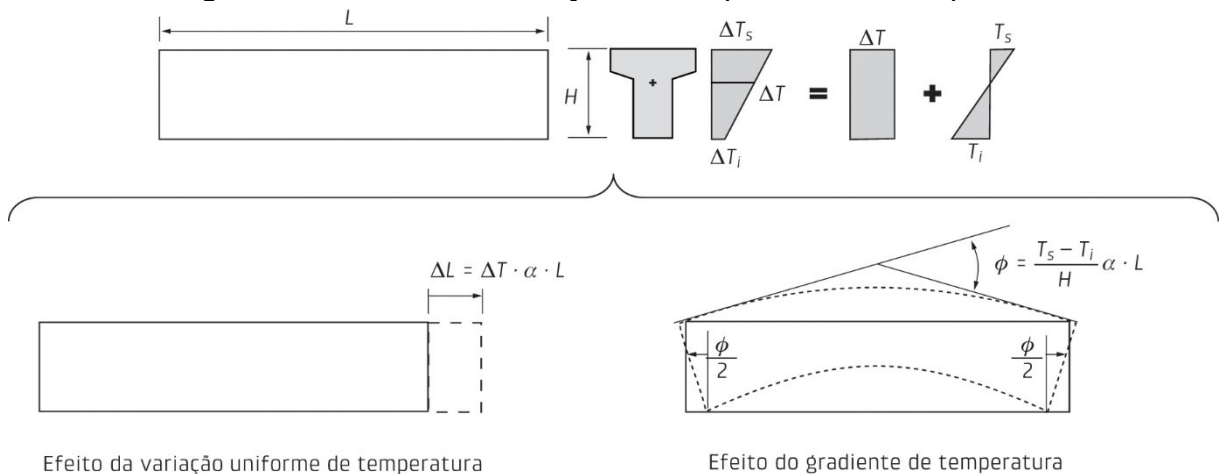
A aplicação das reações de engastamento com sinais contrários ou a imposição dos deslocamentos adicionais na estrutura completa pode ser feita com o uso de um programa convencional de análise linear graças ao método do coeficiente de envelhecimento.

Conseqüentemente, as propriedades empregadas nesta análise, que equivale ao estágio II de carregamento do MRD, devem ser da estrutura homogeneizada e ajustada à idade. Também pode ser empregado o Processo de Cross para distribuir os momentos de engastamento para a estrutura contínua.

#### **4.7 Efeitos da variação de temperatura**

Conforme Valeriano (2021), o efeito da variação de temperatura nas vigas pode ser simplificado considerando variação linear entre a temperatura  $T_s$  da face superior e  $T_i$  da face inferior de sua seção transversal. Como previsto pela NBR 7187/2021, a componente uniforme e o gradiente linear são analisados separadamente, gerando efeitos característicos nas vigas (Figura 28).

Figura 28 – Efeitos da variação de temperatura em corpo livre



Efeito da variação uniforme de temperatura

Efeito do gradiente de temperatura

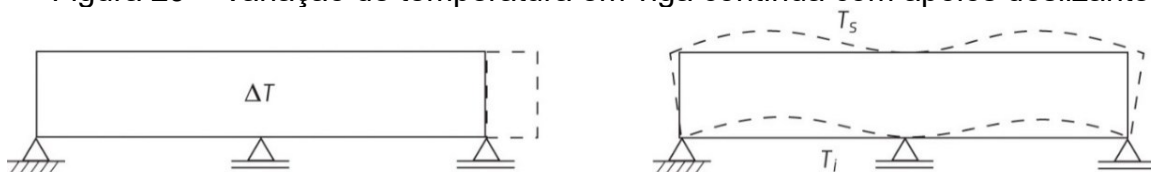
Fonte: Valeriano (2021)

Ainda segundo Valeriano (2021), como discutido para os fenômenos dependentes do tempo em estruturas protendidas, as variações de temperatura não geram tensões ou solicitações adicionais em estruturas isostáticas nas quais há liberação das deformações adicionais causadas.

Em estruturas hiperestáticas, a deformação axial causada pela variação uniforme de temperatura também pode ser acomodada com o uso de apoios deslizantes e juntas nos extremos. Um arranjo adequado dos aparelhos de apoio para liberação controlada de deslocamentos é essencial em pontes contínuas para minimizar os esforços na superestrutura. Recomenda-se a leitura de Benaim (2008) e SCI (2015) para aprofundamento no tema.

Por sua vez, o gradiente de temperatura entre as fibras da seção sempre irá originar momentos fletores em estruturas contínuas, que devem ser considerados no dimensionamento como ações instantâneas em serviço (Figura 29). Como observado em exemplos desenvolvidos por Andrade (1994) e FIB (2020), estes esforços podem até superar os momentos causados pela carga móvel na região sobre os apoios internos.

Figura 29 – Variação de temperatura em viga contínua com apoios deslizantes

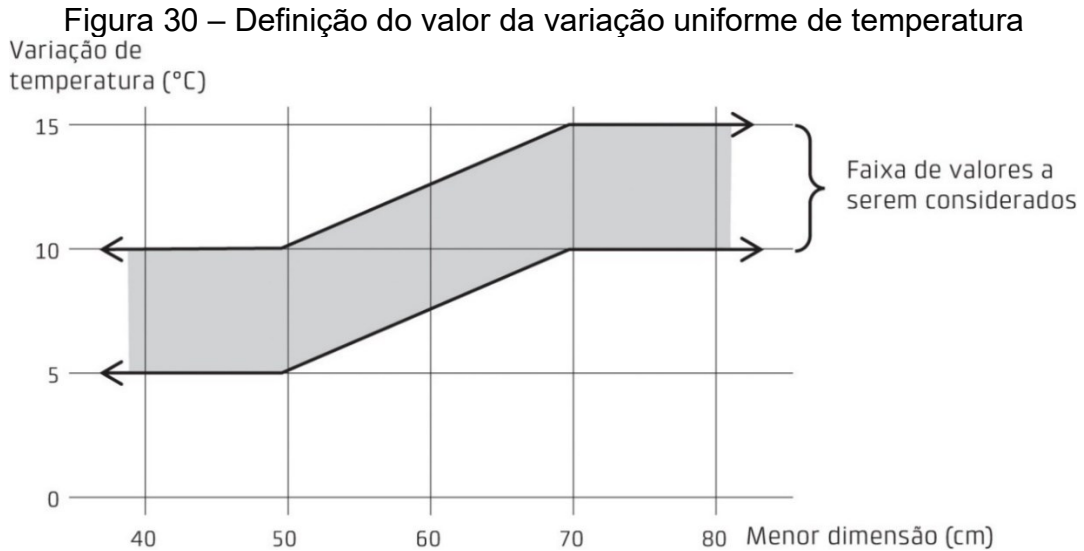


Variação uniforme  $\rightarrow$  Solicitações normais = 0

Gradiente de temperatura  $\rightarrow$  Momentos fletores  $\neq 0$

Fonte: Valeriano (2021)

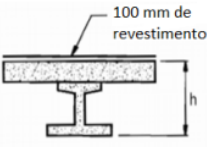
A NBR 7187/2021 indica que o valor para variação uniforme deve ser determinado conforme a NBR 6118. No item 11.4.2.1, sintetizado graficamente na Figura 30, esta norma apresenta intervalos de valores a serem considerados com base na menor dimensão do elemento.



Fonte: Valeriano (2021)

Para determinar a variação ao longo da altura da seção, a NBR 7187/2021 apresenta dois métodos em seu item 7.3.8.2. O método 01 apresenta de forma direta um resultado linear para variação de temperatura, definido conforme características da seção transversal analisada e da espessura do revestimento sobre a estrutura (Quadro 5).

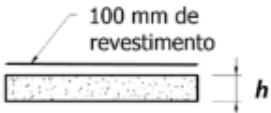
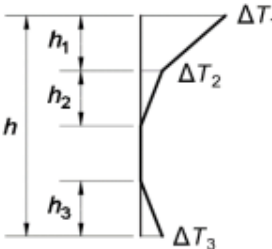

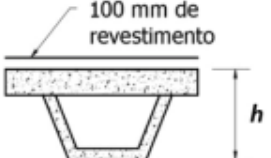
**Quadro 5 – Determinação simplificada de variação linear de temperatura**

Tipo de seção em concreto	Variação de temperatura linearizada	
	$\Delta T_{eq}$ (°C)	obs
 <p>Seção em viga</p>	7	–
<p>Para valores de espessura de revestimento menores que 100 mm, a variação de temperatura deve ser multiplicada por: 1,2 para <math>h_{revestimento} = 70</math> mm, 1,4 para <math>h_{revestimento} = 50</math> mm e 1,5 caso não haja revestimento. Para espessuras intermediárias, permite-se interpolar linearmente o fator de multiplicação.</p> <p>Não usar variação de temperatura menor que 5 °C, exceto no caso de linearização por meio do método 2.</p>		

Fonte: Adaptado de ABNT (2021)

O método 02 incorpora a hipótese de que a distribuição da temperatura na seção não é linear. A variação em cada fibra é considerada conforme o Quadro 6, complementado pelo Quadro 7 no caso usual em que a altura da seção é maior que 0,80 m.

Quadro 6 – Distribuição não uniforme da temperatura ao longo da seção transversal

Tipo de seção em concreto	Variação de temperatura ( $\Delta T$ )																				
 <p>Seção em laje</p>	 <table border="1" data-bbox="1018 674 1358 875"> <thead> <tr> <th><math>h</math> (m)</th> <th><math>\Delta T_1</math> (°C)</th> <th><math>\Delta T_2</math> (°C)</th> <th><math>\Delta T_3</math> (°C)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\leq 0,2</math></td> <td>8,5</td> <td>3,5</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>12,0</td> <td>3,0</td> <td>1,5</td> </tr> <tr> <td>0,6</td> <td>13,0</td> <td>3,0</td> <td>2,0</td> </tr> <tr> <td><math>\geq 0,8</math></td> <td>13,5</td> <td>3,0</td> <td>2,5</td> </tr> </tbody> </table> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>h_1 = 0,3h; \leq 0,15</math> m</li> <li>• <math>h_2 = 0,3h; \geq 0,10</math> m e <math>\leq 0,25</math> m</li> <li>• <math>h_3 = 0,3h; \leq 0,10</math> m + <math>h_{\text{revestimento}}</math> e <math>\leq h - h_1 - h_2</math></li> </ul>	$h$ (m)	$\Delta T_1$ (°C)	$\Delta T_2$ (°C)	$\Delta T_3$ (°C)	$\leq 0,2$	8,5	3,5	0,5	0,4	12,0	3,0	1,5	0,6	13,0	3,0	2,0	$\geq 0,8$	13,5	3,0	2,5
$h$ (m)		$\Delta T_1$ (°C)	$\Delta T_2$ (°C)	$\Delta T_3$ (°C)																	
$\leq 0,2$		8,5	3,5	0,5																	
0,4	12,0	3,0	1,5																		
0,6	13,0	3,0	2,0																		
$\geq 0,8$	13,5	3,0	2,5																		
 <p>Seção em viga</p>																					
 <p>Seção celular</p>																					

Fonte: ABNT (2021)

Quadro 7 – Distribuição não uniforme de temperatura para diferentes espessuras da pavimentação

Altura da seção transversal m	Espessura da pavimentação mm	Diferença de temperatura positiva		
		$\Delta T_1$ °C	$\Delta T_2$ °C	$\Delta T_3$ °C
$\geq 0,8$	Sem revestimento	15,4	4,0	2,0
	50	17,8	4,0	2,1
	100	13,5	3,0	2,5
	150	10,0	2,5	2,0
	200	7,5	2,1	1,5

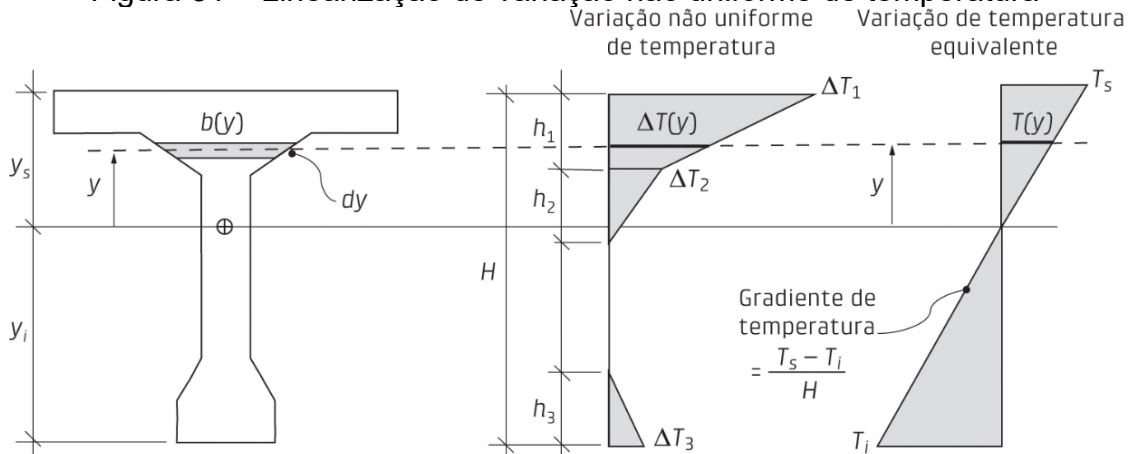
Fonte: Adaptado de ABNT (2021)



. As solicitações são determinadas através de uma distribuição linear equivalente (Figura 31). O gradiente de temperatura é definido pela expressão abaixo, na qual  $I_c$  é a inércia da seção bruta de concreto, incluindo mesas colaborantes.

$$\frac{T_s - T_i}{H} = \frac{\int_{y_i}^{y_s} b(y) \cdot T(y) \cdot y \cdot dy}{I_c}$$

Figura 31 – Linearização de variação não uniforme de temperatura

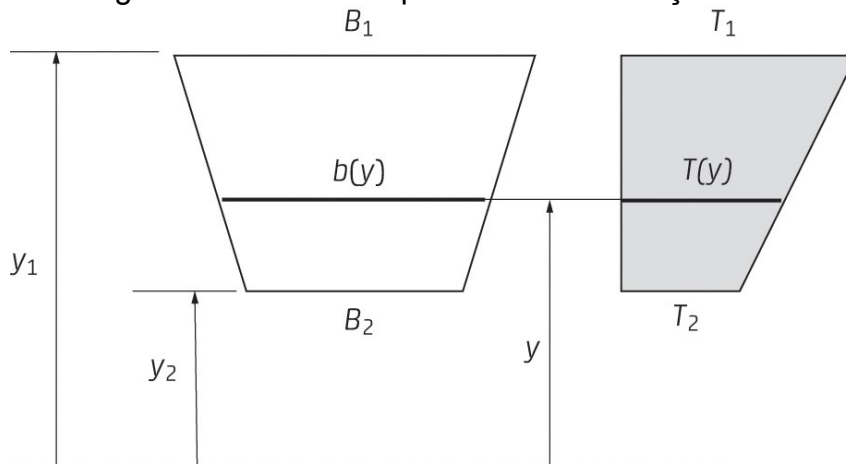


Fonte: Valeriano (2021)

Considerando um trecho genérico trapezoidal de área (Figura 32), Valeriano (2019) apresenta a solução analítica para a integral que compõe a expressão, a qual pode ser aplicada para as várias partes da seção completa.

$$\frac{(T_s - T_i) I_c}{H} = \frac{(y_1 - y_2)}{12} [(y_1 + y_2)(T_1 B_2 + T_2 B_1) + T_1 B_1(3y_1 + y_2) + T_2 B_2(y_1 + 3y_2)]$$

Figura 32 – Trecho genérico de área trapezoidal com variação linear de temperatura



Fonte: Valeriano (2021)

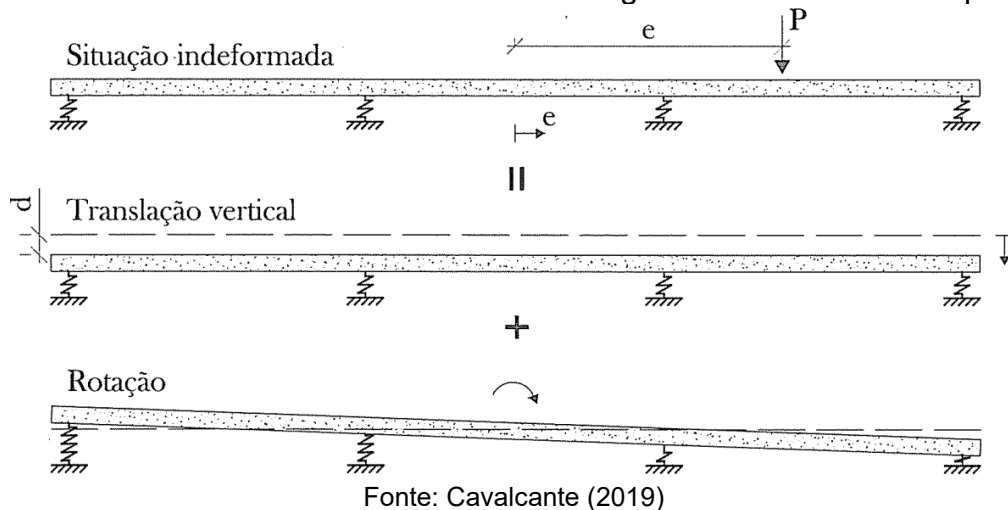
## 5 MÉTODOS SIMPLIFICADOS PARA ANÁLISE DE PONTES

### 5.1 Método Engesser-Courbon

Antes da difusão dos programas computacionais, a repartição entre longarinas dos carregamentos aplicados no tabuleiro era feita a partir de métodos simplificados. Como primeira aproximação, vigas principais e secundárias são idealizadas como uma grelha separada da laje. O método mais simples e popular que adota esta formulação é o método de Engesser-Courbon (Debs, 2022).

Segundo Stucchi (2006), este procedimento deve ser aplicado em pontes nas quais o vão equivale a, no mínimo, duas vezes a largura do tabuleiro. Os elementos responsáveis pela conexão transversal das vigas principais são assumidos com rigidez infinita, devendo apresentar deformações desprezíveis em comparação às longarinas. A partir desta hipótese, o sistema é analisado considerando o deslocamento de um corpo rígido sobre apoios elásticos (Figura 33).

Figura 33 – Deslocamento de transversina com rigidez infinita sobre múltiplas vigas



Para o caso usual em que todas as  $n_{\text{long}}$  vigas principais estão espaçadas uma distância constante  $b_0$  e possuem mesma inércia, a parcela de reação  $R_i$  em cada um dos apoios pode ser calculada facilmente a partir da geometria do problema. Na expressão a seguir, cuja dedução pode ser vista em San Martin (1981),  $P$  é o valor da carga concentrada a uma distância  $e$  do centro elástico da seção da ponte. O índice  $i$  da viga em análise é contado a partir da esquerda para determinação de cada quinhão de carga  $\eta_i$ .

$$R_i = \frac{P}{n_{\text{long}}} \left[ 1 + 6 \frac{(2i - n_{\text{long}} - 1) e}{(n_{\text{long}}^2 - 1) b_0} \right]$$

$$\eta_i = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{n_{\text{long}}} R_j} = \frac{1}{n_{\text{long}}} \left[ 1 + 6 \frac{(2i - n_{\text{long}} - 1) e}{(n_{\text{long}}^2 - 1) b_0} \right]$$

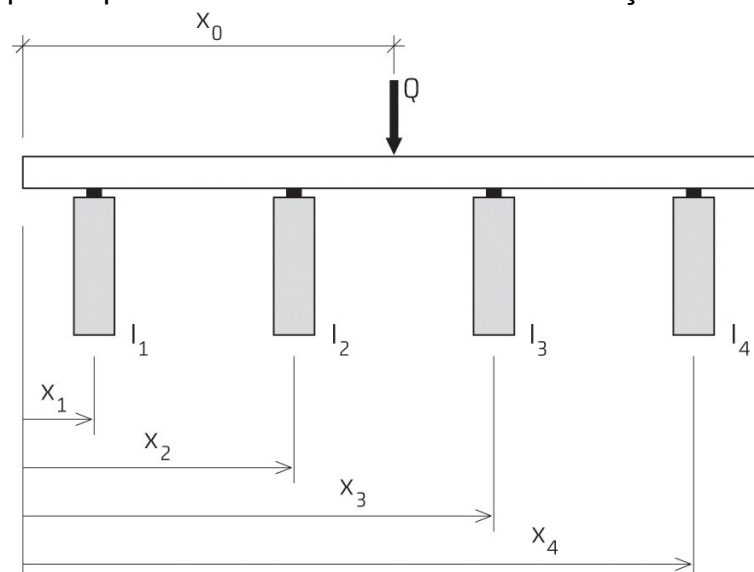
Para espaçamentos e momentos de inércia variáveis, cada coeficiente de repartição transversal é calculado com base na distância  $x_i$  da viga analisada ao centro elástico da seção. A expressão aplicada neste caso também é deduzida por San Martin (1981).

$$\eta_i = \frac{I_i}{\sum_i I_i} \left( 1 + x_i \cdot e \frac{I_i}{\sum_i I_i x_i^2} \right)$$

Nesta situação geral, a ordenada  $x_0$  do centro elástico pode não coincidir com o centro geométrico da estrutura. Na expressão utilizada por Debs (2022) para determinação deste valor, a posição das vigas deve ser medida a partir da extremidade esquerda (Figura 34).

$$x_0 = \frac{\sum_i I_i x_i}{\sum_i I_i}$$

Figura 34 – Esquema para cálculo do centro elástico da seção transversal de pontes



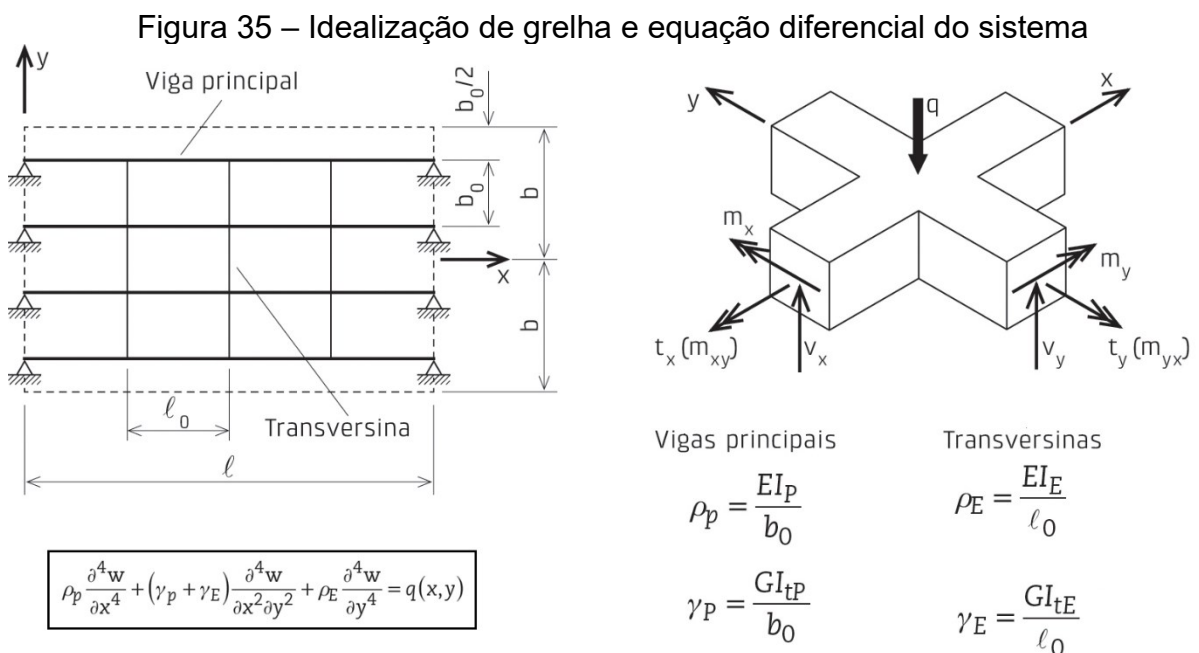
Fonte: Debs (2022)

Este método despreza o efeito da torção nas vigas, implicando que as reações mútuas nos vértices da grelha são apenas forças verticais. Hambly (1991) afirma que esta hipótese é adequada caso a rigidez à torção das vigas seja consideravelmente menor que a rigidez à flexão, como é o caso em seções I e T, e resulta em dimensionamento a favor da segurança. Entretanto, em pontes de seção caixão ou com grandes esconsidades e curvas, os efeitos da torção devem ser analisados detalhadamente.

### 5.2 Método Guyon-Massonnet-Bareš

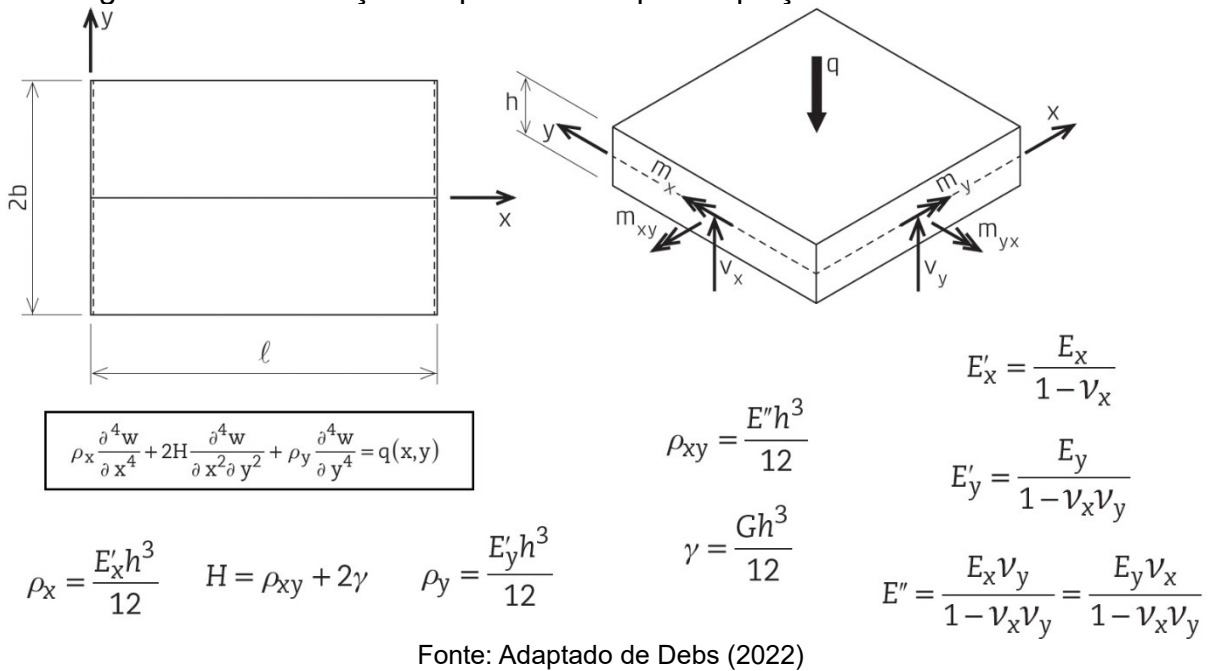
O método Guyon-Massonnet-Bareš (GMB) adota uma idealização diferente para o tabuleiro da ponte, que é analisado como uma placa ortótropa com rigidez média equivalente ao tabuleiro real (Debs, 2022). Originalmente, Guyon (1946) apresentou o cálculo considerando rigidez à torção nula, posteriormente incorporada por Massonnet (1950, 1962). Diversos exemplos de aplicação foram desenvolvidos em Bareš e Massonnet (1966).

É possível transformar um arranjo estrutural de grelha (Figura 35) em uma placa ortótropa equivalente (Figura 36) devido à correspondência entre a forma das equações diferenciais que descrevem o comportamento de ambos os sistemas. Na Figura 35,  $I_t$  equivale ao momento de inércia a torção.



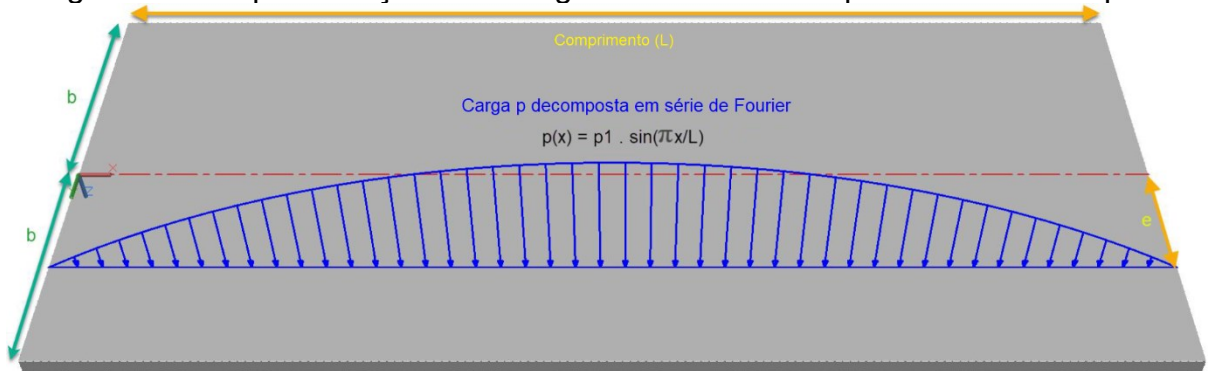
Fonte: Adaptado de Debs (2022)

Figura 36 – Idealização de placa ortótropa e equação diferencial do sistema



Como artifício matemático para solução destas equações, os carregamentos aplicados no tabuleiro são substituídos por cargas senoidais equivalentes a partir de séries de Fourier (Figura 37). As expressões resultantes para carregamentos usuais em pontes podem ser consultadas em Servat (2019).

Figura 37 – Representação de carregamento senoidal equivalente sobre a placa



Fonte: Adaptado de Servat (2019)

O coeficiente de repartição transversal  $K_\alpha$  do método GMB é definido como a razão entre o deslocamento vertical de um ponto da placa e o deslocamento neste mesmo ponto caso a carga senoidal excêntrica fosse distribuída uniformemente sobre toda a largura do tabuleiro. Tabelas para determinação destes coeficientes podem ser vistas no Apêndice B, sendo necessário o cálculo do parâmetro de torção  $\alpha$  e de travamento  $\theta$  da placa equivalente.

O valor de  $\alpha$  varia entre 0, o que equivale ao comportamento de grelha sem torção, e 1, correspondente a uma laje propriamente dita. Valores menores de  $\theta$  indicam melhor distribuição transversal dos esforços (Debs, 2022). Segundo Bareš e Massonnet (1966), o método Engesser-Courbon pode ser aplicado nos casos em que  $\theta$  é inferior a 0,3. As expressões a seguir seguem a notação da Figura 35.

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2 \cdot \sqrt{\rho_P \rho_E}}$$

$$\theta = \frac{b}{L} \left( \frac{\rho_P}{\rho_E} \right)^{1/4}$$

Os coeficientes de repartição tabelados consideram ainda a excentricidade relativa  $e/b$  da carga e a ordenada relativa  $x_i/b$  de cada viga. As tabelas preveem apenas os valores extremos de  $\alpha$ , devendo ser feita a interpolação para casos intermediários. As fórmulas abaixo foram extraídas de Servat (2019). Originalmente, Bareš e Massonnet (1966) sugeriam 0,5 como valor de  $f(\theta)$  em todos os casos.

$$K_\alpha = K_0 + (K_1 - K_0) \alpha^{f(\theta)}$$

$$f(\theta) = \begin{cases} 0,05 & \text{para } 0 < \theta \leq 0,1 \\ 1 - \exp\left(\frac{0,065 - \theta}{0,663}\right) & \text{para } 0,1 < \theta \leq 1 \\ 0,5 & \text{para } \theta > 1 \end{cases}$$

A aplicação prática do método consiste em considerar que os valores de  $K_\alpha$  são proporcionais aos quinhões de carga das vigas (Debs, 2022). Para determinação precisa dos esforços na placa, possibilitando também o cálculo das transversinas e dos esforços torcionais, vários outros coeficientes são empregados na formulação completa.

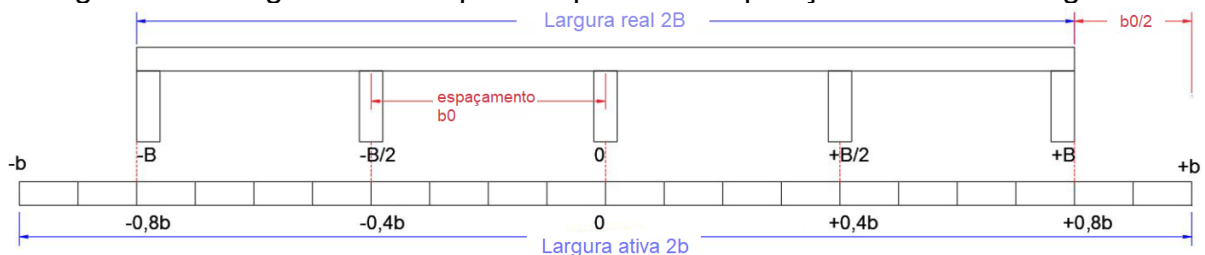
$$\eta_i = \frac{K_{\alpha,i}}{\sum_{j=1}^{n_{long}} K_{\alpha,j}}$$

A hipótese básica do método considera uma placa retangular simplesmente apoiada em lados opostos e com espessura uniforme sobre todo o seu comprimento. Portanto, para o caso de pontes contínuas, com variação da inércia ao longo dos vãos, variação de inércia entre vigas ou esconsidades, adaptações devem ser feitas. Podem ser consultados os exemplos desenvolvidos por Servat (2019).

Outra ressalva é que a idealização da placa equivalente considera que o trecho em balanço transversal da grelha tem comprimento igual à metade do espaçamento  $b_0$  entre elementos longitudinais. Portanto, o tabuleiro real com múltiplas vigas deve ser substituído por uma placa com largura  $2b$ , chamada de largura ativa, e a posição relativa das longarinas é alterada (Figura 38). O posicionamento das cargas é feito nas coordenadas reais.

$$2b = b_0 \cdot n_{\text{long}}$$

Figura 38 – Largura ativa da placa equivalente e posição relativa de longarinas



Fonte: Adaptado de Servat (2019)

### 5.3 Método do coeficiente de envelhecimento simplificado

O método simplificado para aplicação do coeficiente de envelhecimento é descrito em FIB (2020) e PCI (2023), constando também no Anexo A da NBR 7187/2021. O momento de restrição causado pela fluência sobre cada carregamento é calculado a partir de um momento de restrição fictício  $M^*$ , obtido a partir da aplicação direta da carga no arranjo estático final da estrutura.

O subscrito “b” será utilizado para se referir a propriedades da viga isolada, enquanto o subscrito “d” corresponde à laje moldada no local. Os tempos  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  equivalem, respectivamente, aos instantes de aplicação do carregamento, mudança de sistema estático e o tempo em que se deseja calcular os momentos de restrição.

$$M_{rest}(t_2, t_1) = \delta M^*$$

$$\delta = \frac{E_b(t_1)}{E_b(t_0)} \frac{\varphi_b(t_2, t_0) - \varphi_b(t_1, t_0)}{1 + \chi(t_2, t_1) \varphi_b(t_2, t_1)}$$

A expressão pode ser simplificada ainda mais considerando valor constante para o coeficiente de envelhecimento. Caso a mudança de sistema estrutural ocorra em idade superior a 28 dias, o módulo de elasticidade  $E_b(t_1)$  pode ser adotado como igual ao valor estimado aos 28 dias.

$$\delta = \frac{E_b(28)}{E_b(t_0)} \frac{\varphi_b(t_2, t_0) - \varphi_b(t_1, t_0)}{1 + \chi \varphi_b(t_2, t_1)}$$

As perdas de protensão podem ser consideradas de forma implícita reduzindo a força de protensão original antes de aplicar a expressão acima. Alternativamente, as perdas a longo prazo podem ser estimadas e então analisadas como um carregamento externo com sinal oposto à protensão original. Neste caso,  $\delta$  deve ser multiplicado pelo coeficiente de envelhecimento para incorporar o fato de que este carregamento fictício se desenvolve gradualmente.

$$\delta_{\Delta\sigma_{ps}} = \frac{E_b(28)}{E_b(t_0)} \frac{\chi [\varphi_b(t_2, t_0) - \varphi_b(t_1, t_0)]}{1 + \chi \varphi_b(t_2, t_1)}$$

Segundo PCI (2023), os momentos de restrição devido à retração diferencial da laje e da viga são calculados a partir da distribuição na estrutura contínua de um momento  $M_{sh}$ . Os valores  $d_{cg}$  na expressão de cálculo correspondem à distância do centroide da seção composta até o centroide de uma das partes de concreto. O tempo  $t_1$  equivale ao início da retração da laje e o tempo  $t_2$  é o instante em análise.

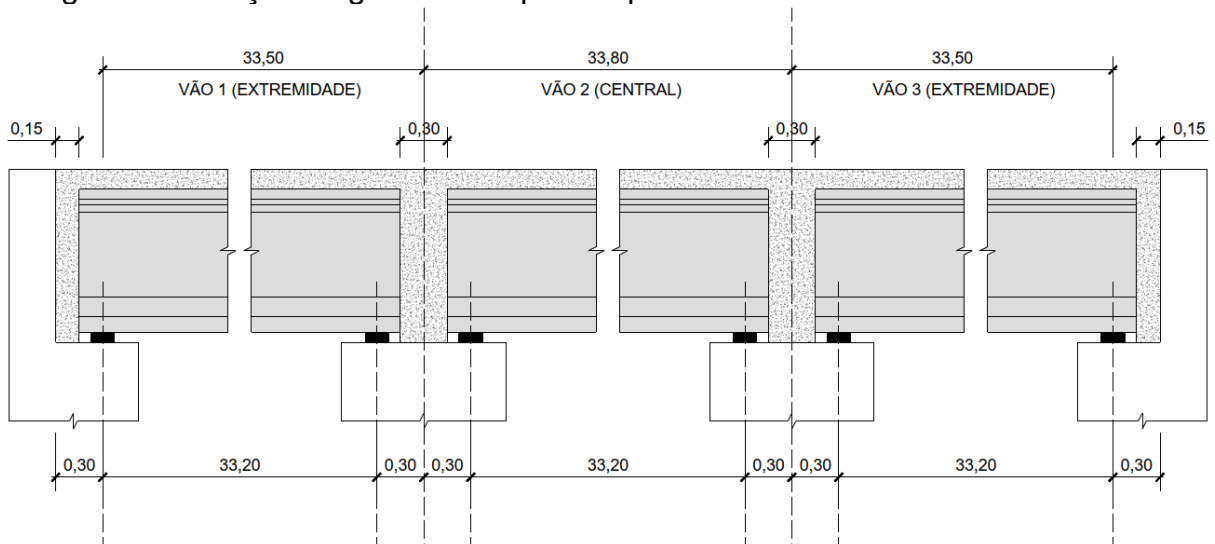
$$M_{sh} = A_d \cdot \bar{E}_d(t_2, t_1) \cdot \epsilon_{csd}(t_2, t_1) \cdot d_{cgd} - A_b \cdot \bar{E}_b(t_2, t_1) \cdot \epsilon_{csb}(t_2, t_1) \cdot d_{cgb}$$



## 6 APRESENTAÇÃO DA PONTE ESTUDADA

O dimensionamento apresentado neste trabalho adapta a geometria de um dos exemplos de PCI (2023). A ponte possui eixo reto, horizontal e ortogonal. A distância entre eixo dos aparelhos de apoio é de 33,20 m. Após a continuidade, os comprimentos dos três vãos da estrutura são de 33,50 m, 33,80 m e 33,50 m. As transversinas possuem 15 cm de largura nos encontros e 30 cm sobre os pilares internos (Figura 39).

Figura 39 – Seção longitudinal da ponte após o estabelecimento da continuidade

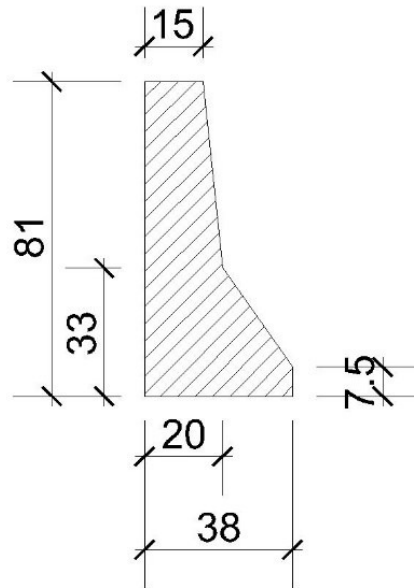


Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A continuidade posterior é obtida com emprego de armadura passiva na laje e conexão para momentos positivos nas transversinas sobre pilares. Inicialmente, não é fixada idade para estabelecimento da continuidade. A ponte possui pista simples simétrica em relação ao seu eixo central, composta por duas faixas de rolamento com 3,6 m de largura e acostamentos com 2,5 m. Estas dimensões foram escolhidas segundo DNER (1996). São colocadas nas laterais da ponte barreiras de perfil New Jersey conforme a NBR 14885/2016 (Figura 40).

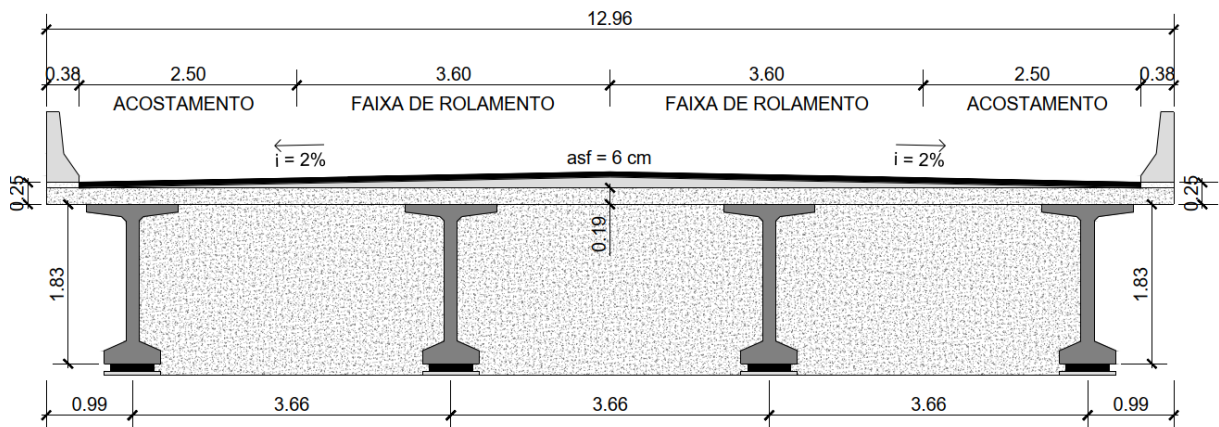
Quatro vigas pré-moldadas de seção I padrão AASHTO-PCI BT-72 compõem a estrutura. Aplicou-se versão adaptada por Valeriano (2021) para as unidades usuais no Brasil. O espaçamento entre eixos das longarinas é de 3,66 m e o comprimento total das vigas é de 33,5 m. O trecho em balanço transversal da laje, que tem espessura constante de 19 cm, possui 0,99 m de comprimento, resultando em uma largura total da ponte de 12,96 m (Figura 41).

Figura 40 – Barreira rígida de perfil New Jersey, com dimensões em centímetros



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 41 – Seção transversal da ponte sobre pilares, com dimensões em metros



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

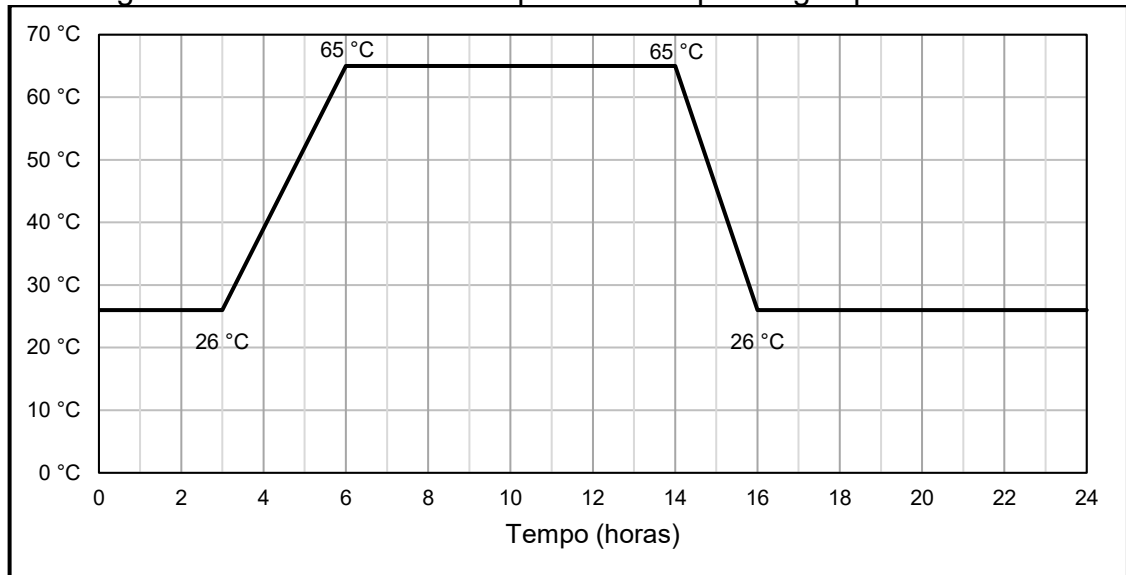
De acordo com indicações de Debs (2022) e DAER/RS (1991), foi considerada inclinação transversal mínima da pista de 2%. O revestimento asfáltico possui espessura constante de 6 cm, arbitrada com base em DER/SP (2005), sendo empregada camada de concreto magro para atendimento do greide.

Considera-se mistura do concreto com agregado de origem granítica e cimento CPV-ARI para todos os elementos. Na laje e transversinas, a resistência à compressão característica especificada é de 30 MPa. As longarinas pré-tensionadas possuem resistência de 60 MPa, com ciclo de cura a vapor atendendo aos limites do item 9.6.28 da NBR 9062/2017 (Figura 42).

O período total de cura tem duração de 24 horas e considerou temperatura ambiente igual à temperatura média registrada pelo Instituto Nacional de Meteorologia

no ano de 2023 em estação localizada na cidade de São Luís. Com base nestes mesmos dados, a umidade relativa do ar para o projeto foi adotada como 80%.

Figura 42 – Ciclo de cura a vapor adotado para vigas pré-moldadas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Conforme DER/SP (2005), a classe de agressividade ambiental mínima para o projeto de obras-de-arte especiais deve ser II, podendo ser utilizada protensão limitada. No contexto de uma ponte em ambiente rural ou um viaduto urbano, tais hipóteses são razoáveis e foram adotadas neste trabalho.

Os resultados apresentados foram os momentos nas longarinas, desconsiderando os efeitos dependentes do tempo, para dimensionamento preliminar da armadura longitudinal de protensão nos vãos de extremidade. Além disso, para as vigas internas, analisou-se os momentos de restrição dependentes do tempo e a área de aço necessária às conexões para continuidade de momentos positivos.

### 6.1 Propriedades dos materiais segundo a NBR 6118

Conforme item 8.2.2 da NBR 6118/2023, o peso específico do concreto aplicado nos elementos estruturais e nas barreiras rígidas é igual a 25 kN/m<sup>3</sup>, enquanto para o concreto da camada de enchimento é de 24 kN/m<sup>3</sup>. O coeficiente de dilatação térmica de 10<sup>-5</sup> °C<sup>-1</sup> é adotado como sugerido pelo item 8.2.3.

O módulo de elasticidade e a resistência à tração aos 28 dias foram calculados para os diferentes concretos especificados conforme as equações dos itens 8.1.8 e 8.1.5, respectivamente. Para as longarinas, obteve-se os valores a seguir.

$$E_{ci28} = 21500 \cdot 1 \cdot \left(\frac{60}{10} + 1,25\right)^{\frac{1}{3}} = 41611,92 \text{ MPa}$$

$$E_{cs28} = \left(0,8 + 0,2 \cdot \frac{60}{80}\right) E_{ci28} = 39531,33 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm28} = 2,12 \ln[1 + 0,1(60 + 8)] = 4,35 \text{ MPa}$$

Para a laje e transversinas:

$$E_{ci28} = 1 \cdot 5600\sqrt{30} = 30672,46 \text{ MPa}$$

$$E_{cs28} = \left(0,8 + 0,2 \cdot \frac{30}{80}\right) E_{ci28} = 26838,41 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm28} = 0,3 \cdot 30^{\frac{2}{3}} = 2,90 \text{ MPa}$$

Considerando o valor de 0,20 para o coeficiente de Poisson, o módulo de cisalhamento é calculado dividindo o módulo de elasticidade por 2,4. Um resumo das propriedades físicas para os concretos especificados no projeto é apresentado na Tabela 1. A definição destes materiais no Robot Strucutral Analysis é apresentada nas Figuras 43 e 44.

Tabela 1 – Resumo das propriedades dos concretos aos 28 dias segundo NBR 6118

Material	fck (MPa)	fctm (MPa)	Eci (MPa)	Ecs (MPa)	G (MPa)	n
C60	60	4,35	41611,92	39531,33	16471,39	1,00
C30	30	2,90	30672,46	26838,41	11182,67	0,68

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 43 – Definição do concreto C60 no RSA segundo NBR 6118

Definição de material

Aço Concreto Alumínio Madeira Outros

Nome: C60 Descrição: C60 (fck=60 MPa) NBR 6118:2023

**Elasticidade**

Módulo de Young, E: 39531,33 (MPa)

Coefficiente de Poisson,  $\nu$ : 0,2

Módulo de cisalhamento, G: 16471,39 (MPa)

Peso específico (peso unitário): 25,00 (kN/m<sup>3</sup>)

Coef. de expansão térmica: 0,000010 (1/°C)

Relação de amortecimento: 0,15

**Resistência**

Características: 60,00 (MPa)

Amostra: Cilíndrico

Adicionar Excluir OK Cancelar Ajuda

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 44 – Definição do concreto C30 no RSA segundo NBR 6118

Definição de material

Aço Concreto Alumínio Madeira Outros

Nome: C30 Descrição: C30 (fck=30 MPa) NBR 6118:2023

**Elasticidade**

Módulo de Young, E: 26838,41 (MPa)

Coefficiente de Poisson,  $\nu$ : 0,2

Módulo de cisalhamento, G: 11282,67 (MPa)

Peso específico (peso unitário): 25,00 (kN/m<sup>3</sup>)

Coef. de expansão térmica: 0,000010 (1/°C)

Relação de amortecimento: 0,15

**Resistência**

Características: 30,00 (MPa)

Amostra: Cilíndrico

Adicionar Excluir OK Cancelar Ajuda

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Na protensão das vigas, empregou-se cordoalhas com 7 fios de 12,7 mm CP 190 RB, com traçado reto e poligonal. O módulo de elasticidade da armadura ativa é

igual a 200000 MPa e a área de uma cordoalha é 1,01 m<sup>2</sup>, ambos valores extraídos de ArcelorMittal (2022). Um resumo das propriedades é apresentado na Tabela 2.

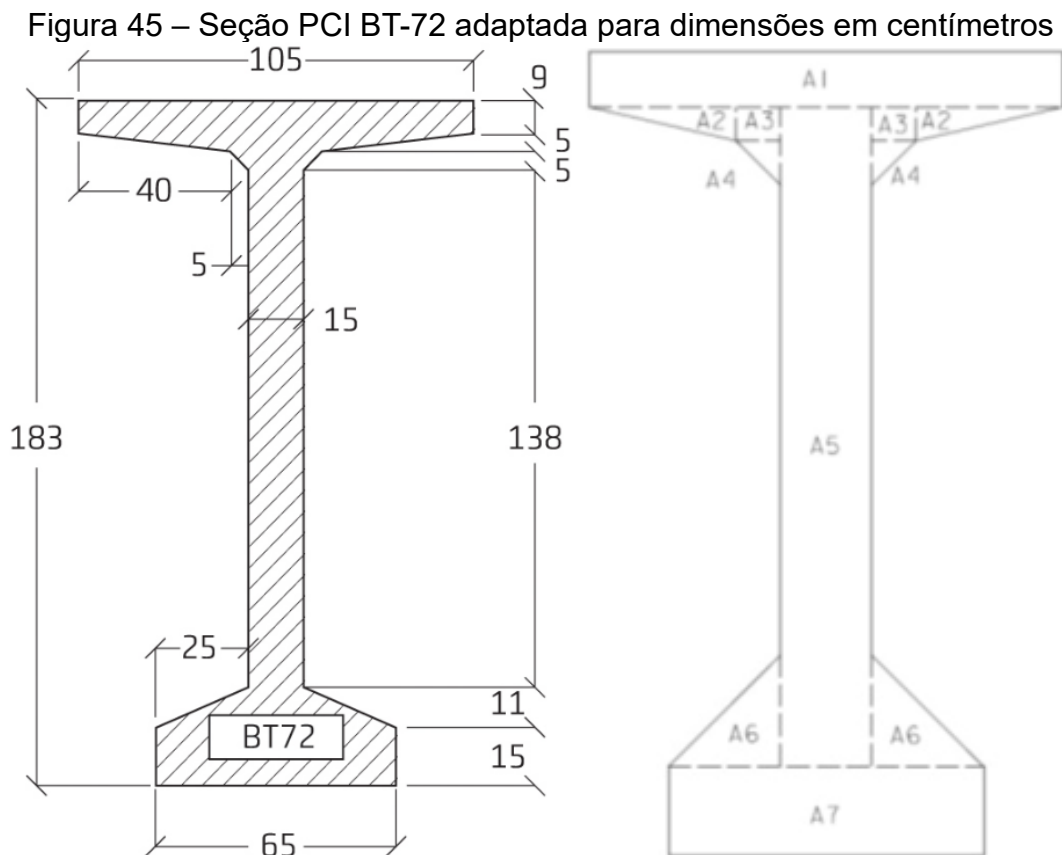
Tabela 2 – Resumo das propriedades adotadas para o aço de protensão

Material	f <sub>ptk</sub> (MPa)	f <sub>pyk</sub> (MPa)	E <sub>s</sub> (MPa)	n
CP 190 RB	1900	1710	200000,00	5,06

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

## 6.2 Propriedades geométricas das longarinas

A seção das vigas adotadas considerou versão adaptada do padrão AASHTO-PCI para as unidades usuais no Brasil por Valeriano (2021). As dimensões da seção, em centímetros, podem ser vistas na Figura 45. A figura também apresenta a divisão da área em regiões para cálculo analítico das propriedades da seção apresentado na Figura 46.



Fonte: Adaptado de Valeriano (2021) e Adams *et al.* (2019)

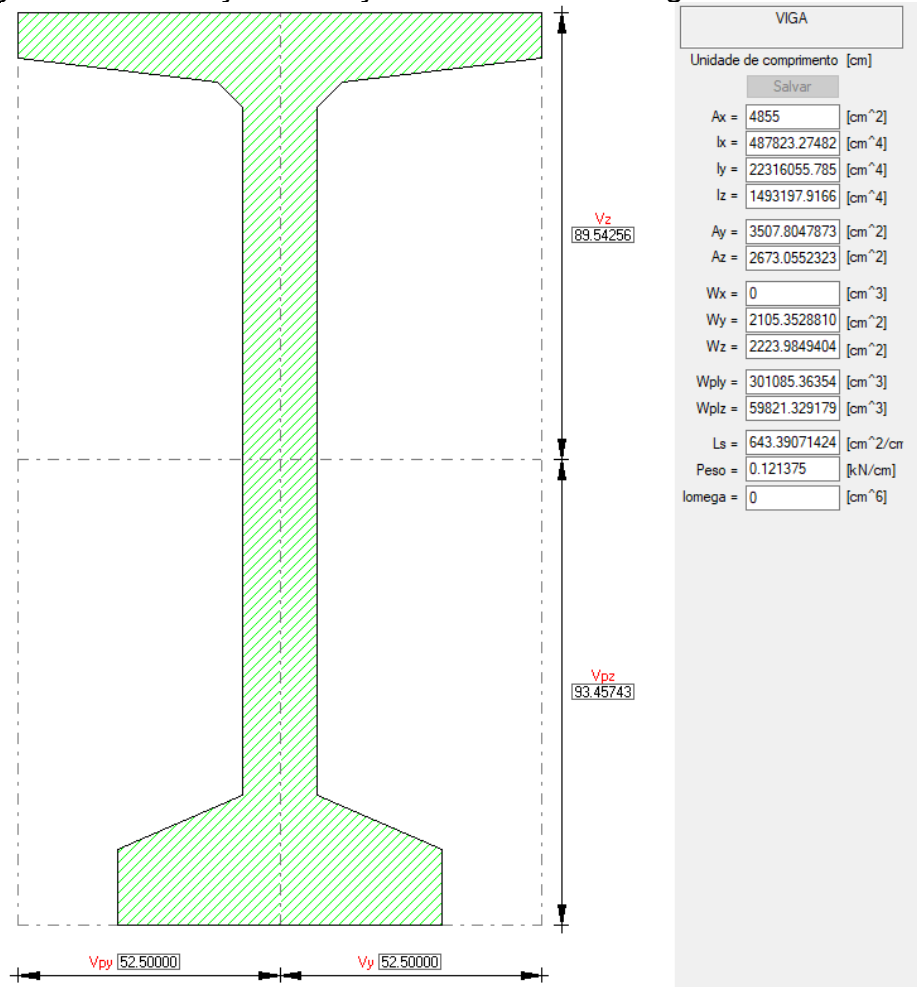
Figura 46 – Cálculo de propriedades geométricas para viga isolada

Viga Isolada												
Elemento	Repetições	Tipo	b (cm)	h (cm)	Ai (cm <sup>2</sup> )	zi (cm)	Ai zi (cm <sup>3</sup> )	di = zcg-zi (cm)	Ai di <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )	Iyi (cm <sup>4</sup> )	Iycg = Iyi + Ad <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )	
1	1	Retângulo	105,00	9,00	945,00	178,50	168682,50	-85,04	6834465,23	6378,75	6840843,98	
2	2	Triângulo	40,00	5,00	100,00	172,33	17233,33	-78,88	622140,78	138,89	622279,67	
3	2	Retângulo	5,00	5,00	25,00	171,50	4287,50	-78,04	152266,06	52,08	152318,14	
4	2	Triângulo	5,00	5,00	12,50	167,33	2091,67	-73,88	68220,61	17,36	68237,97	
5	1	Retângulo	15,00	159,00	2385,00	94,50	225382,50	-1,04	2592,37	5024598,75	5027191,12	
6	2	Triângulo	25,00	11,00	137,50	18,67	2566,67	74,79	769128,06	924,31	770052,36	
7	1	Retângulo	65,00	15,00	975,00	7,50	7312,50	85,96	7203963,15	18281,25	7222244,40	
					A = ΣAi (cm <sup>2</sup> )	4855,00	ΣAi zi (cm <sup>3</sup> )	453735,83	zcg = ΣAi zi/A (cm)	93,46	Iy (cm <sup>4</sup> )	22316055,79

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

No RSA, é possível importar a geometria de seções arbitrárias. O *software* calcula as propriedades geométricas através do método dos elementos finitos para aplicação nos modelos estruturais. As propriedades calculadas pelo RSA para a seção da viga isolada, incluindo as propriedades de cisalhamento, constam na Figura 47. O significado das siglas utilizadas pelo *software* pode ser consultado em Autodesk (c2024d).

Figura 47 – Definição da seção transversal das vigas isoladas no RSA

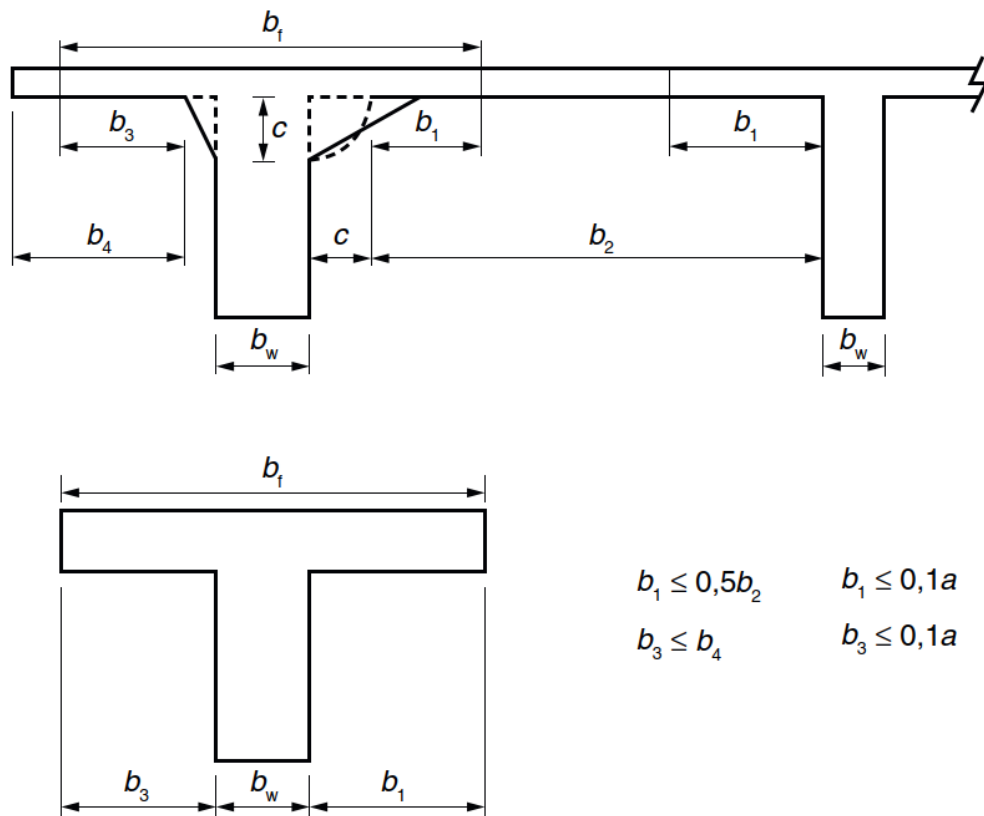


Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Após o endurecimento do concreto da laje, as vigas passam a atuar com seção composta. Conforme o item 14.6.2.2 da NBR 6118/2023, para métodos de análise que não consideram automaticamente a ação composta, a largura da mesa colaborante é tomada como a largura original da viga acrescida, para cada lado em que existe laje, de 10% da distância entre os pontos de momento fletor nulo.

A norma também apresenta estimativas para estas distâncias aplicáveis a estruturas usuais e dimensões limites para as mesas (Figura 48), dispensando a análise dos diagramas de momentos. No caso de vigas contínuas, é permitido que seja adotada largura colaborante única, calculada a partir do trecho de momentos positivos que resulte no menor valor.

Figura 48 – Valores-limites para largura da mesa colaborante

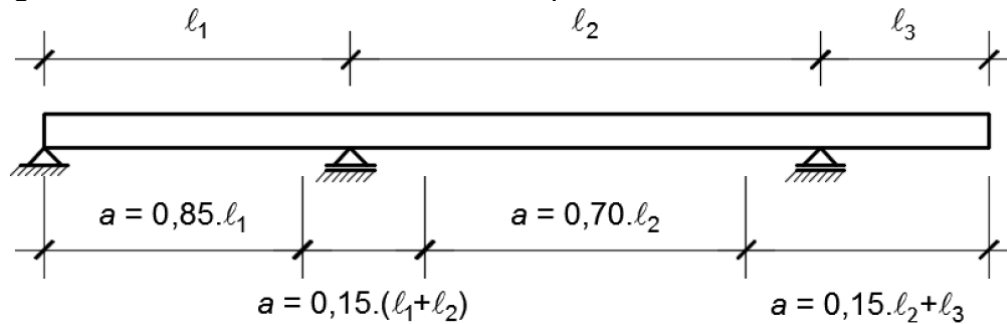


Fonte: ABNT (2023)

Especificamente para o projeto de pontes, as distâncias estimadas no item 8.5.1.2 da NBR 7187/2021 (Figura 49) se sobrepõem e devem ser comparadas aos valores-limites. Além disso, a adoção de largura única para vigas contínuas é permitida apenas na análise estrutural, sendo necessário considerar a mesa relativa a cada semitramo no estudo dos estados limites.



Figura 49 – Distâncias estimadas entre pontos de momento nulo em OAEs



Fonte: ABNT (2021)

Considerando que não há trecho longitudinal em balanço na ponte em estudo, são estimadas as distâncias entre pontos de momento fletor nulo e os valores limites para extensão das mesas colaborantes.

$$a_1^+ = 0,85 \cdot 33,5 = 28,475 \text{ m}$$

$$a^- = 0,15 \cdot (33,5 + 33,80) = 10,095 \text{ m}$$

$$a_2^+ = 0,70 \cdot 33,80 = 23,66 \text{ m}$$

$$b_2 = \frac{3,66 - 1,05}{2} = 1,305 \text{ m}$$

$$b_4 = 0,99 - \frac{1,05}{2} = 0,465 \text{ m}$$

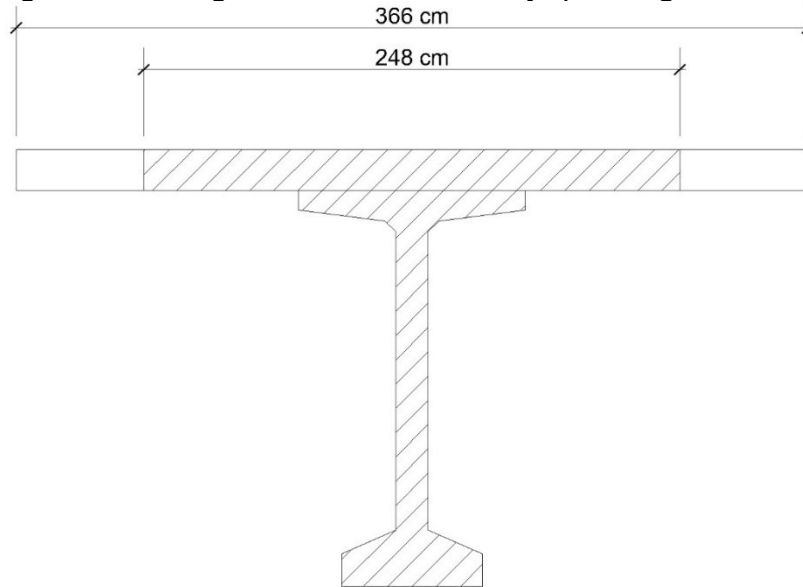
Neste projeto, adotar 10% das distâncias estimadas para as regiões de momentos positivos resultaria em larguras colaborantes superiores aos limites impostos pela geometria da seção. Esta situação é comum no projeto de pontes com múltiplas vigas. Para os trechos de momentos negativos, seria necessário considerar uma largura colaborante reduzida na verificação dos estados limites.

$$b_1^- \leq \begin{cases} 0,1 \cdot a^- \\ b_2 \end{cases} = 1,01 \text{ m}$$

Inicialmente, calculou-se apenas as propriedades das seções aplicadas na análise estrutural. O concreto da viga é tomado como material de referência e adotam-

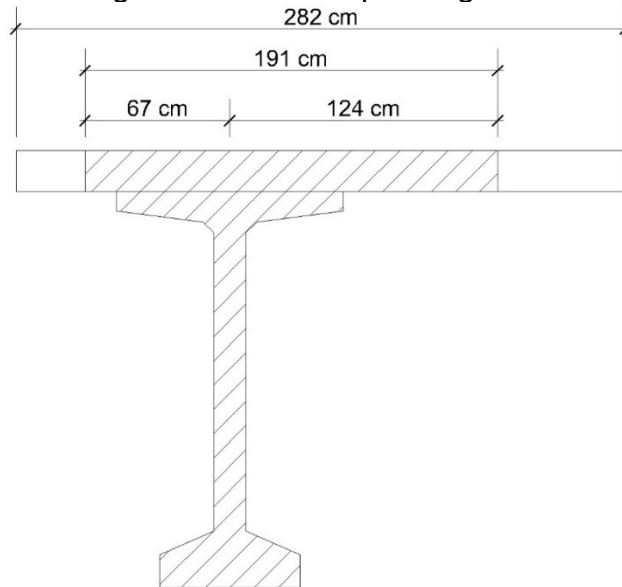
se larguras equivalentes do concreto da laje (Figuras 50 e 51) para cálculo das propriedades das seções compostas (Figuras 52 e 53).

Figura 50 – Largura colaborante da laje para vigas internas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 51 – Largura colaborante para viga externa esquerda



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 52 – Cálculo de propriedades geométricas para vigas internas

Seção Composta - Vigas Internas									
Elemento	b (cm)	h (cm)	Ai (cm <sup>2</sup> )	zi (cm)	Ai zi (cm <sup>3</sup> )	di = zcg-zi (cm)	Ai di <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )	lyi (cm <sup>4</sup> )	lycg = lyi + Ad <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )
Laje	248,00	19,00	4712,00	192,50	907060,00	-50,26	11903535,88	141752,67	12045288,54
Viga	-	183,00	4855,00	93,46	453735,83	48,78	11552927,10	22316055,79	33868982,88
			<b>A = ΣAi (cm<sup>2</sup>)</b>			<b>zcg = ΣAi zi/A (cm)</b>	<b>142,24</b>	<b>ly (cm<sup>4</sup>)</b>	<b>45914271,42</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 53 – Cálculo de propriedades geométricas para vigas externas

Seção Composta - Vigas Externas									
Elemento	b (cm)	h (cm)	A <sub>i</sub> (cm <sup>2</sup> )	z <sub>i</sub> (cm)	A <sub>i</sub> z <sub>i</sub> (cm <sup>3</sup> )	d <sub>i</sub> = z <sub>cg</sub> - z <sub>i</sub> (cm)	A <sub>i</sub> d <sub>i</sub> <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )	l <sub>y</sub> <sub>i</sub> (cm <sup>4</sup> )	l <sub>y</sub> cg = l <sub>y</sub> <sub>i</sub> + A d <sub>i</sub> <sup>2</sup> (cm <sup>4</sup> )
Laje	191,00	19,00	3629,00	192,50	698582,50	-56,68	11657566,46	109172,42	11766738,87
Viga	-	183,00	4855,00	93,46	453735,83	42,37	8713760,80	22316055,79	31029816,58
		A = ΣA <sub>i</sub> (cm <sup>2</sup> )	8484,00	ΣA <sub>i</sub> z <sub>i</sub> (cm <sup>3</sup> )	1152318,33	z <sub>cg</sub> = ΣA <sub>i</sub> z <sub>i</sub> / A (cm)	135,82	l <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	42796555,45

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$n_{laje} = \frac{E_{cd}}{E_{cb}} = \frac{26838,41}{39531,33} = 0,679$$

$$b_{f,int}^+ = 0,679 \cdot (1,05 + 1,305 + 1,305) = 2,48 \text{ m}$$

$$b_{f,ext}^+ = 0,679 \cdot (1,05 + 1,305 + 0,465) = 1,91 \text{ m}$$

Os valores calculados estão resumidos na Tabela 3 e correspondem às seções brutas de concreto não fissurado que serão utilizadas no dimensionamento preliminar em serviço.

Tabela 3 – Resumo das propriedades geométricas das seções brutas em serviço

SEÇÃO	A (cm <sup>2</sup> )	z <sub>cg</sub> (cm)	l <sub>y</sub> (cm <sup>4</sup> )	W <sub>inf</sub> (m <sup>3</sup> )	W <sub>sup</sub> (m <sup>3</sup> )
Isolada	4855,00	93,46	22316055,79	0,239	-0,249
Composta Externa	8484,00	135,82	42796555,45	0,315	-0,647
Composta Interna	9567,00	142,24	45914271,42	0,323	-0,768

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

### 6.3 Cargas atuantes na superestrutura

#### 6.3.1 Cargas permanentes diretas

Para a ponte estudada, as cargas permanentes diretas são aplicadas em dois estágios. Inicialmente, o peso próprio da estrutura atua nas vigas isoladas, que podem ser analisadas como simplesmente apoiadas. Após o endurecimento do concreto da laje e transversinas, cargas como o peso das barreiras rígidas e pavimentação são aplicadas na estrutura completa através de um modelo de elementos finitos.

Além disso, enquanto o peso da pavimentação está distribuído sobre uma grande área do tabuleiro, o peso das barreiras rígidas se concentra próximo às laterais da laje. Desta forma, as cargas permanentes diretas foram divididas em quatro casos principais de carregamento (Quadro 8).

Quadro 8 – Casos de carregamento para cargas permanentes diretas

Caso	Descrição	Natureza (conforme NBR 8681/2003)
g <sub>1</sub>	Peso das longarinas	Peso próprio de estruturas pré-moldadas
g <sub>2</sub>	Peso da laje e transversinas	Peso próprio de estruturas moldadas no local
g <sub>3</sub>	Peso das barreiras rígidas	Elementos construtivos industrializados
g <sub>4</sub>	Peso do pavimento e recapeamento	Elementos construtivos em geral

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Esta divisão fornece resultados apenas para o peso próprio das longarinas, necessários para as verificações na transferência da protensão, e permitiria que a natureza das ações fosse considerada ao adotar coeficientes de majoração específicos no ELU. O caso g<sub>4</sub> também inclui a camada de enchimento em concreto magro, com exceção dos trechos abaixo das barreiras rígidas que são considerados no caso g<sub>3</sub>.

O peso de cada longarina é considerado uma carga linear uniformemente distribuída sobre seu eixo longitudinal. O mesmo foi feito para o peso da laje, distribuído entre as quatro vigas principais a partir de suas áreas de influência (Figura 54). Considerando a simetria da ponte, as vigas externas e internas, respectivamente, serão representadas ao longo do trabalho pelas vigas V1 e V2.

Figura 54 – Áreas de influência das vigas pré-moldadas sobre a laje



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$g_1 = \rho_{viga} \cdot A_{viga} = 25 \cdot 0,4855 = 12,1375 \text{ kN/m}$$

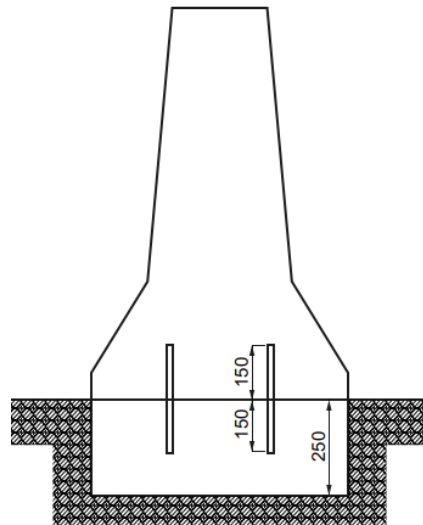
$$g_{laje} = \rho_{laje} \cdot A_{laje} = 25 \cdot (0,19 \cdot 12,96) = 61,56 \text{ kN/m}$$

$$g_{2,V1} = g_{laje} \cdot \frac{b_{transv} + \frac{b_0}{2}}{B} = 61,56 \cdot \frac{0,99 + \frac{3,66}{2}}{12,96} = 13,395 \text{ kN/m}$$

$$g_{2,V2} = g_{laje} \cdot \frac{b_0}{B} = 61,56 \cdot \frac{3,66}{12,96} = 17,385 \text{ kN/m}$$

O peso de cada transversina atua como uma carga concentrada nas longarinas e, como não foram adotadas transversinas intermediárias, não contribui para momentos nas vigas principais. A área de uma barreira rígida, conforme seção transversal presente na Figura 40, é aproximadamente igual a 1865 cm<sup>2</sup>. Seguindo o detalhe executivo presente na NBR 14885/2016 (Figura 55), deve ser feita camada em concreto magro para garantir sua ancoragem.

Figura 55 – Detalhe da fundação de barreira rígida, com dimensões em centímetros



Fonte: Adaptado de ABNT (2016)

Adotando uma espessura de 6 cm além da laje estrutural, atende-se aos 25 cm recomendados e se garante que a base da barreira fique no nível da pista de rolamento. Os efeitos na laje da colisão de veículos com a barreira, tratada pelo item 5.3.3 da NBR 7188/2024, não são objeto deste trabalho.

O peso de uma barreira mais sua camada de concreto magro pode ser modelado como uma carga linear na lateral da ponte ou como uma carga superficial distribuída sobre a área destinada à barreira. Esta escolha não deve ter impacto significativo nos resultados, o que pode ser utilizado como forma de avaliar a

qualidade da malha de elementos finitos. O mesmo pode ser dito quanto ao erro causado pelo posicionamento da carga fora do seu eixo gravitacional exato.

$$g_{3,\text{linear}} = \rho_{\text{barreira}} \cdot A_{\text{barreira}} + \rho_c \cdot A_c = 25 \cdot 0,1865 + 24 \cdot (0,06 \cdot 0,38) = 5,21 \text{ kN/m}$$

$$g_{3,\text{superfície}} = \frac{g_{3,\text{linear}}}{b_{\text{barreira}}} = \frac{5,21}{0,38} = 13,71 \text{ kN/m}^2$$

O peso da pavimentação e da camada de enchimento para atendimento da inclinação transversal foi distribuída uniformemente sobre a área da pista de rolamento. O peso específico da pavimentação asfáltica é adotado como 24 kN/m<sup>3</sup>, valor mínimo indicado no item 7.2.3 da NBR 7187/2021 e igual ao do concreto simples. Também é somada uma carga adicional de 2 kN/m<sup>2</sup>, referente a um possível recapeamento futuro previsto pelo mesmo item da norma.

$$g_4 = 24 \cdot \left( 0,06 + 2\% \cdot \frac{12,20}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + 2 = 4,904 \text{ kN/m}^2$$

Destaca-se que a repavimentação representou cerca de 40% do caso de carga  $g_4$ . Este valor poderia ser desprezado a critério do proprietário da obra, algo razoável considerando o provável uso de máquinas de fresagem durante a manutenção da pista (Debs, 2022).

### 6.3.2 Cargas variáveis

As cargas variáveis consideradas no cálculo da estrutura estão resumidas no Quadro 9. A carga de vento, cujo cálculo em pontes é tema de uma seção inédita da recente atualização da NBR 6123, não será tratada neste trabalho.

Quadro 9 – Casos de carregamento para cargas variáveis

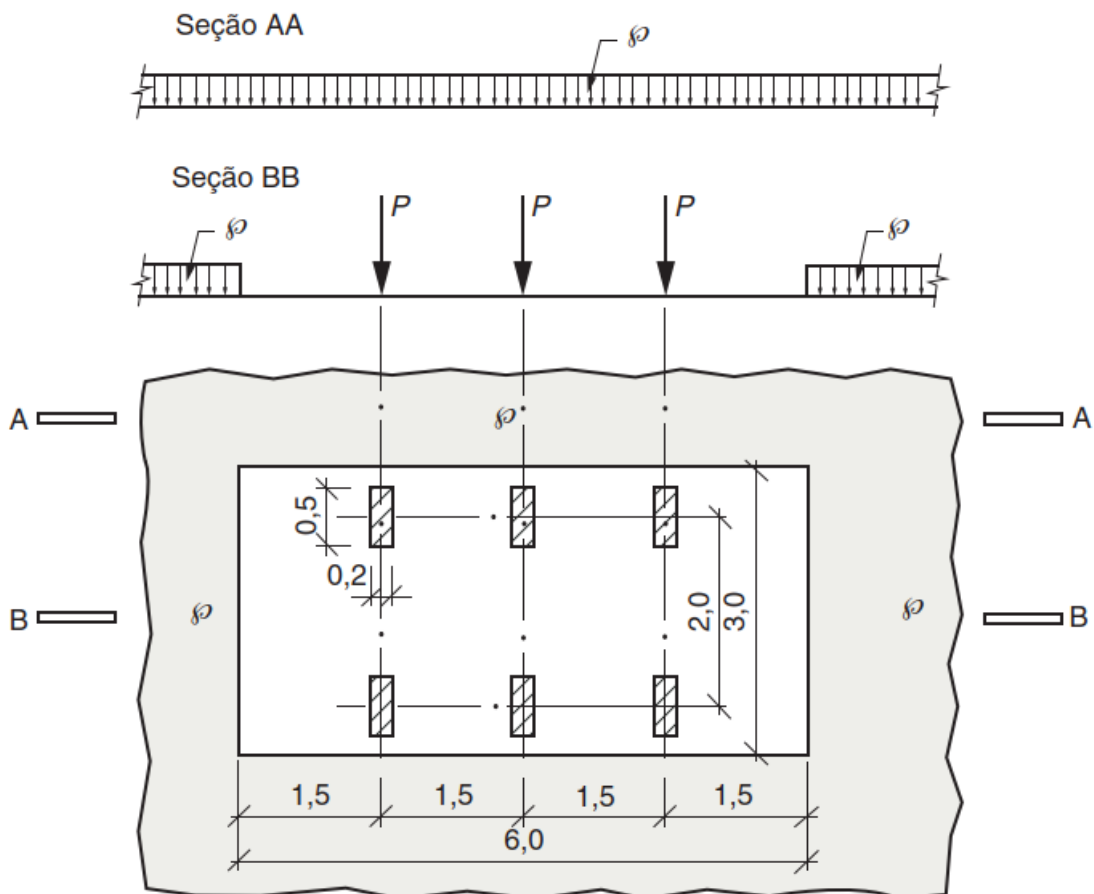
<b>Caso</b>	<b>Descrição</b>	<b>Natureza (conforme NBR 8681/2003)</b>
q <sub>1</sub>	TB-450 mais impacto (NBR 7188/2024)	Cargas móveis e seus efeitos dinâmicos
q <sub>2</sub>	Temperatura	Efeitos de temperatura

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como pode ser visto no Quadro 3, o fator de combinação  $\psi_2$  para o vento tem valor igual a zero. No dimensionamento em serviço apresentado, a carga móvel foi adotada como carga variável principal. Conseqüentemente, a carga de vento é desconsiderada nas combinações de serviço quase permanente e frequente, que são aplicadas no caso de protensão limitada. Em um projeto completo, o vento seria incluído em outras verificações.

A carga móvel rodoviária TB-450 foi aplicada nos cálculos e está representada na Figura 56. O veículo tipo possui seis rodas, cada uma aplicando uma força concentrada de 75 kN, ocupa uma área de 18 m<sup>2</sup> e é circundado por uma carga uniformemente distribuída de 5 kN/m<sup>2</sup>. Todas as cargas devem ser posicionadas no tabuleiro de forma mais desfavorável, incluindo acostamentos e faixas de segurança.

Figura 56 – Disposição das cargas estáticas equivalentes ao TB-450



Fonte: ABNT (2013)

Os valores das ações verticais aplicadas na estrutura devem ser multiplicados por coeficientes de ponderação, introduzidos originalmente na versão de 2013 da NBR 7188.

$$Q = P \cdot CIV \cdot CNF \cdot CIA$$

$$q = p \cdot CIV \cdot CNF \cdot CIA$$

A natureza essencialmente dinâmica da carga móvel é simulada pelo uso de cargas estáticas majoradas pelos coeficientes de impacto vertical  $CIV$  e coeficiente de impacto adicional  $CIA$ , que substituíram o antigo coeficiente de impacto previsto na NBR 7187/2003.

Na atualização de 2024 da NBR 7188, o texto referente ao  $CIA$  foi alterado para esclarecer que seu valor só deve ser aplicado no cálculo de lajes e de transversinas ligadas à laje. Em estruturas de concreto ou mistas, este coeficiente equivale a uma majoração de 25% no valor da carga móvel que pode ser observada nos cálculos de longarinas desenvolvidos em Valeriano (2021) e Debs (2022), por exemplo.

Em estruturas com vãos menores que 10 m,  $CIV$  é igual a 1,35. Acima deste valor, em pontes com até 200 m de vão, aplica-se a expressão abaixo, na qual  $LIV$  é a média aritmética dos vãos para estruturas contínuas, ou o próprio comprimento do vão para pontes biapoiadas e em balanço.

$$CIV = 1 + 1,06 \cdot \left( \frac{20}{LIV + 50} \right)$$

$$CIV = 1 + 1,06 \cdot \left( \frac{20}{\frac{2 \cdot 33,5 + 33,8}{3} + 50} \right) = 1,254$$

Como discutido, a carga móvel brasileira prevê a ocupação da pista em todas as possíveis faixas desfavoráveis à estrutura, independentemente da divisão real das faixas de tráfego na ponte. Do mesmo modo, posições que poderiam equilibrar os esforços nos elementos são consideradas vazias. O coeficiente do número de faixas  $CNF$  considerada a baixa probabilidade de ocorrência desta situação.

$$CNF = 1 - 0,05 \cdot (n_{\text{faixas}} - 2), \text{ com } 1 \geq CNF \geq 0,9$$

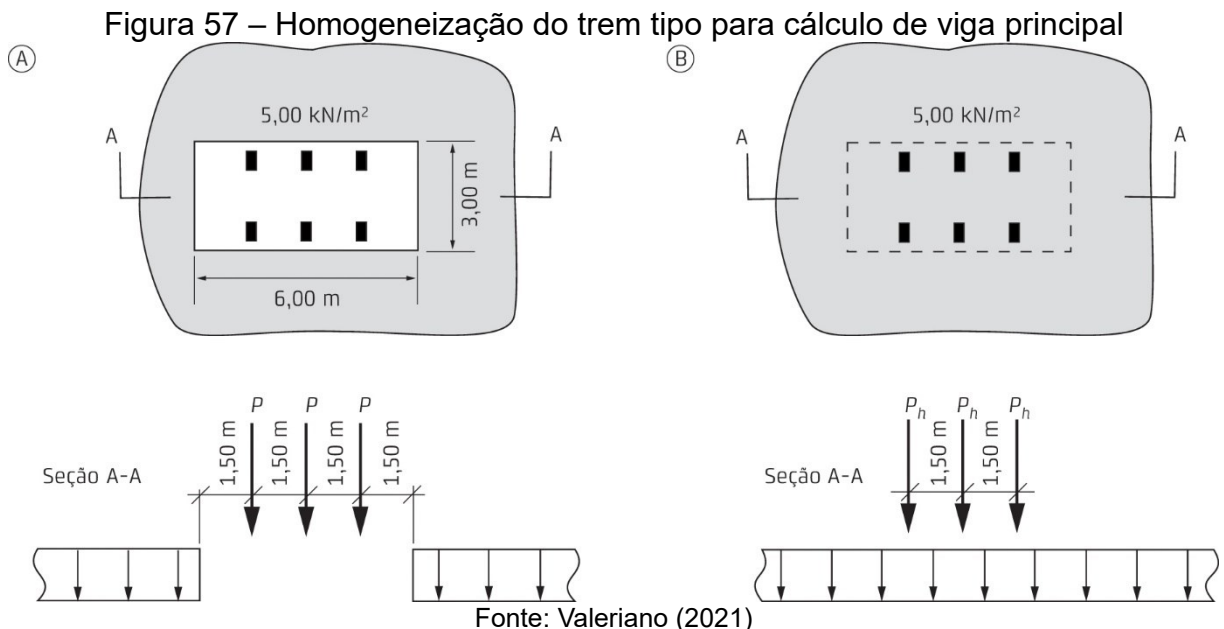


O texto que trata deste coeficiente sofreu alterações significativas na terceira edição da NBR 7188. Dentre estas, foi corrigida uma inconsistência conceitual presente na versão anterior, já que era indicado que apenas as faixas reais de tráfego deveriam ser contabilizadas no valor de  $n_{\text{faixas}}$ .

Na versão atual, seguindo padrão observado em códigos de outros países, é definida uma largura padrão para a faixa de projeto, que deve ser comparada à largura carregada  $b_{\text{móvel}}$  de cada caso de carga. O valor de  $n_{\text{faixas}}$  é tomado como a parte inteira da razão  $b_{\text{móvel}}/3,5$  m. Portanto, diferentemente da interpretação anterior, diversos valores de *CNF* poderão ser aplicados em um mesmo projeto.

Além disso, não havia um limite superior para o coeficiente. Como consequência, caso fosse prevista apenas uma faixa real de tráfego, o *CNF* atuava como um fator de majoração da carga, ainda que o trem tipo ocupasse faixas de segurança e acostamentos nos cálculos de esforços.

Uma prática usual no dimensionamento das longarinas é a homogeneização do trem tipo, que consiste na aplicação da carga uniformemente distribuída de multidão sobre a área ocupada pelo veículo tipo. O carregamento adicional é descontado do peso das rodas (Figura 57).



Como citado por Pfeil (1979), este procedimento tem o intuito de simplificar os cálculos e era previsto normativamente desde a antiga NB-6. Na versão de 2013 da NBR 7188 não havia referência à homogeneização, que voltou a constar na

atualização de 2024. O procedimento não deve ser aplicado no cálculo de lajes e transversinas, nem em pontes com menos de 30 m de vão.

Para o cálculo dos efeitos da temperatura, foram avaliados os dois métodos da NBR 7187/2021 para determinação de variação não uniforme. Segundo o método 01, o valor base para a diferença de temperatura entre as fibras extremas de pontes com seção em viga é igual a 7 °C (Quadro 5). Calculou-se o fator multiplicativo para espessura da camada de revestimento igual a 6 cm e o gradiente de temperatura.

$$1,4 + \frac{6 \text{ cm} - 5 \text{ cm}}{7 \text{ cm} - 5 \text{ cm}} \cdot (1,2 - 1,4) = 1,3$$

$$\Delta T_{eq} = 7 \cdot 1,3 = 9,10 \text{ °C}$$

$$\frac{\Delta T_{eq}}{H} = \frac{9,10 \text{ °C}}{1,83 \text{ m} + 0,19 \text{ m}} = 4,50 \text{ °C/m}$$

No método 02, são calculadas as variações de temperatura e altura das fibras que definem a distribuição não linear. Aplicou-se as expressões do Quadro 6, com interpolação dos valores no Quadro 7.

$$\Delta T_1 = 17,8 + \frac{6 \text{ cm} - 5 \text{ cm}}{10 \text{ cm} - 5 \text{ cm}} \cdot (13,5 - 17,8) = 16,94 \text{ °C}$$

$$\Delta T_2 = 4 + \frac{6 \text{ cm} - 5 \text{ cm}}{10 \text{ cm} - 5 \text{ cm}} \cdot (3 - 4) = 3,80 \text{ °C}$$

$$\Delta T_3 = 2,1 \text{ °C} + \frac{6 \text{ cm} - 5 \text{ cm}}{10 \text{ cm} - 5 \text{ cm}} \cdot (2,5 \text{ °C} - 2,1 \text{ °C}) = 2,18 \text{ °C}$$

$$h_1 \leq \begin{cases} 0,3 \cdot 2,02 \text{ m} \\ 0,15 \text{ m} \end{cases} = 0,15 \text{ m}$$

$$h_2 \leq \begin{cases} 0,3 \cdot 2,02 \text{ m} \\ 0,25 \text{ m} \end{cases} = 0,25 \text{ m}$$

$$h_3 \leq \begin{cases} 0,3 \cdot 2,02 \text{ m} \\ 0,10 \text{ m} + 0,06 \text{ m} \\ 2,02 \text{ m} - 0,15 \text{ m} - 0,25 \text{ m} \end{cases} = 0,16 \text{ m}$$

O cálculo do gradiente linearizado deve ser desenvolvido para cada seção composta do tabuleiro. Para uma das vigas internas da ponte, a divisão da área em trapézios está representada na Figura 58, junto à distribuição não linear da temperatura.

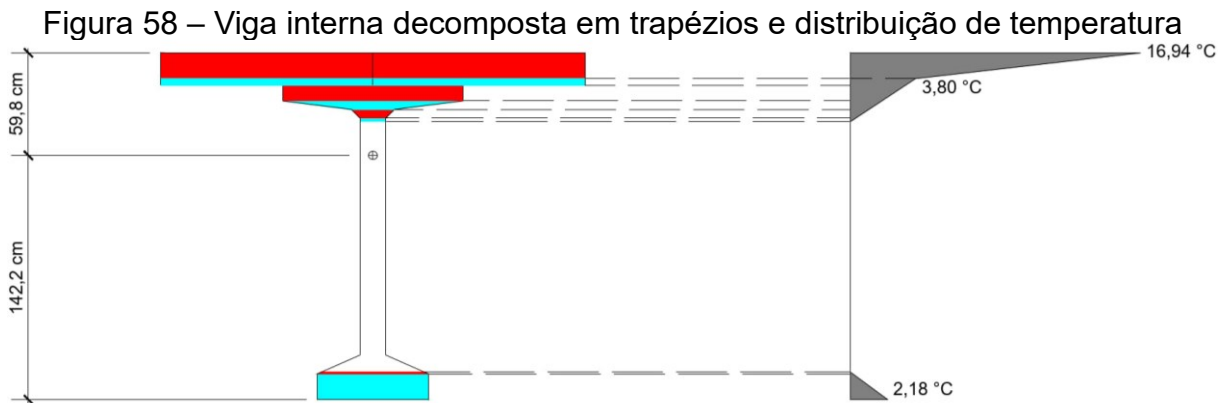


Figura 58 – Viga interna decomposta em trapézios e distribuição de temperatura

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A Tabela 4 apresenta o cálculo da integral que compõe a expressão do gradiente de variação linear para cada subregião trapezoidal. Estes valores são somados e então divididos pelo momento de inércia da seção composta, obtendo-se valor próximo ao calculado pelo método 01.

$$\left(\frac{\Delta T_{eq}}{H}\right)_{V2} = \frac{2,174 \text{ °C/m}}{I_{y,V2}} = \frac{2,174}{0,459} = 4,74 \text{ °C/m}$$

Tabela 4 – Cálculo de integrais para variação linear equivalente em viga interna

b1 (m)	b2 (m)	T1 (°C)	T2 (°C)	z1 (m)	z2 (m)	$\int b \cdot T \cdot z \cdot dz$ (°C/m³)
2,48	2,48	16,94 °C	3,80 °C	0,598	0,448	2,077
2,48	2,48	3,80 °C	3,19 °C	0,448	0,408	0,148
1,05	1,05	3,19 °C	1,82 °C	0,408	0,318	0,087
1,05	0,25	1,82 °C	1,06 °C	0,318	0,268	0,015
0,25	0,15	1,06 °C	0,30 °C	0,268	0,218	0,002
0,15	0,15	0,30 °C	0,00 °C	0,218	0,198	0,000
0,60	0,65	0,00 °C	0,14 °C	-1,262	-1,272	-0,001
0,65	0,65	0,14 °C	2,18 °C	-1,272	-1,422	-0,155
<b>TOTAL</b>						<b>2,174</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

O valor calculado de forma análoga para as vigas externas foi de 5,43 °C/m. Considerando que o método simplificado previu variações menos críticas, foram adotadas na análise da estrutura aquelas calculadas pelo método 02. Ainda assim, avalia-se que os resultados do método 01 se mostraram razoáveis no exemplo em questão. As variações de temperatura nas fibras extremas são resumidas na Tabela 5. A variação uniforme foi tomada como 10 °C, valor contido em todos os intervalos sugeridos pela NBR 6118/2023.

$$\Delta T(z) = \Delta T_{\text{unif}} + z \frac{\Delta T_{eq}}{H}$$

Tabela 5 – Variação de temperatura nas fibras extremas das longarinas

Fibra	MÉTODO 01		MÉTODO 02	
	V1	V2	V1	V2
Inferior	3,59 °C	4,00 °C	2,77 °C	3,26 °C
Superior	12,69 °C	13,10 °C	13,74 °C	12,83 °C
$\Delta T_{eq} = T_s - T_i$	9,10 °C	9,10 °C	10,97 °C	9,56 °C

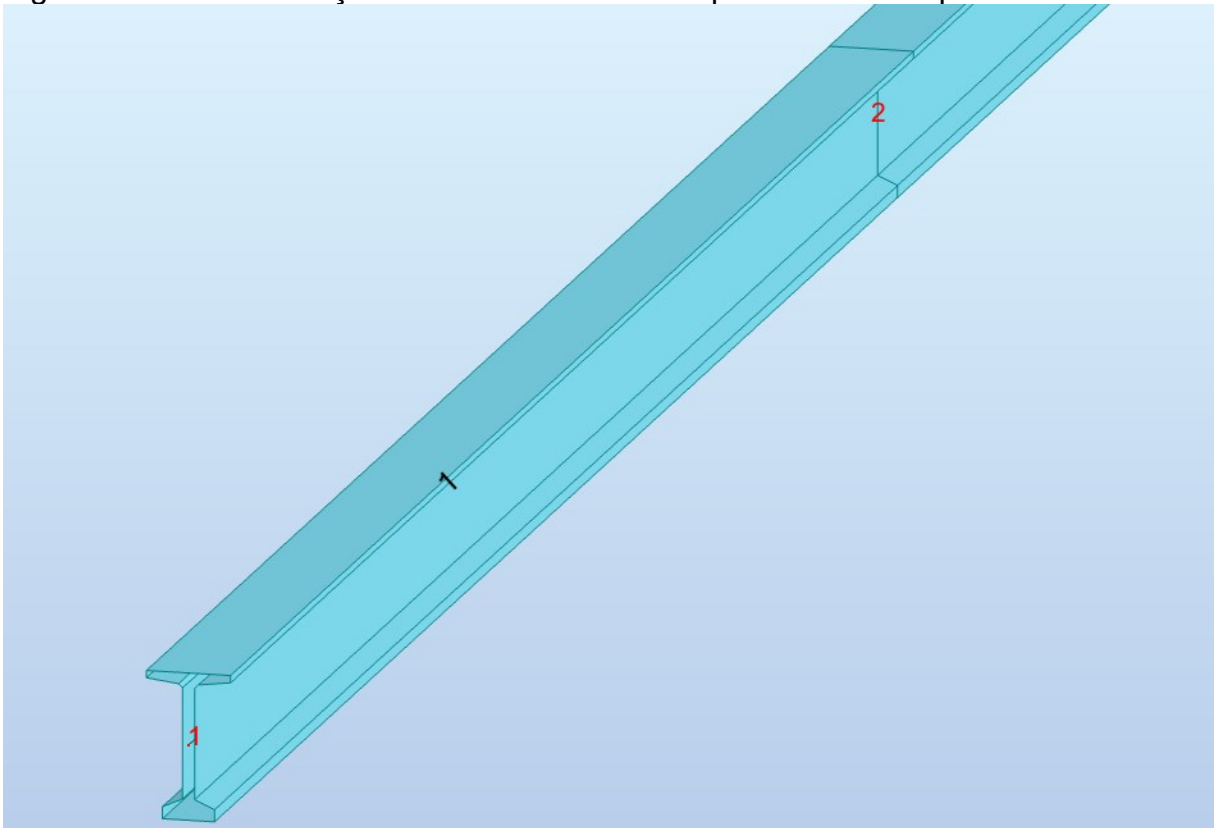
Fonte: Elaborado pelo autor (2023)

## 7 MODELAGEM E DIMENSIONAMENTO PRELIMINAR

### 7.1 Modelos unidimensionais

A análise da estrutura para carregamentos anteriores ao estabelecimento da continuidade é feita considerando sistema isostático de viga biapoiada, na qual a seção equivale apenas à parcela pré-fabricada (Figura 59). Esta situação corresponde aos casos de carregamento  $g_1$  e  $g_2$ , referentes ao peso próprio da estrutura.

Figura 59 – Vista da seção das barras no modelo para análise do peso da estrutura



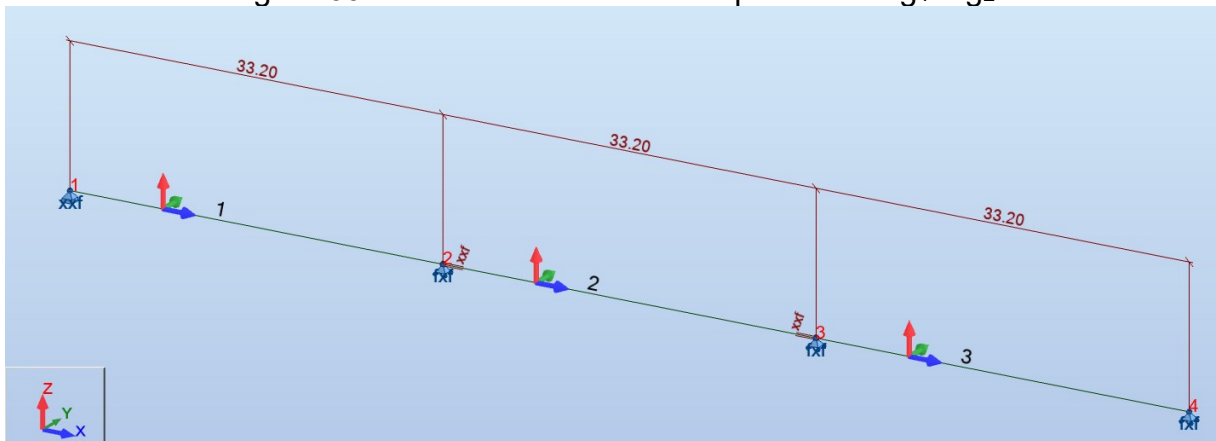
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Considerando que os métodos da NBR 7187/2021 para determinação de gradientes térmicos incluem as mesas colaborantes na análise da seção e que estes valores geralmente são aplicados para prever apenas os efeitos longitudinais do fenômeno, também será utilizada a modelagem unidimensional para analisar as vigas sujeitas a aumento de temperatura. A diferença, neste caso, é que a estrutura é contínua e passa a atuar com seção completa incluindo a parcela moldada *in loco*.

### 7.1.1 Casos $g_1$ e $g_2$ : peso próprio da estrutura

A geometria de todas as vigas pré-fabricadas é a mesma antes da continuidade, sendo necessária a distinção entre vigas internas e externas apenas devido à diferença da parcela de carga devido ao peso da laje. Portanto, elabora-se um único modelo estrutural (Figura 60) com três casos de carregamento:  $g_1$ ,  $g_{2,V1}$  e  $g_{2,V2}$ . Os vãos correspondem à distância entre os eixos dos aparelhos de apoio da estrutura biapoiada.

Figura 60 – Modelo unidimensional para casos  $g_1$  e  $g_2$



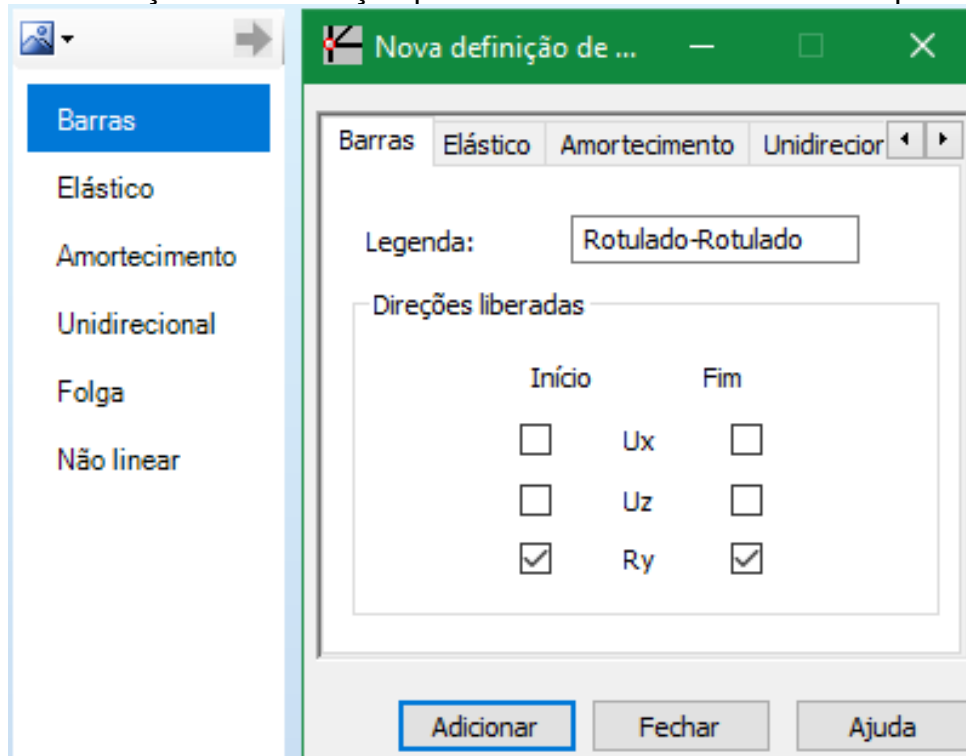
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

São modeladas três barras adjacentes, cada uma com 33,2 m de comprimento, para representar as três vigas pré-fabricadas que compõem uma das quatro vigas principais da ponte no sistema estático final. À princípio, cada vão deveria ser analisado separadamente, sobretudo caso o peso das transversinas estivesse sendo considerado para análise de forças cortantes e reações de apoio.

Entretanto, o sistema completo pode ser modelado de forma conjunta caso seja indicado que não deve haver transferência de momentos entre vãos, liberando a rotação da extremidade das vigas sobre os apoios internos. No RSA, o recurso utilizado é chamado de articulação e permite que qualquer grau de liberdade na extremidade de barras seja liberado (Figura 61).

A articulação foi aplicada na barra que representa o vão central. O modelo foi gerado em módulo do RSA para estruturas bidimensionais, então apenas três graus de liberdade são considerados em cada nó. As características para definição geométrica das barras do modelo e as deslocabilidades dos nós são apresentadas na Tabela 6.

Figura 61 – Definição de articulação para rotular extremidades sobre apoios internos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 6 – Definição das barras nos modelos para casos  $g_1$  e  $g_2$ 

ELEMENTO	INÍCIO				FIM			
	x(m)	y(m)	z(m)	Desloc.	x(m)	y(m)	z(m)	Desloc.
Barra 1	0	0	0	Ry	33,2	0	0	Ux, Ry
Barra 2	33,2	0	0	Ux, Ry <sup>1</sup>	66,4	0	0	Ux, Ry <sup>1</sup>
Barra 3	66,4	0	0	Ux, Ry	132,8	0	0	Ux, Ry

<sup>1</sup> Uso de articulação para rotular a estrutura contínua

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Este arranjo é uma simplificação das condições de apoio do sistema estático final e é adequado para análises restritas a cargas verticais. O modelo gerado possui 6 nós, 3 elementos e 13 deslocabilidades. Estes valores são coerentes com as informações da Tabela 6, considerando que o programa gera internamente dois nós fictícios para definir uma articulação de barra durante os cálculos.

Haja vista que a seção das barras no modelo equivale à seção real das vigas pré-fabricadas, foi utilizado o próprio recurso do programa para geração do peso próprio no caso  $g_1$ . Para isso, o peso específico do material e área da seção transversal das barras devem ser configurados no programa, como demonstrado nas Figuras 43 e 47.

Alternativamente, poderia ser aplicado o carregamento linear equivalente de 12,1375 kN/m<sup>2</sup>. Com este valor, foi possível determinar o somatório esperado das

reações de apoio na estrutura. Este é um critério simples proposto por Kimura (2018) e Adams *et al.* (2019) para verificação da modelagem correta de carregamentos, o qual foi aplicado neste trabalho.

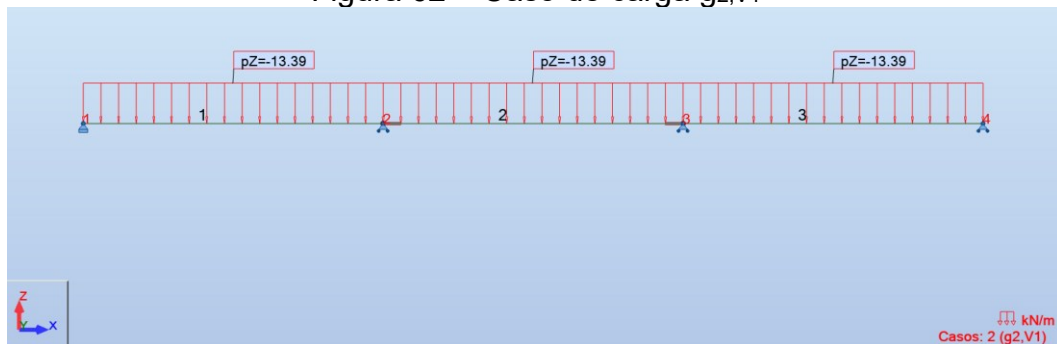
$$|\sum R_{g_1}| = 12,1375 \text{ kN/m}^2 \cdot (3 \cdot 33,20 \text{ m}) = 1208,90 \text{ kN}$$

Os casos  $g_{2,V1}$  (Figura 62) e  $g_{2,V2}$  (Figura 63) consideram a parcela de carga equivalente ao peso da laje resistido por cada longarina. Os valores calculados anteriormente para vigas externas e internas, respectivamente, foram de 13,395 kN/m e 17,385 kN/m.

$$|\sum R_{g_{2,V1}}| = 13,395 \text{ kN/m} \cdot (3 \cdot 33,20 \text{ m}) = 1334,142 \text{ kN}$$

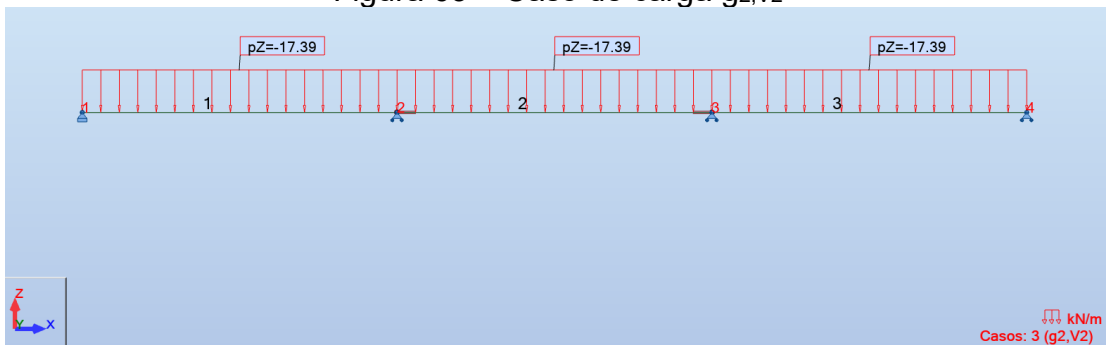
$$|\sum R_{g_{2,V2}}| = 17,385 \text{ kN/m} \cdot (3 \cdot 33,20 \text{ m}) = 1731,546 \text{ kN}$$

Figura 62 – Caso de carga  $g_{2,V1}$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 63 – Caso de carga  $g_{2,V2}$



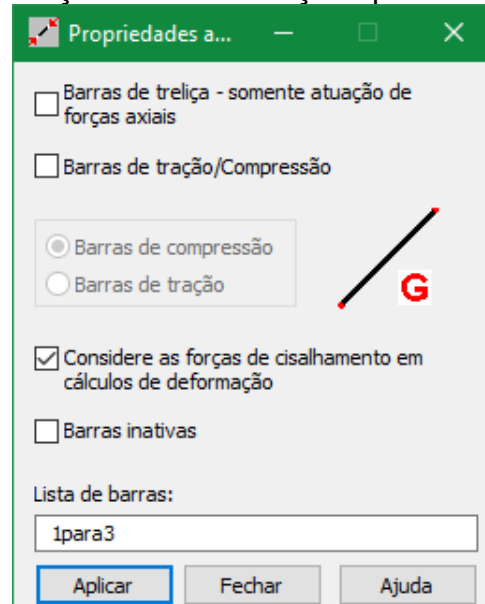
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Configurou-se as barras de forma que as deformações por cisalhamento sejam consideradas, seguindo a formulação de Timoshenko (Figura 64). Este



procedimento foi empregado em todos os modelos desenvolvidos no trabalho. O material de todas as barras que representam as longarinas é o concreto C60 definido na Figura 43.

Figura 64 – Consideração das deformações por cisalhamento em barras

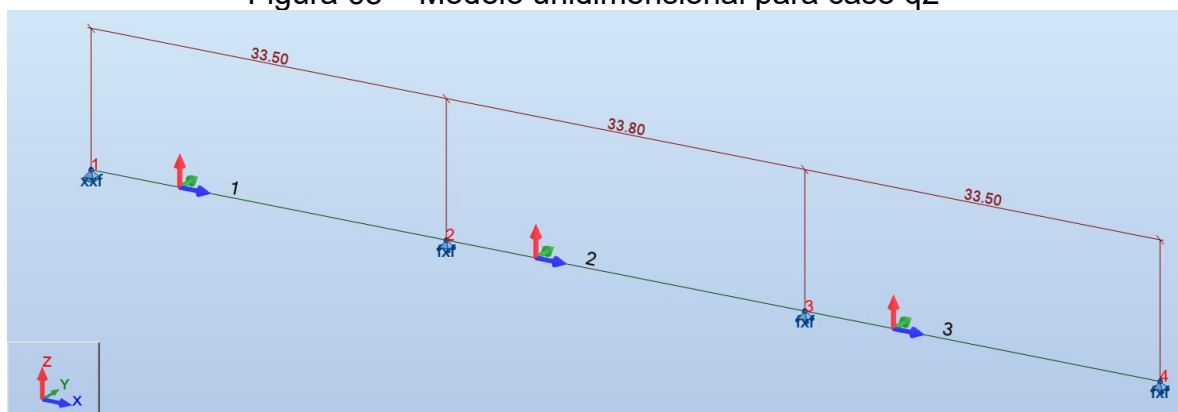


Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

### 7.1.2 Caso $q_2$ : efeito da temperatura

A variação de temperatura é considerada uma carga instantânea que atua sobre a estrutura em serviço. Desta forma, os apoios internos são modelados no eixo das transversinas sobre pilares, resultando em vãos com comprimento de 33,50 m, 33,80 m e 33,50 m (Figura 65). As condições de apoio são semelhantes à do modelo anterior, mas não há articulação da barra central (Tabela 7).

Figura 65 – Modelo unidimensional para caso  $q_2$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

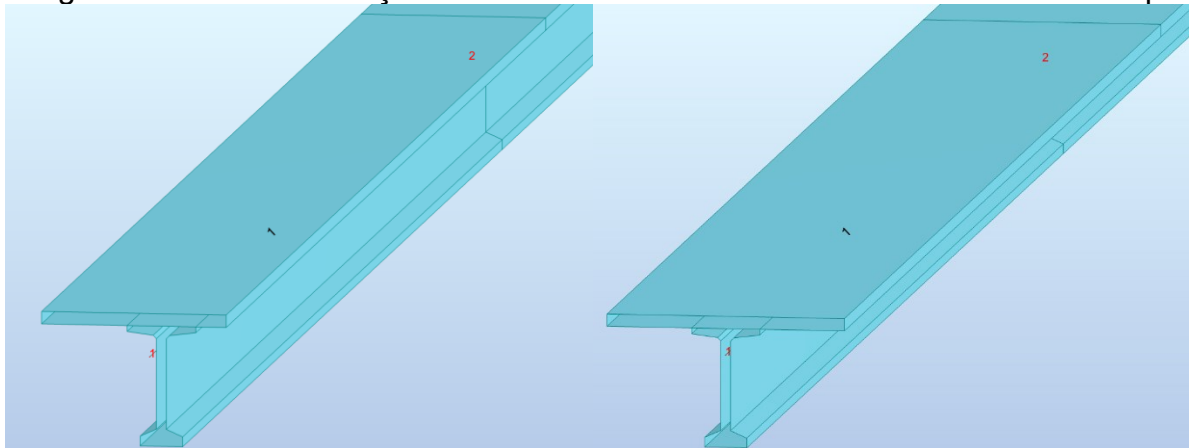
Tabela 7 – Definição das barras nos modelos para caso q2

ELEMENTO	INÍCIO				FIM			
	x(m)	y(m)	z(m)	Desloc.	x(m)	y(m)	z(m)	Desloc.
Barra 1	0	0	0	Ry	33,5	0	0	Ux, Ry
Barra 2	33,5	0	0	Ux, Ry	67,3	0	0	Ux, Ry
Barra 3	67,3	0	0	Ux, Ry	100,8	0	0	Ux, Ry

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

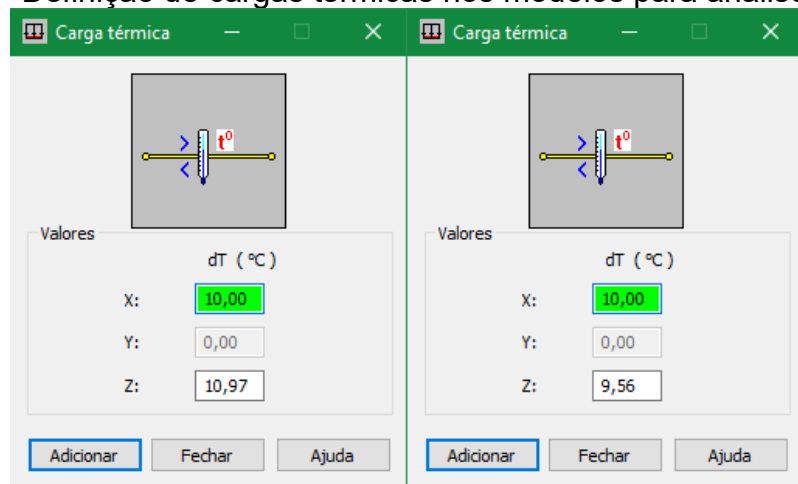
Modelos para vigas internas e externas são criados, cada um considerando a respectiva seção composta (Figura 66). As barras são sujeitas à carga térmica calculada através do método 02 da NBR 7187/2021 (Figura 67). No RSA,  $dTx$  se refere à variação uniforme de temperatura na barra, enquanto  $dTy$  e  $dTz$  correspondem, respectivamente, à variação entre as fibras extremas no eixo y e z da seção transversal. Os modelos possuem 4 nós, 3 elementos e 7 deslocabilidades.

Figura 66 – Vista das seções das barras em cada modelo de análise do caso q2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 67 – Definição de cargas térmicas nos modelos para análise do caso q2



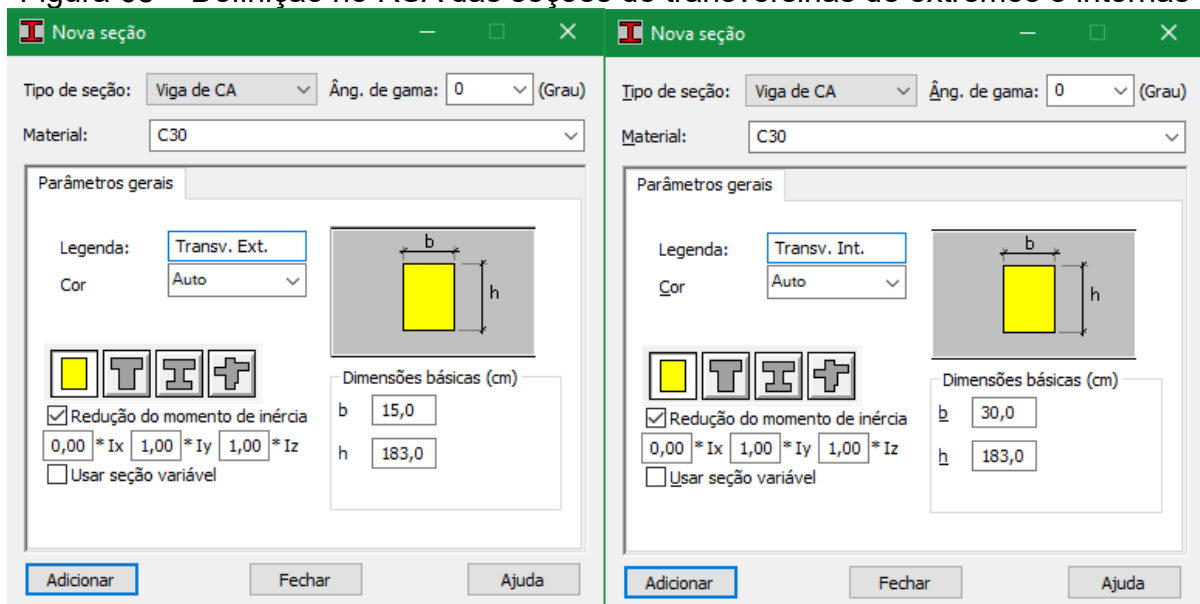
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

## 7.2 Modelos de placa com vigas excêntricas

Foram utilizados modelos de placas com vigas excêntricas para análise dos carregamentos devido ao peso das barreiras rígidas, da pavimentação e da carga móvel. As propriedades das barras correspondem às propriedades reais das longarinas pré-fabricadas e transversinas moldadas no local, que passam a integrar os modelos. A altura das transversinas foi tomada como igual à das vigas principais, desconsiderando a altura adicional devido ao aparelho de apoio e berço de regularização.

A definição no RSA da seção das transversinas é apresentada na Figura 68, incluindo a escolha do concreto C30, apresentado na Figura 44, como material. A inércia à torção dessas barras foi multiplicada por um coeficiente extremamente próximo de zero. Este valor não pode ser definido como nulo, pois resultaria em erros numéricos durante a solução das equações de equilíbrio da estrutura.

Figura 68 – Definição no RSA das seções de transversinas de extremos e internas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Conforme Debs (2022), neste arranjo construtivo, a rigidez a torção nas vigas deve ser desprezada já que o esquema de armadura pode não garantir a transferência de momentos fletores da laje para as vigas como torção. Deste modo, o momento de inércia a torção em todas as barras, inclusive naquelas que representam

longarinas, foi considerado igual a 1000 m<sup>4</sup> (Figura 69), valor insignificante em relação à rigidez flexional dos elementos.

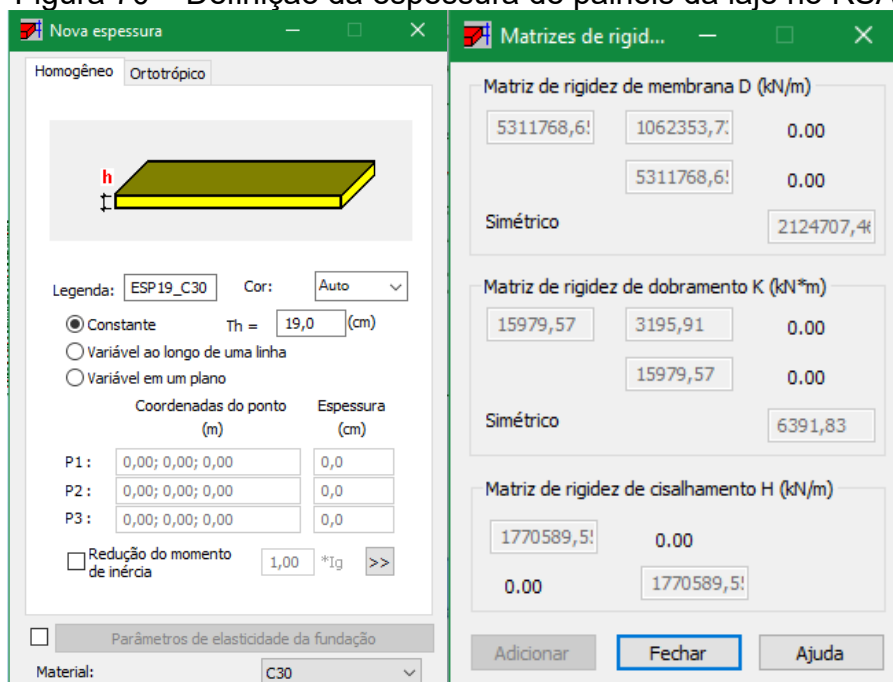
Figura 69 – Propriedades da seção de longarinas com redução da inércia à torção

Seção...		Long s/torcao 183	
Básico			
Ax	4855,00	(cm <sup>2</sup> )	
Iy	22316100,00	(cm <sup>4</sup> )	
Iz	1493200,00	(cm <sup>4</sup> )	
Dimensões			
bf	105,0	(cm)	
d	183,0	(cm)	
Vy	52,5	(cm)	
Vpy	52,5	(cm)	
Vz	89,5	(cm)	
Vpz	93,5	(cm)	
Propriedades			
Ay	3507,80	(cm <sup>2</sup> )	
Az	2673,06	(cm <sup>2</sup> )	
Ix	1000,00	(cm <sup>4</sup> )	
Wx	0,0	(cm <sup>3</sup> )	
Wy	2105,35	(cm <sup>2</sup> )	
Wz	2223,98	(cm <sup>2</sup> )	

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os painéis que compõem a laje foram definidos com espessura constante de 19 cm e de concreto C30. A configuração destas propriedades e as matrizes de rigidez no RSA podem ser vistas na Figura 70. Seria possível aplicar fatores de redução aos coeficientes de rigidez, procedimento usual em análises por analogia de grelhas para representar o efeito da fissuração.

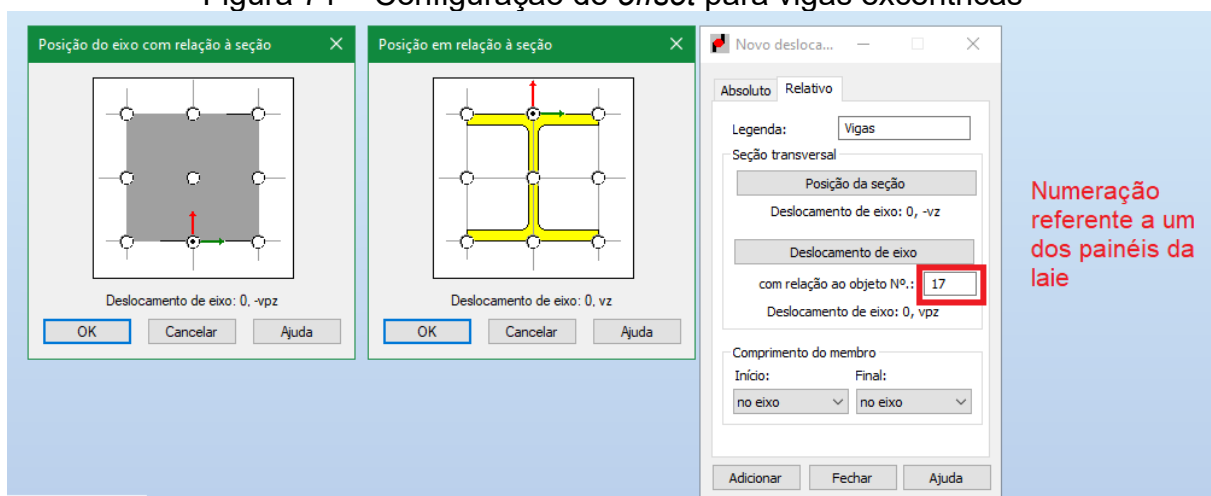
Figura 70 – Definição da espessura de painéis da laje no RSA



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

O eixo das barras deve coincidir com sua posição real na estrutura, localizado abaixo da laje. Para isso, aplicou-se o recurso de *offset* do RSA de forma que a fibra superior da seção das barras coincida com a fibra inferior da laje (Figura 71). O programa também permite a entrada de distâncias arbitrárias para o deslocamento dos eixos. Feito isso, a compatibilidade entre as barras excêntricas e as placas da laje é imposta automaticamente pelo programa.

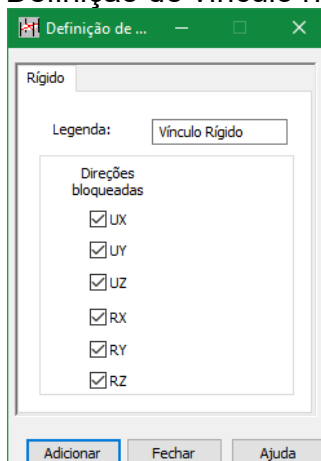
Figura 71 – Configuração de *offset* para vigas excêntricas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

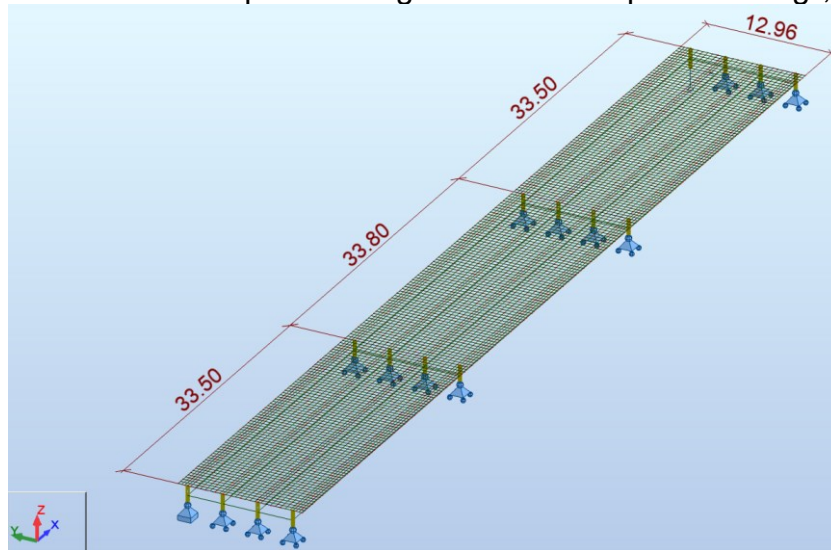
Os apoios foram modelados abaixo das longarinas, desconsiderando a espessura real do aparelho de elastômero, que ainda não é conhecida. Vínculos rígidos foram definidos para transmitir as restrições de movimento (Figura 72). O modelo completo da ponte é apresentado na Figura 73 e a equivalência entre a posição dos elementos com o arranjo real pode ser atestada nas Figuras 74 e 75.

Figura 72 – Definição de vínculo rígido no RSA



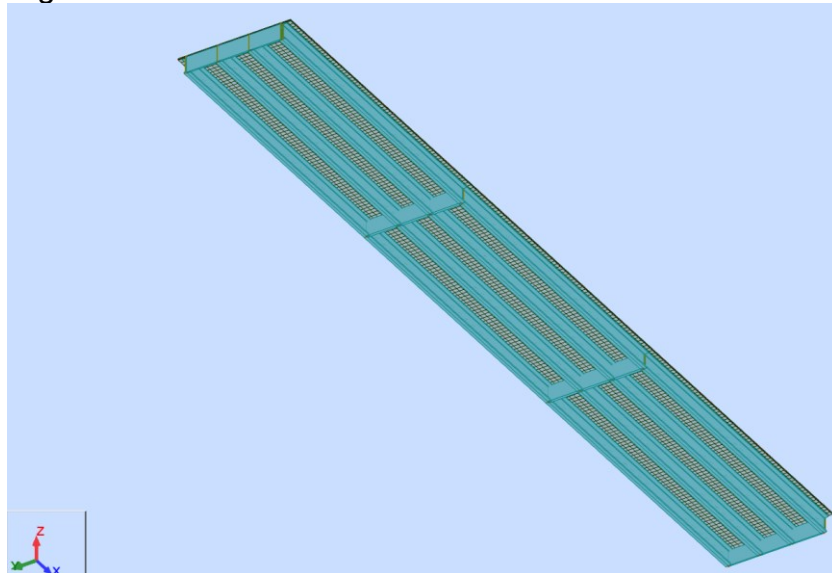
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 73 – Modelo de placas e vigas excêntricas para casos g<sub>3</sub>, g<sub>4</sub> e q<sub>1</sub>



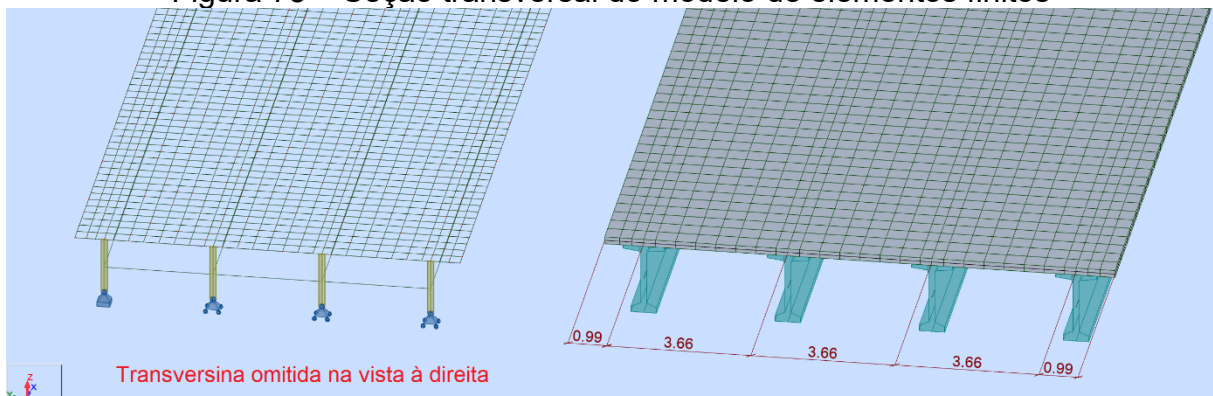
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 74 – Vista inferior do tabuleiro no modelo estrutural



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 75 – Seção transversal do modelo de elementos finitos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Características geométricas dos elementos que definem a laje e as vigas são apresentadas nas Tabelas 8 e 9. As barras 1 a 12 correspondem aos vãos das vigas principais, enquanto as barras 13 a 16 representam as transversinas. A Tabela 10 descreve os apoios da estrutura, que atendem às condições mínimas para estabilidade do sistema.

Tabela 8 – Definição geométrica de painéis da laje no modelo de elementos finitos

PAINEL DA LAJE	Nó <sup>1</sup>	x(m)	y(m)	z(m)
Vão 1	1	0	-6,48	0
	2	33,5	-6,48	0
	3	33,5	6,48	0
	4	0	6,48	0
Vão 2	1	33,5	-6,48	0
	2	67,3	-6,48	0
	3	67,3	6,48	0
	4	33,5	6,48	0
Vão 3	1	67,3	-6,48	0
	2	100,8	-6,48	0
	3	100,8	6,48	0
	4	67,3	6,48	0

<sup>1</sup> Numeração relativa ao elemento.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 9 – Definição das barras no modelo de elementos finitos

ELEMENTO	INÍCIO			FIM		
	x(m)	y(m)	z(m) <sup>1</sup>	x(m)	y(m)	z(m) <sup>1</sup>
Barra 1	0,00	-5,49	-0,99	33,50	-5,49	-0,99
Barra 2	33,50	-5,49	-0,99	67,30	-5,49	-0,99
Barra 3	67,30	-5,49	-0,99	100,80	-5,49	-0,99
Barra 4	0,00	-1,83	-0,99	33,50	-1,83	-0,99
Barra 5	33,50	-1,83	-0,99	67,30	-1,83	-0,99
Barra 6	67,30	-1,83	-0,99	100,80	-1,83	-0,99
Barra 7	0,00	1,83	-0,99	33,50	1,83	-0,99
Barra 8	33,50	1,83	-0,99	67,30	1,83	-0,99
Barra 9	67,30	1,83	-0,99	100,80	1,83	-0,99
Barra 10	0,00	5,49	-0,99	33,50	5,49	-0,99
Barra 11	33,50	5,49	-0,99	67,30	5,49	-0,99
Barra 12	67,30	5,49	-0,99	100,80	5,49	-0,99
Barra 13	0,00	-5,49	-1,01	0,00	5,49	-1,01
Barra 14	33,50	-5,49	-1,01	33,50	5,49	-1,01
Barra 15	67,30	-5,49	-1,01	67,30	5,49	-1,01
Barra 16	100,80	-5,49	-1,01	100,80	5,49	-1,01

<sup>1</sup> As barras foram definidas na coordenada global z=0, sendo aplicado *offset*.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 10 – Definição dos apoios no modelo de elementos finitos

APOIO	x(m)	y(m)	z(m) <sup>1</sup>	Deslocabilidades
1	0,00	-5,49	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
2	0,00	-1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
3	0,00	1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
4	0,00	5,49	-1,93	Rx,Ry,Rz
5	33,50	-5,49	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
6	33,50	-1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
7	33,50	1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
8	33,50	5,49	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
9	67,30	-5,49	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
10	67,30	-1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
11	67,30	1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
12	67,30	5,49	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
13	100,80	-5,49	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
14	100,80	-1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
15	100,80	1,83	-1,93	Ux,Uy,Rx,Ry,Rz
16	100,80	5,49	-1,93	Ux,Rx,Ry,Rz

<sup>1</sup> Nós conectados às barras através de vínculos rígidos.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A laje do exemplo desenvolvido é retangular, o que permitiu sua discretização em elementos finitos utilizando apenas quadriláteros. O emprego conjunto de formas triangulares deve ser feito apenas para geometrias complexas, pois promove incompatibilidades nas regiões de encontro entre tipos diferentes de elementos. Este fenômeno tende a ocorrer devido à aplicação de diferentes equações de compatibilidade.

Segundo Adams *et al.* (2019), cada vão longitudinal deve ser dividido em dez elementos, no mínimo, permitindo que resultados sejam extraídos facilmente em cada décimo de vão. No sentido transversal, ainda segundo Adams *et al.* (2019), pelo menos dois elementos são necessários entre longarinas para representar o efeito de *shear lag*, sendo recomendado o uso de quatro.

Considerando estas indicações, definiu-se a malha para representar a laje. No sentido longitudinal da ponte, os elementos possuem 50 cm nos vãos de extremidade e 52 cm no vão central. Transversalmente, o tabuleiro foi dividido em faixas com larguras específicas para os elementos (Figura 76). Este arranjo foi escolhido também com base nos exemplos de modelagem numérica apresentados por Debs (2022) e é justificado pelos princípios listados a seguir:



- a) As áreas destinadas às barreiras rígidas, trechos da laje em balanço transversal e acima do eixo das longarinas são regiões de interesse melhor discretizadas;
- b) Não há distorção de elementos para que nós das barras que representam as vigas estejam alinhados com vértices da malha;
- c) Assim como a ponte, a malha é simétrica em ambas as direções;
- d) O contorno de regiões sobre as quais carregamentos são aplicados na laje são descritos por vértices da malha;
- e) As dimensões dos elementos finitos são da mesma ordem de grandeza das rodas do veículo tipo;
- f) A razão entre as dimensões dos elementos é menor que três e não sofre variações abruptas.

Figura 76 – Quantidade e largura de elementos finitos



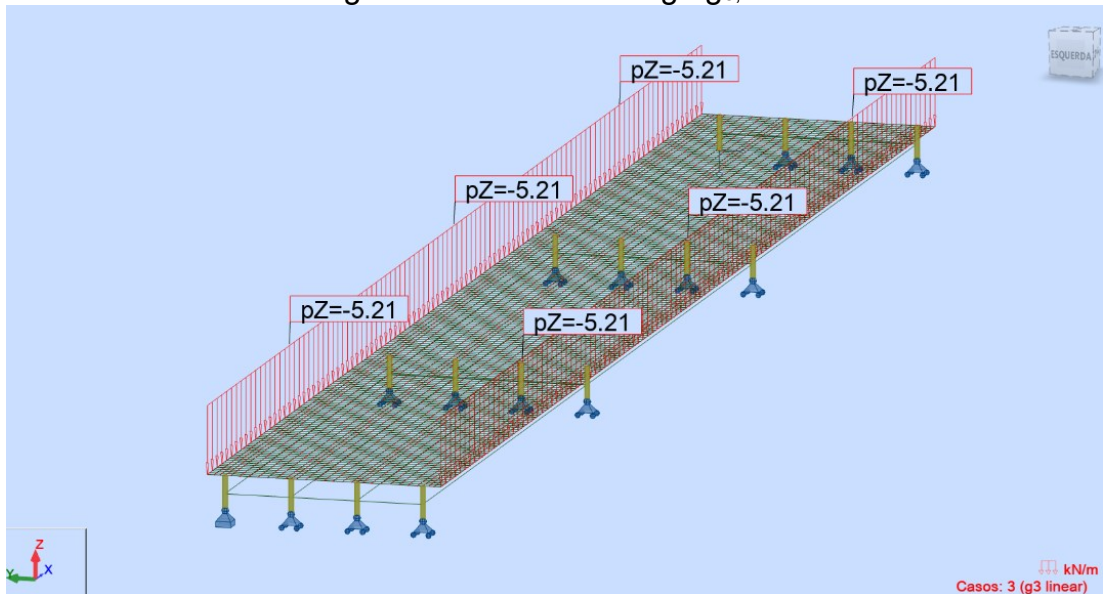
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

O modelo resultante é composto por 6216 nós, 6862 elementos e possui 37277 deslocabilidades. Considerando casos de carregamento estático, o processamento da estrutura leva poucos instantes em computadores que atendem aos requisitos mínimos do RSA.

### 7.2.1 Casos $g_3$ e $g_4$ : cargas permanentes adicionais

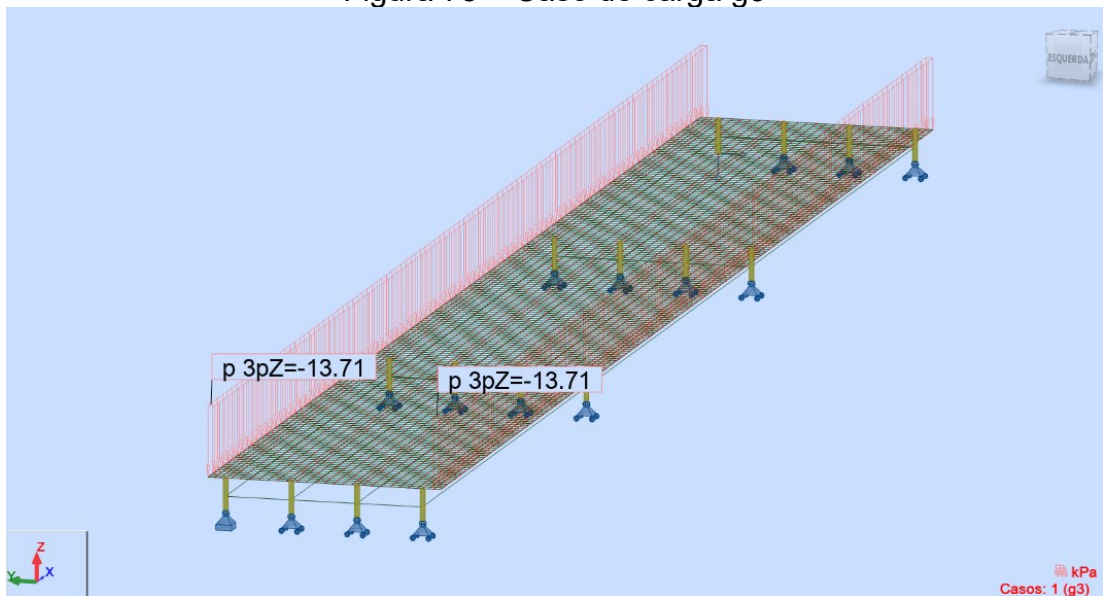
O peso das barreiras rígidas foi modelado como uma carga linear uniforme nas laterais da ponte, originando o caso de carga  $g_{3,linear}$  (Figura 77), e como uma carga uniformemente distribuída sobre a área das barreiras (Figuras 78 e 79).

Figura 77 – Caso de carga  $g_{3,linear}$



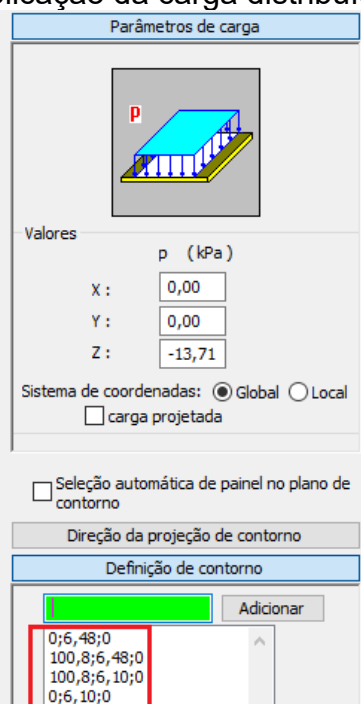
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 78 – Caso de carga  $g_3$



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

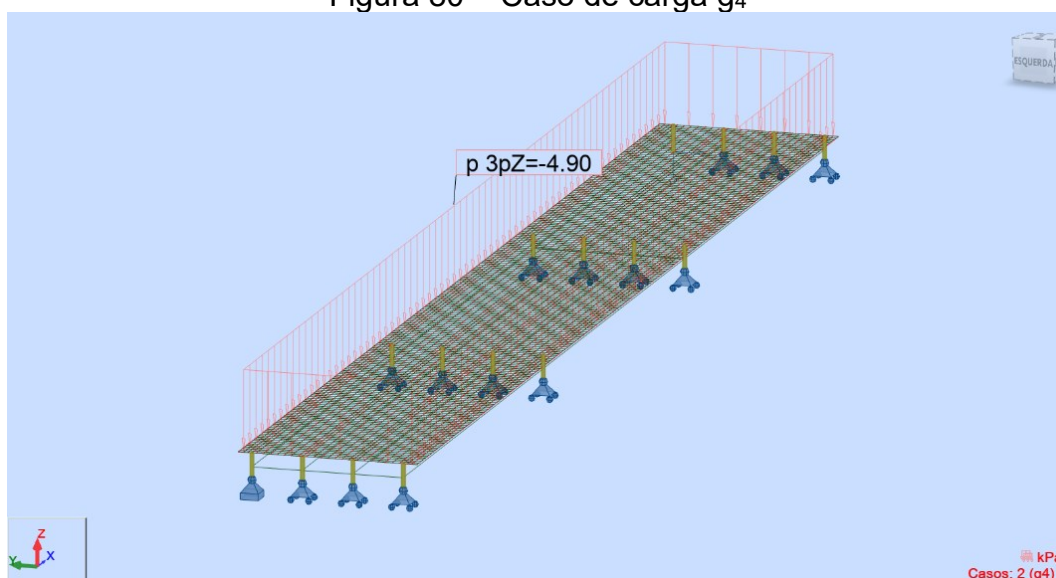
Figura 79 – Contorno para aplicação da carga distribuída equivalente a uma barreira



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$|\sum R_{g_3}| = 2 \cdot 13,71 \text{ kN/m}^2 \cdot (100,80 \text{ m} \cdot 0,38 \text{ m}) = 1050,30 \text{ kN}$$

O peso do revestimento asfáltico, camada de enchimento em concreto e futura repavimentação foi distribuído uniformemente sobre a área da pista (Figura 80).

Figura 80 – Caso de carga  $g_4$ 

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$|\sum R_{g_4}| = 4,904 \text{ kN/m}^2 \cdot (100,80 \text{ m} \cdot 12,2 \text{ m}) = 6030,74 \text{ kN}$$

No caso dos modelos unidimensionais, os valores extraídos para os momentos nas barras podem ser aplicados diretamente no dimensionamento das longarinas. Para o modelo de placas com vigas excêntricas, são necessárias etapas adicionais de pós-processamento. O momento fletor considerado no cálculo da seção composta corresponde ao somatório do momento resultante na seção pré-moldada, do momento resultante no trecho colaborante da laje e do momento causado pelo binário de forças axiais nas duas partes da seção.

Conforme Adams *et al.* (2019), quando não há previsão de força axial resultante na seção completa, a análise pode ser simplificada com a adoção das hipóteses de que o momento é desprezível e a tensão normal é uniforme ao longo da espessura da laje. Neste caso, o momento na seção composta pode ser calculado somando o momento apenas na barra que representa as vigas com o produto da força axial na barra pela distância entre os centroides da viga e da laje.

Considerando o procedimento acima, a análise de cargas verticais no tabuleiro não só dispensa a determinação de larguras colaborantes da laje, mas pode ser utilizada como método para definir o tamanho da mesa na seção composta. Utilizando a ferramenta de integração de tensões do programa de elementos finitos, é possível encontrar a largura de laje necessária para que a resultante total de forças axiais seja nula.

Como exemplo, é apresentado na Tabela 11 o cálculo do momento resultante no caso  $g_4$  para a seção localizada no centro de um dos vãos de extremidade das longarinas. Tal qual descrito na Tabela 9, a distância entre os centroides da viga pré-fabricada e da mesa colaborante da laje é de, aproximadamente, 0,99 m.

Tabela 11 – Esforços para cálculo de resultantes em seção composta

ESFORÇO	V1				V2			
	Viga	Laje	Aprox. <sup>1</sup>	Total	Viga	Laje	Aprox. <sup>1</sup>	Total
$Fx^2$ (kN)	454,45	-454,45	0,00	0,00	792,52	-792,52	0,00	0
$My$ (kNm)	539,74	3,34	989,84	993,18	726,05	7,86	1510,98	1518,84

<sup>1</sup> Momentos aproximados a partir dos esforços na barra e da excentricidade da viga.  
<sup>2</sup> Forças que tracionam a seção composta são positivas.

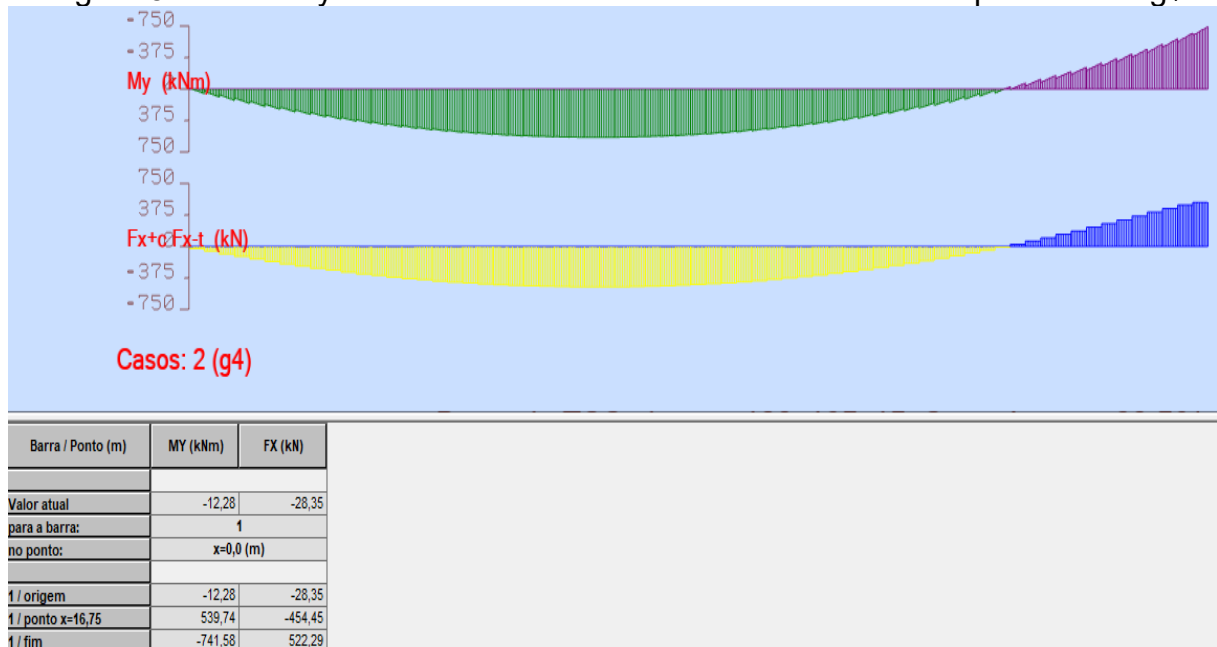
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Conforme a Figura 15, o RSA considera forças axiais de compressão como positivas em barras. Por outro lado, forças normais à seção de um elemento de superfície são positivas quando direcionadas para fora da seção, como pode ser visto

na Figura 16. A aplicação de métodos simplificados de validação indica que os momentos apenas nas barras são consideravelmente menores que os esperados para a seção composta.

Portanto, em regiões de momentos positivos, as forças axiais na viga pré-moldada e na laje devem ser, respectivamente, de tração e compressão, resultando em um momento a ser somado ao da barra. A Figura 81 demonstra, para a viga V1, que a ocorrência de resultantes axiais de tração no centroide das barras acompanha valores positivos de momentos fletores.

Figura 81 – Fx e My na barra 1 de modelo com elementos finitos para o caso g4



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

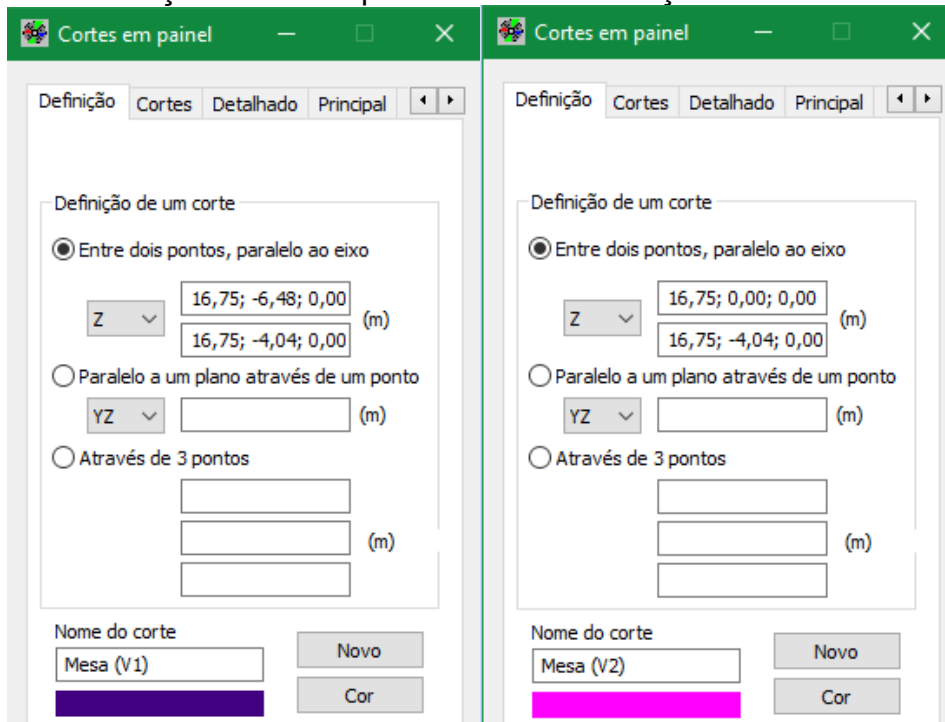
Após definir os cortes para análise das mesas colaborantes no RSA (Figura 82), o somatório de forças axiais em cada trecho de placa também é apresentado com sinal negativo (Figura 83). Nestes elementos, isso indica que a seção está sendo comprimida, em concordância com o comportamento esperado.

As larguras necessárias para que as forças axiais totais sejam nulas foram encontradas com ajustes sucessivos das coordenadas que definem os cortes na laje. Os valores presentes na Figura 82 indicam que as recomendações das normas brasileiras superestimaram a largura da mesa para vigas externas e subestimaram para as vigas internas.

Entretanto, destaca-se que o modelo de elementos finitos consegue representar a influência da geometria do carregamento sobre a ação composta entre

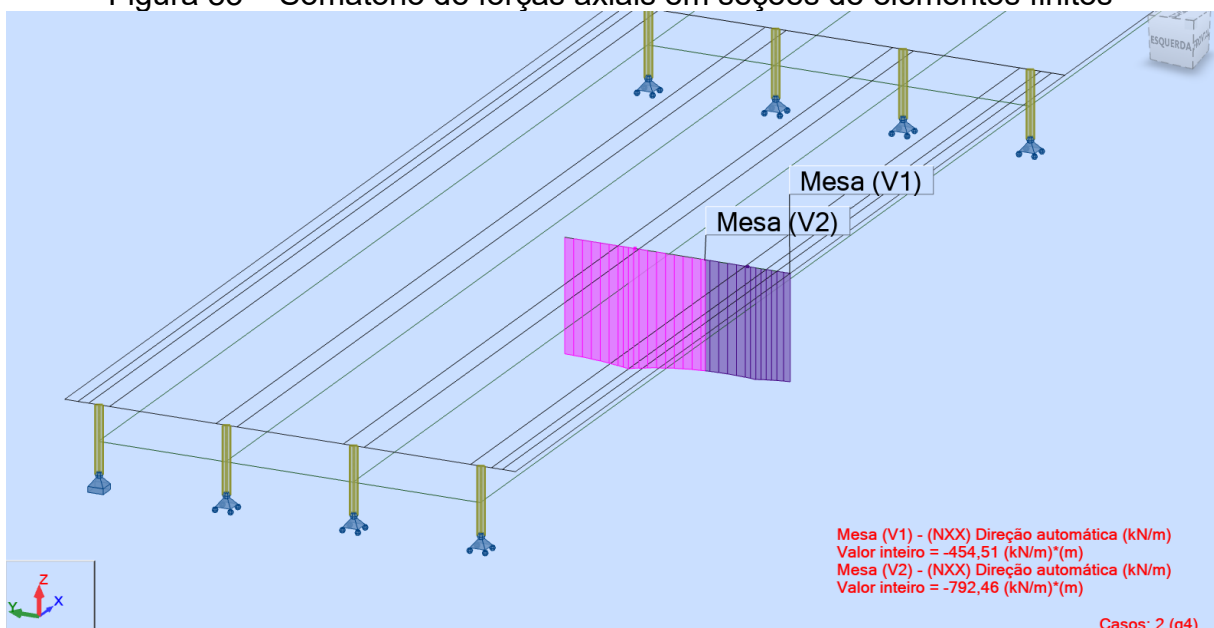
as vigas e a laje. Caso este método fosse utilizado para determinar as seções compostas na verificação de estados limites, recomenda-se que um carregamento distribuído uniformemente sobre toda a largura da ponte fosse tomado como referência.

Figura 82 – Definição de cortes para análise de esforços em mesas colaborantes



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

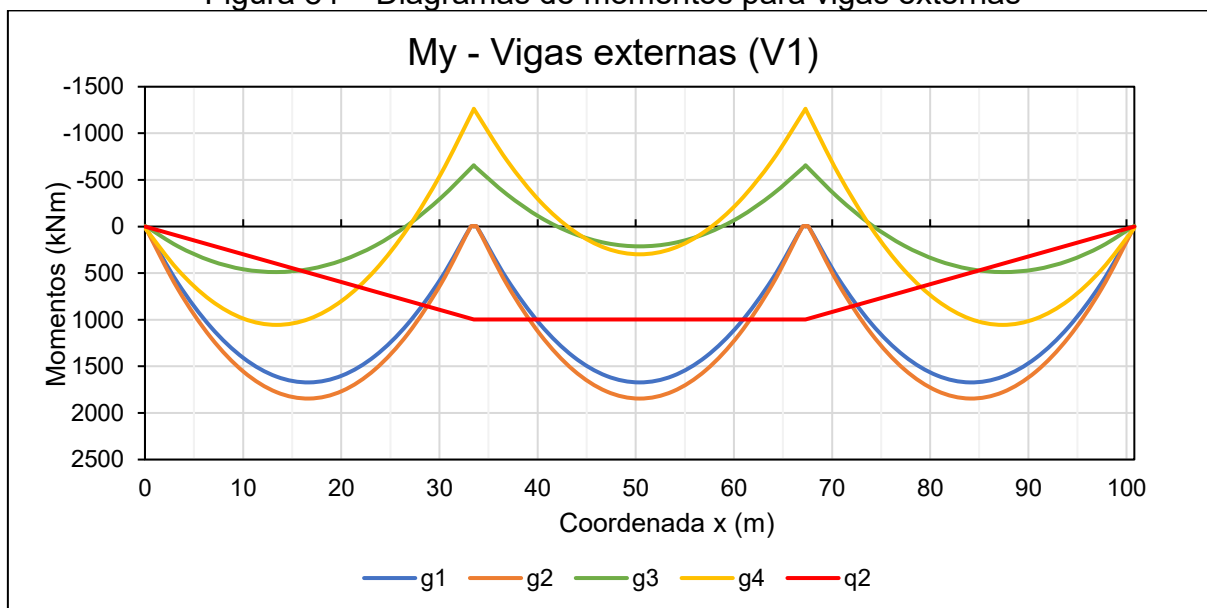
Figura 83 – Somatório de forças axiais em seções de elementos finitos



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

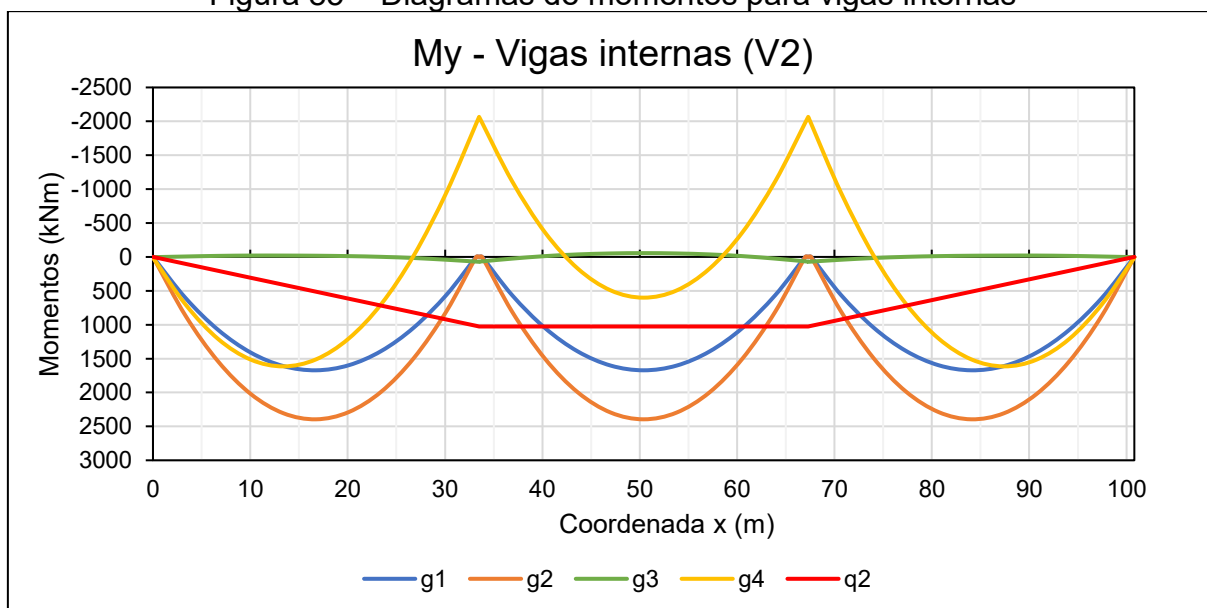
Comparando os valores da Tabela 11 e da Figura 83, existem diferenças mínimas entre os esforços nas barras e os somatórios nas placas, que poderiam ser reduzidas com mais iterações de ajuste dos cortes. Observa-se que o somatório de forças axiais considerando as duas longarinas resulta em valor nulo. Com o uso do procedimento simplificado, foram gerados diagramas de momentos para análise das seções completas (Figuras 84 e 85). Também são apresentados os deslocamentos das barras em relação ao eixo z global (Figuras 86 e 87).

Figura 84 – Diagramas de momentos para vigas externas



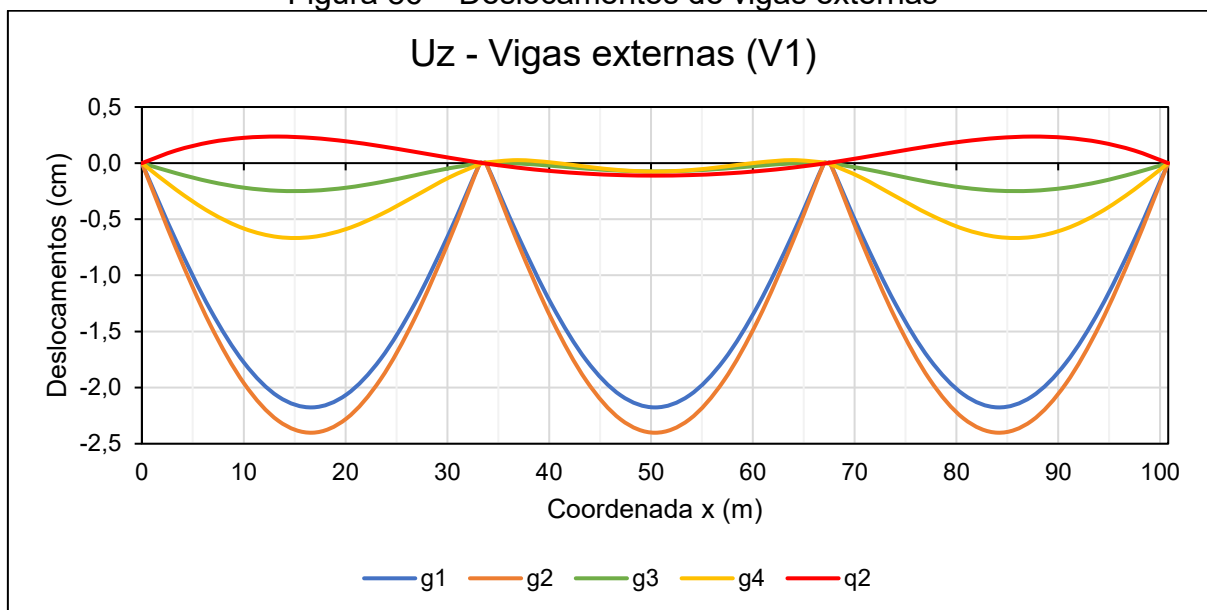
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 85 – Diagramas de momentos para vigas internas



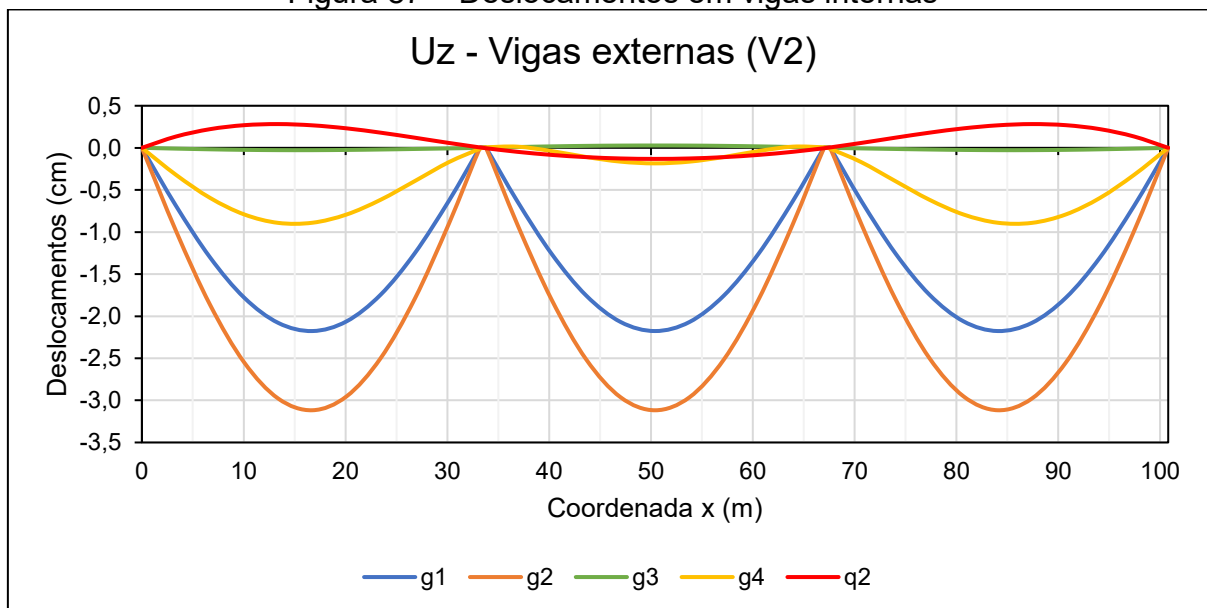
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 86 – Deslocamentos de vigas externas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 87 – Deslocamentos em vigas internas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

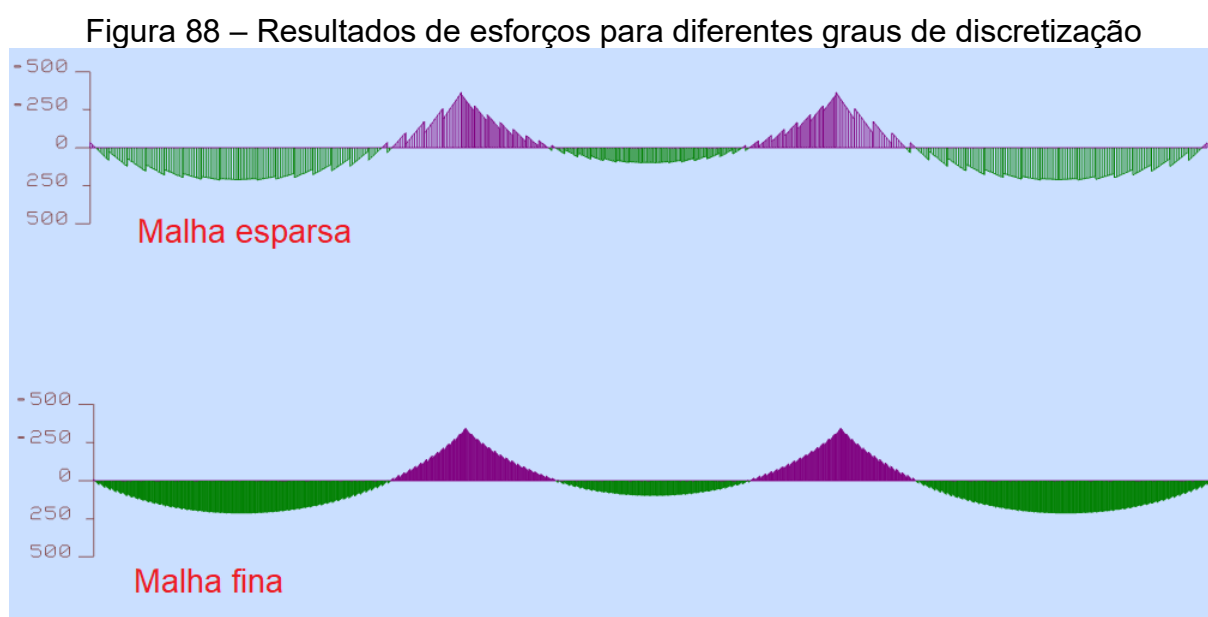
Estes mesmos dados são apresentados como tabelas no Apêndice C. Atesta-se a simetria dos resultados em concordância com a geometria da ponte e dos carregamentos. Nas coordenadas referentes aos apoios internos da estrutura contínua, dois resultados distintos são reproduzidos nas tabelas. Cada um destes corresponde à solução nodal considerando uma das barras adjacentes.

Conforme Kimura (2018), esta descontinuidade é esperada em pontos de conexão entre elementos ortogonais devido à imposição de compatibilidade entre



esforços de flexão e torção. De fato, como pode ser visto na Figura 81, isto ocorre em todos os nós dos modelos de placas com vigas excêntricas.

Para os nós ao longo dos vãos da estrutura, os valores apresentados correspondem à média daqueles calculados através do MEF, ajuste realizado automaticamente pelo RSA na exportação de dados. O uso desses valores médios no dimensionamento torna-se mais adequado à medida que o grau de discretização aumenta (Figura 88).



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os casos  $g_3$  e  $g_{3,linear}$  apresentaram resultados extremamente semelhantes, com diferenças de deslocamentos na ordem de milésimos de centímetros e de momentos inferiores a 30 kNm. Observou-se que a carga das barreiras rígidas praticamente é resistida apenas pelas vigas externas. Ainda assim, devido à distribuição de carga nos casos  $g_2$  e  $g_4$ , os máximos momentos positivos e negativos devido às cargas permanentes diretas foram, respectivamente, 12% e 4% superiores nas vigas internas.

Durante o cálculo para repartição de carga no caso  $g_2$ , estimou-se que os esforços devido a um carregamento uniformemente distribuído sobre toda a largura da ponte seriam 30% maiores nas vigas internas. Para o caso  $g_4$ , este valor foi de 52,6%. Portanto, a distribuição desigual de carga nos casos  $g_2$ ,  $g_3$  e  $g_4$  acabou por equilibrar os esforços entre vigas internas e externas na ponte, o que corrobora com argumento contra a adoção de transversinas intermediárias.

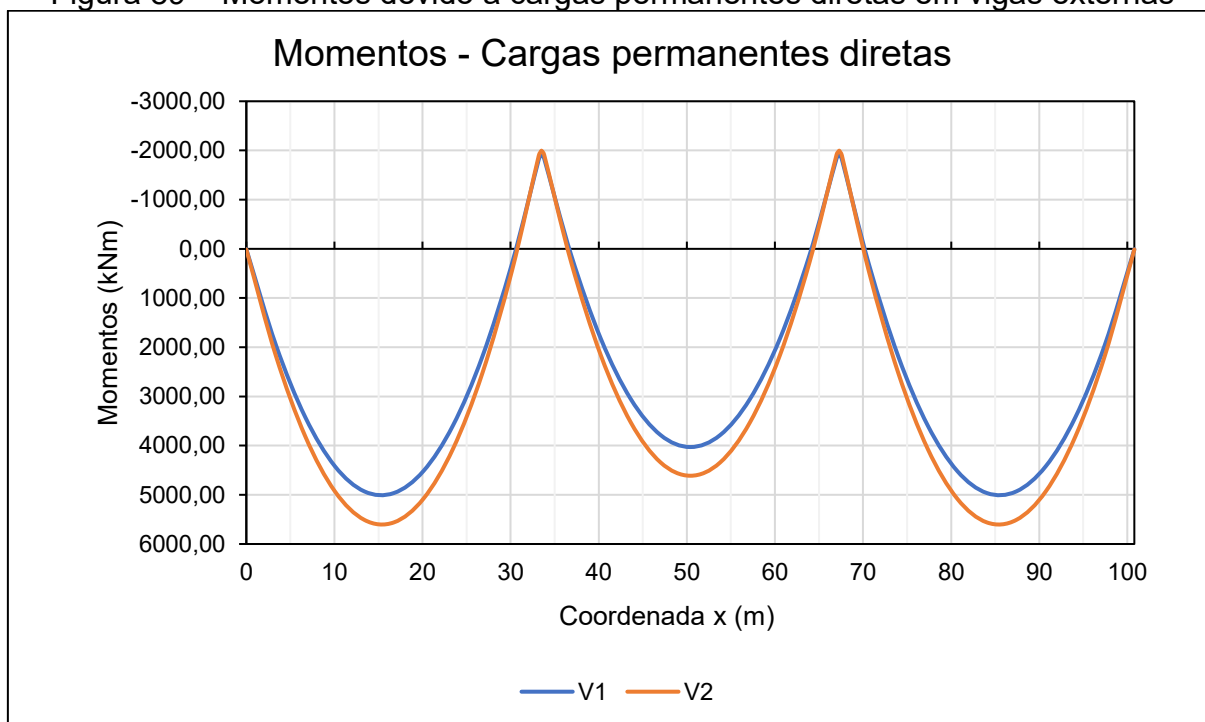
Tabela 12 – Momentos devido às cargas permanentes diretas

x (m)	x/L (m)	V1 (kNm)	V2 (kNm)
0,00	0,00	7,31	13,09
3,35	0,10	1952,27	2172,28
6,70	0,20	3425,40	3816,57
10,05	0,30	4418,42	4929,48
13,40	0,40	4930,85	5510,43
16,75	0,50	4963,71	5560,54
20,10	0,60	4516,83	5079,46
23,45	0,70	3592,06	4068,50
26,80	0,80	2186,25	2523,35
30,15	0,90	301,80	445,21
33,20	0,99	-1821,53	-1897,78
33,50	1,00	-1916,35	-1994,06
33,50	0,00	-1917,89	-1996,32
33,80	0,01	-1839,01	-1915,53
36,88	0,10	131,36	276,51
40,26	0,20	1837,52	2175,82
43,64	0,30	3053,94	3528,95
47,02	0,40	3785,16	4341,80
50,40	0,50	4028,62	4612,39
53,78	0,60	3785,79	4342,48
57,16	0,70	3053,94	3528,95
60,54	0,80	1837,52	2175,82
63,92	0,90	131,36	276,51
67,00	0,99	-1839,01	-1915,53
67,30	1,00	-1917,89	-1996,32
67,30	0,00	-1916,35	-1994,06
67,60	0,01	-1821,53	-1897,78
70,65	0,10	301,80	445,21
74,00	0,20	2186,25	2523,35
77,35	0,30	3592,06	4068,50
80,70	0,40	4516,83	5079,46
84,05	0,50	4963,71	5560,54
87,40	0,60	4930,85	5510,43
90,75	0,70	4418,42	4929,48
94,10	0,80	3425,40	3816,57
97,45	0,90	1952,27	2172,28
100,80	1,00	7,31	13,09

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Dados da Tabela 12, que contém os momentos devido à todas as cargas permanentes diretas, são apresentados na Figura 89 para comparação entre vãos centrais e de extremidade. Os máximos momentos positivos nas extremidades ocorrem próximos à seção intermediária do vão, devido à preponderância dos casos  $g_1$  e  $g_2$ . Considerando vigas internas e externas, estes valores foram pouco mais que 20% superiores aos máximos momentos positivos no vão central.

Figura 89 – Momentos devido a cargas permanentes diretas em vigas externas



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

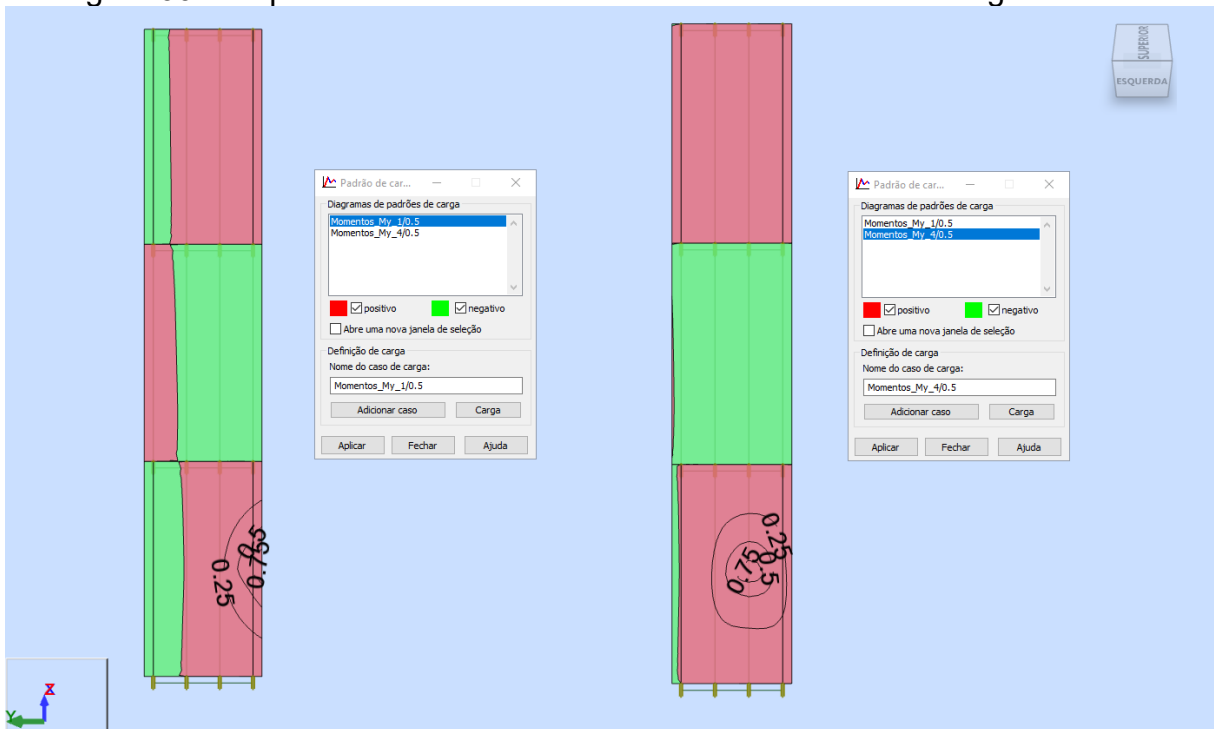
### 7.2.2 Caso q1: carga móvel

O RSA não é um *software* dedicado exclusivamente à análise estrutural de pontes e não realiza automaticamente o posicionamento das cargas móveis em posições críticas. O programa analisa este tipo de carregamento como o somatório de múltiplos casos de carregamento estático, deslocando as ações externas sobre a estrutura segundo um padrão de movimento definido pelo usuário.

O recurso do RSA para geração de superfícies de influência permite uma análise majoritariamente qualitativa, já que resultados numéricos não podem ser extraídos para pós-processamento. Além disso, a ferramenta demanda grande capacidade computacional para modelos com número elevado de deslocabilidades.

As superfícies de influência para momentos nas seções centrais do vão de extremidade apresentadas na Figura 90 foram desenvolvidas a partir de um modelo com grau de discretização reduzido. O comportamento observado coincide com a expectativa para pontes contínuas, em que a contribuição para momentos positivos e negativos ocorre de forma alternada entre os vãos.

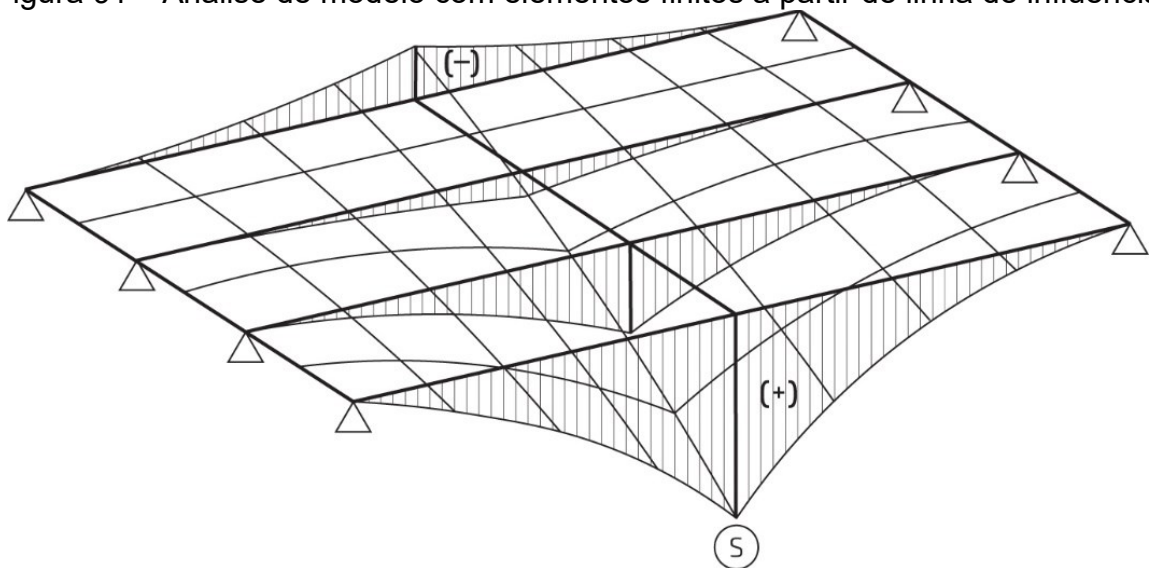
Figura 90 – Superfícies de influência de momentos fletores nas vigas V1 e V2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Neste contexto, foi necessário o uso de linhas de influência para aplicação do trem tipo de forma a obter valores extremos de solicitações nas vigas. Como descreve Valeriano (2021), o aspecto da superfície de influência pode ser aproximado pelo estudo da seção central do vão (Figura 91). Este procedimento torna-se mais adequado quando há transversinas intermediárias.

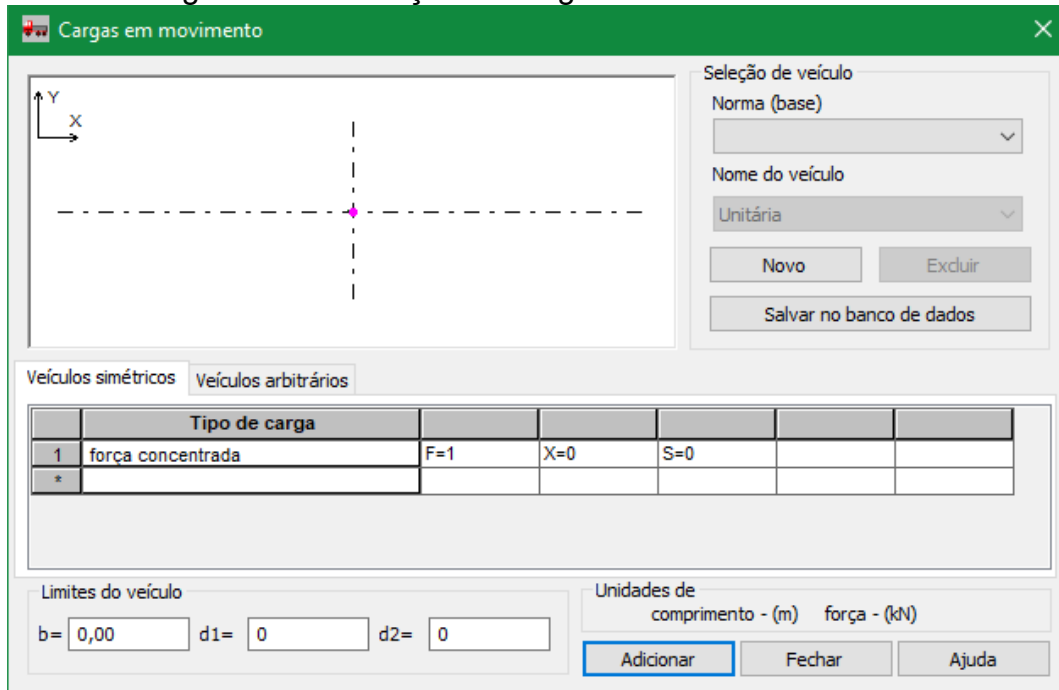
Figura 91 – Análise de modelo com elementos finitos a partir de linha de influência



Fonte: Valeriano (2021)

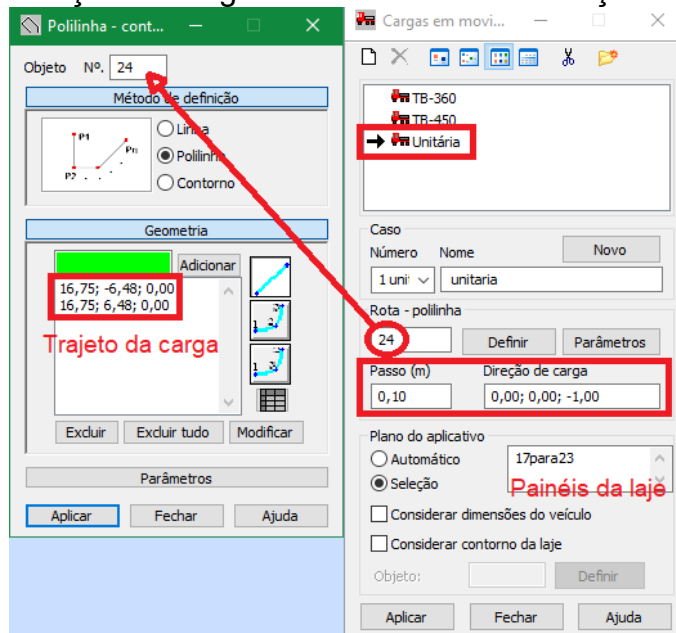
A Figura 92 mostra a definição de uma carga móvel unitária no RSA, que foi aplicada ao longo da seção central do vão de extremidade (Figura 93). Além do trajeto de movimento, o usuário deve indicar a distância entre cada posição da carga a ser calculada. As Figuras 94 e 95 apresentam as linhas de influência transversais de momentos e forças axiais para as barras equivalentes às vigas V1 e V2.

Figura 92 – Definição de carga móvel unitária no RSA



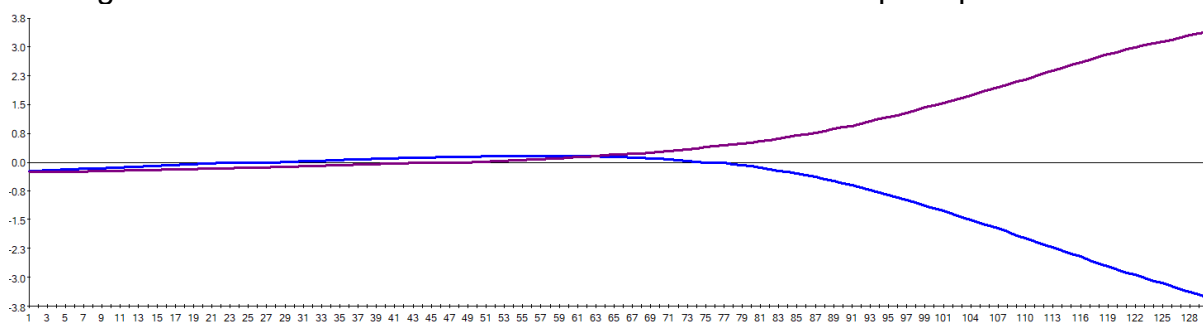
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 93 – Definição de carga móvel unitária sobre seção central do vão 1



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

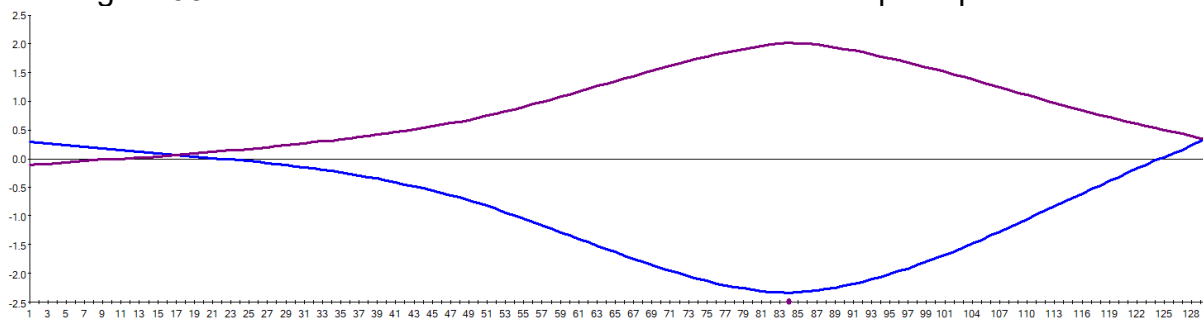
Figura 94 – Linhas de influência transversais em barras que representam V1



Barra/Ponto/Caso/Pos./Dist.	FX (kN)	MY (kNm)
Soma (integral) * (m)	-8,27	9,63
Soma (+) * (m)	0,57	10,34
Soma (-) * (m)	-9,84	-9,70

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 95 – Linhas de influência transversais em barras que representam V2



Barra/Ponto/Caso/Pos./Dist.	FX (kN)	MY (kNm)
Soma (integral) * (m)	-12,01	11,92
Soma (+) * (m)	0,43	11,88
Soma (-) * (m)	-12,44	-9,96

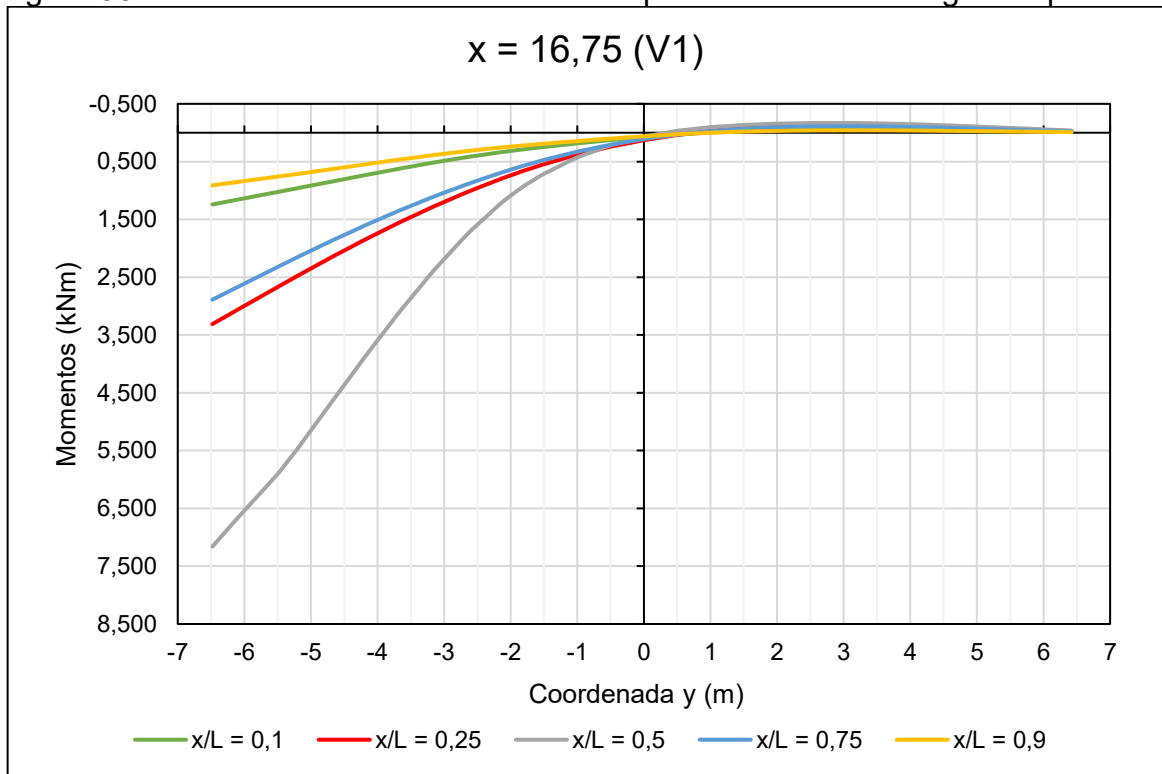
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como é possível observar na Figura 90, a coordenada y em que os valores das linhas de influência transversais mudam de sinal varia ao longo do comprimento da ponte. Para avaliar o impacto deste fator e definir as posições carregadas para o caso  $q_1$ , as linhas de influência transversais também foram obtidas com aplicação da carga unitária em outras posições no vão de extremidade.

A partir do procedimento simplificado para somatório de esforços, são geradas as linhas de influência transversais para os momentos resultantes na seção composta (Figuras 96 e 97). A variação na largura dos trechos positivos foi da ordem de 50 cm. As abscissas de máximo das curvas mantiveram-se constantes com o deslocamento longitudinal da carga.

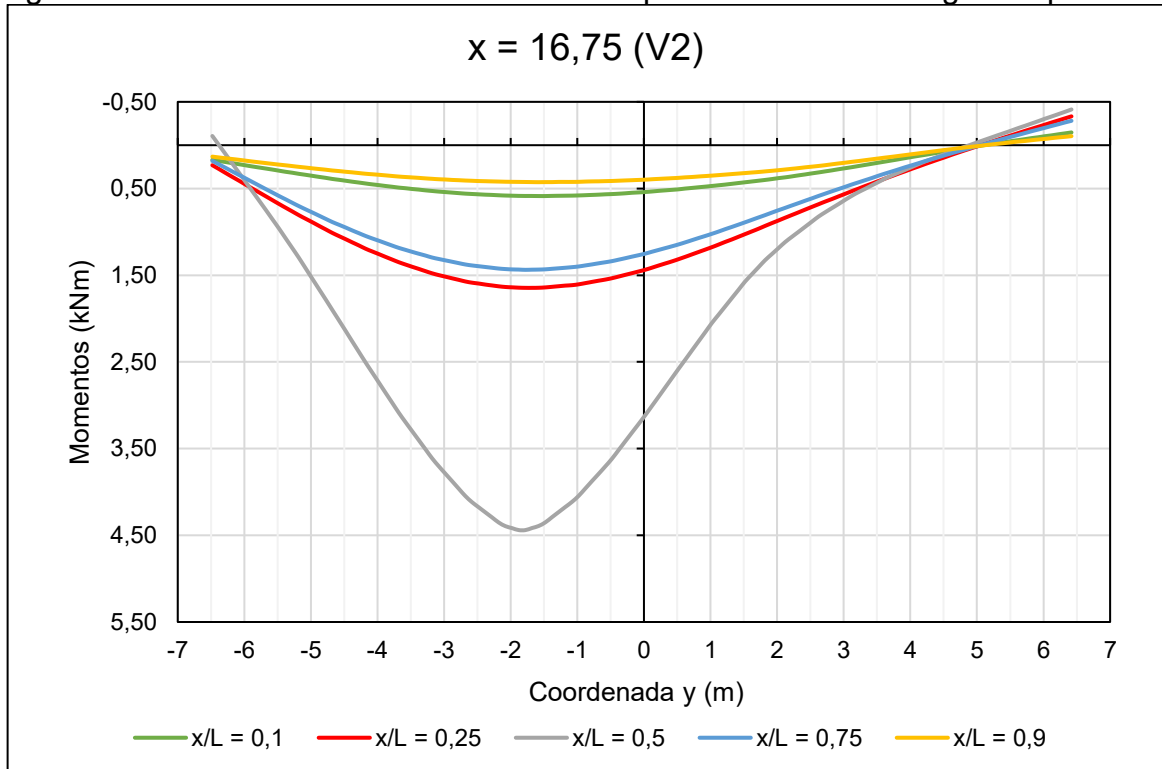
Haja vista que a seção crítica para dimensionamento também é a seção central do vão de extremidade e que a contribuição para os esforços internos diminui à medida que a carga se afasta, manteve-se a hipótese inicial para posicionamento da carga móvel sobre o tabuleiro.

Figura 96 – Linhas de influência transversais para momentos na viga composta V1



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 97 – Linhas de influência transversais para momentos na viga composta V2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

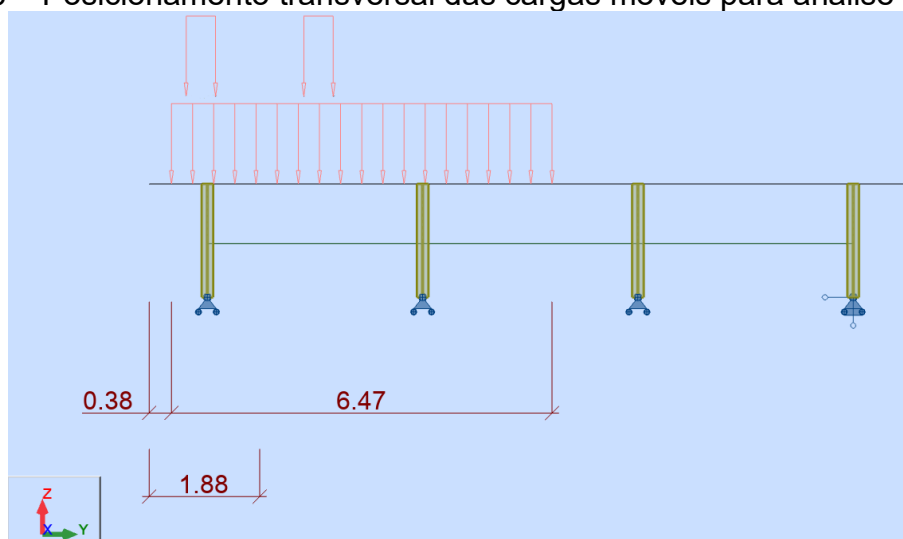
A Tabela 13 apresenta a largura do tabuleiro que deve ser carregada na análise de cada viga, desconsiderando regiões destinadas às barreiras rígidas. A partir destes valores, foi calculado o coeficiente do número de faixas. As Figuras 98 e 99 demonstram o posicionamento transversal das cargas móveis.

Tabela 13 – Dados para posicionamento da carga móvel no tabuleiro

VALOR	V1	V2
$b_{m\acute{o}vel}$	6,47 m	10,97 m
$y_{m\acute{a}x}$	-6,48 m	-1,83 m
CNF	1	0,95

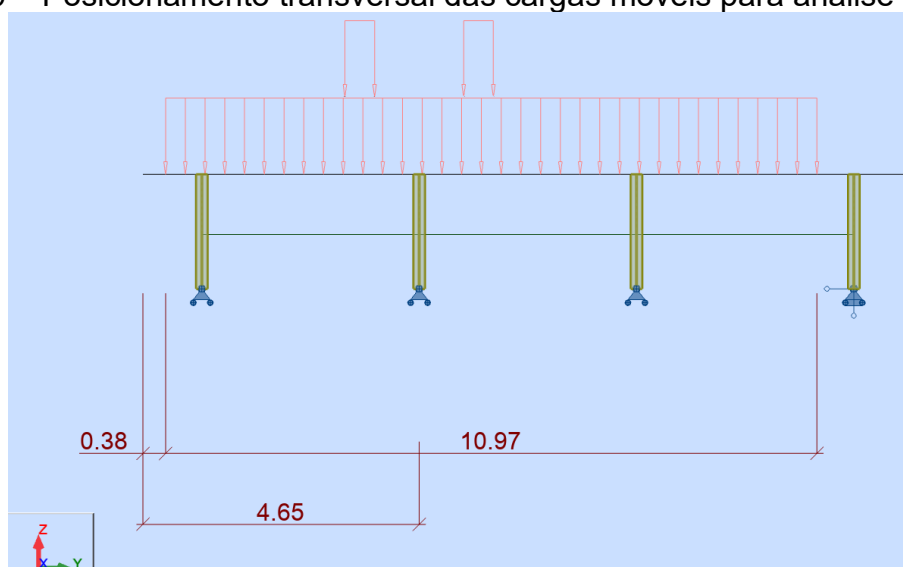
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 98 – Posicionamento transversal das cargas móveis para análise da viga V1



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 99 – Posicionamento transversal das cargas móveis para análise da viga V2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)



A carga uniformemente distribuída e o veículo tipo que compõem o TB-450 são definidos separadamente no RSA. Como o programa não posiciona automaticamente as cargas nas posições críticas, cada uma dessas parcelas percorreu o comprimento inteiro da ponte para geração de linhas de influência longitudinais, as quais foram utilizadas para obtenção dos esforços mais desfavoráveis devido a todo o trem tipo.

No *software*, foram definidas cargas móveis lineares de 5 kN/m, com largura correspondente à largura de carregamento crítico para a viga analisada. A Figura 100 demonstra, por exemplo, a carga para análise da viga V1.

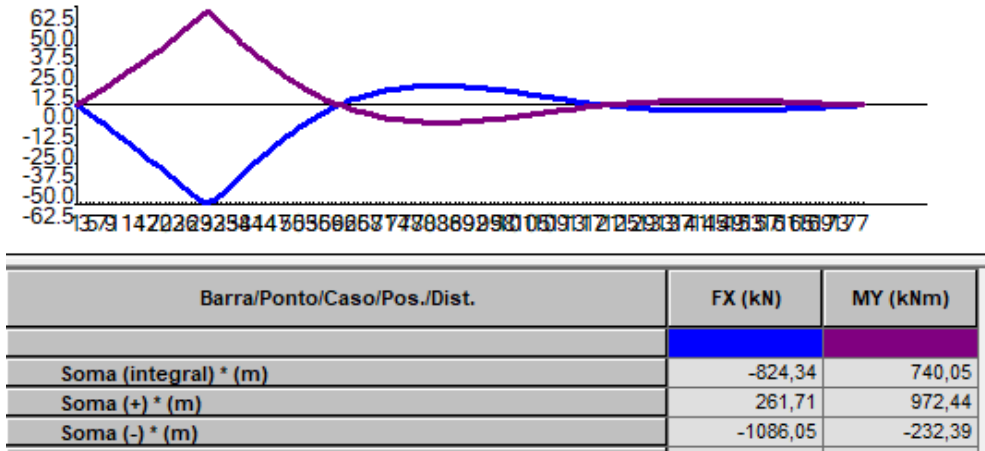
Figura 100 – Definição no RSA da carga de multidão na viga V1

Tipo de carga						
1	carga linear	Q=5	X=0	Y=0	DX=0	DY=6,47
*						

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

As integrais da linha de influência longitudinal nas regiões positiva e negativa da curva equivalem aos esforços devido à ocupação do tabuleiro de forma mais desfavorável pela carga superficial de 5 kN/m<sup>2</sup>. Os valores das integrais para regiões positivas e negativas são apresentados automaticamente pelo RSA. Como exemplo, a Figura 101 mostra as linhas de influência para a seção central do vão 1 na viga V2, assim como as integrais das regiões positivas e negativas. Como esperado, o desenvolvimento de forças axiais de tração acompanha momentos positivos.

Figura 101 – Linhas de influência longitudinais devido à carga de multidão para a coordenada x = 16,75 m na viga V2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

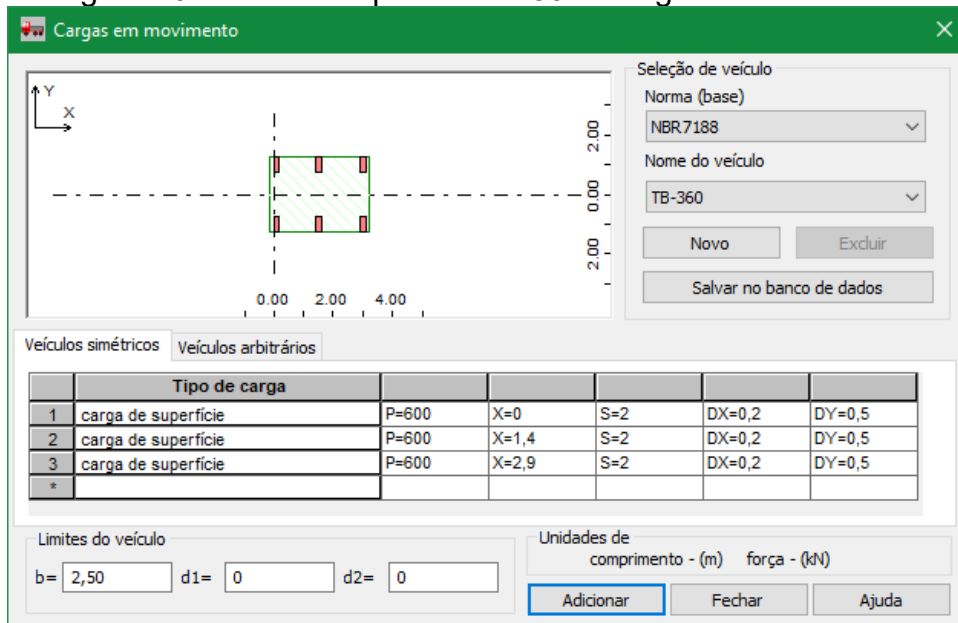
Realiza-se o somatório de esforços para determinar o momento máximo e mínimo na seção composta devido à carga de multidão.

$$M_{max}(16,75) = 972,44 + [(-0,9904) \cdot (-1086,05)] = 2048,09 \text{ kNm}$$

$$M_{min}(16,75) = -232,39 + [(-0,9904) \cdot 261,71] = -491,59 \text{ kNm}$$

O veículo tipo da NBR 7188/2024 está configurado nativamente na versão 2024 do RSA, incluindo sua forma homogeneizada (Figura 102).

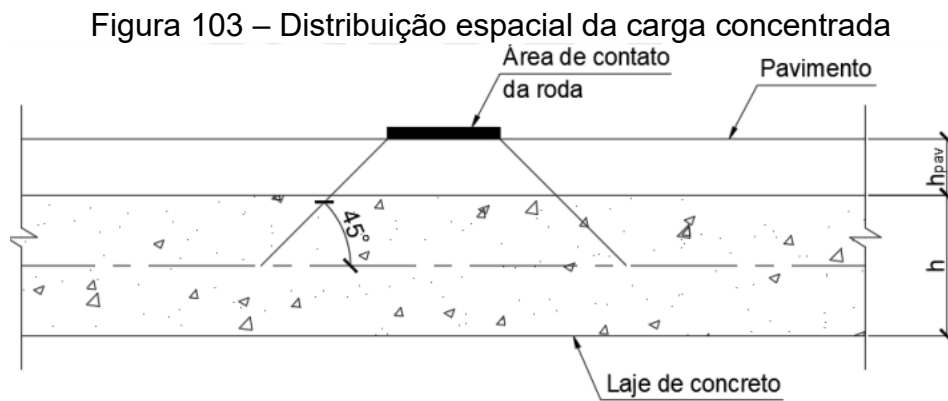
Figura 102 – Veículo tipo do TB-450 homogeneizado no RSA



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como é feito pelo programa, a NBR 7188/2024 prevê que as cargas concentradas que correspondem ao peso das rodas sejam distribuídas espacialmente. A prática é recomendada por AASHTO (2020) para reduzir as concentrações de tensão típicas de modelos de elementos finitos.

A norma brasileira permite ainda que a área de distribuição seja ampliada devido à transmissão das cargas até o plano médio da laje (Figura 103). O procedimento resultaria em uma superfície com dimensões de 35,5 cm e 65,5 cm, mas não foi empregado no trabalho. Considerando o grau de discretização aplicado, o impacto desta mudança sobre os momentos nas seções compostas é mínimo e teria efeito maior sobre as tensões de cisalhamento na laje.



Fonte: ABNT (2024)

Para cada coordenada  $x$ , as linhas de influência de  $F_x$  e  $M_y$  nas barras devido ao veículo tipo são transformadas em uma linha de influência de momentos resultantes na seção composta. Os valores máximos e mínimos são sobrepostos ao valor crítico correspondente causado pela carga de multidão para gerar as envoltórias de momento na seção composta devido ao trem tipo completo.

Seguindo com a análise da seção central do vão de extremidade da viga V2, os momentos máximo e mínimo devido ao veículo tipo foram, respectivamente, 1326,40 kNm e -203,90 kNm. Calcula-se abaixo os momentos na seção composta devido à carga móvel completa.

$$M_{q1,m\acute{a}x} = 2048,09 + 1326,40 = 3374,49 \text{ kNm}$$

$$M_{q1,m\grave{i}n} = -491,59 - 203,90 = -695,49 \text{ kNm}$$

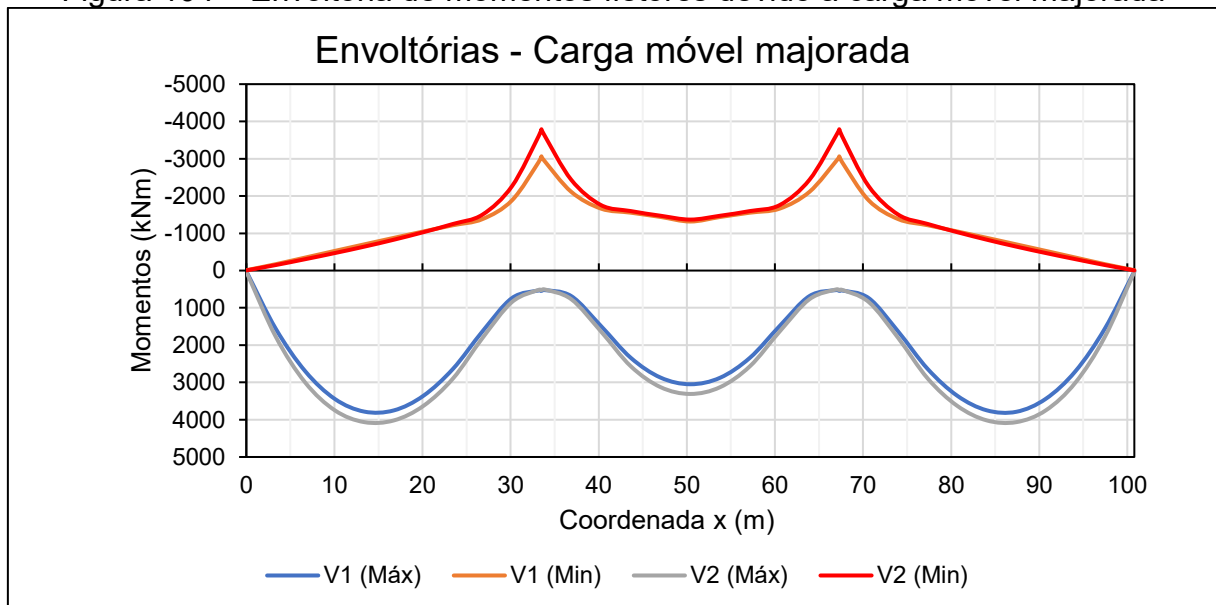
Os coeficientes de ponderação calculados para cada viga estão resumidos na Tabela 14. As envoltórias de momento majoradas são apresentadas na Figura 104 e em forma de tabela no Apêndice C. O módulo dos máximos momentos positivos e negativos, respectivamente, foi 7% e 24% superior nas vigas internas.

Tabela 14 – Coeficientes de majoração das cargas móveis

VIGA	CIV	CIA	CNF	$\phi$
V1	1,254	1,00	1,00	1,254
V2	1,254	1,00	0,95	1,191

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 104 – Envoltória de momentos fletores devido à carga móvel majorada



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

### 7.3 Validação de resultados

Os resultados dos modelos unidimensionais de viga biapoiada são verificados com expressões conhecidas da isostática e resistência dos materiais. Para os casos  $g_1$  e  $g_2$ , o emprego das expressões do Quadro 10 coincide com os resultados do modelo computacional, ainda que não considerem as deformações por cisalhamento.

Como exemplo, calcula-se o momento e deformação na seção central do vão de extremidade da viga V2 devido ao seu peso próprio. Os resultados obtidos a partir do modelo no RSA foram 1672,17 kNm e -2,176 cm.

Quadro 10 – Equações para vigas biapoizadas com carga uniformemente distribuída

GRANDEZA	FUNÇÃO GERAL	VALOR MÁXIMO
<b>Fz</b>	$F_z(x) = q \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right)$	$F_z(0) = F_z(L) = \frac{q L}{2}$
<b>My</b>	$M_y(x) = \frac{q x}{2} \cdot (L - x)$	$M_y(0,5L) = \frac{q L^2}{8}$
<b>Uz</b>	$U_z(x) = -\frac{q x}{24 EI_y} (L^3 - 2 L x^2 + x^3)$	$U_z(0,5L) = -\frac{5 q L^4}{384 EI_y}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$M_y(16,75) = \frac{12,1375 \cdot 16,75}{2} \cdot (33,2 - 16,75) = 1672,17 \text{ kNm}$$

$$U_z(16,75) =$$

$$-\frac{12,1375 \cdot 16,75}{24 \cdot 39531330 \cdot 0,22316} \cdot (33,2^3 - 2 \cdot 33,2 \cdot 16,75^2 + 16,75^3) = -0,02176 \text{ m}$$

O somatório das reações de apoio nos modelos foi igual ao calculado analiticamente. A Figura 105 apresenta estes valores para os casos g<sub>3</sub> e g<sub>4</sub>, comprovando também que os somatórios de forças axiais e momentos de torção são nulos ainda que elementos isolados apresentem estes esforços.

Figura 105 – Somatório de forças e reações em modelo de elementos finitos no RSA

Nó/Caso	FX (kN)	FY (kN)	FZ (kN)	MX (kNm)	MY (kNm)	MZ (kNm)
<b>Caso 1</b>	<b>g3</b>					
Soma de val.	0,00	-0,00	1050,30	0,00	0,00	0,0
Soma de reação	0,00	0,00	1050,30	-0,00	-52934,90	-0,00
Soma de for.	0,0	0,0	-1050,30	0,00	52934,90	0,0
Verificar val.	0,00	0,00	-0,00	-0,00	-0,00	-0,00
Precisão	5,29050e-10	1,89960e-19				
<b>Caso 2</b>	<b>g4</b>					
Soma de val.	-0,00	-0,00	6030,74	-0,00	-0,00	-0,00
Soma de reação	0,00	-0,00	6030,74	-0,00	-303949,45	-0,00
Soma de for.	0,0	0,0	-6030,74	0,00	303949,45	0,0
Verificar val.	0,00	-0,00	0,00	-0,00	-0,00	-0,00
Precisão	6,78450e-10	4,09724e-20				

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Para estes carregamentos, aplicados no modelo com elementos finitos de superfície, a validação de esforços e deslocamentos é feita empregando critérios de repartição de carga e analisando cada longarina isoladamente como viga contínua

unidimensional. O conceito de área de influência foi utilizado para os casos estáticos  $g_3$  e  $g_4$ , assim como foi feito para definir os carregamentos no caso  $g_2$ .

Os coeficientes de repartição são calculados no Quadro 11 e observa-se que a divisão das ações entre as vigas se aproxima da obtida com o modelo computacional. O peso das barreiras rígidas é resistido apenas pelas vigas externas enquanto o peso do pavimento resulta em esforços 50% superiores nas vigas internas.

Quadro 11 – Repartição de carga segundo largura de influência

CASO	V1	V2
$g_3$	$\frac{0,38 \text{ m}}{2 \cdot 0,38 \text{ m}} = 0,5$	$\frac{0 \text{ m}}{2 \cdot 0,38 \text{ m}} = 0$
$g_4$	$\frac{2,44 \text{ m}}{12,2 \text{ m}} = 0,2$	$\frac{3,66 \text{ m}}{12,2 \text{ m}} = 0,3$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

As cargas lineares aplicadas em cada validação são apresentadas no Quadro 12. O modelo auxiliar unidimensional empregado é idêntico ao descrito para análise da variação de temperatura.

Quadro 12 – Cargas lineares para verificação de modelo com elementos finitos

CASO	V1	V2
$g_3$	$2 \cdot 5,21 \text{ kN/m} \cdot 0,5 = 5,21 \text{ kN/m}$	$2 \cdot 5,21 \text{ kN/m} \cdot 0 = 0 \text{ kN/m}$
$g_4$	$4,904 \text{ kN/m}^2 \cdot 12 \text{ m} \cdot 0,2 = 11,77 \text{ kN/m}$	$4,904 \text{ kN/m}^2 \cdot 12 \text{ m} \cdot 0,3 = 17,654 \text{ kN/m}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Momentos obtidos a partir da análise convencional de viga contínua são comparados àqueles do modelo de elementos finitos nas Tabelas 15, 16 e 17. Considerando o somatório dos momentos em um par de viga interna e externa, a diferença entre os modelos foi inferior a 2% do valor estimado de forma simplificada. Quando analisado o somatório dos casos  $g_3$  e  $g_4$  em uma mesma viga, as diferenças também foram mínimas e a favor da segurança. A comparação dos deslocamentos está nas Tabelas 18 e 19. Mesmo analisando cada caso isolado, a maior diferença nas seções centrais dos vãos foi de 1 mm.

Tabela 15 – Validação de momentos dos casos  $g_3$  e  $g_4$  na seção  $x = 16,75$  m

VIGA	$M_{y,g3}$ (kNm)		$M_{y,g4}$ (kNm)		$M_{y,g3} + M_{y,g4}$	
	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF
V1	437,10	456,29	987,45	989,84	1424,55	1446,12 (+1,5%)
V2	0,00	-17,72	1481,54	1510,98	1481,54	1493,26 (+0,8%)
V1+V2	437,10	438,57 (+0,3%)	2468,99	2500,82 (+1,3%)	2906,09	2939,38 (+1,1%)

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 16 – Validação de momentos dos casos  $g_3$  e  $g_4$  na seção  $x = 33,50$  m

VIGA	$M_{y,g3}$ (kNm)		$M_{y,g4}$ (kNm)		$M_{y,g3} + M_{y,g4}$	
	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF
V1	-587,54	-655,94	-1327,32	-1261,17	-1914,86	-1917,12 (-0,1%)
V2	0	70,69	-1989,97	-2065,88	-1989,97	-1995,19 (-0,3%)
V1+V2	-587,54	-585,26 (+0,4%)	-3317,29	-3327,05 (-0,3%)	-3904,83	-3912,31 (-0,2%)

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 17 – Validação de momentos dos casos  $g_3$  e  $g_4$  na seção  $x = 50,40$  m

VIGA	$M_{y,g3}$ (kNm)		$M_{y,g4}$ (kNm)		$M_{y,g3} + M_{y,g4}$	
	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF
V1	156,48	212,72	353,5	298,03	509,98	510,75 (+0,2%)
V2	0	-55,95	531,11	600,73	531,11	544,78 (+2,6%)
V1+V2	156,48	156,78 (+0,2%)	884,61	898,76 (+1,6%)	1041,09	1055,53 (+1,4%)

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 18 – Validação de deslocamentos dos casos  $g_3$  e  $g_4$  na seção  $x = 16,75$  m

VIGA	$U_{z,g3}$ (cm)		$U_{z,g4}$ (cm)		$U_{z,g3} + U_{z,g4}$	
	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF
V1	-0,255	-0,246	-0,575	-0,658	-0,830	-0,904
V2	0,000	-0,028	-0,826	-0,890	-0,826	-0,917

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 19 – Validação de deslocamentos dos casos  $g_3$  e  $g_4$  na seção  $x = 50,40$  m

VIGA	$U_{z,g3}$ (cm)		$U_{z,g4}$ (cm)		$U_{z,g3} + U_{z,g4}$	
	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF	Simplificado	MEF
V1	-0,027	-0,074	-0,060	-0,075	-0,087	-0,149
V2	0,000	0,028	-0,087	-0,185	-0,087	-0,157

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Para validação dos momentos obtidos devido à carga móvel, realizou-se primeiramente o traçado das linhas de influência transversais pelo método de Engesser-Courbon para novo posicionamento do trem tipo. Neste método, as maiores ordenadas das linhas de influência estão na lateral da ponte, diferindo significativamente do que foi observado para as vigas internas através do modelo computacional.

Considerando que não existem transversinas intermediárias na ponte estudada, era esperado que o comportamento previsto para um tabuleiro com rigidez transversal infinita não fosse compatível com a análise por elementos finitos. Ainda assim, havia interesse em avaliar os resultados de um método cujo desenvolvimento analítico pode ser feito facilmente de forma manual.

As equações dos quinhões de carga para cada viga são deduzidas abaixo, considerando que a ponte estudada possui inércia e espaçamento de longarinas constantes. Assim como na modelagem por elementos finitos, as coordenadas  $y$  da seção transversal da ponte foram medidas em relação ao seu eixo central.

$$e = y$$

$$\eta_i(y) = \frac{1}{4} \left[ 1 + 6 \cdot \frac{(2i - 4 - 1)y}{(4^2 - 1) \cdot 3,66} \right] = \frac{1}{4} \left[ 1 + 6y \frac{(2i - 5)}{54,9} \right]$$

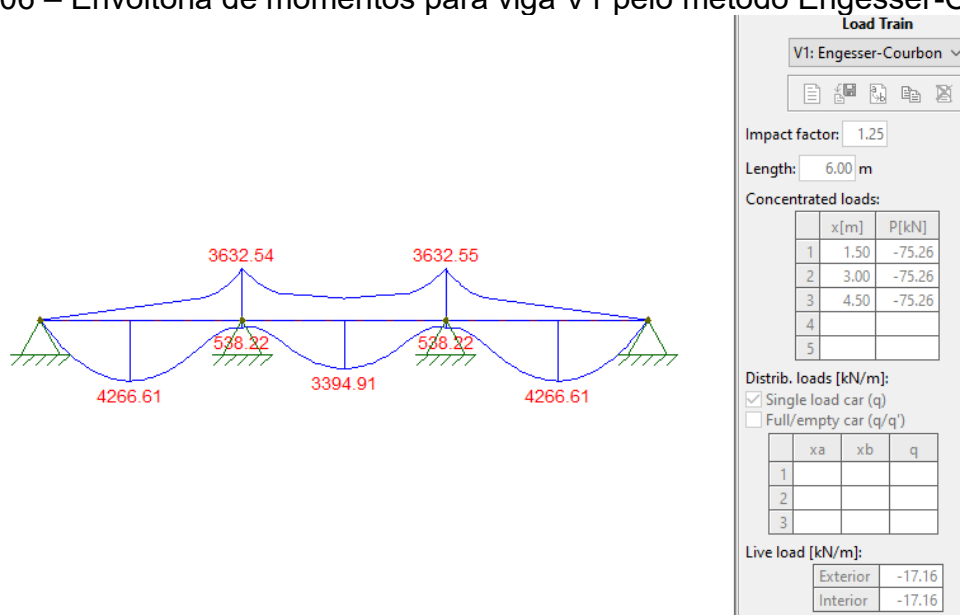
$$\eta_{V1}(y) = \frac{1}{4} \left[ 1 + 6y \frac{(2 \cdot 1 - 5)}{54,9} \right] = 0,25 - 0,082y$$

$$\eta_{V2}(y) = \frac{1}{4} \left[ 1 + 6y \frac{(2 \cdot 2 - 5)}{54,9} \right] = 0,25 - 0,0273y$$

Os trens tipo obtidos foram analisados no *software* Ftool, que calcula as envoltórias de cargas móveis em estruturas unidimensionais de forma otimizada (Figuras 106 e 107). O modelo de cada viga é idêntico ao utilizado na análise da variação de temperatura no RSA, incluindo as propriedades de cisalhamento das barras. As mudanças nas larguras carregadas não foram suficientes para alterar os coeficientes do número de faixas calculados para análise com MEF.

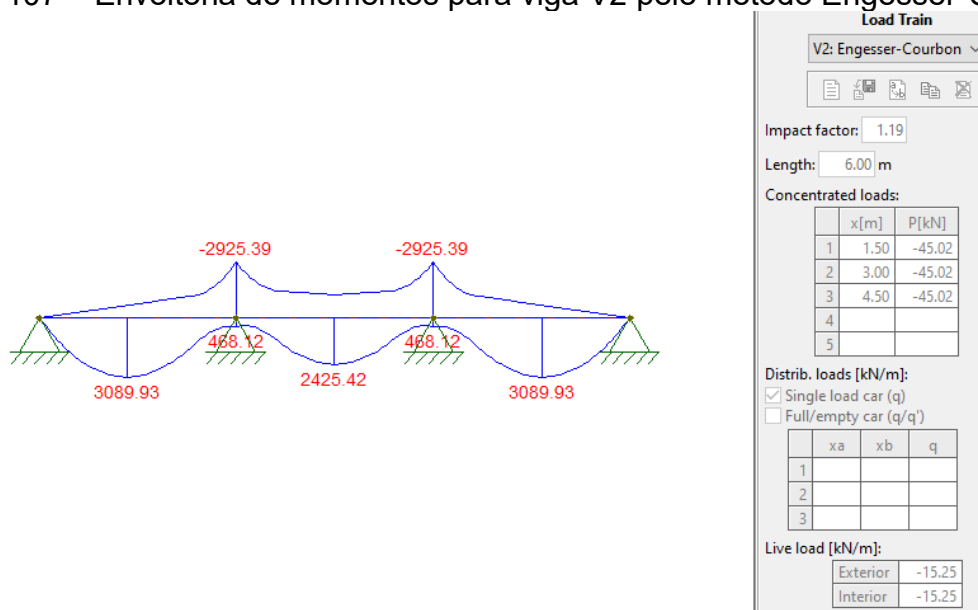


Figura 106 – Envoltória de momentos para viga V1 pelo método Engesser-Courbon



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 107 – Envoltória de momentos para viga V2 pelo método Engesser-Courbon



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Para análise do tabuleiro através do método GMB, é preciso calcular as rigidezes unitárias da ponte. Devido à substituição do tabuleiro real pela placa com largura ativa equivalente, que neste caso é de 14,64 m, o elemento longitudinal básico da grelha corresponde à seção composta prevista para vigas internas.

Esta seção é a mesma apresentada na Figura 50, cuja rigidez à flexão foi calculada na Figura 52. A rigidez à torção foi extraída do RSA e verificou-se que aplicar a equação aproximada de AASHTO (2020) resultaria em valor 56,4% maior.

$$\rho_P = \frac{EI_{y,p}}{b_0} = \frac{39351,33 \text{ MPa} \cdot 0,4591 \text{ m}^4}{3,66 \text{ m}} = 4,96 \cdot 10^6 \text{ kNm}$$

$$\gamma_P = \frac{GI_{x,p}}{b_0} = \frac{16471,39 \text{ MPa} \cdot 0,018 \text{ m}^4}{3,66 \text{ m}} = 0,081 \cdot 10^6 \text{ kNm}$$

Haja vista que a ponte não possui transversinas intermediárias, as rigidezes transversais da placa correspondem àquelas da laje real. Com isto, é possível determinar o parâmetro de torção da ponte.

$$\rho_E = \gamma_E = \rho_x = \rho_y = \frac{Eh^3}{12} = \frac{26838,41 \text{ MPa} \cdot (0,19 \text{ m})^3}{12} = 0,0153 \cdot 10^6 \text{ kNm}$$

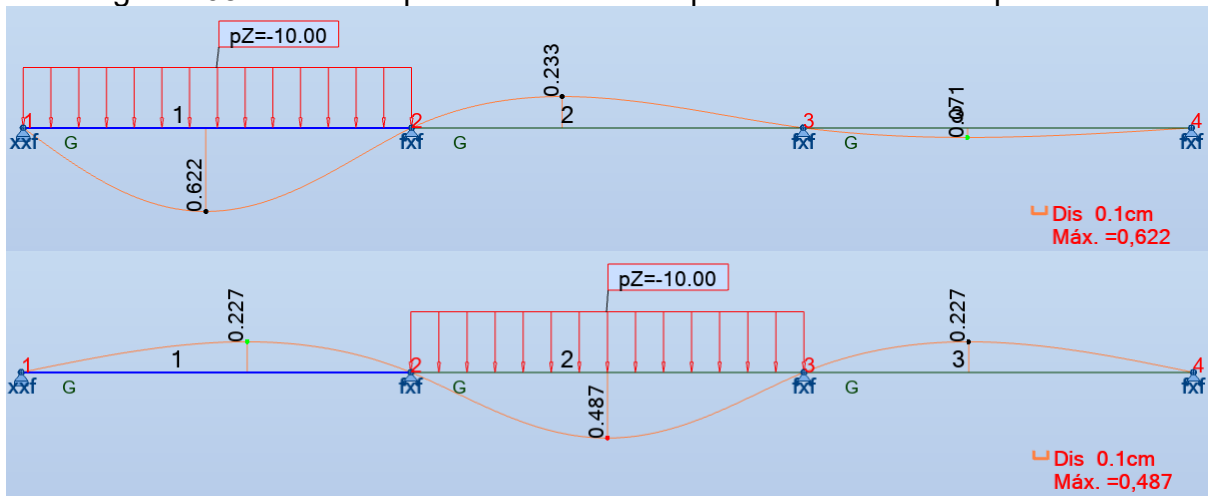
$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2\sqrt{\rho_P \rho_E}} = \frac{0,081 + 0,0153}{2\sqrt{4,962 \cdot 0,0153}} = 0,175$$

Por se tratar de uma ponte contínua, o comprimento aplicado na determinação do coeficiente de travamento deve ser aquele de uma ponte biapoiada equivalente. Conforme procedimento descrito por Servat (2019), este valor corresponde ao vão biapoiado que apresenta mesma flecha máxima do vão contínuo carregado de forma isolada. A equação apresentada no Quadro 10 para o cálculo das deformações em vigas biapoiadas é manipulada para o cálculo do comprimento equivalente.

$$L = \sqrt[4]{\frac{384 EI_y U_z}{5q}}$$

Uma carga linear uniforme de 10 kN/m foi aplicada em cada vão da ponte para registro da flecha máxima (Figura 108). As propriedades empregadas são aquelas da seção composta de uma viga interna, correspondente a um trecho longitudinal da placa ortótropa. Diferentes valores são obtidos para vãos extremos e internos, o que resultaria no cálculo de dois coeficientes de travamento diferentes. Empregou-se a média ponderada pela quantidade de cada tipo de vão.

Figura 108 – Análises para cálculo do comprimento isostático equivalente



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$L_{extremo} = \sqrt[4]{\frac{384 \cdot 39351,33 \text{ MPa} \cdot 0,4591 \text{ m}^4 \cdot 0,622 \text{ cm}}{5 \cdot 10 \text{ kN/m}}} = 30,52 \text{ m}$$

$$L_{central} = \sqrt[4]{\frac{384 \cdot 39351,33 \text{ MPa} \cdot 0,4591 \text{ m}^4 \cdot 0,487 \text{ cm}}{5 \cdot 10 \text{ kN/m}}} = 28,70 \text{ m}$$

$$\theta = \frac{b}{L} \left( \frac{\rho_P}{\rho_E} \right)^{1/4} = \frac{7,32}{29,91} \cdot \left( \frac{4,96}{0,0153} \right)^{1/4} = 1,04 \cong 1,00$$

O parâmetro de travamento superior a 0,3 indica que a distribuição transversal de esforços na ponte realmente difere daquela prevista pelo método Engesser-Courbon. As posições relativas das vigas na estrutura real e na placa equivalente são listadas na Tabela 20.

Tabela 20 – Posições das vigas em relação à largura ativa da placa ortótropa

VIGA	y (m)	y/B	y/b
V1	-5,49	-0,85	-0,75
V2	-1,83	-0,28	-0,25
V3	1,83	0,28	0,25
V4	5,49	0,85	0,75

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

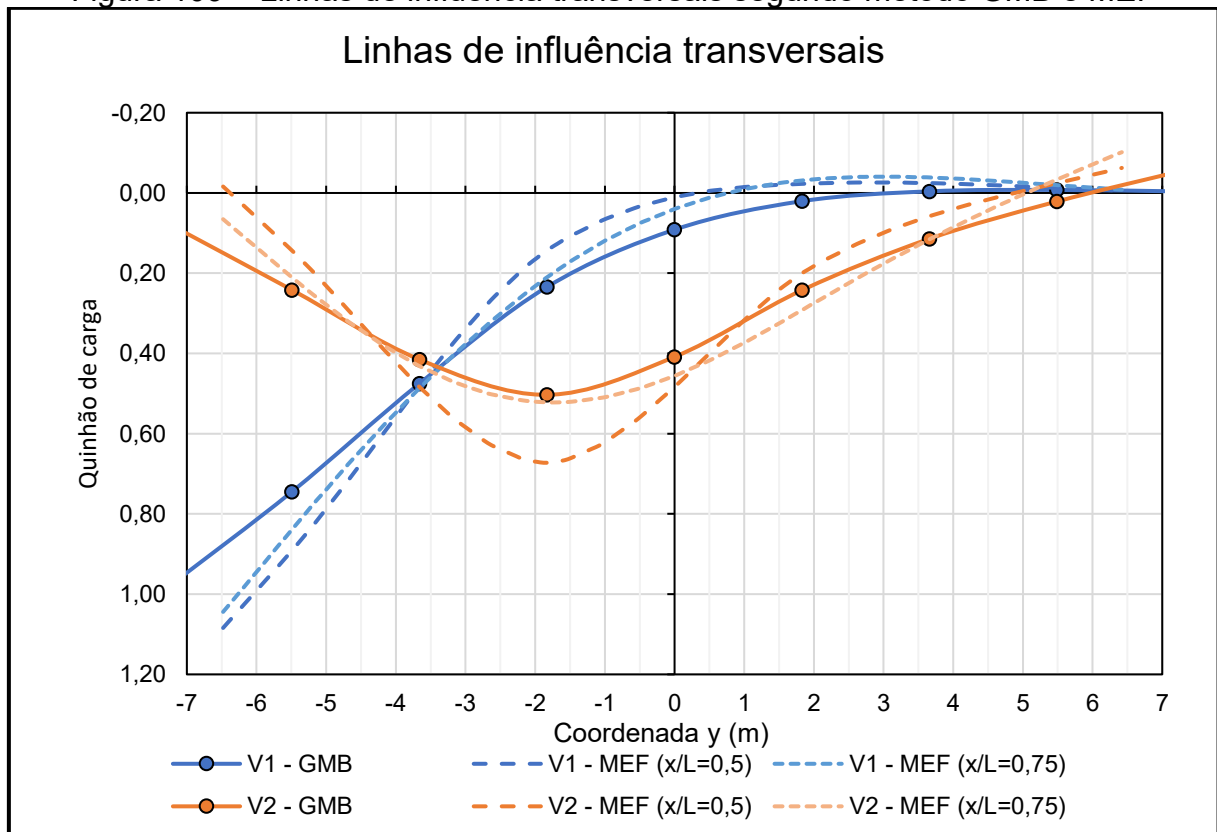
Aplicando tabelas do Apêndice B, foram encontrados os coeficientes de repartição transversal para as vigas (Tabela 21) e então calculados os quinhões de carga para geração de linhas de influência. A interpolação dos valores de  $K_0$  e  $K_1$  considerou  $f(\theta)$  igual a 0,5. Observou-se que a distribuição transversal de esforços se aproximou daquela indicada pelo modelo de elementos finitos. A Figura 109 compara os quinhões de carga do método GMB com aqueles previstos para o MEF a partir dos valores nas Figuras 96 e 97.

Tabela 21 – Coeficientes  $K_\alpha$  obtidos a partir de tabelas do método GMB

e (m)	e/b	V1	V2	V3	V4
-7,32	-1,00	3,6336	0,2623	-0,2086	-0,0133
-5,49	-0,75	2,9642	0,9631	0,0843	-0,0297
-3,66	-0,50	1,9097	1,6698	0,4588	-0,0166
-1,83	-0,25	0,9629	2,0684	0,9960	0,0841
0,00	0,00	0,3709	1,6568	1,6568	0,3709
1,83	0,25	0,0841	0,9960	2,0684	0,9629
3,66	0,50	-0,0166	0,4588	1,6698	1,9097
5,49	0,75	-0,0297	0,0843	0,9631	2,9642
7,32	1,00	-0,0133	-0,2086	0,2623	3,6336

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 109 – Linhas de influência transversais segundo método GMB e MEF



Para posicionamento e linearização do trem tipo, os pontos conhecidos das linhas de influência foram utilizados para ajuste das curvas como polinômios de grau oito. As posições exatas dos carregamentos e correspondentes quinhões de cargas podem ser vistos no Quadro 13. Os carregamentos são apresentados visualmente nas Figuras 110 e 111. Comparando-os àqueles das Figuras 98 e 99, é possível concluir que o método GMB previu uma melhor distribuição transversal de esforços do que a adotada para carregar o modelo de elementos finitos.

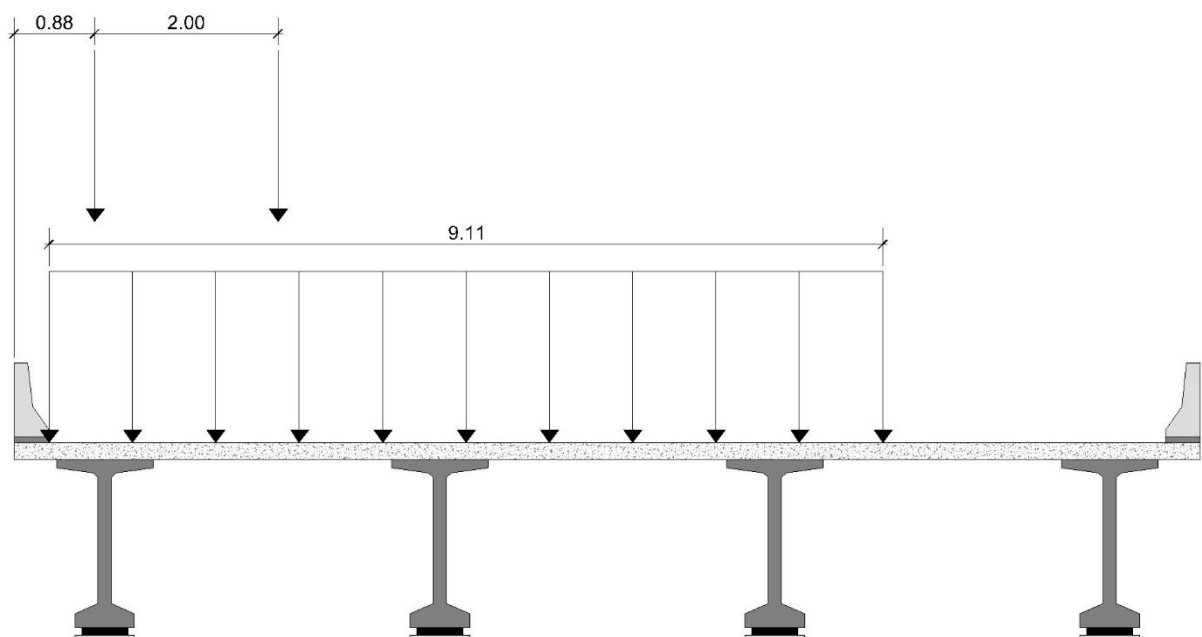
Este resultado é condizente com o fato de que, enquanto o método GMB considera a rigidez média do tabuleiro, a repartição de carga no MEF foi assumida com base no carregamento do meio do vão, ponto de baixa rigidez quando não existem transversinas centrais. Como pode ser visto na Figura 109, os quinhões de carga no modelo de elementos finitos se aproximaram mais aos estimados pelo método GMB quando o carregamento foi aplicado próximo às transversinas.

Quadro 13 – Dados para linearização do TB-450 segundo método GMB

VIGA	CARGA DISTRIBUÍDA			VEÍCULO TIPO	
	Início	Fim	Integral LI	Eixo 1	Eixo 2
V1	y = -6,10 m $\eta = 0,199$	y = 3,01 m $\eta = 0$	2,621 m	y = -5,60 m $\eta = 0,758$	y = -3,60 m $\eta = 0,466$
V2	y = -6,10 m $\eta = 0,199$	y = 5,92 m $\eta = 0$	3,495 m	y = -2,83 m $\eta = 0,477$	y = -0,83 m $\eta = 0,470$

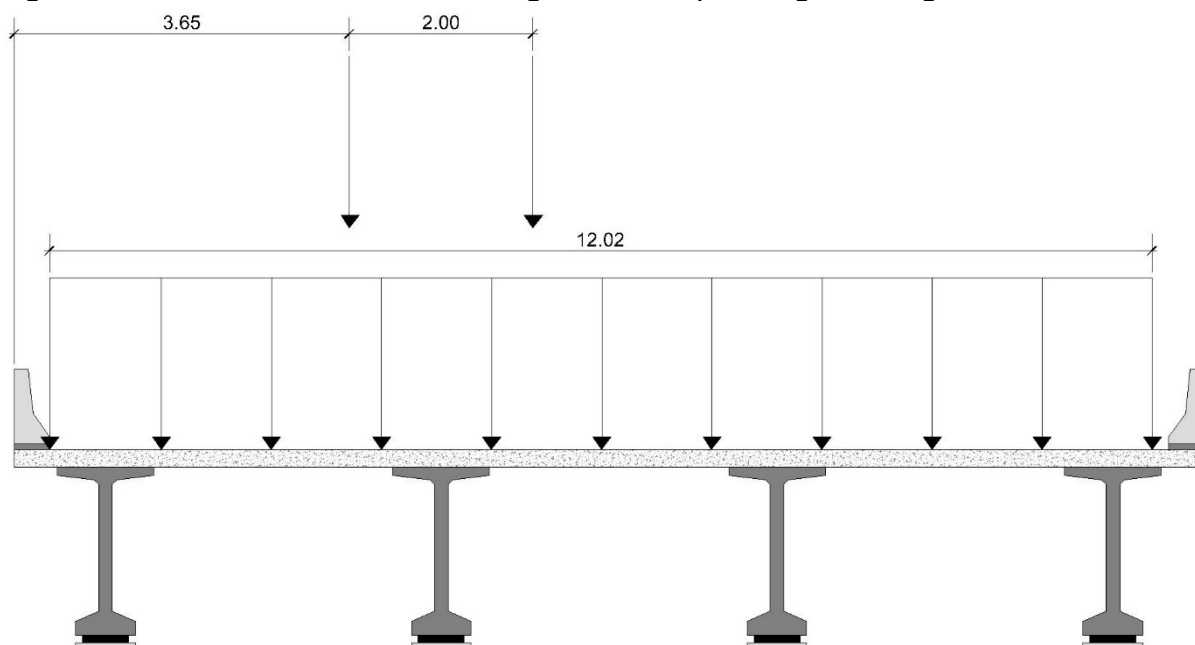
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 110 – Posicionamento das cargas móveis para viga V1 segundo método GMB



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

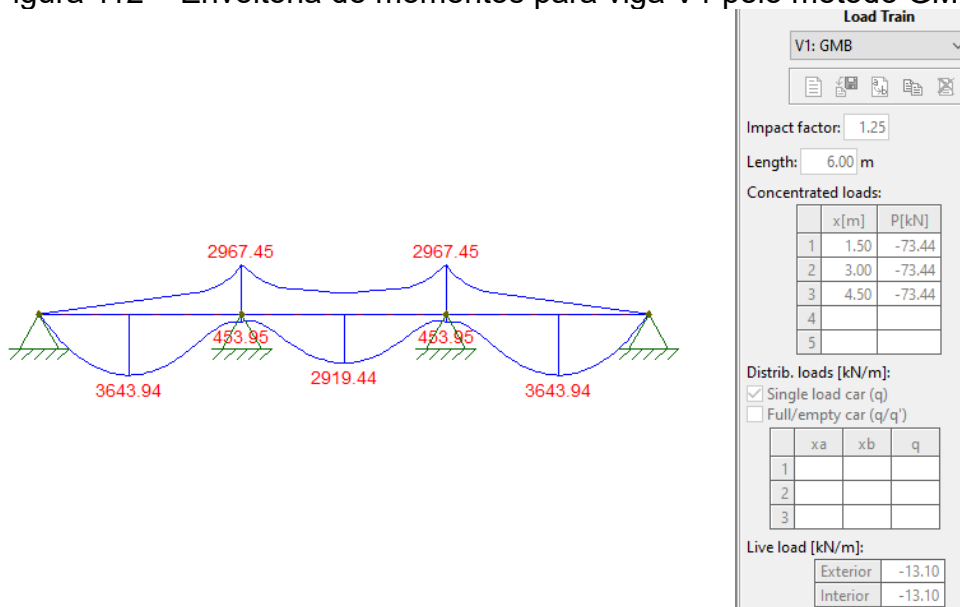
Figura 111 – Posicionamento das cargas móveis para viga V2 segundo método GMB



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

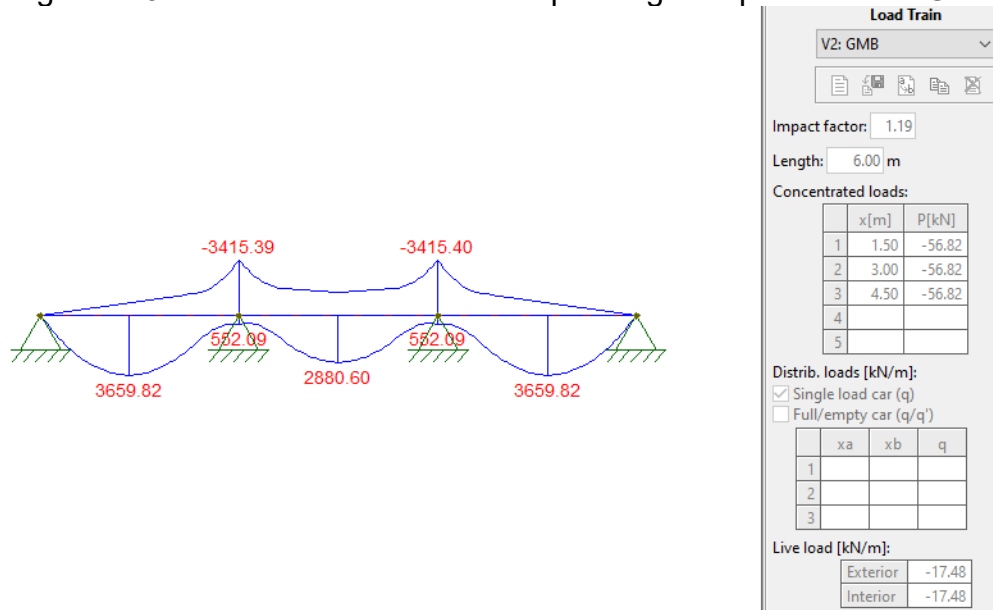
As envoltórias de momento para o método GMB também foram obtidas pelo Ftool e são apresentadas nas Figuras 112 e 113. As Tabelas 22, 23 e 24 comparam os resultados dos três métodos para os momentos no meio dos vãos contínuos e sobre os apoios internos. Como ocorreu para os casos  $g_3$  e  $g_4$ , os máximos momentos positivos ocorrem na coordenada a uma distância do extremo de 44,5% do comprimento do vão, mas não diferem significativamente daquelas na seção central.

Figura 112 – Envoltória de momentos para viga V1 pelo método GMB



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 113 – Envoltória de momentos para viga V2 pelo método GMB



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 22 – Momentos devido à carga móvel para coordenada  $x = 16,75$  m

MÉTODO	V1		V2	
	MÁX	MIN	MÁX	MIN
Engesser-Courbon (kNm)	4197,61	-977,38	3039,83	-735,66
GMB (kNm)	3582,92	-825,41	3599,57	-868,14
MEF (kNm)	3749,60	-877,34	4018,71	-828,27
MEF/Courbon	0,89	0,90	1,32	1,13
MEF/GMB	1,05	1,06	1,12	0,95

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 23 – Momentos devido à carga móvel para coordenada  $x = 33,50$  m

MÉTODO	V1		V2	
	MÁX	MIN	MÁX	MIN
Engesser-Courbon (kNm)	538,52	-3634,60	468,38	-2927,06
GMB (kNm)	454,15	-2968,81	552,40	-3417,34
MEF (kNm)	542,56	-3054,47	522,55	-3784,95
MEF/Courbon	1,01	0,84	1,12	1,29
MEF/GMB	1,19	1,03	0,95	1,11

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 24 – Momentos devido à carga móvel para coordenada  $x = 50,40$  m

MÉTODO	V1		V2	
	MÁX	MIN	MÁX	MIN
Engesser-Courbon (kNm)	3394,06	-1532,07	2424,74	-1215,63
GMB (kNm)	2918,88	-1245,14	2879,81	-1416,76
MEF (kNm)	3048,93	-1315,71	3309,14	-1367,79
MEF/Courbon	0,90	0,86	1,36	1,13
MEF/GMB	1,04	1,06	1,15	0,97

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os momentos críticos determinados a partir do modelo de elementos finitos foram próximos daqueles estimados pelo método GMB e, em sua maioria, se mostraram a favor da segurança. Observando os resultados das três análises, a geometria da ponte e as hipóteses básicas do método de Engesser-Courbon, este se mostrou pouco adequado para prever o comportamento do tabuleiro, superestimando consideravelmente os esforços nas vigas externas e subestimando-os nas vigas internas.

#### 7.4 Dimensionamento da armadura ativa longitudinal

O dimensionamento preliminar da armadura ativa de protensão foi desenvolvido para as vigas pré-fabricadas a serem posicionadas nos vãos de extremidade. Estes cálculos seguem o roteiro empregado por Debs (2022) em exemplo de dimensionamento de seções com pré-tração e etapa complementar de concretagem, além do exemplo original de PCI (2023).

Mesmo com o deslocamento do diagrama devido à continuidade posterior, as seções críticas para momentos positivos ainda corresponderam às seções centrais devido ao grande peso da estrutura, que atua sobre as vigas biapoiadas. Além disso, as tensões devido a cargas aplicadas antes da continuidade tendem a ser maiores pois não há contribuição da parcela moldada *in loco* na resistência da seção. Foram calculadas as tensões limites no concreto, convencionando tensões de tração como positivas e ocorrendo nas fibras inferiores.

$$\sigma_{inf}^{ELS-F} \leq 0,7 \alpha f_{ctm28} \leq 0,7 \cdot 1,2 \cdot 4,35 \leq 3,66 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{sup}^{ELS-F}| \leq 0,6 \cdot 60 = 36 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{inf}^{ELS-D} \leq 0$$

$$|\sigma_{sup}^{ELS-D}| \leq 0,45 \cdot 60 = 27 \text{ MPa}$$

Considerando que foi empregado procedimento para somatório de esforços em torno do centroide da seção composta e que as resultantes foram apenas



momentos de flexão em torno do eixo y, empregou-se a equação da flexão simples para determinar o efeito de cada caso de carga. Os módulos de inércia  $W_y$  das seções foram apresentados na Tabela 3.

$$\sigma = \frac{M_y}{I_y} z = \frac{M_y}{W_y}$$

Inicialmente, a tensão de protensão foi estimada com base no atendimento do ELS-D, cuja combinação na protensão limitada é a quase permanente. Como descrito pelo Quadro 3, os fatores de combinação  $\psi_2$  de ambos os casos de carga variável são iguais a 0,3.

$$\sigma_{inf}^{ELS-D} = \sigma_{g1} + \sigma_{g2} + \sigma_{g3} + \sigma_{g4} + \sigma_{p\infty} + \psi_{2,q1} \cdot \sigma_{q1} + \psi_{2,q2} \cdot \sigma_{q2}$$

$$\sigma_{inf,P\infty} = \sigma_{inf}^{ELS-D} - \sigma_{inf,g1} - \sigma_{inf,g2} - \sigma_{inf,g3} - \sigma_{inf,g4} - 0,3(\sigma_{inf,q1} + \sigma_{inf,q2})$$

$$\sigma_{inf,P\infty} = -\frac{M_{g1} + M_{g2}}{W_{inf}} - \frac{M_{g3} + M_{g4} + 0,3(M_{q1} + M_{q2})}{W_{inf,comp}}$$

Calculada a tensão no tempo infinito devido à protensão, a força foi estimada a partir da equação da flexo-compressão. Este valor foi aplicado na verificação das tensões para o ELS-F e da compressão limite na fibra superior para o ELS-D. A excentricidade da armadura de protensão em relação ao centroide da viga pré-fabricada foi estimada inicialmente como 80 cm.

$$\sigma_{P\infty} = \frac{P_{\infty,est}}{A_c} + \frac{P_{\infty,est} \cdot e_p}{W_{inf}}$$

$$P_{\infty,est} = \frac{\sigma_{P\infty} \cdot A_c \cdot W_{inf}}{W_{inf} + A_c \cdot e_p}$$

Como exemplo, apresenta-se o cálculo da tensão e força de protensão estimada no infinito para a viga V2. Os valores característicos de momentos e tensões devido às ações externas estão resumidos nas Tabelas 25 e 26.

Tabela 25 – Momentos e tensões atuantes na seção crítica da viga V1

Caso	$M_y$ (kNm)	$W_{y,inf}$ (m <sup>3</sup> )	$W_{y,sup}$ (m <sup>3</sup> )	$\sigma_{inf}$ (MPa)	$\sigma_{sup}$ (MPa)
g <sub>1</sub>	1672,17	0,239	-0,249	7,00	-6,71
g <sub>2</sub>	1845,41	0,239	-0,249	7,73	-7,40
g <sub>3</sub>	456,29	0,315	-0,647	1,45	-0,71
g <sub>4</sub>	989,84	0,315	-0,647	3,14	-1,53
q <sub>1</sub>	3749,60	0,315	-0,647	11,90	-5,80
q <sub>2</sub>	498,52	0,315	-0,647	1,58	-0,77

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 26 – Momentos e tensões atuantes na seção crítica da viga V2

Carga	$M_y$ (kNm)	$W_{y,inf}$ (m <sup>3</sup> )	$W_{y,sup}$ (m <sup>3</sup> )	$\sigma_{inf}$ (MPa)	$\sigma_{sup}$ (MPa)
g <sub>1</sub>	1672,17	0,239	-0,249	7,00	-6,71
g <sub>2</sub>	2395,11	0,239	-0,249	10,03	-9,61
g <sub>3</sub>	-17,72	0,323	-0,768	-0,05	0,02
g <sub>4</sub>	1510,98	0,323	-0,768	4,68	-1,97
q <sub>1</sub>	4018,71	0,323	-0,768	12,44	-5,23
q <sub>2</sub>	513,04	0,323	-0,768	1,59	-0,69

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$\sigma_{inf,P\infty}^{V2} = -7 - 10,03 + 0,05 - 4,68 - 0,3(12,44 + 1,59) = -25,87 \text{ MPa}$$

$$P_{\infty,est}^{V2} = \frac{-25,87 \cdot 10^3 \cdot 0,4855 \cdot 0,239}{0,239 + 0,4855 \cdot 0,8} = -4784,53 \text{ kN}$$

Aplicando este valor para verificar as tensões de compressão na fibra superior no ELS-D, esta força também se mostrou adequada, atendendo com certa folga o limite previsto para combinação quase permanente.

$$\left| -6,71 - 9,61 + 0,02 - 1,97 - 0,3(5,23 + 0,69) + \frac{-4784,53}{0,4855 \cdot 10^3} + \frac{-4784,53 \cdot 0,8}{-0,249 \cdot 10^3} \right| \leq 27$$

$$|-14,53| \leq 27$$

No caso do ELS-F, a combinação frequente é aplicada para a protensão limitada. A carga móvel foi considerada como carga variável principal, com fator de combinação  $\psi_{1,q1}$  igual a 0,5 segundo o Quadro 3. A estimativa da tensão de protensão

feita a partir deste estado limite se mostrou inferior àquela necessária para atendimento do ELS-D.

$$\sigma_{inf,P\infty}^{V2} = \sigma_{inf}^{ELS-F} - \sigma_{inf,g1} - \sigma_{inf,g2} - \sigma_{inf,g3} - \sigma_{inf,g4} - 0,5\sigma_{inf,q1} - 0,3\sigma_{inf,q2}$$

$$\sigma_{inf,P\infty}^{V2} = 3,66 - 7 - 10,03 + 0,05 - 4,68 - 0,5 \cdot 12,44 - 0,3 \cdot 1,59 = -24,70 \text{ MPa}$$

Consequentemente, a força de protensão de 4784,53 kN foi assumida como valor no infinito para dimensionar as cordoalhas. As perdas totais de protensão até o tempo final em serviço foram estimadas como 25% da força inicial, valor aplicado por PCI (2023) no exemplo de dimensionamento cuja geometria foi adaptada neste trabalho. A tensão inicial nas cordoalhas é tomada como o valor máximo admissível de  $0,77f_{ptk}$ .

$$P_i^{V2} = \frac{P_{\infty,est}^{V2}}{1 - 0,25} = \frac{4784,53}{0,75} = -6379,37 \text{ kN}$$

$$A_{p,nec}^{V2} = \frac{-6379,37 \text{ kN}}{(-0,77 \cdot 1900 \text{ MPa})} = 43,60 \text{ cm}^2$$

$$n_p = \frac{43,60}{1,01} = 43,17$$

São adotadas 44 cordoalhas de 7 fios de 12,7 mm CP 190 RB, resultando em área efetiva de armadura igual a 44,44 cm<sup>2</sup>. Reproduzindo o mesmo roteiro de dimensionamento para a viga V1, o resultado obtido foi de 40 cordoalhas. Uma única quantidade para todas as longarinas poderia ser alcançada aumentando o balanço transversal da ponte e reduzindo o espaçamento entre longarinas para distribuir mais esforços para as vigas externas.

Adotou-se cordoalhas com traçado poligonal para evitar que elevadas tensões de tração se desenvolvam nas fibras superiores de seções próximas às extremidades das vigas. Conforme exemplo desenvolvido por Freyermuth (1969), a excentricidade das cordoalhas nestas seções pode ser estimada como aquela necessária para que não ocorra tração devido à armadura ativa.

$$0 = \frac{P}{A_c} + \frac{P \cdot e_p}{W_{sup}}$$

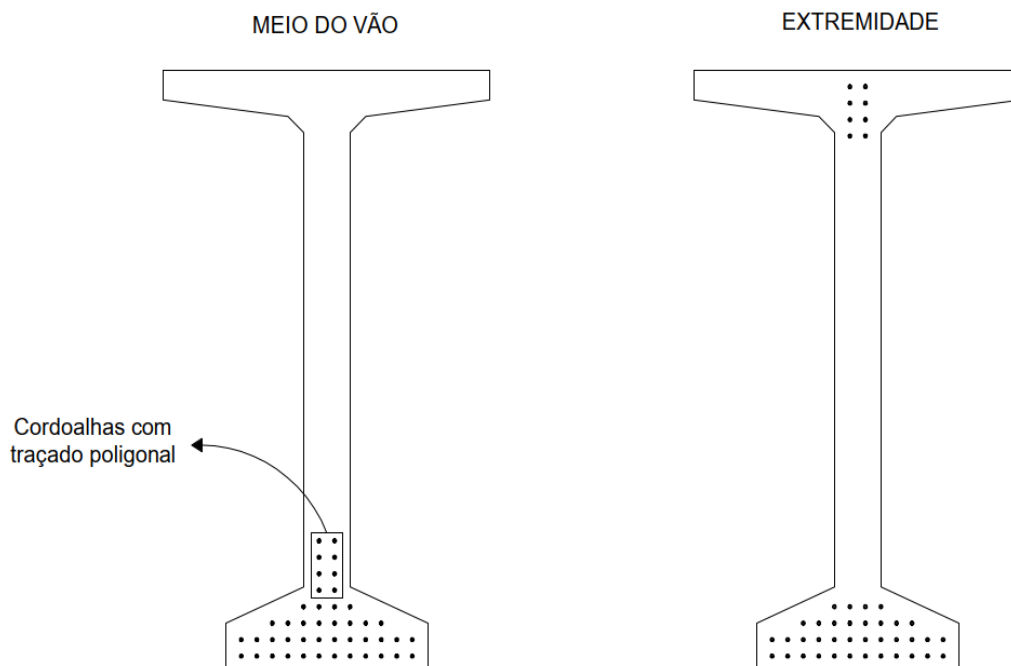
$$e_p = -\frac{W_{y,sup}}{A_c} = -\frac{-0,249}{0,4855} = 0,5133 \text{ m} = 51,33 \text{ cm}$$

A disposição escolhida para a armadura das vigas internas pode ser vista na Figura 114 e nas Tabelas 27 e 28, nas quais as coordenadas z são medidas a partir da base da seção. Os próximos cálculos serão apresentados integralmente apenas para as vigas internas.

A excentricidade final nas seções de extremidade foi de 53,82 cm e de 78,91 cm na região central. Para isso, oito cordoalhas foram definidas com traçado poligonal. A Figura 115 demonstra este traçado e contém as excentricidades dos cabos resultantes caso cordoalhas retas e poligonais sejam consideradas separadamente.

As verificações de tensão aplicadas no dimensionamento preliminar foram repetidas para confirmar que estas excentricidades são adequadas e atendem a indicações normativas para espaçamento entre cordoalhas e espessura de cobertura mínimo.

Figura 114 – Disposição preliminar da armadura de protensão na viga V2



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 27 – Camadas de armadura ativa na seção central de viga pré-moldada

Camada	Quantidade	$e_p$ (cm)	z - base (cm)
1	12	88,46	5,00
2	12	83,46	10,00
3	8	78,46	15,00
4	4	73,46	20,00
5	2	68,46	25,00
6	2	63,46	30,00
7	2	58,46	35,00
8	2	53,46	40,00
<b>TOTAL</b>	<b>44</b>	<b>78,91</b>	-

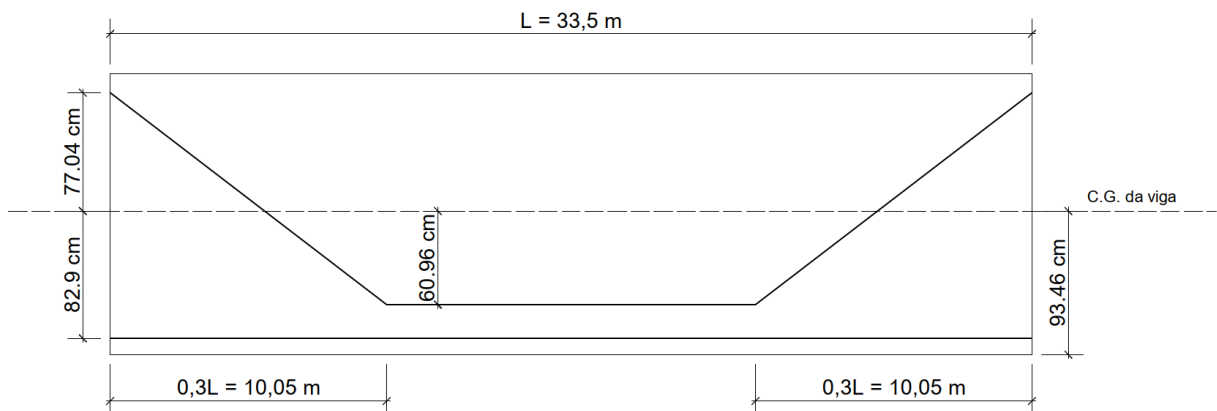
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 28 – Camadas de armadura ativa em seção extrema de viga pré-moldada

Camada	Quantidade	$e_p$ (cm)	z - base (cm)
1	12	88,46	5,00
2	12	83,46	10,00
3	8	78,46	15,00
4	4	73,46	20,00
5	2	-69,54	163,00
6	2	-74,54	168,00
7	2	-79,54	173,00
8	2	-84,54	178,00
<b>TOTAL</b>	<b>44</b>	<b>53,82</b>	-

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 115 – Traçado das cordoalhas de protensão em viga pré-moldada interna



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Seguindo recomendação de PCI (2023) para as extremidades de pontes com múltiplos vãos, os pontos de mudança de direção no traçado poligonal estão distantes  $10,05 \text{ m}$  da borda da viga, equivalente a 30% do comprimento total do elemento.

A NBR 7187/2021 recomenda que a largura mínima da alma de vigas deve ser de 20 cm, mas pode ser reduzida para até 12 cm em vigas pré-fabricadas que atendam aos requisitos de ABNT (2017b). Esta redução deixa de ser permitida caso existam cordoalhas posicionadas na alma, o que foi desconsiderado para manter a base da geometria do exemplo original de PCI (2023). Além disso, a largura da seção AASHTO-PCI BT72 é maior que 12 cm e seu uso com cordoalhas de traçado poligonal está consolidado em outros países.

Definido o arranjo da armadura, a verificação do ELU na transferência da protensão pode ser feita para qualquer seção ao longo da viga aplicando o método de análise de seções compostas de Ghali e Favre (1986). Foi necessário calcular as propriedades do concreto na idade da transferência, as propriedades geométricas da seção homogeneizada e as perdas iniciais de protensão.

O efeito da cura térmica na maturidade do concreto foi considerado aplicando expressão do Apêndice A, assim como feito por Debs (2022). As perdas por acomodação na ancoragem são estimadas como 1%, equivalente a 14,63 MPa.

$$t_T = 2,87 \text{ dias}$$

$$\beta_1(t_0) = \exp \left\{ 0,2 \left[ 1 - \left( \frac{28}{2,87} \right)^{0,5} \right] \right\} = 0,654$$

$$f_{ckj}(t_0) = 60 \cdot 0,654 = 39,24 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm}(t_0) = 2,12 \ln[1 + 0,1(39,24 + 8)] = 3,70 \text{ MPa}$$

$$E_{cs}(t_0) = 39531,33 \cdot 0,654^{0,3} = 34802,85 \text{ MPa}$$

$$\lambda = \frac{1463 - 14,63}{1900} = 0,7623 \Rightarrow \psi_{1000} = 3,123\%$$

$$t_{eq} = \frac{1,14^{65-20}}{65 - 20} [(26 - 20)13 + (45,5 - 20)5 + (65 - 20)6] = 3843 \text{ horas}$$

$$\sigma_{p0} = \left[ 1 - 0,03123 \cdot \left( \frac{1 + \frac{3843}{24}}{41,67} \right)^{0,15} \right] \cdot 1448,37 = 1392,97 \text{ MPa}$$

Além da força axial de protensão e da componente vertical  $P_{0,v}$  que surge nos pontos de mudança de direção das cordoalhas, o peso próprio da viga também atua devido à curvatura induzida pela transferência. Neste caso, o comprimento do vão é o comprimento total da viga, resultando em esforços diferentes dos que foram calculados para a viga em serviço. A equação do Quadro 10 foi aplicada para determinar este valor.

$$P_0^{ELU} = -1392,97 \text{ MPa} \cdot 44,44 \text{ cm}^2 \cdot 1,1 = -6809,39 \text{ kN}$$

$$P_{0,v} = \frac{-P_0^{ELU}}{0,3L} \cdot (z_{p,ext} - z_{p,central}) = \frac{6809,39}{10,05} \cdot (0,7891 - 0,5382) = 170 \text{ kN}$$

$$M_{g1}(16,75) = \frac{12,1375 \cdot 16,75}{2} \cdot (33,5 - 16,75) = 1702,66 \text{ kNm}$$

$$N_{t0}(16,75) = P_0^{ELU} = -6809,39 \text{ kN}$$

$$M_{t0}(16,75) = -6809,39 \cdot 0,5382 - 170 \cdot 10,05 + 1702,66 = -3670,65 \text{ kNm}$$

As propriedades de seções homogeneizadas, que incluem a área da armadura, são obtidas da mesma forma que as propriedades das seções compostas da viga com diferentes partes de concreto. Nesta análise, o material de referência é o concreto da viga pré-moldada na idade da transferência e o seu centroide, a 93,46 cm da base, foi adotado como ponto de referência. A inércia das cordoalhas em torno do seu próprio centroide foi desconsiderada.

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_o \\ \psi \end{Bmatrix} = \frac{1}{34802,85(0,511 \cdot 0,239 - 0,0202^2)} \begin{bmatrix} 0,239 & -0,0202 \\ -0,0202 & 0,511 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -6809,39 \\ -3670,65 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_o \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -366,7 \\ -410,3 \text{ m}^{-1} \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta\sigma_{c,sup} = 34802,85 \cdot [-366,7 \cdot 10^{-6} - 410,3 \cdot 10^{-6} \cdot (-0,8954)] = 0,02 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_{c,inf} = 34802,85 \cdot [-366,7 \cdot 10^{-6} - 410,3 \cdot 10^{-6} \cdot 0,9346] = -26,11 \text{ MPa}$$

$$\Delta\sigma_p = 200000 \cdot (-366,7 \cdot 10^{-6} - 410,3 \cdot 0,7891) = -138,09 \text{ MPa}$$

As tensões limites são calculadas abaixo. Este roteiro de cálculo foi automatizado por meio de código na linguagem *python* para análise de várias seções ao longo da viga. Em cada seção, além dos momentos atuantes, as propriedades da seção homogeneizada mudam devido à variação na excentricidade das cordoalhas.

$$|\sigma_{c,compressão}^{ELU}| \leq 0,7 \cdot 39,24 \left[ 1 - \frac{(39,24 - 50)}{200} \right] = 28,95 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_{c,tração}^{ELU}| \leq 1,2 \cdot 3,70 = 4,44 \text{ MPa}$$

Resultados para outras seções são apresentados na Tabela 29. Como não foi considerado o comprimento de transferência, a análise da seção de extremidade representa uma estimativa pessimista. Reitera-se ainda que, no concreto, o sinal negativo indica tensões de compressão, enquanto no aço indica perdas de protensão. O traçado poligonal adotado resultou em tensões de compressão razoavelmente uniformes ao longo do comprimento da viga e tensões de tração mínimas.

Tabela 29 – Verificação simplificada do ELU na transferência para viga V2

x (m)	$\Delta\sigma_{c,sup}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{c,inf}$ (MPa)	$\Delta e_0$ ( $10^{-6}$ )	$\Delta u$ ( $10^{-6} \text{ m}^{-1}$ )	$\Delta\sigma_p$ (MPa)
0,00	0,63	-27,05	-371,17	-434,60	-121,02
3,35	0,26	-26,57	-369,77	-421,32	-126,35
6,70	0,42	-26,61	-367,90	-424,35	-133,45
10,05	1,09	-27,13	-365,39	-443,12	-143,01
13,40	0,29	-26,36	-366,36	-418,48	-139,32
16,75	0,02	-26,11	-366,69	-410,27	-138,09

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

É usual que seja admitido no dimensionamento de membros protendidos que as perdas de protensão em todo o elemento são aquelas previstas para a seção



central ou um valor médio considerando um certo número de seções. Com base nos resultados anteriores, por exemplo, as perdas de protensão na transferência poderiam ser assumidas como 133,54 MPa, equivalente a cerca de 9% da tensão inicial.

Entretanto, quando existem cabos poligonais, a análise da seção composta pelo método geral demonstra que as perdas nestas armaduras são consideravelmente diferentes daquelas para os cabos retos nas seções próximas às extremidades. A Tabela 30 apresenta os resultados considerando duas camadas de aço diferentes. As tensões no concreto variaram em menor escala.

Tabela 30 – Verificação do ELU considerando cabos resultantes separados

x (m)	$\Delta\sigma_{c,sup}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{c,inf}$ (MPa)	$\Delta\epsilon_0$ ( $10^{-6}$ )	$\Delta u$ ( $10^{-6} m^{-1}$ )	$\Delta\sigma_{p,retos}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{p,poligonal}$ (MPa)
0,00	0,37	-27,89	-386,62	-443,81	-150,91	-8,94
3,35	0,30	-27,69	-384,91	-439,53	-149,86	-49,70
6,70	0,64	-27,89	-382,76	-448,07	-150,84	-89,96
10,05	1,40	-28,49	-380,01	-469,28	-153,81	-133,22
13,40	0,60	-27,73	-381,03	-444,74	-149,94	-130,43
16,75	0,33	-27,47	-381,36	-436,55	-148,65	-129,50

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Mesmo sem majorar as forças de protensão, observou-se que as tensões de compressão no concreto foram superiores aos limites recomendados para adoção da hipótese de fluência linear (Tabela 31). Deste modo, seria indicado aumentar o tempo de cura das longarinas antes da transferência ou a resistência característica do concreto. Inicialmente, considerou-se que apenas a primeira solução seria adotada.

$$0,5 f_{ckj}(t_0) = 0,5 \cdot 39,24 = 19,62 \text{ MPa}$$

Tabela 31 - Análise de seções na transferência com cargas características

x (m)	$\Delta\sigma_{c,sup}$ (MPa)	$\Delta\sigma_{c,inf}$ (MPa)	$\Delta\epsilon_0$ ( $10^{-6}$ )	$\Delta u$ ( $10^{-6} m^{-1}$ )	$\Delta\sigma_p$ (MPa)
0,00	0,57	-24,59	-337,43	-395,09	-110,01
3,35	0,01	-23,94	-336,37	-376,13	-114,05
6,70	-0,01	-23,81	-334,88	-373,67	-119,70
10,05	0,48	-24,17	-332,79	-387,16	-127,66
13,40	-0,32	-23,41	-333,76	-362,52	-123,97
16,75	-0,59	-23,15	-334,09	-354,31	-122,73

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

## 8 ANÁLISE DOS MOMENTOS DE RESTRIÇÃO

A estimativa dos momentos de restrição foi feita de forma análoga a Andrade (1994) e Menkulasi, Patel e Baghi (2018), sendo desenvolvido um código computacional para automatizar a análise de seções compostas com aplicação do método do coeficiente de envelhecimento. Para isso, aplicou-se a formulação de Ghali e Favre (1986), o modelo de FIB (2012) para previsão da fluência e retração, além da expressão simplificada sugerida neste trabalho para relaxação reduzida do aço.

Em cada execução do código, a análise das quatro etapas descritas por Menkulasi, Patel e Baghi (2018) foi feita em onze seções igualmente espaçadas de um elemento que compõe um vão de extremidade da viga V2, adotando variação linear de  $\epsilon_0$  e  $\psi$ . Os resultados obtidos são deformações axiais e curvaturas nas seções, a partir das quais são determinados os deslocamentos adicionais que surgiriam gradualmente caso o tramo fosse mantido simplesmente apoiado.

Uma série de simplificações foram empregadas para permitir que o cálculo analítico através deste método pudesse ser implementado com número menor de variáveis e etapas de cálculo. Como discutido, estima-se que os erros incorporados por tais hipóteses sejam menos significativos que as incertezas quanto às propriedades dos materiais e seu desenvolvimento com o tempo.

O estudo rigoroso dos valores destes esforços é um tema extenso que não poderia ser abordado em detalhes neste trabalho. Buscou-se, principalmente, demonstrar o impacto da idade das vigas na continuidade e comparar os resultados de uma análise mais refinada com o método simplificado de aplicação do coeficiente de envelhecimento.

Após a concretagem no local, a viga resiste de forma isolada à carga instantânea devido ao peso da laje. A fluência foi desprezada até o fim do primeiro dia após a aplicação deste carregamento, quando se determinou o início da ação composta com a laje. A retração e fluência do concreto moldado *in loco* foram iniciadas neste mesmo instante. Caso desejado, seria possível que diferentes idades para cada um destes eventos fossem consideradas.

Para determinação do momento necessário para restringir os deslocamentos adicionais no vão biapoiado, a viga foi assumida como prismática com seção equivalente à seção da extremidade. Devido ao traçado poligonal das cordoalhas, há flutuação da inércia e do centroide das seções homogeneizadas ao

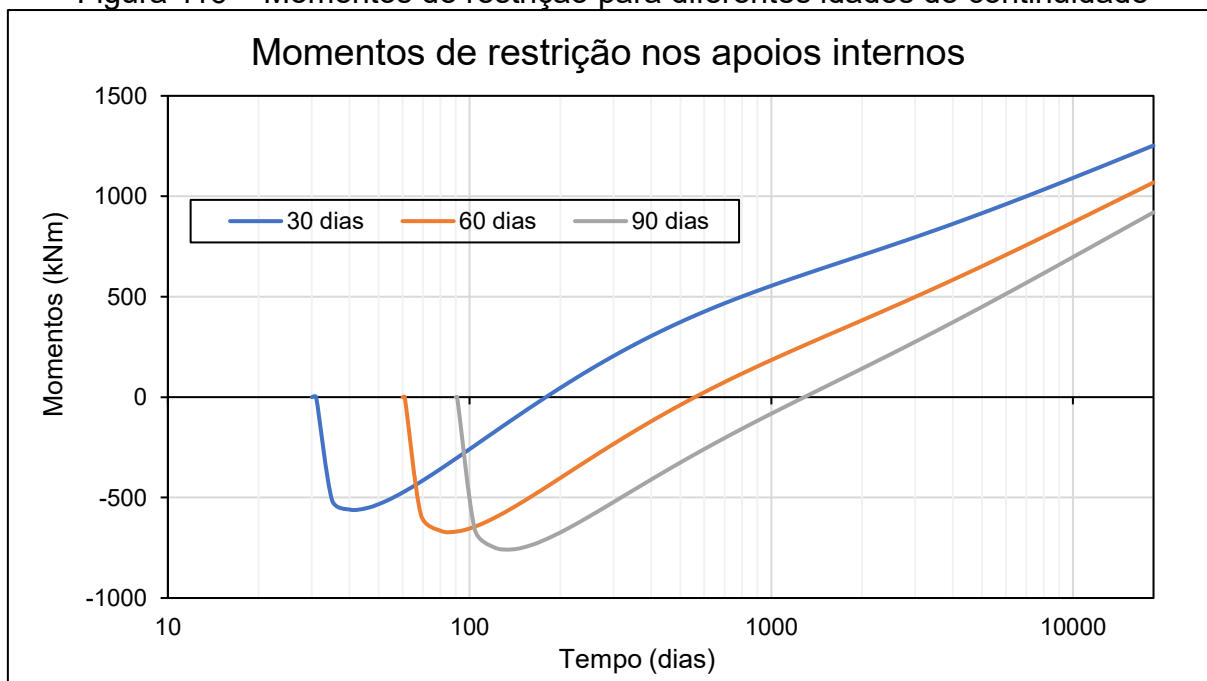
longo do comprimento. Conseqüentemente, maior precisão poderia ser obtida com a divisão da viga em subtrechos com rigidezes variáveis e imposição dos deslocamentos com qualquer programa convencional de análise elástica.

Para facilitar a avaliação de uma grande quantidade de intervalos de tempo e diferentes idades de continuidade, considerou-se que os três vãos da ponte contínua têm o mesmo comprimento de 33,5 m. Deste modo, o momento sobre os apoios internos da estrutura contínua corresponde a aproximadamente 1,2 vez o momento de engastamento no membro simplesmente apoiado. Caso houvesse grande diferença entre os vãos, poderia ser aplicado o Processo de Cross.

A modelagem das cordoalhas retas e poligonais como um conjunto único ou de forma separada teve pouco impacto sobre o valor final dos momentos de restrição. Os resultados a serem apresentados foram obtidos considerando duas camadas distintas.

O estabelecimento da continuidade foi avaliado aos 30, 60 e 90 dias. Para geração das curvas na Figura 116, o intervalo desde a continuidade até a idade de cálculo dos momentos de restrição foi considerado uma única etapa para aplicação da análise dependente do tempo. Ou seja, assim como o caso 01 de cálculo aplicado por Andrade (1994), os momentos de restrição em um tempo intermediário não impactaram no cálculo dos instantes posteriores.

Figura 116 – Momentos de restrição para diferentes idades de continuidade



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os pontos analisados compõem progressões geométricas de razão  $10^{1/16}$  a partir do dia seguinte ao estabelecimento da continuidade, com base na sugestão de Bazant (1972) para solução numérica da integral que define o coeficiente de envelhecimento. Como consequência, estão distribuídos uniformemente na escala logarítmica. O cálculo foi desenvolvido até 50 anos após a concretagem das vigas devido à limitação imposta pelo modelo de previsão da fluência. Este também é, aproximadamente, o tempo final da relaxação do aço previsto pela NBR 6118/2023.

Os momentos de restrição nos apoios também foram obtidos pelo método do coeficiente de envelhecimento simplificado. Será apresentado integralmente o cálculo aos 139 dias, tempo em que o método geral previu os maiores momentos negativos caso a continuidade seja estabelecida após 90 dias.

Os valores dos coeficientes de fluência e retração são extraídos do código computacional desenvolvido. Com base nos valores exatos do coeficiente de envelhecimento calculados iterativamente, seu valor foi adotado como 0,7.

$$\varphi_b(90, 1) = 0,6839$$

$$\varphi_b(139, 90) = 0,2642$$

$$\varphi_b(139, 1) = 0,7305$$

$$\varphi_d(49, 1) = 0,9505$$

$$\epsilon_{csb}(139, 90) = -26,44 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_{csd}(49, 1) = -127,06 \cdot 10^{-6}$$

As propriedades do concreto no instante da transferência e aos 28 dias também foram determinadas conforme as expressões no Apêndice A. O centroide da seção composta foi recalculado para que as excentricidades da protensão sejam determinadas em relação a este ponto. Haja vista que a área de aço é desconsiderada no cálculo simplificado, o procedimento poderia ser incorporado ao dimensionamento preliminar. Como está análise inclui os efeitos da fluência, o módulo de elasticidade empregado foi o tangente inicial.

$$E_b(1) = 32939,73 \text{ MPa}$$

$$E_d(1) = 21843,49 \text{ MPa}$$

$$n_d = \frac{E_d(28)}{E_b(28)} = \frac{33550,55}{40732,53} = 0,824$$

$$z_{cg,comp} = \frac{0,4855 \cdot 0,9346 + 0,824 \cdot (3,66 \cdot 0,19) \cdot \left(1,83 + \frac{0,19}{2}\right)}{0,4855 + 0,824 \cdot (3,66 \cdot 0,19)} = 1,4707 \text{ m}$$

$$z_{p,ext} = 147,07 - 93,46 + 53,82 = 107,43 \text{ cm}$$

$$z_{p,central} = 147,07 - 93,46 + 78,91 = 132,52 \text{ cm}$$

Os carregamentos na estrutura contínua para análise dos momentos de restrição são o peso próprio da viga de 12,1375 kN/m, a parcela de peso da laje de 17,385 kN/m e as forças equivalentes à protensão. As estimativas das perdas iniciais foram as mesmas aplicadas na verificação do ELU na transferência e a perda imediata foi assumida como a média dos valores na Tabela 31.

$$P_x = -(1392,97 - 119,69) \text{ MPa} \cdot 44,44 \text{ cm}^2 = -5658,46 \text{ kN}$$

$$P_z = -\frac{-5658,46}{10,05} \cdot (1,3252 - 1,0743) = 141,26 \text{ kN}$$

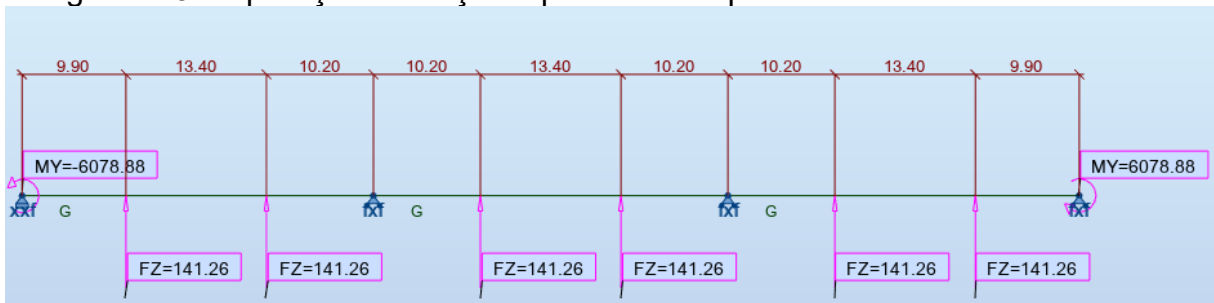
$$M_y = -5658,46 \cdot 1,0743 = -6078,88 \text{ kNm}$$

Um modelo unidimensional auxiliar foi desenvolvido considerando as novas propriedades do concreto (Figura 117) e da seção transversal, cuja largura da mesa colaborante passou a ser de 3,02 m. O posicionamento das componentes verticais da força de protensão foi feito nas coordenadas equivalentes aos pontos de mudança de direção do traçado na estrutura contínua (Figura 118). Apenas as ações que contribuem para momentos na viga foram incluídas.

Figura 117 – Definição do concreto C60 no RSA segundo Model Code 2010

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 118 – Aplicação de forças equivalentes à protensão na estrutura contínua



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os momentos nos apoios internos para cada caso de carga são resumidos na Tabela 32. As perdas progressivas foram estimadas como 15% da força ao final da transferência, mesmo valor empregado nos exemplos de FIB (2020), o que resulta em perdas totais próximas do percentual de 25% adotado no dimensionamento preliminar.

Tabela 32 – Momentos elásticos fictícios sobre apoios internos da estrutura contínua

Caso	M (kNm)
g1	-1368,01
g2	-1958,33
Protensão	2374,29

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

$$M_{g1}^* = -1368,01 - 0 = -1368,01 \text{ kNm}$$

$$M_{g2}^* = -1958,33 - 0 = -1958,33 \text{ kNm}$$

$$M_p^* = 2374,29 - (-6078,88) = 8453,17 \text{ kNm}$$

$$M_{perdas}^* = -0,15 M_p^* = -1267,98 \text{ kNm}$$

$$\delta_{g1} = \delta_p = \frac{40732,53}{32939,73} \cdot \frac{0,7305 - 0,6839}{1 + 0,7 \cdot 0,2642} = 0,0486$$

$$\delta_{perdas} = \delta_p \cdot \chi = 0,0486 \cdot 0,7 = 0,034$$

$$\delta_{g2} = \frac{40732,53}{40732,53} \cdot \frac{0,2642 - 0}{1 + 0,7 \cdot 0,2642} = 0,223$$

O momento  $M_{sh}$  devido à retração diferencial também foi calculado. O uso dos módulos ajustados à idade na expressão implica que o resultado obtido já inclui o efeito da fluência sobre este fenômeno. O momento de restrição foi adotado como 1,2 vez o valor de  $M_{sh}$ , considerando novamente que os três vãos da ponte possuem comprimento aproximadamente igual.

$$\bar{E}_b(139, 90) = \frac{40732,35}{1 + 0,7 \cdot 0,2642} = 34375,03 \text{ MPa}$$

$$\bar{E}_d(49, 1) = \frac{21843,49}{1 + 0,7 \cdot 0,9505} = 13116,46 \text{ MPa}$$

$$d_{cgb} = 1,4707 - 0,9346 = 0,5361 \text{ m}$$

$$d_{cgd} = 1,83 + \frac{0,19}{2} - 1,4707 = 0,4543 \text{ m}$$

$$M_{sh} = -289,95 \text{ kNm}$$

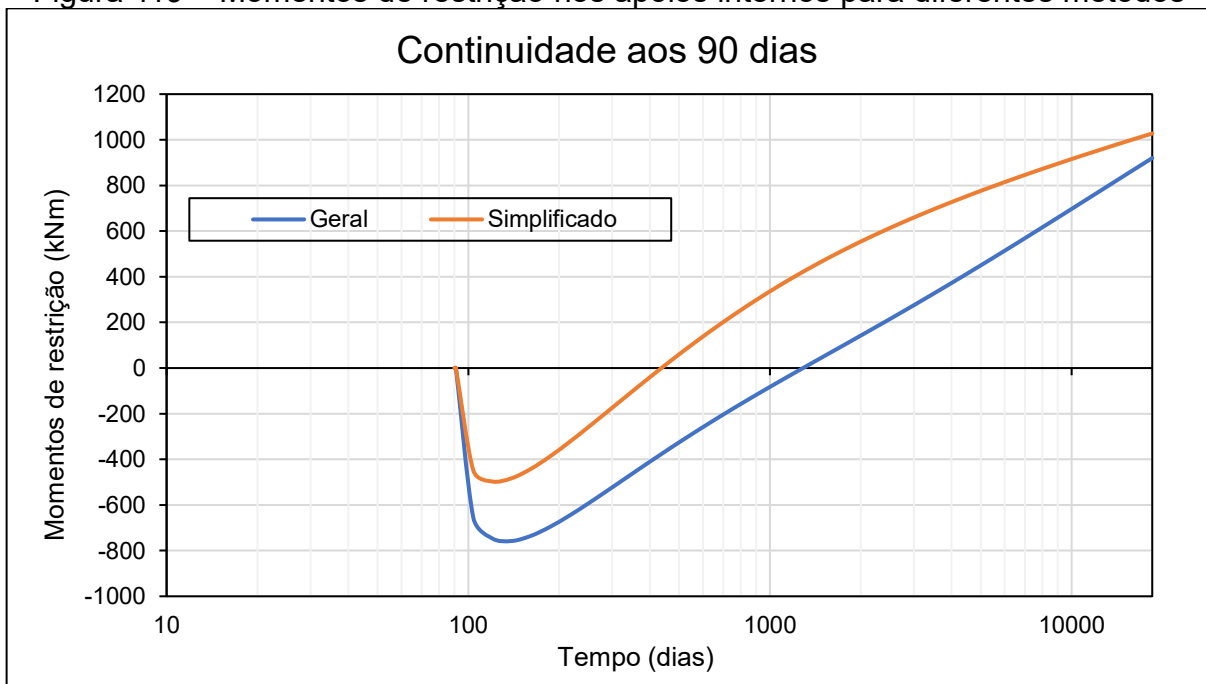
Todos os momentos de restrição calculados de forma simplificada estão resumidos na Tabela 33, sendo obtido o valor total de -483,42 kNm. O resultado aplicando o método geral foi -757,81 kNm. A Figura 119 compara os resultados dos dois métodos empregados para diferentes instantes após a continuidade.

Tabela 33 – Momentos de restrição calculados de forma simplificada aos 139 dias

Caso	M (kNm)	M* (kNm)	$\delta$	Mrest (kNm)
g1	-1368,01	-1368,01	0,0486	-66,49
g2	-1958,33	-1958,33	0,2230	-436,70
Protensão	2374,29	8453,17	0,0486	410,82
Perdas (15%)	-356,14	-1267,98	0,0340	-43,11
Retração	-	-	-	-347,94

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Figura 119 – Momentos de restrição nos apoios internos para diferentes métodos

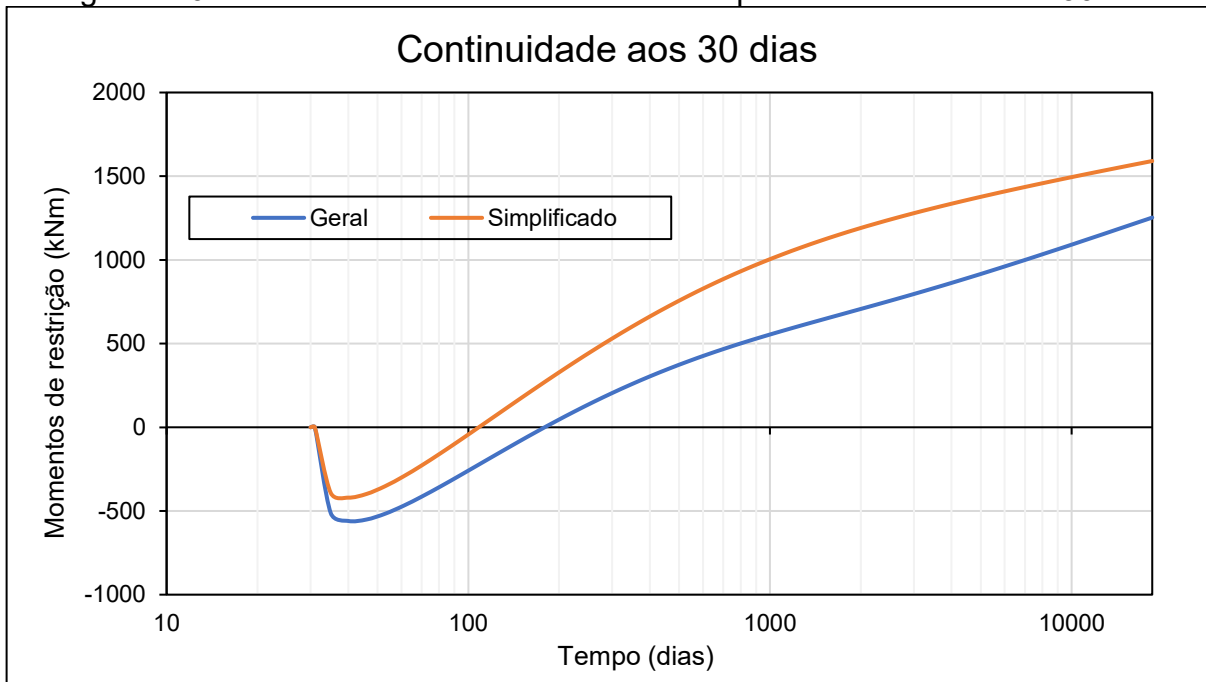


Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observa-se que, no período analisado, o código desenvolvido que empregou um método geral para análise de seções previu maiores momentos de restrição negativos que o método simplificado. Conseqüentemente, houve uma diferença de pouco mais de dois anos entre as datas de surgimento de momentos positivos. Padrões semelhantes se desenvolveram em outras idades de continuidade, como pode ser visto na Figura 120.



Figura 120 – Resultados de diferentes métodos para continuidade aos 30 dias



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Os resultados do método simplificado são extremamente sensíveis às estimativas das perdas de protensão, principalmente para tempos mais distantes da continuidade. No método geral, as perdas são calculadas automaticamente, considerando a relação entre fluência, retração e relaxação, assim como a variação das perdas ao longo do comprimento. Por este motivo, não é possível separar completamente as parcelas do momento total para uma comparação mais detalhada.

Além disso, quando a área de aço e os módulos de elasticidade para idades superiores a 28 dias são considerados no cálculo, há uma alteração significativa da rigidez e da posição do centroide do elemento, contribuindo para diferenças nos resultados. Os momentos devido à retração diferencial são os mais afetados por estes fatores. A aplicação dos valores exatos para o coeficiente de envelhecimento teve influência desprezível no resultado do método simplificado.

Para continuidade estabelecida aos 90 dias, o máximo momento de restrição positivo calculado pelo método geral foi de 919,88 kN. Na região dos apoios internos, os momentos positivos devido à temperatura foram quase o dobro daqueles causados pela carga móvel. Ainda assim, o somatório na combinação frequente empregando os máximos momentos de continuidade positivos resultou em valor negativo, o que indica que nenhuma conexão nas transversinas seria necessária.

$$M_{cont+}^{ELS-F} = 70,69 - 2065,88 + 0,3 \cdot 522,55 + 0,5 \cdot 1026,08 + 919,88 = -405,51 \text{ kNm}$$

Entretanto, grande parte dos momentos negativos são consequência do peso da repavimentação futura, cuja execução é incerta. Desconsiderando 40% do caso de carga  $g_4$ , obteve-se uma resultante positiva.

$$M_{cont+}^{ELS-F} = 70,69 - 0,6 \cdot 2065,88 + 0,3 \cdot 522,55 + 0,5 \cdot 1026,08 + 919,88 = 420,85 \text{ kNm}$$

Com base nos exemplos de FIB (2020), que adotam 248 MPa como tensão limite no aço e posição da linha neutra igual a aproximadamente 80% da altura da seção composta, o número de cordoalhas a serem embutidas nas transversinas foram calculados.

$$A_{s,rest+} = \frac{420,85 \text{ kNm}}{0,8 \cdot 2,02 \text{ m} \cdot 248 \text{ MPa}} = 10,50 \text{ cm}^2$$

$$n_{cordoalhas} = \frac{10,5}{1,01} = 10,4 \Rightarrow 11 \text{ cordoalhas}$$

Segundo as indicações de AASHTO (2020), quando a continuidade é estabelecida após 90 dias, o cálculo do momento de restrição poderia ser dispensado com a adoção de armadura nos apoios suficiente para resistir a um momento igual a  $1,2M_r$ . Verificou-se que esta resistência seria superior aos esforços estimados a partir da análise estrutural. Miller *et al.* recomendam armadura mínima com momento resistente de  $0,6M_r$ , o que resultaria no emprego de 13 cordoalhas para conexão.

Adotando para a parte pré-moldada as propriedades do concreto das transversinas, a seção homogeneizada na extremidade possui módulos de resistência  $W_{inf}$  igual a  $0,359 \text{ cm}^3$  e  $W_{sup}$  igual a  $-0,919 \text{ cm}^3$ . A largura colaborante da laje foi reduzida de 3,66 m para 3,07 m por se tratar de região de momentos negativos.

$$1,2M_{r,inf} = 1,2 \cdot 0,7 \cdot 1,2 \cdot 2,90 \cdot 10^3 \cdot 0,359 = 1049,43 \text{ kNm}$$

Devido à previsão de momentos negativos elevados sobre os apoios internos, podem ocorrer redistribuições para a região do meio do vão. Os momentos

de continuidade nos apoios internos foram recalculados para gerar os máximos valores negativos no ELS-D. Conforme Andrade (1994), a parcela redistribuída equivale ao excedente de  $1,25M_r$ .

$$M_{cont-}^{ELS-D} = 70,69 - 2065,88 - 0,3 \cdot (3784,95 - 1026,08) - 757,81$$

$$M_{cont-}^{ELS-D} = -3580,66 \text{ kNm}$$

$$1,25M_{r,sup} = 1,25 \cdot 0,7 \cdot 1,2 \cdot 2,90 \cdot 10^3 \cdot (-0,919) = -2798,36 \text{ kNm}$$

$$M_{red} = |-3580,66 - (-2798,36)| = 782,30 \text{ kNm}$$

Mantida a hipótese de continuidade total e o surgimento de momentos de restrição, as verificações de tensão na seção crítica em serviço foram repetidas. A Tabela 34 resume as propriedades para as diferentes seções homogeneizadas. Com exceção da análise ajustada à idade, o módulo longitudinal do concreto C60 aos 28 dias foi tomado como referência.

Tabela 34 – Propriedades das seções homogeneizadas para  $x = 16,75 \text{ m}$

SEÇÃO	$E_s/E_{ref}$	$E_{laje}/E_{ref}$	$A_h$ ( $m^2$ )	$z_{cg}$ ( $m$ )	$I_y$ ( $m^3$ )	$W_{y,inf}$	$W_{y,sup}$
Isolada	5,059	-	0,508	0,900	0,237	0,263	-0,211
Composta	5,059	0,679	0,979	1,393	0,495	0,355	-0,789
Ajustada a idade	8,547	0,554	0,909	1,322	0,495	0,374	-0,708

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como os máximos momentos positivos foram estimados 50 anos após a concretagem das longarinas, os coeficientes de fluência e de envelhecimento para ajuste do módulo de elasticidade foram calculados nesta data. Não foi possível evitar incompatibilidades entre o modelo de previsão da fluência de FIB (2012) e os módulos de elasticidade previstos conforme as normas brasileiras.

$$\bar{E}_b(18500, 90) = \frac{39531,33}{1 + 0,7443 \cdot 0,9262} = 23400,03 \text{ MPa}$$

$$\bar{E}_d(18410, 1) = \frac{26838,41}{1 + 0,6365 \cdot 1,6808} = 12966,48 \text{ MPa}$$

$$M_{rest}(x = 16,75 \text{ m}) = 919,88 \cdot \frac{16,75}{33,50} = 459,94 \text{ kNm}$$

São apresentados abaixo os cálculos para verificação das tensões de tração da seção crítica no ELS-D. Os momentos devido a ações externas são os mesmos da Tabela 26.

$$\sigma_{inf,g1+g2}^{ELS-D} = \frac{1672,17 \text{ kNm} + 2395,11 \text{ kNm}}{0,263 \text{ m}^3} = 15,46 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{inf,p}^{ELS-D} = \frac{-4876,18 \text{ kN}}{0,508 \text{ m}^2} + \frac{-4876,18 \text{ kN} \cdot (0,9 - 0,9346 + 0,7891) \text{ m}}{0,263 \text{ m}^3} = -23,60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{inf,g3+g4}^{ELS-D} = \frac{-17,72 \text{ kNm} + 1510,98 \text{ kNm}}{0,355 \text{ m}^3} = 4,21 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{inf,q1+q2}^{ELS-D} = 0,3 \cdot \frac{4018,71 \text{ kNm} + 513,04 \text{ kNm}}{0,355 \text{ m}^3} = 3,83 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{inf,M_{rest}}^{ELS-D} = \frac{459,94 \text{ kNm}}{0,374 \text{ m}^3} = 1,23 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{inf}^{ELS-D} = 15,46 - 23,60 + 4,21 + 3,83 + 1,23 = 1,13 \text{ MPa} \geq 0$$

As tensões superaram o limite máximo de tração, o que não ocorreu para o ELS-F. As tensões de compressão na fibra superior foram satisfatórias para os dois estados limites de serviço devido à folga prevista pelo dimensionamento preliminar.

Deste modo, a disposição da armadura para as vigas pré-fabricadas que foi escolhida não se mostrou adequada para o desempenho em serviço da estrutura ao considerar os esforços dependentes do tempo. Caso a área de aço seja ajustada, também ocorrem variações nas perdas de protensão, nos momentos de restrição positivos e a situação da transferência deve ser reavaliada.

Portanto, múltiplas análises podem ser necessárias para determinar um arranjo final adequado, reforçando a importância de automatizar o procedimento geral para análise de seções e de incluir no dimensionamento preliminar os esforços calculados através do método simplificado.

Para comparar os momentos adicionais devido à continuidade àqueles esperados caso a estrutura fosse dimensionada como isostática, estimou-se os momentos na seção central de um tramo biapoiado da viga V2. As forças aplicadas para os casos  $g_3$  e  $g_4$  foram as mesmas da etapa de validação dos resultados obtidos pelo MEF. A estrutura também foi submetida ao deslocamento do trem-tipo linearizado com base no método GMB.

$$M_{g3, \text{isostática}} = 0$$

$$M_{g4, \text{isostática}} = \frac{17,654 \cdot 33,2^2}{8} = 2432,37 \text{ kNm}$$

$$M_{q1, \text{isostática}} = 4447,26 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{inf, \text{isostática}}^{ELS-D} = 15,46 - 23,60 + \frac{2432,37}{0,355 \cdot 10^3} + 0,3 \cdot \frac{4447,26}{0,355 \cdot 10^3} = 2,47 \text{ MPa}$$

O dimensionamento adotando a hipótese de continuidade completa poderia ser otimizado caso a carga devido à repavimentação futura seja desprezada ou caso a resistência do concreto nas transversinas seja aumentada. Assim, os esforços redistribuídos à região central devido ao excesso de momentos negativos seriam reduzidos.

Além disso, aplicando o método geral de análise de seções adotando concreto com resistência característica de 70 MPa para as longarinas, observou-se uma redução superior a 50% no máximo momento de restrição positivo. O aumento no máximo momento de restrição negativo foi de apenas 7,5%. Esta alteração no projeto já havia sido sugerida para contribuir com a validade da hipótese de fluência linear.

## 9 CONCLUSÕES

Após a discussão de fundamentos da análise de estruturas com auxílio de computador, boas práticas de modelagem e o desenvolvimento de um exemplo detalhado, o modelo de placas e vigas excêntricas se mostrou uma alternativa viável para a análise da superestrutura em vigas de pontes de concretos.

Sugere-se que trabalhos futuros adotem uma abordagem semelhante para descrever os procedimentos para modelagem e dimensionamento dos aparelhos de apoio e da infraestrutura deste tipo de construção. O dimensionamento dos elementos transversais da superestrutura não foi o foco do exemplo desenvolvido e pode ser objeto de outras pesquisas.

O pós-processamento de dados foi otimizado através da aplicação de ferramentas de exportação de resultados do Robot Structural Analysis e da adoção de hipóteses de cálculo com base na geometria dos carregamentos. Nos casos em que há previsão de forças axiais resultantes na seção completa das longarinas, podem ser aplicados critérios de repartição para emprego do procedimento de integração de tensões na seção completa.

As envoltórias devido à carga móvel foram obtidas pela superposição dos esforços devido à carga de multidão e do veículo tipo, possibilitada pela homogeneização do TB-450. Por isso, é desejável que as normas brasileiras ofereçam uma alternativa aplicável a estruturas com vãos menores que 30 m e que permita o posicionamento transversal do trem tipo de forma mais simples. Mantendo um alto grau de discretização, foi possível reduzir consideravelmente o tempo de processamento computacional ao aproximar o aspecto da superfície de influência a partir da análise de seções críticas.

Os resultados dos modelos concordaram de forma satisfatória com o método GMB e com a hipótese de repartição de carga pela área de influência das longarinas. Por sua vez, o método de Engesser-Courbon mostrou-se pouco adequado para análise de uma ponte sem transversinas intermediárias. Ainda assim, o projeto analisado demonstrou como é possível obter tensões finais semelhantes para as várias longarinas da ponte mesmo sem estes elementos.

O método simplificado da NBR 7187/2021 para determinar a variação não uniforme de temperatura previu valores menores do que o método que considera variação não linear ao longo da altura. Entretanto, para as vigas internas, a diferença

foi pouco significativa e não justificaria o emprego do cálculo mais detalhado. Os momentos positivos causados pela temperatura na região dos apoios internos foram superiores aos causados pela carga móvel.

Um procedimento geral para determinação dos momentos de restrição devido à fluência, retração e relaxação do aço pode ser desenvolvido para analisar diferentes arranjos de armadura, comprimentos de vão, propriedades de concreto e cronogramas de obras. Entretanto, sua aplicação prática na elaboração de projetos requer a automatização do processo de cálculo, especialmente quando as diversas etapas do processo construtivo devem ser analisadas com maior precisão.

A idade das longarinas quando do estabelecimento da continuidade é o principal fator ao quantificar os momentos de restrição. A conexão de momentos positivos sugerida por AASHTO (2020) para continuidade de longarinas com idade superior a 90 dias foi excessiva para a ponte analisada. Ainda assim, o dimensionamento preliminar, que desconsiderou os esforços dependentes do tempo, não foi suficiente para garantir desempenho adequado a longo prazo.

Portanto, o método do coeficiente de envelhecimento simplificado deve ser aplicado para gerar estimativas iniciais dos momentos de restrição ao projetar pontes em vigas pré-moldadas com continuidade estabelecida no local. Além disso, o arranjo torna-se mais eficiente ao melhorar o desempenho dos materiais empregados, contribuindo para a redução da fluência. A carga prevista pela NBR 7187/2021 equivalente a uma possível repavimentação futura resultou em grandes redistribuições para a região central do vão devido ao excesso de momentos negativos.

Neste contexto, a caracterização da fluência e retração nas normas brasileiras deve ser objeto de estudo para adequar-se às aplicações de concretos de alto desempenho em estruturas com pré-tração. A consideração da componente autógena na retração, os efeitos do processo de cura a vapor e a definição de intervalos de confiabilidade das previsões devem ser incorporados a um modelo compatível com os módulos de elasticidade estimados a partir da NBR 6118.

## REFERÊNCIAS

AASHTO - AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. **LRFD bridge design specifications**. 9. ed. Washington: AASHTO, 2020.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento, Versão Corrigida. 1. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2004.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7188**: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2013.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 8122**: Concreto - Determinação dos módulos estáticos de elasticidade e de deformação à compressão. Rio de Janeiro: ABNT, 2017.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 9062**: Projeto e execução de estruturas de concreto pré-moldado. Rio de Janeiro: ABNT, 2017.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7187**: Projeto de pontes, viadutos e passarelas de concreto. 2. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2021.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. 4. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.

ABNT - ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 7188**: Ações devido ao tráfego de veículos rodoviários e de pedestres em pontes, viadutos e passarelas. 3. ed. Rio de Janeiro: ABNT, 2024.

ACI - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 209.1R-05**: Report on factors affecting shrinkage and creep of hardened concrete. Farmington Hills: ACI, 2005.

ACI - AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 209.2R-08**: Guide for modeling and calculating shrinkage and creep in hardened concrete. Farmington Hills: ACI, 2008.

ADAMS, A.; GALINDEZ, N.; HOPPER, T.; MURPHY, T.; RITCHIE, P.; STORLIE, V.; WEISMAN, J. **Manual for refined analysis in bridge design and evaluation**. Washington: FHWA, 2019.

ALVES FILHO, A. **Elementos finitos: a base da tecnologia CAE**. 6. ed. São Paulo: Érica, 2013.

ANDRADE, J. M. M. **Contribuição ao cálculo de momentos fletores dependentes do tempo em vigas de pontes pré-moldadas protendidas com continuidade estabelecida no local**, 1994. 198f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 1994.



ARCELORMITTAL. **Fios e Cordoalhas para Concreto Protendido**. [s.l.: s.n.], 2022.

ARRUDA, M. A. **Viabilidade do uso do Robot Structural Analysis como ferramenta BIM de modelagem e análise de estruturas convencionais de concreto armado**. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2019.

ASSAN, A. E. **Resistência dos materiais**. 1. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2010. v. 1.

AUTODESK. **Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2024 Help**: Local coordinate system of members. Disponível em: <https://help.autodesk.com/view/RSA/PRO/2024/ENU/?guid=GUID-E6C19973-6864-4E67-9659-6F43579E2DB8>. Acesso em: 23 jul. 2024.

AUTODESK. **Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2024 Help**: Sign convention for bar elements. Disponível em: <https://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2024/ENU/?guid=GUID-D1195F2E-6310-4DF6-BE1E-DCCD2A0D121E>. Acesso em: 23 jul. 2024.

AUTODESK. **Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2024 Help**: Sign convention for planar finite elements. Disponível em: <https://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2024/ENU/?guid=GUID-AE34635A-F2B5-4A62-A6B0-95066594D554>. Acesso em: 23 jul. 2024.

AUTODESK. **Autodesk Robot Structural Analysis Professional 2024 Help**: Section properties. Disponível em: <https://help.autodesk.com/view/RSAPRO/2024/ENU/?guid=GUID-BBDCC532-E4F1-4386-9DFA-FE2EC05B44C2>. Acesso em: 23 jul. 2024.

AUTODESK. **What types of finite elements are used in Robot Structural Analysis**. Disponível em: <https://www.autodesk.com/support/technical/article/caas/sfdcarticles/sfdcarticles/ROBOT-what-types-of-finite-elements-are-used-in-the-program.htm>. Acesso em: 23 jul. 2024.

BAPAT, A. V. **Influence of bridge parameters on finite element modeling of slab on girder bridges**. Blacksburg: Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009.

BAREŠ, R.; MASSONNET, C. E. **Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon-Massonnet-Bareš**. 1. ed. Paris: Dunod, 1966.

BAZANT, Z. P. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method. **ACI Journal Proceedings**, v. 69, n. 4, p. 212–217, 1972.

BAZANT, Z. P. **Mathematical modeling of creep and shrinkage of concrete**. 1. ed. New York: Wiley, 1988.

BAZANT, Z. P.; JIRÁSEK, M. **Creep and Hygrothermal Effects in Concrete Structures**. Dordrecht: Springer Dordrecht, 2018.

BENAIM, R. **The design of prestressed concrete bridges**. 1. ed. New York: Taylor & Francis, 2008.

BETETA, M. C.; ALBAJAR, L.; ZANUY, C.; ESTAÚN, M. Simplified method for time-dependent effects in statically indeterminate concrete bridges with connected precast beams. **Informes de la Construcción**, v. 74, n. 568, 2022.

BRASIL, R. M. L. R. F.; BALTHAZAR, J. M.; GÓIS, W. **Métodos numéricos e computacionais na prática de engenharias e ciências**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2015.

BRICE, R.; PICKINGS, R. Saint-Venant torsion constant of modern precast concrete bridge girders. **PCI Journal**, v. 66, n. 3, p. 23–31, 2021.

CAVALCANTE, G. H. **Pontes em concreto armado: análise e dimensionamento**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019.

CEB - COMITÉ EURO-INTERNATIONALE DU BÉTON. **Model code for concrete structures**. Paris: CEB, 1978.

CEN - COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION. **EN 1992-1-1: Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings**. Brussels: CEN, 2004.

CHAPELLE, D.; BATHE, K.-J. **The finite element analysis of shells - fundamentals**. 2. ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2011.

CHUNG, W.; SOTELINO, E. Three-dimensional finite element modeling of composite girder bridges. **Engineering Structures**, v. 28, p. 63–71, 2006.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D. **Prestressed Concrete Structures**. Toronto: Response Publications, 1997.

COUTINHO, P. M. **Análise numérica comparativa entre pontes integrais e convencionais de concreto armado sujeitas a ações indiretas de temperatura, retração e fluência**, 2019. 197f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Natal, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2019.

DAER/RS - DEPARTAMENTO AUTÔNOMO DE ESTRADAS DE RODAGEM. **Normas de Projetos Rodoviários**. Porto Alegre: DAER, 1991. v. 1

DEBS, M. K. EL. **Pontes de concreto: com ênfase na aplicação de elementos pré-moldados**. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2022.

DER/SP - DEPARTAMENTO DE ESTRADAS DE RODAGEM. **Projeto de estrutura de obra de arte especial**. São Paulo: DER, 2005.

DNER - DEPARTAMENTO NACIONAL DE ESTRADAS DE RODAGEM. **Manual de projetos de obras-de-arte especiais**. Rio de Janeiro: DNER, 1996.

FERNANDES, T. G. **Análise estrutural comparativa dos resultados obtidos pelos softwares Robot Structural Analysis e SAP2000 por meio do estudo de caso de um centro administrativo**. Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto, 2022.

FIB - FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **Model code 2010: final draft**. Ostfildern: DCC Document Competence Center Sieigma Kastl e.k., 2012. v. 1

FIB - FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **Model code 2010: final draft**. Ostfildern: DCC Document Competence Center Sieigma Kastl e.k., 2012. v. 2

FIB - FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **fib Bulletin 94. Precast concrete bridge continuity over piers**. Ostfildern: DCC Document Competence Center Sieigma Kastl e.k., 2020.

FREUDENTHAL, A. M.; ROFF, F. Creep and creep recovery of concrete under high compressive stress. **ACI Journal**, v. 54, n. 66, p. 1111–1142, 1958.

FREYERMUTH, C. L. Design of continuous highway bridges with precast, prestressed concrete girders. **PCI Journal**, v. 14, n. 2, p. 14–39, 1969.

FU, C. C.; WANG, S. **Computational analysis and design of bridge structures**. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.

GHALI, A.; FAVRE, R. Stresses and deformations of composite members. *In*. IABSE Proceedings P-94. **Anais [...]**. Zurich: IABSE, 1986.

GHALI, A.; FAVRE, R.; ELBADRY, M. **Concrete structures: stresses and deformations: analysis and design for serviceability**. 4. ed. New York: Spon Press, 2012.

GUYON, M. Y. Calcul des ponts larges à poutres multiples solidarisées par des entretoises. **Annales des Ponts et Chaussées**, v. 24, n. 5, p. 553–612, 1946.

HAMBLY, E. C. **Bridge Deck Behaviour**. 2. ed. London: CRC Press, 1991.

HUESTE, M. B. D.; MANDER, J. B.; PARKAR, A. S. **Continuous prestressed concrete girder bridges volume 1: literature review and preliminary designs**. Alexandria: TTI, 2012.

KIMURA, A. E. **Informática aplicada a estruturas de concreto armado**. 2. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2018.

KYTÖLÄ, U. **Precast prestressed concrete beams made continuous as a deck structure**. Joensuu: Tampere University, 2023.

MARCHETTI, O. **Pontes de concreto armado**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2018.

MARTHA, L. F. **Análise matricial de estruturas com orientação a objetos**. 1. ed. Rio de Janeiro: Grupo GEN, 2018.

MASSONNET, C. E. Contribution au calcul des ponts à poutres multiples. **Annales des travaux publics de Belgique**, v. 17, n. 3, p. 377–422, 1950.

MASSONNET, C. E. Compléments à la méthode de calcul des ponts à poutres multiplex. *In*: Annales de l'ITBTP. **Anais**[...]. Janvier: ITBTP, 1962.

MCDONAGH, M. D.; HINKLEY, K. B. Resolving Restraint Moments: Designing for Continuity in Precast Prestressed Concrete Girder Bridges. **PCI Journal**, v. 48, n. 4, p. 104–119, 2003.

MENKULASI, F.; PATEL, A.; BAGHI, H. An investigation of AASHTO's requirements for providing continuity in simple span bridges made continuous. **Engineering Structures**, v. 158, p. 175–198, 2018.

MILLER, R. A.; CASTRODALE, R.; MIRMIRIAN, A.; HASTAK, M. **NCHRP Report 519**: connection of simple-span precast concrete girders for continuity. Washington: NCHRP, 2004.

OBRIEN, E. J.; KEOGH, D. L.; O'CONNOR, A. J. **Bridge deck analysis**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2015.

OESTERLE, R. G.; GLIKIN, J. D.; LARSON, S. C. **NCHRP Report 322**: design of precast prestressed bridge girders made continuous. Washington: NCHRP, 1989.

PAPPALARDO JÚNIOR, A. **Aplicações práticas e desafios estruturais com MEF**. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2024.

PCI - PRECAST/PRESTRESSED CONCRETE INSTITUTE. **Bridge Design Manual**. 4. ed. Chicago: PCI, 2023.

PFEIL, W. **Pontes em concreto armado**: elementos de projeto, solicitações, dimensionamento. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

PILKEY, W. D. **Analysis and design of elastic beams**: computational methods. 1. ed. New York: Wiley, 2002.

PINHEIRO, L. M. **O uso do Autodesk Robot Structural Analysis e do Revit para o dimensionamento de uma edificação em concreto armado**. Santa Maria: Universidade Federal de Santa Maria, 2022.

PINHO, M. F. **Pontes integrais**: aspectos de projeto e construção. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

REIS, A. J.; PEDRO, J. J. O. **Bridge design**: concepts and analysis. 1. ed. Hoboken: Wiley, 2019.

- RÜSCH, H.; JUNGWIRTH, D.; HILSDORF, H. K. **Creep and Shrinkage: their effect on the behaviour of concrete structures**. 1. ed. New York: Springer New York, 1983.
- SABADIN, M. H. **Comparação entre solicitações obtidas pelo TQS e pelo Autodesk Robot Structural Analysis: aplicação a um edifício de pequeno porte**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2018.
- SAN MARTIN, F. J. **Cálculo de tabuleiro de pontes**. 1. ed. São Paulo: LCTE, 1981.
- SCI - STEEL CONSTRUCTION INSTITUTE. **Steel Bridge Group: Guidance notes on best practices in steel bridge construction**. 6. ed. Ascot: SCI, 2015.
- SERVAT, P. **Application pratique de la methode de Guyon Massonnet Bares**. [s.l.: s.n.], 2019.
- STUCCHI, F. R. **Pontes e grandes estruturas: Notas de aula**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2006.
- SURANA, C. S.; AGRAWAL, R. **Grillage analogy in bridge deck analysis**. 1. ed. New Delhi: Narosa, 1998.
- TADROS, M. K.; AL-OMAISHI, N.; SEGUIRANT, S. J.; GALLT, J. G. **NCHRP Report 496: prestress losses in pretensioned high-strength concrete bridge girders**. Washington: NCHRP, 2003.
- TADROS, M. K.; GIRGIS, A. M.; TUAN, C. Y.; ALEX, A. A. Simplified design for positive restraint continuity moment in bridge girders. **PCI Journal**, v. 63, n. 4, p. 62–78, 2018.
- TREVIÑO, J.; GHALI, A. Relaxation of Steel in Prestressed Concrete. **PCI Journal**, v. 30, n. 5, p. 82–94, 1985.
- TROST, H. Auswirkungen des Superpositionsprinzip auf Kriech- un Relaxations-Probleme bei Beton und Spannbeton. **Beton- und Stahlbetonbau**, v. 62, n. 10, 1967.
- VALERIANO, R. **Pontes**. 1. ed. São Paulo: Oficina de Textos, 2021.
- WASSEF, W. D.; SMITH, C.; CLANCY, C. M.; SMITH, M. J. **Comprehensive Design Example for Prestressed Concrete (PSC) Girder Superstructure Bridge with Commentary (in SI Units)**. Washington: FHWA, 2003.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 7. ed. Oxford: Elsevier, 2013.

## APÊNDICE A – FLUÊNCIA E RETRAÇÃO SEGUNDO FIB (2012)

O modelo de previsão da fluência e retração de FIB (2012) descreve o comportamento de concretos sujeitos a cura úmida por menos de 14 dias. A temperatura ambiente média deve ser entre 5°C e 30°C durante o período de previsão. Situações diferentes destas são consideradas com a aplicação de equações de ajuste.

A resistência média a compressão aos 28 dias deve ser entre 20 MPa e 130 MPa, e a tensão atuante não deve superar 40% deste valor. Para fluência, a idade do concreto deve ser no mínimo de um dia quando da aplicação de carregamentos. A formulação será apresentada apenas para concretos com densidade entre 2000 kg/m<sup>3</sup> e 2600 kg/m<sup>3</sup>, apesar da publicação conter equações específicas para concretos mais leves.

Os parâmetros de entrada são a resistência a compressão aos 28 dias, temperatura ambiente e de cura, umidade relativa do ar, tipo de agregado e tipo de cimento. Além disso, a geometria e forma do elemento são consideradas a partir da espessura média  $h$ . Na expressão abaixo,  $A$  é a área da seção transversal, enquanto  $u_{ar}$  é o seu perímetro em contato com o ar.

$$h = \frac{2A}{u_{ar}}$$

A aplicação deste modelo no trabalho foi motivada pela semelhança entre as fórmulas de FIB (2012) e da NBR 6118/2023 para previsão da resistência à compressão e módulo de elasticidade do concreto.

### A.1 Resistência a compressão e módulo de elasticidade

A resistência média a compressão aos 28 dias, em MPa, pode ser estimada a partir da resistência característica de projeto. O desenvolvimento com o tempo da resistência é definido pela função  $\beta_{cc}$ , análoga à função  $\beta_1$  da NBR 6118/2023.

$$f_{cm28} = f_{ck} + 8$$

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) f_{cm28}$$

$$\beta_{cc}(t) = \exp \left\{ s \left[ 1 - \left( \frac{28}{t_T} \right)^{0,5} \right] \right\}$$

$$s = \begin{cases} 0,38 & \text{para concreto de cimento de cura lenta} \\ 0,25 & \text{para concreto de cimento de cura normal} \\ 0,20 & \text{para concreto de cimento de cura rápida ou caso } f_{ck} \geq 60 \text{ MPa} \end{cases}$$

O tempo  $t_T$  aplicado no cálculo considera o efeito da temperatura para ajuste da maturidade do concreto. Na equação abaixo,  $\Delta t_i$  se refere a um período de tempo, em dias, no qual o concreto é sujeito a uma temperatura  $T_i$  entre 0°C e 80°C. Considerando variações sazonais, este ajuste geralmente pode ser desconsiderado para temperaturas médias no intervalo entre 20 °C e 40 °C.

$$t_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \exp \left[ 13,65 - \frac{4000}{273 + T_i} \right]$$

O módulo de elasticidade tangente é definido por FIB (2012) como aproximadamente igual à inclinação da reta secante à curva de descarregamento rápido, considerando tensão proporcional de  $0,4f_{cm}$ . O conceito não equivale exatamente àquele descrito pela NBR 8522, sobretudo devido à diferença entre as tensões proporcionais. Seu valor médio aos 28 dias, em MPa, pode ser estimado pela expressão abaixo, semelhante à adotada pela NBR 6118 para concretos do Grupo II.

$$E_{ci28} = 21500 \cdot \alpha_E \cdot \left( \frac{f_{cm28}}{10} \right)^{1/3}$$

Assim como na norma brasileira, o coeficiente  $\alpha_e$  considera a natureza dos agregados na mistura. Haja vista a semelhança entre as expressões, considera-se razoável aplicar os valores sugeridos pela NBR 6118.

O desenvolvimento ao longo do tempo do módulo de elasticidade também é descrito em função de  $\beta_{cc}$ . Neste caso, a expressão de FIB (2012) é análoga à adotada pela NBR 6118 para concretos do Grupo I.

$$E_{ci}(t) = E_{ci28} \cdot \sqrt{\beta_{cc}(t)}$$

$$E_{cs}(t) = \left(0,8 + 0,2 \cdot \frac{f_{cm}}{88}\right) \cdot E_{ci}(t) \leq E_{ci}(t)$$

## A.2 Retração

Sendo  $\epsilon_{cas}$  a retração autógena e  $\epsilon_{ds}$  a retração por secagem, a deformação total por retração é dada por:

$$\epsilon_{cs}(t) = \epsilon_{cas}(t) + \epsilon_{cds}(t, t_0)$$

A retração autógena é calculada a partir da idade do concreto, em dias, do tipo de cimento e da resistência média a compressão aos 28 dias, em MPa.

$$\epsilon_{cas}(t) = -\alpha_{as} \left( \frac{\frac{f_{cm28}}{10}}{6 + \frac{f_{cm28}}{10}} \right)^{2,5} 10^{-6} \beta_{as}(t)$$

$$\alpha_{as} = \begin{cases} 800 & \text{para concreto de cimento de cura lenta} \\ 700 & \text{para concreto de cimento de cura normal} \\ 600 & \text{para concreto de cimento de cura rápida} \end{cases}$$

$$\beta_{as}(t) = 1 - \exp(-0,2 \sqrt{t_T})$$

FIB (2012) esclarece que a retração não depende diretamente da resistência a compressão, mas esta pode ser utilizada para representar implicitamente a composição da mistura por ser um parâmetro conhecido nas fases preliminares de projeto. A retração por secagem considera ainda a umidade relativa do ar  $RH$ , em percentual, a idade do concreto no início da secagem e a espessura média da peça, em milímetros.

$$\epsilon_{ds}(t, t_0) = \epsilon_{ds0}(f_{cm28}) \beta_{RH,T} \beta_{ds}(t - t_0)$$

$$\epsilon_{ds0}(f_{cm28}) = [(220 + 110 \alpha_{ds1}) \cdot \exp(-\alpha_{ds2} \cdot f_{cm28})] \cdot 10^{-6}$$



$$\alpha_{ds1} = \begin{cases} 3 & \text{para concreto de cimento de cura lenta} \\ 4 & \text{para concreto de cimento de cura normal} \\ 6 & \text{para concreto de cimento de cura rápida} \end{cases}$$

$$\alpha_{ds2} = \begin{cases} 0,013 & \text{para concreto de cimento de cura lenta} \\ 0,012 & \text{para concreto de cimento de cura normal ou rápida} \end{cases}$$

$$\beta_{RH} = \begin{cases} -1,55 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{RH}{100} \right)^3 \right], & 40 \leq RH \leq 99 \beta_{s1} \\ 0,25, & RH \geq 99 \beta_{s1} \end{cases}$$

$$\beta_{s1} = \left( \frac{35}{f_{cm28}} \right)^{0,1} \leq 1$$

$$\beta_{ds}(t - t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{0,035h^2 + (t - t_0)} \right]^{0,5}$$

### A.3 Fluência

FIB (2012) conceitua as deformações por fluência em função da deformação esperada caso o carregamento fosse aplicado aos 28 dias, diferindo do conceito clássico empregado em outras publicações. Portanto, é necessária a aplicação de um fator  $\beta_E$  sobre os coeficientes de fluência calculados para uso das outras equações neste trabalho.

$$\beta_E(t_0) = \frac{E_c(t_0)}{E_c(28)}$$

$$\varphi(t, t_0) = \beta_E(t_0) \varphi_{28}(t, t_0)$$

O fenômeno é dividido pelo código em duas parcelas:  $\varphi_{bc}$  é a componente básica que ocorreria caso não houvessem variações no teor de umidade do concreto, enquanto  $\varphi_{dc}$  equivale ao efeito da secagem durante o período de sustentação do carregamento.

$$\varphi_{28}(t, t_0) = \varphi_{bc} + \varphi_{dc}$$

Em alguns dos parâmetros, a idade  $t_0$  do concreto quando da aplicação da carga é alterada para considerar o tipo de cimento. Este ajuste é feito pela equação abaixo, que deve aplicar a idade  $t_{0,T}$  já ajustada para incluir o efeito da temperatura na maturidade.

$$t_{0,adj} = t_{0,T} \cdot \left[ \frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right]^{\alpha_{bc}} \geq 0,5 \text{ dias}$$

$$\alpha_{bc} = \begin{cases} -1 & \text{para concreto de cimento de cura lenta} \\ 0 & \text{para concreto de cimento de cura normal} \\ +1 & \text{para concreto de cimento de cura rápida} \end{cases}$$

A componente básica depende apenas da composição da mistura, representada pela resistência à compressão aos 28 dias, do tempo efetivo de duração do carregamento e da idade inicial ajustada do concreto.

$$\varphi_{bc}(t, t_0) = \frac{1,8}{f_{cm28}^{0,7}} \beta_{bc}(t, t_0)$$

$$\beta_{bc}(t, t_0) = \ln \left[ \left( \frac{30}{t_{0,adj}} + 0,035 \right)^2 \cdot (t - t_0) + 1 \right]$$

Assim como na retração, a parcela devido à secagem também depende da umidade relativa do ar, em percentual, e da espessura média da peça, em milímetros.

$$\varphi_{dc}(t, t_0) = \frac{412}{f_{cm28}^{1,4}} \cdot \frac{1 - \frac{RH}{100}}{\sqrt[3]{0,1 \cdot \frac{h}{100}}} \cdot \frac{1}{0,1 + t_{0,adj}^{0,2}} \cdot \beta_{dc}(t, t_0)$$

$$\beta_{dc}(t, t_0) = \left[ \frac{(t - t_0)}{\beta_h + (t - t_0)} \right]^{\gamma(t_0)}$$

$$\gamma(t_0) = \frac{1}{2,3 + \frac{3,5}{\sqrt{t_{0,adj}}}}$$

$$\beta_h = 1,5h + 250 \sqrt{\frac{35}{f_{cm28}}} \leq 1500 \sqrt{\frac{35}{f_{cm28}}}$$

Os limites estimados para uma previsão contida no intervalo de confiança de 95% são de  $0,59\varphi$  e  $1,41\varphi$ . Portanto, na análise de estruturas com alto grau de sensibilidade à fluência, é prudente que vários coeficientes sejam assumidos para uma mesma idade. Conforme FIB (2020), há proporcionalidade praticamente direta e linear entre variações nos coeficientes de fluência e nos momentos de restrição positivos.

O código também apresenta uma forma simplificada para considerar a não linearidade da fluência quando a tensão de compressão supera  $0,4f_{cm}(t_0)$ . Esta expressão não foi aplicada neste trabalho. Segundo FIB (2012), a simplificação só deve ser adotada para tensões inferiores a  $0,6f_{cm}(t_0)$ . Uma expressão semelhante em função da resistência característica é sugerida por CEN (2004) e tem como base a mesma tensão proporcional indicada pela NBR 7187/2021.

$$\varphi_\sigma(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \exp \left[ 1,5 \left( \frac{|\sigma_c|}{f_{cm}(t_0)} - 0,4 \right) \right]$$

$$\varphi_\sigma(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \cdot \exp \left[ 1,5 \left( \frac{|\sigma_c|}{f_{ck}(t_0)} - 0,45 \right) \right]$$

## APÊNDICE B – TABELAS PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO GMB

As tabelas a seguir foram transcritas de Massonnet (1962), mas também podem ser consultadas em San Martin (1981). Para cálculo exato dos coeficientes de repartição transversal em qualquer posição de viga ou carga, pode ser aplicado o programa descrito por Servat (2019). Diferentemente das tabelas, o *software* permite que a influência do coeficiente de Poisson dos materiais seja considerada.

Tabela 35 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,3$

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,3)$					$K_1 (\theta = 0,3)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
<b>-b</b>	0,9423	0,2109	-0,5038	-1,2095	-1,9123	0,9664	0,8776	0,8012	0,7345	0,6733	<b>-b</b>
<b>-0,75b</b>	0,9742	0,4183	-0,1284	-0,6698	-1,2095	0,9840	0,9104	0,8453	0,7876	0,7345	<b>-0,75b</b>
<b>-0,5b</b>	1,0044	0,6252	0,2477	-0,1284	-0,5038	1,0018	0,9453	0,8929	0,8453	0,8012	<b>-0,5b</b>
<b>-0,25b</b>	1,0283	0,8298	0,6252	0,4183	0,2109	1,0173	0,982	0,9453	0,9104	0,8776	<b>-0,25b</b>
<b>0</b>	1,0385	1,0283	1,0044	0,9742	0,9423	1,0244	1,0173	1,0018	0,9840	0,9664	<b>0</b>
<b>0,25b</b>	1,0283	1,2146	1,3833	1,5419	1,6975	1,0173	1,0451	1,0591	1,0652	1,0689	<b>0,25b</b>
<b>0,5b</b>	1,0044	1,3833	1,7572	2,1209	2,4805	1,0018	1,0591	1,1108	1,1508	1,1849	<b>0,5b</b>
<b>0,75b</b>	0,9742	1,5419	2,1209	2,7062	3,2901	0,9840	1,0652	1,1508	1,2351	1,3126	<b>0,75b</b>
<b>b</b>	0,9423	1,6975	2,4805	3,2901	4,1177	0,9664	1,0689	1,1849	1,3126	1,4474	<b>b</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 36 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,4$

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,4)$					$K_1 (\theta = 0,4)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
<b>-b</b>	0,8273	0,1337	-0,5106	-1,1286	-1,7381	0,9220	0,7862	0,6778	0,5903	0,5148	<b>-b</b>
<b>-0,75b</b>	0,9225	0,3800	-0,1350	-0,6344	-1,1286	0,9613	0,8420	0,7429	0,6613	0,5903	<b>-0,75b</b>
<b>-0,5b</b>	1,0129	0,6250	0,2426	-0,1350	-0,5106	1,0030	0,9043	0,8171	0,7429	0,6778	<b>-0,5b</b>
<b>-0,25b</b>	1,0851	0,8637	0,6250	0,3800	0,1337	1,0414	0,9733	0,9043	0,8420	0,7862	<b>-0,25b</b>
<b>0</b>	1,1160	1,0851	1,0129	0,9225	0,8273	1,0601	1,0414	1,0030	0,9613	0,9220	<b>0</b>
<b>0,25b</b>	1,0851	1,2696	1,4005	1,5005	1,5916	1,0414	1,0914	1,1051	1,0994	1,0893	<b>0,25b</b>
<b>0,5b</b>	1,0129	1,4005	1,7725	2,1128	2,4400	1,0030	1,1051	1,1931	1,2489	1,2893	<b>0,5b</b>
<b>0,75b</b>	0,9225	1,5005	2,1128	2,7438	3,3702	0,9613	1,0994	1,2489	1,3940	1,5188	<b>0,75b</b>
<b>b</b>	0,8273	1,5916	2,4400	3,3702	4,3560	0,9220	1,0893	1,2893	1,5188	1,7680	<b>b</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 37 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,5$

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,5)$					$K_1 (\theta = 0,5)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
<b>-b</b>	0,6203	-0,0021	-0,5198	-0,9828	-1,4286	0,8609	0,6834	0,5516	0,4538	0,3751	<b>-b</b>
<b>-0,75b</b>	0,8288	0,3111	-0,1466	-0,5703	-0,9828	0,9276	0,7617	0,6326	0,5340	0,4538	<b>-0,75b</b>
<b>-0,5b</b>	1,0273	0,6223	0,2317	-0,1466	-0,5198	1,0028	0,8547	0,7308	0,6326	0,5516	<b>-0,5b</b>
<b>-0,25b</b>	1,1877	0,9226	0,6223	0,3111	-0,0021	1,0767	0,9642	0,8547	0,7617	0,6834	<b>-0,25b</b>
<b>0</b>	1,2575	1,1877	1,0273	0,8288	0,6203	1,1146	1,0767	1,0028	0,9276	0,8609	<b>0</b>
<b>0,25b</b>	1,1877	1,3721	1,4336	1,4250	1,3968	1,0767	1,1557	1,1603	1,1293	1,0937	<b>0,25b</b>
<b>0,5b</b>	1,0273	1,4336	1,8038	2,0981	2,3613	1,0028	1,1603	1,2911	1,3544	1,3876	<b>0,5b</b>
<b>0,75b</b>	0,8288	1,4250	2,0981	2,8125	3,5140	0,9276	1,1293	1,3544	1,5704	1,7409	<b>0,75b</b>
<b>b</b>	0,6203	1,3968	2,3613	3,5140	4,7981	0,8609	1,0937	1,3876	1,7409	2,1362	<b>b</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 38 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,6$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,6)$					$K_1 (\theta = 0,6)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	0,3347	-0,1808	-0,5241	-0,7808	-1,0112	0,7878	0,5792	0,4349	0,3362	0,2627	-b
-0,75b	0,6968	0,2154	-0,1615	-0,4806	-0,7808	0,8839	0,6761	0,5243	0,4171	0,3362	-0,75b
-0,5b	1,0447	0,6119	0,2117	-0,1615	-0,5241	0,9996	0,7992	0,6410	0,5243	0,4349	-0,5b
-0,25b	1,3316	0,9977	0,6119	0,2154	-0,1808	1,1215	0,9545	0,7992	0,6761	0,5792	-0,25b
0	1,4594	1,3316	1,0447	0,6968	0,3347	1,1878	1,1215	0,9996	0,8839	0,7878	0
0,25b	1,3316	1,5237	1,4853	1,3177	1,1155	1,1215	1,2361	1,2207	1,1501	1,0792	0,25b
0,5b	1,0447	1,4853	1,8575	2,0778	2,2358	0,9996	1,2207	1,3994	1,4582	1,4686	0,5b
0,75b	0,6968	1,3177	2,0778	2,9106	3,7122	0,8839	1,1501	1,4582	1,7518	1,9607	0,75b
b	0,3347	1,1155	2,2358	3,7122	5,4480	0,7878	1,0792	1,4686	1,9607	2,5312	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 39 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,7$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,7)$					$K_1 (\theta = 0,7)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	0,0216	-0,3589	-0,5114	-0,5575	-0,5733	0,7080	0,4808	0,3342	0,2417	0,1782	-b
-0,75b	0,5464	0,1095	-0,1756	-0,3794	-0,5575	0,8319	0,5905	0,4253	0,3171	0,2417	-0,75b
-0,5b	1,0580	0,5862	0,1798	-0,1756	-0,5114	0,9923	0,7407	0,5535	0,4253	0,3342	-0,5b
-0,25b	1,4938	1,0670	0,5862	0,1095	-0,3589	1,1737	0,9437	0,7407	0,5905	0,4808	-0,25b
0	1,6955	1,4938	1,0580	0,5464	0,0216	1,2783	1,1737	0,9923	0,8319	0,7080	0
0,25b	1,4938	1,7118	1,5548	1,1934	0,7809	1,1737	1,3307	1,2824	1,1589	1,0461	0,25b
0,5b	1,0580	1,5548	1,9392	2,0554	2,0618	0,9923	1,2824	1,5134	1,5539	1,5262	0,5b
0,75b	0,5464	1,1934	2,0554	3,0254	3,9282	0,8319	1,1589	1,5539	1,9305	2,1668	0,75b
b	0,0216	0,7809	2,0618	3,9282	6,2464	0,7080	1,0461	1,5262	2,1668	2,9395	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 40 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,8$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,8)$					$K_1 (\theta = 0,8)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	-0,2595	-0,4898	-0,4719	-0,3530	-0,2094	0,6259	0,3923	0,2516	0,1695	0,1177	-b
-0,75b	0,4010	0,0123	-0,1844	-0,2834	-0,3530	0,7738	0,5089	0,3389	0,2358	0,1695	-0,75b
-0,5b	1,0595	0,5394	0,1348	-0,1844	-0,4719	0,9802	0,6812	0,4720	0,3389	0,2516	-0,5b
-0,25b	1,6478	1,1076	0,5394	0,0123	-0,4898	1,2308	0,9313	0,6812	0,5089	0,3923	-0,25b
0	1,9348	1,6478	1,0595	0,4010	-0,2595	1,3841	1,2308	0,9802	0,7738	0,6259	0
0,25b	1,6478	1,9191	1,6383	1,0694	0,4362	1,2308	1,4371	1,3426	1,1547	0,9971	0,25b
0,5b	1,0595	1,6383	2,0526	2,0353	1,8428	0,9802	1,3426	1,6305	1,6381	1,5588	0,5b
0,75b	0,4010	1,0694	2,0353	3,1419	4,1195	0,7738	1,1547	1,6381	2,1023	2,3534	0,75b
b	-0,2595	0,4362	1,8428	4,1195	7,1154	0,6259	0,9971	1,5588	2,3534	3,3539	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 41 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 0,9$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 0,9)$					$K_1 (\theta = 0,9)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	-0,4715	-0,5493	-0,4042	-0,1919	0,0299	0,5452	0,3155	0,1864	0,1166	0,0762	-b
-0,75b	0,2749	-0,0646	-0,1851	-0,2028	-0,1919	0,7119	0,4335	0,2663	0,1722	0,1166	-0,75b
-0,5b	1,0436	0,4700	0,0792	-0,1851	-0,4042	0,9631	0,6224	0,3987	0,2663	0,1864	-0,5b
-0,25b	1,7771	1,1070	0,4700	-0,0646	-0,5493	1,2903	0,9164	0,6224	0,4335	0,3155	-0,25b
0	2,1592	1,7771	1,0436	0,2749	-0,4715	1,5028	1,2903	0,9631	0,7119	0,5452	0
0,25b	1,7771	2,1334	1,7309	0,9565	0,1129	1,2903	1,5534	1,3996	1,1380	0,9359	0,25b
0,5b	1,0436	1,7309	2,1980	2,0203	1,5843	0,9631	1,3996	1,7493	1,7094	1,5677	0,5b
0,75b	0,2749	0,9565	2,0203	3,2519	4,2579	0,7119	1,1380	1,7094	2,2658	2,5180	0,75b
b	-0,4715	0,1129	1,5843	4,2579	8,0034	0,5452	0,9359	1,5677	2,5180	3,7710	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 42 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 1,0$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 1,0)$					$K_1 (\theta = 1,0)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	-0,6044	-0,5391	-0,3161	-0,0796	0,1460	0,4688	0,2506	0,1363	0,0789	0,0484	-b
-0,75b	0,1715	-0,1183	-0,1774	-0,1402	-0,0796	0,6482	0,3656	0,207	0,124	0,0789	-0,75b
-0,5b	1,0080	0,3824	0,0184	-0,1774	-0,3161	1,0959	0,6811	0,4116	0,2589	0,1731	-0,5b
-0,25b	1,8775	1,0658	0,3824	-0,1183	-0,5391	1,4321	0,9821	0,6278	0,4104	0,284	-0,25b
0	2,3663	1,8775	1,0080	0,1715	-0,6044	1,632	1,3499	0,941	0,6482	0,4688	0
0,25b	1,8775	2,3492	1,8265	0,8567	-0,1726	1,4321	1,6512	1,3445	1,0016	0,7679	0,25b
0,5b	1,0080	1,8265	2,3729	2,0116	1,2940	1,0959	1,5857	1,749	1,4858	1,2368	0,5b
0,75b	0,1715	0,8567	2,0116	3,3546	4,3335	0,6482	1,1105	1,7679	2,4213	2,6605	0,75b
b	-0,6044	-0,1726	1,2940	4,3335	8,8915	0,4688	0,8667	1,5557	2,6605	4,1892	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 43 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 1,1$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 1,1)$					$K_1 (\theta = 1,1)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	-0,6652	-0,4770	-0,2209	-0,0097	0,1709	0,3985	0,1969	0,0985	0,0527	0,0303	-b
-0,75b	0,0880	-0,1515	-0,1626	-0,0936	-0,0097	0,5848	0,3055	0,1593	0,0882	0,0527	-0,75b
-0,5b	0,9531	0,2842	-0,0403	-0,1626	-0,2209	0,9142	0,5103	0,2783	0,1593	0,0985	-0,5b
-0,25b	1,9518	0,9925	0,2842	-0,1515	-0,4770	1,4075	0,8771	0,5103	0,3055	0,1969	-0,25b
0	2,5621	1,9518	0,9531	0,0880	-0,6652	1,7691	1,4075	0,9142	0,5848	0,3985	0
0,25b	1,9518	2,5643	1,9180	0,7675	-0,4129	1,4075	1,8095	1,5003	1,0740	0,7931	0,25b
0,5b	0,9531	1,9180	2,5717	2,0089	0,9824	0,9142	1,5003	1,9916	1,8145	1,5263	0,5b
0,75b	0,0880	0,7675	2,0089	3,4539	4,3474	0,5848	1,0740	1,8145	2,5695	2,7813	0,75b
b	-0,6652	-0,4129	0,9824	4,3474	9,7780	0,3985	0,7931	1,5263	2,7813	4,6078	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 44 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 1,2$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 1,2)$					$K_1 (\theta = 1,2)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	-0,6677	-0,3856	-0,1317	0,0279	0,1439	0,3352	0,1533	0,0706	0,0348	0,0188	-b
-0,75b	0,0199	-0,1685	-0,1424	-0,0594	0,0279	0,5233	0,2534	0,1217	0,0621	0,0348	-0,75b
-0,5b	1,3095	0,4155	-0,0187	-0,1657	-0,2213	0,8834	0,4582	0,2304	0,1217	0,0706	-0,5b
-0,25b	2,2274	1,0954	0,2843	-0,1553	-0,4459	1,4614	0,8520	0,4582	0,2534	0,1533	-0,25b
0	2,7541	2,0050	0,8805	0,0199	-0,6677	1,9124	1,4614	0,8834	0,5233	0,3352	0
0,25b	2,0050	2,7777	1,9987	0,6851	-0,6038	1,4614	1,9466	1,5432	1,0306	0,7182	0,25b
0,5b	0,8805	1,9987	2,7876	2,0114	0,6620	0,8834	1,5432	2,1156	1,8501	1,4827	0,5b
0,75b	0,0199	0,6851	2,0114	3,5547	4,3049	0,5233	1,0306	1,8501	2,7114	2,8817	0,75b
b	-0,6677	-0,6038	0,6620	4,3049	10,6646	0,3352	0,7182	1,4827	2,8817	5,0266	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 45 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 1,3$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 1,3)$					$K_1 (\theta = 1,3)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
-b	-0,6266	-0,2848	-0,0585	0,0432	0,0975	0,2793	0,1182	0,0501	0,0227	0,0115	-b
-0,75b	-0,0365	-0,1733	-0,1191	-0,0348	0,0432	0,4648	0,2086	0,0923	0,0434	0,0227	-0,75b
-0,5b	0,7931	0,0898	-0,1259	-0,1191	-0,0585	0,8491	0,4092	0,1898	0,0923	0,0501	-0,5b
-0,25b	2,0413	0,7914	0,0898	-0,1733	-0,2848	1,5105	0,8233	0,4092	0,2086	0,1182	-0,25b
0	2,9483	2,0413	0,7931	-0,0365	-0,6266	2,0600	1,5105	0,8491	0,4648	0,2793	0
0,25b	2,0413	2,9889	2,0633	0,6061	-0,7438	1,5105	2,0882	1,5808	0,9822	0,6446	0,25b
0,5b	0,7931	2,0633	3,0138	2,0173	0,3448	0,8491	1,5808	2,2421	1,8760	1,4282	0,5b
0,75b	-0,0365	0,6061	2,0173	3,6614	4,2119	0,4648	0,9822	1,8760	2,8483	2,9630	0,75b
b	-0,6266	-0,7438	0,3448	4,2119	11,5520	0,2793	0,6446	1,4282	2,9630	5,4454	b

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 46 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 1,4$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 1,4)$					$K_1 (\theta = 1,4)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
<b>-b</b>	-0,5558	-0,1892	-0,0058	0,0445	0,0525	0,2309	0,0905	0,0354	0,0148	0,007	<b>-b</b>
<b>-0,75b</b>	-0,0833	-0,1691	-0,0948	-0,0173	0,0445	0,4101	0,1706	0,0696	0,0301	0,0148	<b>-0,75b</b>
<b>-0,5b</b>	0,6947	0,0067	-0,1461	-0,0948	-0,0058	0,8121	0,3636	0,1556	0,0696	0,0354	<b>-0,5b</b>
<b>-0,25b</b>	2,0637	0,6806	0,0067	-0,1691	-0,1892	1,5538	0,7913	0,3636	0,1706	0,0905	<b>-0,25b</b>
<b>0</b>	3,1479	2,0637	0,6947	-0,0833	-0,5558	2,2108	1,5538	0,8121	0,4101	0,2309	<b>0</b>
<b>0,25b</b>	2,0637	3,1979	2,1085	0,5281	-0,8337	1,5538	2,2334	1,6131	0,9305	0,5739	<b>0,25b</b>
<b>0,5b</b>	0,6947	2,1085	3,2447	2,0248	0,0415	0,8121	1,6131	2,3712	1,8933	1,3655	<b>0,5b</b>
<b>0,75b</b>	-0,0833	0,5281	2,0248	3,7775	4,0743	0,4101	0,9305	1,8933	2,981	3,0266	<b>0,75b</b>
<b>b</b>	-0,5558	-0,8337	0,0415	4,0743	12,4402	0,2309	0,5739	1,3655	3,0266	5,8643	<b>b</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 47 – Coeficientes de repartição transversal  $K_0$  e  $K_1$  para  $\theta = 1,5$ 

POSIÇÃO DA CARGA	$K_0 (\theta = 1,5)$					$K_1 (\theta = 1,5)$					POSIÇÃO DA CARGA
	POSIÇÃO DA VIGA					POSIÇÃO DA VIGA					
	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	0	0,25b	0,5b	0,75b	b	
<b>-b</b>	-0,4676	-0,1076	0,0265	0,0381	0,0189	0,1895	0,0688	0,0248	0,0095	0,0042	<b>-b</b>
<b>-0,75b</b>	-0,1217	-0,1583	-0,0711	-0,0053	0,0381	0,3597	0,1388	0,0523	0,0208	0,0095	<b>-0,75b</b>
<b>-0,5b</b>	0,5893	-0,0620	-0,1516	-0,0711	0,0265	0,7729	0,3215	0,1270	0,0523	0,0248	<b>-0,5b</b>
<b>-0,25b</b>	2,0739	0,5700	-0,0620	-0,1583	-0,1076	1,5909	0,7566	0,3215	0,1388	0,0688	<b>-0,25b</b>
<b>0</b>	3,3539	2,0739	0,5893	-0,1217	-0,4676	2,3637	1,5909	0,7729	0,3597	0,1895	<b>0</b>
<b>0,25b</b>	2,0739	3,4056	2,1332	0,4499	-0,8768	1,5909	2,3815	1,6400	0,8769	0,5074	<b>0,25b</b>
<b>0,5b</b>	0,5893	2,1332	3,4762	2,0315	-0,2397	0,7729	1,6400	2,5031	1,9028	1,2971	<b>0,5b</b>
<b>0,75b</b>	-0,1217	0,4499	2,0315	3,9049	3,8974	0,3597	0,8769	1,9028	3,1104	3,0738	<b>0,75b</b>
<b>b</b>	-0,4676	-0,8768	-0,2397	3,8974	13,3287	0,1895	0,5074	1,2971	3,0738	6,2832	<b>b</b>

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

## APÊNDICE C – RESULTADOS COM BASE NO MEF

### C.1 Momentos devido às cargas estáticas

Tabela 48 – Momentos fletores nas vigas externas devido às cargas estáticas

VIGAS EXTERNAS (V1 e V4)								
VÃO	x' (m)	x/L (m)	My (kNm)					
			SEÇÃO PARCIAL		SEÇÃO COMPLETA			
			g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>3,linear</sub>	g <sub>4</sub>	q <sub>2</sub>
1	0,00	0,00	0,00	0,00	-8,49	-9,75	15,80	0,00
	3,35	0,10	606,86	669,73	211,78	220,23	463,89	99,70
	6,70	0,20	1077,51	1189,14	367,32	382,63	791,44	199,41
	10,05	0,30	1411,94	1558,22	459,43	478,85	988,82	299,11
	13,40	0,40	1610,16	1776,98	488,63	509,34	1055,08	398,82
	16,75	0,50	1672,17	1845,41	456,29	475,59	989,84	498,52
	20,10	0,60	1597,96	1763,52	362,19	377,41	793,16	598,23
	23,45	0,70	1387,54	1531,30	205,37	213,69	467,85	697,93
	26,80	0,80	1040,91	1148,76	-17,63	-19,23	14,21	797,64
	30,15	0,90	558,07	615,89	-307,16	-321,48	-564,99	897,34
	33,20	0,99	0,00	0,00	-625,00	-652,37	-1196,54	988,12
33,50	1,00	0,00	0,00	-657,47	-686,14	-1258,87	997,05	
2	33,50	0,00	0,00	0,00	-654,41	-682,82	-1263,47	997,05
	33,80	0,01	0,00	0,00	-625,75	-652,98	-1213,25	997,05
	36,88	0,10	563,00	621,32	-344,55	-359,72	-708,41	997,05
	40,26	0,20	1048,32	1156,93	-98,90	-102,68	-268,83	997,05
	43,64	0,30	1394,98	1539,50	74,72	79,16	44,74	997,05
	47,02	0,40	1602,97	1769,05	178,44	187,78	234,69	997,05
	50,40	0,50	1672,30	1845,56	212,72	223,66	298,03	997,05
	53,78	0,60	1602,97	1769,05	178,67	188,01	235,11	997,05
	57,16	0,70	1394,98	1539,50	74,72	79,16	44,74	997,05
	60,54	0,80	1048,32	1156,93	-98,90	-102,68	-268,83	997,05
	63,92	0,90	563,00	621,32	-344,55	-359,72	-708,41	997,05
67,00	0,99	0,00	0,00	-625,75	-652,98	-1213,25	997,05	
67,30	1,00	0,00	0,00	-654,41	-682,82	-1263,47	997,05	
3	67,30	0,00	0,00	0,00	-657,47	-686,14	-1258,87	997,05
	67,60	0,01	0,00	0,00	-625,00	-652,37	-1196,54	988,12
	70,65	0,10	558,07	615,89	-307,16	-321,48	-564,99	897,34
	74,00	0,20	1040,91	1148,76	-17,63	-19,23	14,21	797,64
	77,35	0,30	1387,54	1531,30	205,37	213,69	467,85	697,93
	80,70	0,40	1597,96	1763,52	362,19	377,41	793,16	598,23
	84,05	0,50	1672,17	1845,41	456,29	475,59	989,84	498,52
	87,40	0,60	1610,16	1776,98	488,63	509,34	1055,08	398,82
	90,75	0,70	1411,94	1558,22	459,43	478,85	988,82	299,11
	94,10	0,80	1077,51	1189,14	367,32	382,63	791,44	199,41
	97,45	0,90	606,86	669,73	211,78	220,23	463,89	99,70
100,80	1,00	0,00	0,00	-8,49	-9,75	15,80	0,00	

<sup>1</sup> Coordenadas em relação ao eixo dos aparelhos de apoio no extremo esquerdo da ponte.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)



Tabela 49 – Momentos fletores nas vigas externas devido às cargas estáticas

VIGAS INTERNAS (V2 e V3)								
VÃO	x' (m)	x/L (m)	My (kNm)					
			SEÇÃO PARCIAL		SEÇÃO COMPLETA			
			g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>3,linear</sub>	g <sub>4</sub>	q <sub>2</sub>
1	0,00	0,00	0,00	0,00	3,44	3,66	9,65	0,00
	3,35	0,10	606,86	869,23	-6,55	-14,64	702,74	102,61
	6,70	0,20	1077,51	1543,35	-15,69	-30,59	1211,40	205,22
	10,05	0,30	1411,94	2022,38	-20,06	-39,06	1515,23	307,83
	13,40	0,40	1610,16	2306,29	-20,41	-40,73	1614,39	410,43
	16,75	0,50	1672,17	2395,11	-17,72	-36,69	1510,98	513,04
	20,10	0,60	1597,96	2288,82	-11,84	-26,80	1204,52	615,65
	23,45	0,70	1387,54	1987,43	-1,31	-9,47	694,84	718,26
	26,80	0,80	1040,91	1490,94	16,17	17,79	-24,67	820,87
	30,15	0,90	558,07	799,34	41,58	55,71	-953,78	923,48
	33,20	0,99	0,00	0,00	69,22	96,06	-1967,00	1016,90
33,50	1,00	0,00	0,00	71,88	99,91	-2065,95	1026,08	
2	33,50	0,00	0,00	0,00	69,49	97,36	-2065,82	1026,08
	33,80	0,01	0,00	0,00	65,50	92,25	-1981,03	1026,08
	36,88	0,10	563,00	806,40	24,86	39,78	-1117,75	1026,08
	40,26	0,20	1048,32	1501,55	-11,80	-8,15	-362,24	1026,08
	43,64	0,30	1394,98	1998,08	-37,01	-41,52	172,91	1026,08
	47,02	0,40	1602,97	2296,00	-51,36	-60,73	494,19	1026,08
	50,40	0,50	1672,30	2395,31	-55,95	-66,92	600,73	1026,08
	53,78	0,60	1602,97	2296,00	-51,39	-60,77	494,90	1026,08
	57,16	0,70	1394,98	1998,08	-37,01	-41,52	172,91	1026,08
	60,54	0,80	1048,32	1501,55	-11,80	-8,15	-362,24	1026,08
	63,92	0,90	563,00	806,40	24,86	39,78	-1117,75	1026,08
67,00	0,99	0,00	0,00	65,50	92,25	-1981,03	1026,08	
67,30	1,00	0,00	0,00	69,49	97,36	-2065,82	1026,08	
3	67,30	0,00	0,00	0,00	71,88	99,91	-2065,95	1026,08
	67,60	0,01	0,00	0,00	69,22	96,06	-1967,00	1016,90
	70,65	0,10	558,07	799,34	41,58	55,71	-953,78	923,48
	74,00	0,20	1040,91	1490,94	16,17	17,79	-24,67	820,87
	77,35	0,30	1387,54	1987,43	-1,31	-9,47	694,84	718,26
	80,70	0,40	1597,96	2288,82	-11,84	-26,80	1204,52	615,65
	84,05	0,50	1672,17	2395,11	-17,72	-36,69	1510,98	513,04
	87,40	0,60	1610,16	2306,29	-20,41	-40,73	1614,39	410,43
	90,75	0,70	1411,94	2022,38	-20,06	-39,06	1515,23	307,83
	94,10	0,80	1077,51	1543,35	-15,69	-30,59	1211,40	205,22
	97,45	0,90	606,86	869,23	-6,55	-14,64	702,74	102,61
100,80	1,00	0,00	0,00	3,44	3,66	9,65	0,00	

<sup>1</sup> Coordenadas em relação ao eixo dos aparelhos de apoio no extremo esquerdo da ponte.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

## C.2 Deslocamentos devido às cargas estáticas

Tabela 50 – Deslocamentos nas vigas externas devido às cargas estáticas

VIGAS EXTERNAS (V1 e V4)								
VÃO	x <sup>1</sup> (m)	x/L (m)	U <sub>z</sub> (cm)					
			SEÇÃO PARCIAL		SEÇÃO COMPLETA			
			g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>3,linear</sub>	g <sub>4</sub>	q <sub>2</sub>
1	0,00	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	3,35	0,10	-0,689	-0,761	-0,090	-0,093	-0,236	0,113
	6,70	0,20	-1,303	-1,438	-0,165	-0,171	-0,439	0,186
	10,05	0,30	-1,780	-1,965	-0,219	-0,227	-0,584	0,226
	13,40	0,40	-2,080	-2,296	-0,246	-0,255	-0,659	0,237
	16,75	0,50	-2,176	-2,402	-0,246	-0,255	-0,658	0,224
	20,10	0,60	-2,061	-2,275	-0,219	-0,227	-0,586	0,194
	23,45	0,70	-1,744	-1,925	-0,170	-0,176	-0,457	0,151
	26,80	0,80	-1,252	-1,382	-0,108	-0,112	-0,295	0,101
	30,15	0,90	-0,630	-0,695	-0,046	-0,047	-0,129	0,049
	33,20	0,99	0,000	0,000	-0,003	-0,003	-0,009	0,004
33,50	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
2	33,50	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	33,80	0,01	0,000	0,000	0,001	0,001	0,005	-0,004
	36,88	0,10	-0,636	-0,701	-0,002	-0,003	0,027	-0,040
	40,26	0,20	-1,263	-1,393	-0,024	-0,025	0,006	-0,071
	43,64	0,30	-1,755	-1,937	-0,049	-0,052	-0,032	-0,094
	47,02	0,40	-2,069	-2,283	-0,067	-0,071	-0,063	-0,107
	50,40	0,50	-2,177	-2,402	-0,074	-0,078	-0,075	-0,111
	53,78	0,60	-2,069	-2,283	-0,067	-0,071	-0,063	-0,107
	57,16	0,70	-1,755	-1,937	-0,049	-0,052	-0,032	-0,094
	60,54	0,80	-1,263	-1,393	-0,024	-0,025	0,006	-0,071
	63,92	0,90	-0,636	-0,701	-0,002	-0,003	0,027	-0,040
67,00	0,99	0,000	0,000	0,001	0,001	0,005	-0,004	
67,30	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
3	67,30	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	67,60	0,01	0,000	0,000	-0,003	-0,003	-0,009	0,004
	70,65	0,10	-0,630	-0,695	-0,046	-0,047	-0,129	0,049
	74,00	0,20	-1,252	-1,382	-0,108	-0,112	-0,295	0,101
	77,35	0,30	-1,744	-1,925	-0,170	-0,176	-0,457	0,151
	80,70	0,40	-2,061	-2,275	-0,219	-0,227	-0,586	0,194
	84,05	0,50	-2,176	-2,402	-0,246	-0,255	-0,658	0,224
	87,40	0,60	-2,080	-2,296	-0,246	-0,255	-0,659	0,237
	90,75	0,70	-1,780	-1,965	-0,219	-0,227	-0,584	0,226
	94,10	0,80	-1,303	-1,438	-0,165	-0,171	-0,439	0,186
	97,45	0,90	-0,689	-0,761	-0,090	-0,093	-0,236	0,113
100,80	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	

<sup>1</sup> Coordenadas em relação ao eixo dos aparelhos de apoio no extremo esquerdo da ponte.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 51 – Deslocamentos nas vigas internas devido às cargas estáticas

VIGAS INTERNAS (V2 e V3)								
VÃO	x' (m)	x/L (m)	Uz (cm)					
			SEÇÃO PARCIAL		SEÇÃO COMPLETA			
			g <sub>1</sub>	g <sub>2</sub>	g <sub>3</sub>	g <sub>3,linear</sub>	g <sub>4</sub>	q <sub>2</sub>
1	0,00	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	3,35	0,10	-0,689	-0,987	-0,009	-0,006	-0,321	0,134
	6,70	0,20	-1,303	-1,866	-0,018	-0,012	-0,595	0,222
	10,05	0,30	-1,780	-2,550	-0,024	-0,016	-0,791	0,269
	13,40	0,40	-2,080	-2,979	-0,027	-0,019	-0,892	0,282
	16,75	0,50	-2,176	-3,117	-0,028	-0,019	-0,890	0,267
	20,10	0,60	-2,061	-2,952	-0,025	-0,017	-0,792	0,231
	23,45	0,70	-1,744	-2,499	-0,020	-0,014	-0,617	0,180
	26,80	0,80	-1,252	-1,794	-0,013	-0,010	-0,395	0,120
	30,15	0,90	-0,630	-0,902	-0,007	-0,005	-0,170	0,058
	33,20	0,99	0,000	0,000	-0,001	-0,001	-0,011	0,005
	33,50	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	33,50	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	33,80	0,01	0,000	0,000	0,001	0,001	0,006	-0,005
	36,88	0,10	-0,636	-0,910	0,009	0,010	0,014	-0,047
	40,26	0,20	-1,263	-1,808	0,018	0,019	-0,038	-0,084
	43,64	0,30	-1,755	-2,514	0,023	0,026	-0,109	-0,110
	47,02	0,40	-2,069	-2,963	0,027	0,030	-0,164	-0,126
	50,40	0,50	-2,177	-3,118	0,028	0,032	-0,185	-0,131
	53,78	0,60	-2,069	-2,963	0,027	0,030	-0,164	-0,126
	57,16	0,70	-1,755	-2,514	0,023	0,026	-0,109	-0,110
	60,54	0,80	-1,263	-1,808	0,018	0,019	-0,038	-0,084
	63,92	0,90	-0,636	-0,910	0,009	0,010	0,014	-0,047
	67,00	0,99	0,000	0,000	0,001	0,001	0,006	-0,005
67,30	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
3	67,30	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	67,60	0,01	0,000	0,000	-0,001	-0,001	-0,011	0,005
	70,65	0,10	-0,630	-0,902	-0,007	-0,005	-0,170	0,058
	74,00	0,20	-1,252	-1,794	-0,013	-0,010	-0,395	0,120
	77,35	0,30	-1,744	-2,499	-0,020	-0,014	-0,617	0,180
	80,70	0,40	-2,061	-2,952	-0,025	-0,017	-0,792	0,231
	84,05	0,50	-2,176	-3,117	-0,028	-0,019	-0,890	0,267
	87,40	0,60	-2,080	-2,979	-0,027	-0,019	-0,892	0,282
	90,75	0,70	-1,780	-2,550	-0,024	-0,016	-0,791	0,269
	94,10	0,80	-1,303	-1,866	-0,018	-0,012	-0,595	0,222
	97,45	0,90	-0,689	-0,987	-0,009	-0,006	-0,321	0,134
	100,80	1,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

<sup>1</sup> Coordenadas em relação ao eixo dos aparelhos de apoio no extremo esquerdo da ponte.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

### C.3 Momentos devido à carga móvel

Tabela 52 – Momentos fletores nas vigas externas devido à carga móvel

VIGAS EXTERNAS (V1 e V4) - $\varphi = 1,254$							
x <sup>1</sup> (m)	x/L (m)	MULTIDÃO		VEÍCULO TIPO		TOTAL MAJORADO	
		MÁX (kNm)	MIN (kNm)	MÁX (kNm)	MIN (kNm)	MÁX (kNm)	MIN (kNm)
0,00	0,00	0,00	0,00	15,48	-8,10	19,40	-10,15
3,35	0,10	567,19	-78,61	680,75	-58,45	1564,40	-171,82
6,70	0,20	1002,57	-158,49	1154,81	-120,37	2704,47	-349,58
10,05	0,30	1298,65	-237,22	1448,50	-183,43	3443,79	-527,32
13,40	0,40	1449,44	-313,56	1568,60	-247,31	3783,37	-703,11
16,75	0,50	1453,08	-387,21	1538,01	-312,66	3749,60	-877,34
20,10	0,60	1309,13	-457,13	1369,27	-379,43	3357,61	-1048,70
23,45	0,70	1020,42	-522,38	1083,65	-447,50	2637,64	-1215,83
26,80	0,80	588,39	-583,23	713,80	-517,61	1632,41	-1380,00
30,15	0,90	289,72	-910,35	299,01	-590,89	738,02	-1881,94
33,20	0,99	238,25	-1536,12	187,83	-791,72	534,13	-2918,15
33,50	1,00	240,15	-1604,98	189,58	-839,42	538,71	-3064,27
33,50	0,00	242,29	-1604,60	193,58	-824,16	546,40	-3044,67
33,80	0,01	231,69	-1539,88	185,38	-815,02	522,84	-2952,08
36,88	0,10	210,55	-972,51	335,27	-712,31	684,23	-2112,06
40,26	0,20	437,79	-721,74	749,85	-603,83	1488,82	-1661,72
43,64	0,30	797,36	-739,25	1069,62	-499,31	2340,42	-1552,64
47,02	0,40	1017,08	-750,40	1272,61	-396,75	2870,34	-1438,06
50,40	0,50	1090,03	-754,09	1342,14	-295,47	3048,93	-1315,71
53,78	0,60	1017,08	-750,40	1272,61	-396,75	2870,34	-1438,06
57,16	0,70	797,36	-739,25	1069,62	-499,31	2340,42	-1552,64
60,54	0,80	437,79	-721,74	749,85	-603,83	1488,82	-1661,72
63,92	0,90	210,55	-972,51	335,27	-712,31	684,23	-2112,06
67,00	0,99	231,69	-1539,88	185,38	-815,02	522,84	-2952,08
67,30	1,00	242,29	-1604,60	193,58	-824,16	546,40	-3044,67
67,30	0,00	240,15	-1604,98	189,58	-839,42	538,71	-3064,27
67,60	0,01	238,25	-1536,12	187,83	-791,72	534,13	-2918,15
70,65	0,10	289,72	-910,35	299,01	-590,89	738,02	-1881,94
74,00	0,20	588,39	-583,23	713,80	-517,61	1632,41	-1380,00
77,35	0,30	1020,42	-522,38	1083,65	-447,50	2637,64	-1215,83
80,70	0,40	1309,13	-457,13	1369,27	-379,43	3357,61	-1048,70
84,05	0,50	1453,08	-387,21	1538,01	-312,66	3749,60	-877,34
87,40	0,60	1449,44	-313,56	1568,60	-247,31	3783,37	-703,11
90,75	0,70	1298,65	-237,22	1448,50	-183,43	3443,79	-527,32
94,10	0,80	1002,57	-158,49	1154,81	-120,37	2704,47	-349,58
97,45	0,90	567,19	-78,61	680,75	-58,45	1564,40	-171,82
100,80	1,00	0,00	0,00	15,48	-8,10	19,40	-10,15

<sup>1</sup> Coordenadas em relação ao eixo dos aparelhos de apoio no extremo esquerdo da ponte.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 53 – Momentos fletores nas vigas internas devido à carga móvel

VIGAS INTERNAS (V2 e V3) - $\phi = 1,191$							
x <sup>1</sup> (m)	x/L (m)	MULTIDÃO		VEÍCULO TIPO		TOTAL MAJORADO	
		MÁX (kNm)	MIN (kNm)	MÁX (kNm)	MIN (kNm)	MÁX (kNm)	MIN (kNm)
0,00	0,00	0,00	0,00	25,80	-3,67	30,72	-4,37
3,35	0,10	813,90	-92,66	679,72	-32,67	1778,77	-149,25
6,70	0,20	1434,54	-188,49	1090,82	-68,59	3007,47	-306,16
10,05	0,30	1847,19	-286,56	1301,07	-108,00	3749,29	-469,88
13,40	0,40	2050,66	-387,14	1362,73	-152,36	4065,04	-642,49
16,75	0,50	2048,09	-491,59	1326,40	-203,90	4018,71	-828,27
20,10	0,60	1839,90	-600,12	1207,39	-264,75	3629,04	-1029,98
23,45	0,70	1426,01	-712,66	1006,46	-336,64	2896,85	-1249,62
26,80	0,80	807,58	-837,41	712,99	-422,00	1810,85	-1499,84
30,15	0,90	388,48	-1376,57	319,89	-521,99	843,61	-2261,02
33,20	0,99	306,80	-2337,79	126,37	-698,09	515,86	-3615,46
33,50	1,00	309,95	-2442,80	127,94	-740,39	521,48	-3790,89
33,50	0,00	310,63	-2442,77	129,05	-730,44	523,61	-3779,01
33,80	0,01	297,89	-2342,48	124,23	-718,23	502,70	-3645,03
36,88	0,10	297,97	-1450,62	346,98	-594,15	768,08	-2435,13
40,26	0,20	631,34	-1001,81	741,02	-472,76	1634,36	-1756,08
43,64	0,30	1156,93	-973,14	998,85	-366,65	2567,34	-1595,57
47,02	0,40	1478,72	-960,97	1146,86	-273,76	3126,83	-1470,44
50,40	0,50	1584,71	-956,78	1193,96	-191,74	3309,14	-1367,79
53,78	0,60	1478,72	-960,97	1146,86	-273,76	3126,83	-1470,44
57,16	0,70	1156,93	-973,14	998,85	-366,65	2567,34	-1595,57
60,54	0,80	631,34	-1001,81	741,02	-472,76	1634,36	-1756,08
63,92	0,90	297,97	-1450,62	346,98	-594,15	768,08	-2435,13
67,00	0,99	297,89	-2342,48	124,23	-718,23	502,70	-3645,03
67,30	1,00	310,63	-2442,77	129,05	-730,44	523,61	-3779,01
67,30	0,00	309,95	-2442,80	127,94	-740,39	521,48	-3790,89
67,60	0,01	306,80	-2337,79	126,37	-698,09	515,86	-3615,46
70,65	0,10	388,48	-1376,57	319,89	-521,99	843,61	-2261,02
74,00	0,20	807,58	-837,41	712,99	-422,00	1810,85	-1499,84
77,35	0,30	1426,01	-712,66	1006,46	-336,64	2896,85	-1249,62
80,70	0,40	1839,90	-600,12	1207,39	-264,75	3629,04	-1029,98
84,05	0,50	2048,09	-491,59	1326,40	-203,90	4018,71	-828,27
87,40	0,60	2050,66	-387,14	1362,73	-152,36	4065,04	-642,49
90,75	0,70	1847,19	-286,56	1301,07	-108,00	3749,29	-469,88
94,10	0,80	1434,54	-188,49	1090,82	-68,59	3007,47	-306,16
97,45	0,90	813,90	-92,66	679,72	-32,67	1778,77	-149,25
100,80	1,00	0,00	0,00	25,80	-3,67	30,72	-4,37

<sup>1</sup> Coordenadas em relação ao eixo dos aparelhos de apoio no extremo esquerdo da ponte.

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)