UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG

PROFMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Resolução de problemas: A conexão entre Matemática e Física por meio da função afim e quadrática.

Nathanael de Sousa Barreto

São Luís - MA
2019

NATHANAEL DE SOUSA BARRETO

Resolução de problemas: A conexão entre Matemática e Física por meio da função afim e quadrática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação no Curso de Mestrado Profissonal em Matemática junto ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus.

São Luís - MA
2019

Barreto, Nathanael de Sousa.
Resolução de problemas: a conexão entre matemática e Física por meio da função afim e quadrática / Nathanael de Sousa Barreto. São Luís, 2019.
66 p.

Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em matemática (PROFMAT), Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus

1. Resolução de problemas. 2. Função afim. 3.Função quadrática. 4.Conexão entre matemática e física

CDU 51:53

NATHANAEL DE SOUSA BARRETO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: A CONEXÃO ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA POR MEIO DA FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação no Curso de Mestrado Profissonal em Matemática junto ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus.

Aprovada em: 25/01/2019

Banca Examinadora:

Sergio Nolêto Turibus
Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus - UEMA
Orientador

Prof. Dr. João Coelho Silva Filho - UEMA

Guilherme Luiz de Oliveira Neto
Prof. Me. Guilherme Luiz de Oliveira Neto - IFPI

São Luís - MA
2019

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus filhos, fonte da minha inspiração, lugar onde renovo minhas forças, recanto onde encontro descanso. A minha família, por ter acreditado em mim, por ter me ensinado a ser honesto, por me fazer entender o valor das coisas que conquistamos com dificuldade. A minha igreja, por me ensinar valores cristãos, na qual me fez ser um homem temente a Deus independente do lugar e da posição social que eu venha ocupar.

Agradecimentos

Por trás de uma trajetória vitoriosa existe vários alicerces no qual buscamos força para seguir vencendo, sendo assim, gostaria de agradecer ao Eterno Deus em sua palavra por me encorajar nos momentos mais difíceis, quando inúmeras vezes as dificuldades quiseram me fazer desistir.

Agradecer a minha esposa Núbia Regina Mendes dos Santos Barreto e minha mãe Aldenira de Sousa Oliveira Barreto pela força e incentivo e por sempre estarem ao meu lado.

Agradecer aos amigos de classe pela união, pelos momentos de descontração e transferência de conhecimento ao longo desses quase dois anos.

Agradecer a todo corpo docente por nos transferir o mais valioso de todos os tesouros que é o conhecimento e a toda equipe que compõe o PROFMAT-UEMA, todos foram de grande importância para que alcançasse essa vitória.

E por fim, agradeço de todo o coração o meu orientador Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus pela disponibilidade, paciência e pelo dom de ensinar e se colocar na posição do próximo.

"Não to mandei eu? Sê forte e corajoso, não temas, nem te espantes, porque o Senhor, teu Deus, é contigo por onde quer que andares"

Josué 1:9

RESUMO

O presente trabalho mostra os vários benefícios propostos pela metodologia da resolução de problema através da função afim e quadrática. A pesquisa ainda utiliza a conexão entre matemática e física, como fator importante na compreensão de alguns movimentos, e tem essa relação como motivação para o aluno prosseguir com o estudo da matemática. A mesma foi realizada numa escola pública no município de Anajatuba-MA com alunos de 1ª e 3ª série do ensino médio. Por meio da resolução de problemas, a pesquisa mostrou os benefícios da metodologia a educação quando através da mesma pôde alcançar uma variedade de objetivos como: conexão entre matemática e física, uma melhor interpretação dos textos, conectar a matemática ao mundo real, motivar o estudo da matemática, associar o conteúdo em situações problemas contextualizadas.

Palavras Chave: Resolução de problemas. Função afim. Função quadrática. Conexão entre matemática e física.

ABSTRACT

The present work shows the various benefits proposed by the methodology of problem solving through the related and quadratic function. The research still uses the connection between mathematics and physics, as an important factor in understanding some movements, and has this relation as motivation for the student to continue with the study of mathematics. The research was carried out in a public school in the municipality of Anajatuba-MA with 1st and 3rd grade high school students. Through problem solving, research showed the benefits of methodology to education when it was able to achieve a variety of objectives such as: connection between mathematics and physics, better interpretation of texts, connecting mathematics to the real world, motivating study of mathematics, to associate the content in situations contextualized problems.

Keywords: roubleshooting. Related function. Quadratic function. Connection between mathematics and physics.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

INTRODUÇÃO

É comum o aluno dominar as operações básicas, ter em mente definições e propriedades, e com isso não resolver os problemas que envolve o conteúdo trabalhado. A resolução de problemas permite ao docente mostrar e enfatizar as características do conteúdo nos problemas contextualizados.

Por meio dela a modelagem matemática se torna mais clara e dá uma motivação a mais para o aluno se aprofundar nessa disciplina tão importante. Além disso, a metodologia da resolução de problemas "tem grande poder motivador para o aluno, pois envolvem situações novas e diferentes atitudes e conhecimentos" (SOARES; PINTO, 2014, pag. 2).

Os resultados divulgados pelo INEP no dia 30/08/2018 através da avaliação do Saeb (2017) mostram que os alunos da educação básica se encontram com conhecimentos insuficientes, principalmente nas disciplinas de português e matemática, se agravando ainda mais quando se trata do ensino médio. No terceiro ano do ensino médio apenas 4,52% dos alunos possuem nível adequado na disciplina de matemática.

Na época, o ministro da educação Rossieli Soares da Silva disse " nós estamos sim na falência, no fundo do posso com o nosso ensino médio". Dados ainda revelam que após 12 anos de escolaridade, cerca de 70% dos estudantes terminam a educação básica sem conseguir ler e entender um texto simples e sem conhecimentos mínimos em matemática.

Alguns dos principais fatores que influenciam a insuficiência na disciplina de matemática é a desmotivação em estudá-la, por ser apresentada de uma forma tão distante da realidade e a falta de compreensão nos problemas contextualizados (modelados). A resolução de problemas é o meio pelo qual a matemática mostra toda a sua exuberância e elegância.

Uma das competências e habilidades exigida pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p. 96) é que o aluno saiba "compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas."

Certo dia observando o meu filho de 1 ano e 4 meses tentando passar pelo portão da casa que estava fechado, o mesmo tentou tirar o pino do portão para poder alcançar seu objetivo, mas como não conseguiu foi até o outro lado, no final do portão, onde tinha uma parte que possibilitava com maior facilidade mover o portão, assim conseguiu movê-lo para sair. A partir dessa situação pude fazer um paralelo com a metodologia resolução de problemas pela qual exige e permite que desenvolvamos a capacidade de estabelecer novas estratégias para alcançar a solução do problema.

Graduado em matemática, mas pela carência de professores passei a ministrar aulas de física na Seduc-MA em fevereiro de 2018 no 1º ano do ensino médio, e por muitas vezes precisei recorrer aos fundamentos da matemática para descrever fenômenos da física e em outros casos utilizei de exemplos da física para exemplificar conceitos matemáticos.

Porém, geralmente os currículos das duas disciplinas são independentes dificultando a percepção do aluno, em relação à conexão existente entre elas. Por isso, um dos objetivos do presente trabalho é usar da metodologia resolução de problemas como ferramenta para mostrar a conexão entre as disciplinas citadas acima.

Tendo em vista a atual situação da educação básica e aquilo que é exigido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) e pelo Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) em relação as competências e habilidades que o aluno principalmente os do ensino médio devem ter, o presente trabalho tem como objetivo geral Investigar as características singulares dos conteúdos de função afim e quadrática através da resolução de problemas, caracterizando-as e verificando as conexões entre matemática e física.

E para alcançar o objetivo geral foi-se traçado os seguintes objetivos específicos, aumentar a capacidade de associar o conteúdo a situações problemas, aplicar o conhecimento matemático adquirido em conteúdos da física, motivar o estudo da matemática através da interdisciplinaridade entre matemática e física por meio resolução de problemas modelados, e por fim demonstrar através da resolução de problemas que existe uma grande conexão entre a matemática e a realidade, e entre matemática e a física.

O trabalho se apoia nos dados oficiais do governo através da avaliação do Saeb (2017), nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000), na matriz de competências e habilidades do ENEM, e teoricamente em Diniz (1991), Lima (2013) e Andrade e Oliveira (2014).

A pesquisa está organizada de forma sucinta proporcionando uma visão geral sobre as diferentes contribuições da metodologia de resolução da problemas no processo de ensino aprendizagem na educação básica. O primeiro capítulo está dividido em cinco seções, estás seções mostram a importância do estudo das funções afins e quadráticas, e além disse faz um estudo sobre elas. O segundo capítulo faz uma conexão entre Matemática e Física de modo teórico, aproveitando aquilo que foi exposto no capítulo anterior e também apresenta essa conexão através de situações problemas.

O terceiro trata da metologia, sendo divido em duas seções. A primeira descreve local, objeto de estudo e os passos dados para a coleta dos resultados, e a segunda nos remete ao conhecimento da metodologia da resolução de problemas, enfatizado com base no pensamento de vários autores a importância de tal metodologia e suas diversas facetas para alcançar objetivos importantes na construção do saber.

Nos capítulos 4 e 5 são apresentados os resultados da pesquisa e a conclusão da mesma. Os demais capítulos relacionam a bibliográfica consultada e os anexos em geral.

1 FUNÇÕES POLINOMIAIS DE 1º e 2º GRAU

1.1 Importância do Estudo de Funções

Em toda área da matemática os conceitos sofrem evolução e grandes são os colaboradores, não é diferente no conceito de funções. Entres as mentes brilhantes da matemática que ajudaram na evolução do conceito de função podemos citar: Newton (1642 - 1727), Leibniz (1646 - 1716), Euler (1707 - 1783) e Johann Bernoulli (1667 - 1748).

Leibniz foi o primeiro a usar o termo função e introduziu terminologias como "constante", "variável" e "parâmetro". Dentro desse contexto, em 1718 Johann Bernoulli publicou um artigo com uma definição de função, nela a função de certa variável se apresentava como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes. Mais tarde seu discípulo Euler daria um retoque nessa definição e introduziu a notação $f(x)$.

A definição atual de função diz: "Dados dois conjunto A e B não vazios, uma função f de A em B ($f : A \longrightarrow B$) é uma regra (ou lei) que determina como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$"(CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 41).

As aplicações em diversas áreas do conhecimento como física, química e outras, é resultado da evolução do conceito de função. Pois é o modelo matemático usado para descrever a relação entre grandezas que se relacionam de alguma forma, assim o estudo de funções se torna um dos pilares da matemática contemporânea.

Na Física o estudo de funções se mostra de fundamental importância no estudo de conteúdos como movimento uniforme, movimento uniformemente variado, lançamentos oblíquos, estudo de ondas e entres outros. Na química para um bom desenvolvimento na área da físico-química se faz necessário um bom conhecimento das funções e na biologia o estudo de conteúdos como ecológica da população, potencial de bióticos, crescimento populacional e divisão celular tem como base o estudo de funções.

As funções em seus diferentes tipos, além de ajudar a compreender fenômenos em outras áreas, elas permitem a compreensão de outros conteúdos dentro da própria matemática. Quando a função afim se relaciona com o estudo de progressões aritméticas e juros simples, a função exponencial mostra o que acontece no mercado financeiro por meio do juros compostos (sistema SAC e PRICE), a função quadrática descreve de maneira eficaz a trajetória no lançamento de foguetes e através de uma das suas propriedades que é de grande utilização nas parabólicas e faróis de carro.

Além disso, o estudo das funções se mostra de grande importância por ser a base de uma grande estrutura chamada **Cálculo**, estrutura essa que possui grandes aplicações na economia, mercado financeiro e em áreas profissionais como as diversas partes da engenharia(civil, mecânica, computacional, robótica).

As aplicações das funções no nosso cotidiano se torna ainda mais visíveis quando se trata da educação básica, principalmente por meio das funções afins e função quadráticas. Observemos a seguir alguns exemplos de situações problemas desses tipos de funções.

1) (UF-GO) Para fazer traduções de textos para o inglês, um tradutor **A** cobra um valor inicial de R$ 16,00 mais R$ 0,78 por linha traduzida e um outro tradutor, **B**, cobra um valor de inicial de R$ 28,00 mais R$ 0,48 por linha traduzida. A quantidade mínima de linhas de um texto a ser traduzido para o inglês, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **B**, é?

2) O responsável por um circo percebeu que, quando o ingresso custava R$ 18,00, em média 600 pessoas assistem aos espetáculos e que a cada redução de R$ 2,00 no preço dos ingressos, o público aumentava de 200 expectadores. Qual deve ser o preço do ingresso para que a arrecadação seja máxima?

3) Cavar um buraco retangular de 1 m de largura de modo que o volume cavado seja de 300 m^3. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar as do buraco de modo que seu custo seja mínimo.

A parábola que é o gráfico da função quadrática possui uma propriedade refletora muito importante e que permite diversas aplicações e de fácil entendimento. A propriedade refletora da parábola diz que qualquer feixe de luz ou ondas que incide perpendicularmente na parábola, ou seja, paralelamente ao eixo de simetria, os seus raios são refletidos e convergem para um único ponto chamado foco.

> A utilização de objetos no cotidiano no formato de um parabolóide de revolução tais como antenas, radares e outros, é propositadamente. A simetria desses objetos com a incrível propriedade refletora da parábola são muito úteis, devido termos a necessidade em muitas vezes de amplificar esses sinais e otimizá-los.(CHUNG, 2013, p. 20)

As antenas parabólicas é uma de muitas aplicações dessa propriedade. Os satélites que se encontram em orbita no espaço enviam seus sinais em forma de micro-ondas para a superfície terrestre onde precisam ser captados de algumas forma para gerar o sinal, para se ter uma boa qualidade de imagem é necessário que esses sinais se concentrem em ponto, ou seja, maximizar a concentração, é ai onde entra a parábola com sua propriedade. Para converter os sinais é colocado um decodificador no foco, como mostra a figura 1.

Figura 1: Antena Parabólica.

Fonte: www.lojadolnbf.com.br

São muitas as variedade de aplicações no cotidiano sobre a parábola e sua propriedade refletora

> Nos refletores, lanternas, faróis e outros, temos a necessidade de maximizar o direcionamento da luz emitida por tais objetos. farol parabólico de um carro é um exemplo bem prático da importante propriedade refletora da parábola. Nesse caso temos duas situações quase que simultâneas, ou seja, os faróis de carros hoje são compostos de dois parabolóides circulares, um com a fonte luminosa no foco do farol e o outro, com a fonte luminosa entre o vértice e o foco do farol (CHUNG, 2013, p. 22).

Diante do que foi exposto torna-se claro que o aluno por meio do conhecimento de tais aplicações, sabendo responder as situações problemas colocadas anteriormente estará apto a solucionar problemas que possam surgir para sua inserção em meio a sociedade, isto é, a resolução de problemas capacita não só para se assimilar os conteúdos, mas também prepara para os obstáculos futuros do dia a dia. Além disso, o indivíduo exercerá sua cidadania com muito mais eficácia.

1.2 Estudo da Função Afim

A função afim está entre os conteúdos que mais possuem aplicações práticas e que se usa com frequência no dia a dia, até por está ligada as proporcionalidades existentes nas variadas situações problemas.

SITUAÇÃO PROBLEMA: (UFGO) Para fazer traduções de textos para o inglês, um tradutor **A** cobra um valor inicial de R$ 16,00 mais R$ 0,78 por linha traduzida e um outro tradutor, **B**, cobra um valor de inicial de R$ 28,00 mais R$ 0,48 por linha traduzida. A quantidade mínima de linhas de um texto a ser traduzido para o inglês, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **B**, é?

O problema acima revela uma situação comum no cotidiano de muitas pessoas, e que para uma decisão assertiva os conhecimentos sobre função afim seriam de grande ajuda. O problema será respondido e comentado na seção 2.4, quando de posse dos conhecimentos necessários.

DEFINIÇÃO: "Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a, b $\in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$"(LIMA, 2013, p. 79).

EXEMPLOS: A função identidade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são funções afins a função translação $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = x + b$. Outros casos particulares de funções afins são as funções lineares, $f(x) = a \cdot x$ $(a \neq 0)$ e, as funções constantes $f(x) = b$, com $b \neq 0$ (LIMA, 2013).

OBSERVAÇÃO: A função linear, dada pela lei $f(x) = a \cdot x$, com $a \neq 0$, é o modelo matemático para a maioria dos problemas de proporcionalidade. [...] Em suma, a definição tradicional equivale a dizer que a grandeza $y = f(x)$ é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número a (chamado constante de proporcionalidade) tal que $y = a \cdot x$, com $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$ (LIMA, 2013).

1.2.1 Gráfico da Função Afim

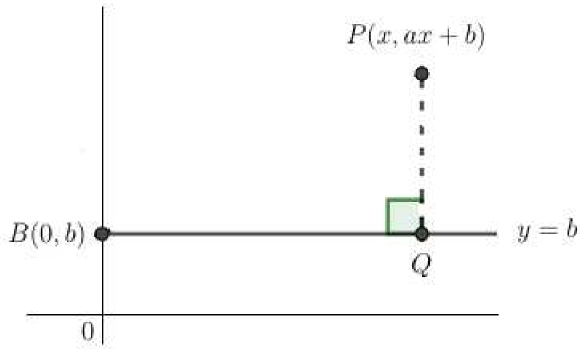
De acordo com Lima (2013), o gráfico de uma função afim (f) é uma linha reta, com f definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = ax + b. \end{aligned}$$

Na Figura 2 é fácil verificar que os pontos $B(0, b)$ e $P(x, ax+b)$ pertencem à função afim definida anteriormente, e sendo Q o pé da perpendicular de P baixada sobre o reta $y = b$, procede que a razão entre os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{BQ}$ é constante, pois

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}} = \frac{ax+b-b}{x-0} = \frac{ax}{x} = a. \qquad (1)$$

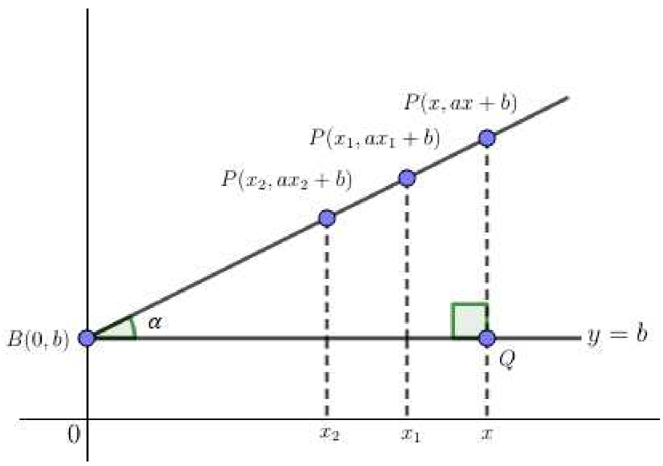
Figura 2: Gráfico da Função afim I.



Fonte: Próprio autor

O resultado obtido na expressão (1) significa que no triângulo retângulo BQP (reto em Q) da Figura 3, o ângulo $P\hat{B}Q = \alpha$ é constante independentemente da posição do ponto P, consequentemente o ponto P só pode se mover sobre uma reta, logo o gráfico da função afim é uma linha reta.

Figura 3: Gráfico da Função afim II.



Fonte: Próprio autor.

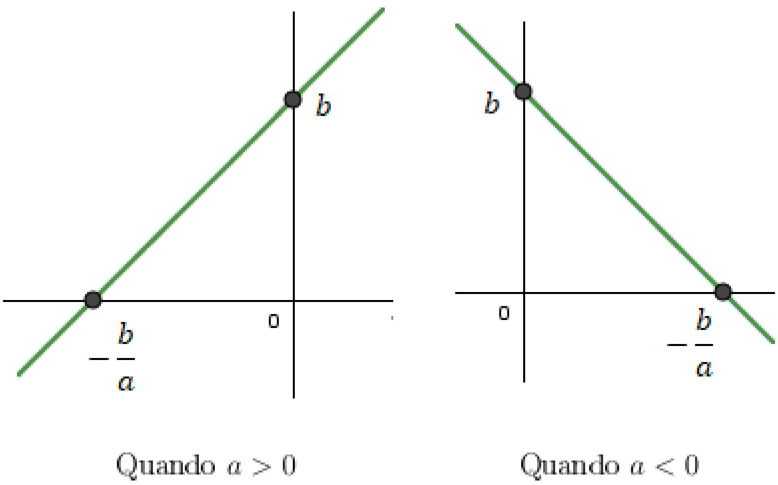
OBSERVAÇÃO: "Evidentemente, o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não é paralela ao eixo OY (eixo das ordenadas). Reciprocamente: Toda reta não-vertical é o gráfico de um função afim"(LIMA, 2013, p. 82).

1.2.2 Construção do Gráfico

Como o gráfico da função afim é uma linha reta, tem-se da geometria euclidiana que uma reta fica bem determinada por dois pontos distintos quaisquer. Porém, para uma melhor análise e estudo do gráfico da função afim, esses dois pontos que irão determinar o gráfico serão os que pertencem aos eixos coordenados.

Dessa forma, para a construção do gráfico é necessário encontrar os pontos em que ele cruza o eixo das abscissas (horizontal) e o das ordenadas (vertical). Depois de encontrar os pontos bastar traçar a reta passando por eles, como ilustra a Figura 6.

Figura 4: Construção do Gráfico.



Fonte: Próprio autor.

Para encontrar o ponto que o gráfico toca o eixo vertical basta fazer $x = 0$, assim para uma função afim $f(x) = ax + b$, $f(0) = b$, logo o ponto onde o gráfico cruza o eixo das ordenadas é o coeficiente b da função afim. E o ponto onde gráfico toca o eixo das abscissas se da quando $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$, o que implica

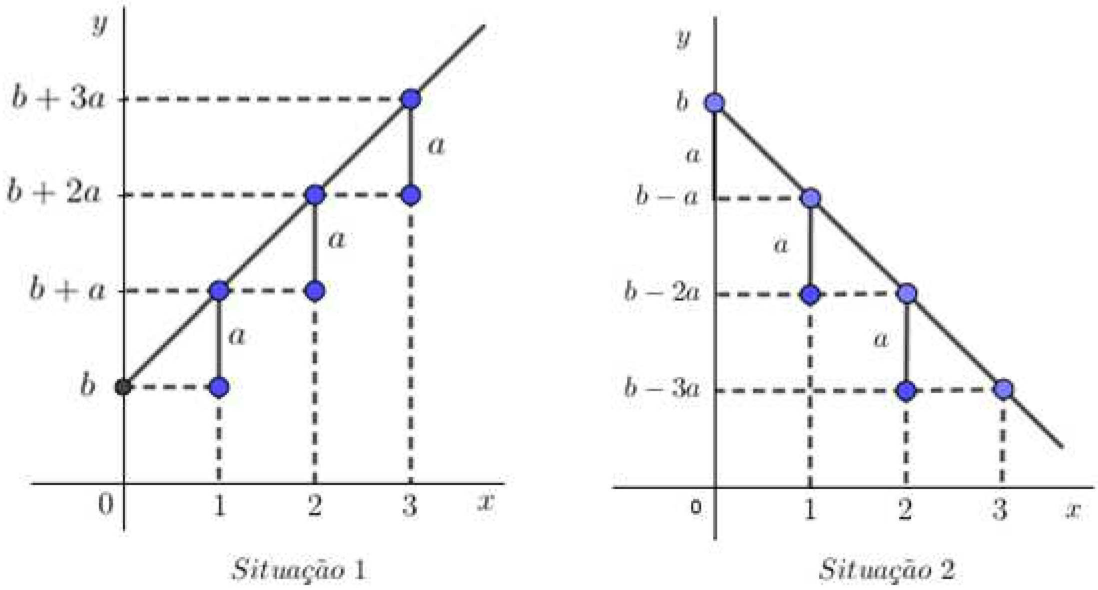
$$x = -\frac{b}{a}. \tag{2}$$

A equação (2) *chama-se* **raiz ou zero da função**.

1.2.3 Coeficientes da Função Afim

Na Figura 5 tem-se a representação geométrica da função afim em duas situações, cujo o objetivo é mostrar o significado geométrico dos coeficientes a e b da função afim definida na seção **1.2**, com ênfase no coeficiente a, tendo em vista que o b foi bem abordado na subseção anterior.

Figura 5: Analise dos Coeficientes.



Fonte: Próprio autor.

O coeficiente a é o valor que faz com que a função f cresça ou decresça a cada unidade variada no eixo horizontal (eixo das abscissas). A situação 1 representa o crescimento da função em a unidades a medida que se aumenta uma unidade no eixo das abscissas, e a situação 2 mostra como a função decresce a cada variação de unidade no eixo das abscissas. Se $a > 0$, então f é crescente, e se, $a < 0$, então f é decrescente.

O coeficiente b é calculado quando $x = 0$, ou seja, $b = f(0)$ e às vezes se chama o valor inicial da função f. Quanto ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir de dois valores quaisquer da função afim, sendo eles $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função assume em dois pontos distintos x_1 e x_2 (LIMA, 2013, p. 80). Conhecidos

$$f(x_1) = ax_1 + b \qquad \text{e} \qquad f(x_2) = ax_2 + b$$

$$a \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1).$$

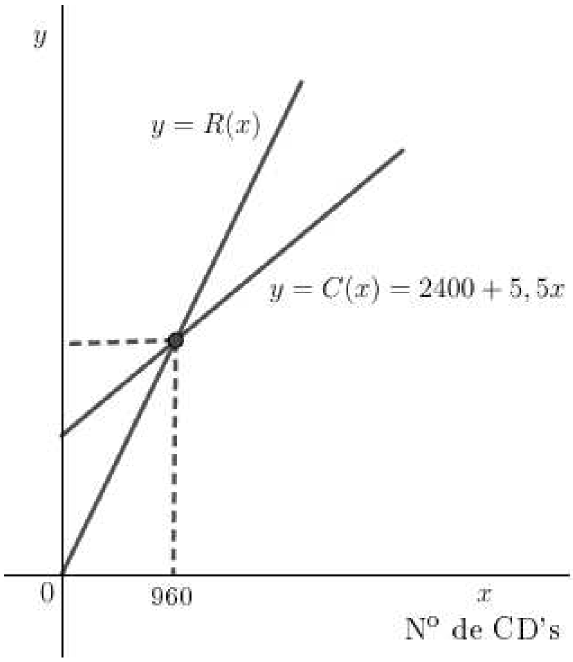
Dessa forma

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

Dados $x_1 = x$, $x_2 = x + h \in \mathbb{R}$, o número a da equação (3) chama-se a taxa de variação da função f no intervalo de extremos x, $x + h$.

APLICAÇÃO: (Mackenzie - SP) A figura 6 mostra os gráficos das funções custo total $C(x)$ e receita total $R(x)$ de uma empresa produtora de CDs. Se, produzindo e comercializando 960 CDs, o custo e a receita são iguais, o lucro pela venda de 2000 CDs é

Figura 6: Receita e Custo.



a) 1400 b) 2500 c) 3000 d) 2600 e) 1580

RESOLUÇÃO: Como o gráfico que representa as funções custo $C(x)$ e receita $R(x)$ são representadas por uma reta, logo a lei de formação é uma função afim, de modo que

$$R(x) = ax + b.$$

Com $b = 0$, já que $R(0) = 0$, $C(960) = 2400 + 5,5 \cdot 2000 = 7680$. Como $C(960) = R(960) = 7680$, vem que:

$$a = \frac{7680 - 0}{960 - 0} = 8$$

$$R(x) = 8x.$$

Logo a função lucro é dada por

$$L(x) = R(x) - C(x)$$

$$L(x) = 8x - (5,5x + 2400)$$

$$L(x) = 2,5x - 2400.$$

Como se quer o lucro quando $x = 2000$, segue-se que

$$L(2000) = 2,5 \cdot 2000 - 2400$$

$$L(2000) = 2600.$$

Com isso, o lucro com a venda de 2000 CD's é R$ 2600,00.

OUTRO MODO: Solução alternativa.

É importante que se faça uma analise das funções custo e receita, ambas são dadas respectivamente pelas expressões $C(x) = 2400 + 5,5x$ e $R(x) = 8x$. Agora analisando os coeficientes em cada função e seu significado. Na função custo a taxa de variação é $5,5$, ou seja, o custo de cada peça produzida é de 5 reais e 50 centavos, já na função receita a taxa de variação é 8, isto é, cada peça é vendida por 8 reais, desta forma o lucro de por peça produzida é de R$ 2,50 reais. Como $b = C(0)$, então pela função custo, $b = 2400$, ou seja, o custo fixo da empresa é de R$ 2400. Enfim, como se quer produzir 2000 peças tendo lucro de 2,50 por peça e um custo fixo de 2400 reais, logo, o lucro é:

$$L(2000) = 2000 \cdot 2,5 - 2400 = 2600.$$

1.2.4 Caracterização da Função Afim

TEOREMA: "Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Se a diferença $f(x+h) - f(x)$ depende apenas de h mas não de x, então f é uma função afim"(LIMA et al, 2010, p. 16).

DEMONSTRAÇÃO: Sem perca de generalidade será feito apenas o caso em que f é crescente, pois o outro é semelhante. Pela hipótese feita sobre f, a função $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$, está bem definida. Evidentemente φ é crescente. Além disso, para todo $h \in \mathbb{R}$ vale:

$$\begin{aligned}
\varphi(2h) &= f(x+2h) - f(x) \\
&= [f((x+h)+h) - f(x+h)] + [f(x+h) - f(x)] \\
&= \varphi(h) + \varphi(h) = 2 \cdot \varphi(h)
\end{aligned}$$

De modo análogo $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tem-se ainda

$$\varphi(-h) = f(x-h) - f(x) = -[f(x) - f(x-h)] = -\varphi(h).$$

Já que $x = (x-h) + h$. Segue-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h \in \mathbb{R}$ vale

$$\varphi((-n)h) = \varphi(-nh) = -\varphi(nh) = -[n \cdot \varphi(h)] = (-n)\varphi(h).$$

Como tem-se que $\varphi(0) = 0$, e ainda tem-se que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, logo $\varphi(h)$ é linear. Assim, pondo $a = \varphi(1) = f(x+1) - f(x)$, tem-se $\varphi(h) = \varphi(h \cdot 1) = h \cdot \varphi(1) = h \cdot a$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Para quaisquer x, $h \in \mathbb{R}$ vale $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$. Trocando h por x, vem: $f(x+h) - f(x) = ax$, Fazendo $h = 0$ e escrevendo $b = f(0)$, obtém-se $f(x) - b = ax$, donde $f(x) = ax + b$ e o teorema está demonstrado (LIMA et al, 2010).

> A recíproca do teorema acima é óbvia. Se $f(x) = ax+b$ então $f(x+h)-f(x) = ah$ não depende de x. A hipótese de que $f(x+h)-f(x)$ não depende de x ás vezes se exprime dizendo que "a acréscimos iguais de x correspondem a acréscimos iguais para $f(x)$". Outra maneira de exprimir esta hipótese consiste em dizer que acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados por x (LIMA, 2013, p. 90).

APLICAÇÃO: Numa sapataria um vendedor determinava o número do sapato de seus clientes medindo o seu pé com uma escala na qual, em vez de centímetros, estavam marcados os números ... 36, 37, 38... Sabendo que esses números estão igualmente espaçados e que um pé de 20 cm corresponde ao tamanho 32 na escala da sapataria e 28 cm a 42. Qual a lei que relaciona o comprimento em cm do pé com o número do sapato? (LIMA, 2013).

RESOLUÇÃO: A afirmação de que os números da escala estão igualmente espaçados, nos diz que acréscimos sofridos na escala são proporcionais aos acréscimos dado no pé do cliente. Assim, pela caracterização da função afim, temos que o modelo matemático é do tipo $f(x) = ax + b$, onde x é o valor em cm do pé do cliente e $f(x)$ o número do sapato. Como $x_1 = 20$, implica $f(x_1) = 32$ e $x_2 = 28$ a $f(x_2) = 42$, obtém-se

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{42 - 32}{28 - 20}$$

$$a = \frac{5}{4},$$

assim,

$$f(x) = \frac{5}{4}x + b.$$

Substituindo $x = 20$ e $f(x) = 32$, obtemos $b = 7$. Consequentemente, a expressão que relaciona o tamanho do sapato $f(x)$ ao tamanho do pé x é dado por

$$f(x) = \frac{5}{4}x + 7.$$

1.3 Estudo da Função Quadrática

Constantemente as pessoas precisam tomar decisões que lhe beneficiem de alguma forma, muitas dessas situações envolvem maximizar receitas e minimizar custos, e nesse contexto o conhecimento de alguns conhecimentos matemáticos é de extrema importância. A seguir está exposta uma dessas situações.

SITUAÇÃO PROBLEMA: Um ônibus de 50 lugares foi fretado para uma viagem de férias. A empresa cobrou uma quantia $R\$$ 400 de cada passageiro e exigiu que cada lugar vago custaria $R\$$ $10,00$ a cada passageiro. Qual o número de passageiros que torna máxima a receita da empresa ?

Para uma decisão de êxito no problema acima, tanto por parte da empresa quanto dos passageiros é necessário conhecer um pouco das características e propriedades da função quadrática, assim o problema será resolvido e comentado logo após o estudo da função quadrática.

DEFINIÇÃO: "Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de $\mathbb{R}$ *em* $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e $c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$"(IEZZI et al, 2015, p. 79).

EXEMPLOS:

a) $f(x) = 2x^2 + 5$, sendo $a = 2$, $b = 0$ e $c = 5$;

b) $f(x) = -x^2 - 4x$, sendo $a = -1$, $b = -4$ e $c = 0$;

c) $f(x) = -x^2$, sendo $a = -1$, $b = 0$ e $c = 0$;

d) $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$, sendo $a = -3$, $b = 2$ e $c = -1$.

Muitos problemas recaem na estrutura de uma função quadrática. Um dos mais antigos consiste em achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. Se um desses números é x, o outro será $s - x$, logo $x(s - x) = p$. Efetuando a multiplicação, vem $sx - x^2 = p$, ou seja, - $x^2 + sx - p = 0$. Encontrar x (e, por consequência $s - x$) significa resolver a equação do segundo grau $x^2 - sx + p = 0$, isto é, achar os valores de x para os quais a função quadrática $f(x) = x^2 - sx + p$ se anula. Esses valores são chamados os zeros da função quadrática ou as raízes da equação correspondente.

Note que se x for uma raiz da equação $x^2 - sx + p = 0$, então $s - x$ também será, pois $(s - x)^2 - s(s - x) + p = s^2 - 2sx + x^2 - s^2 + sx + p = x^2 - sx + p = 0$.

Desse modo, as duas raízes dessa equação são os números procurados. Deve-se observar entretanto que, dados arbitrariamente os números s e p, nem sempre existem dois números cuja soma é s e cujo produto é p.

1.3.1 Forma Canônica

Considerando o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Completando quadrados com o segundo membro, obtém-se

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

ou

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

A partir desse modo de escrever o trinômio do segundo grau obtém-se alguns resultados importantes no estudo da função quadrática. O primeiro resultado é que ela nos conduz a fórmula que dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Assim, se $a \neq 0$, então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{4}$$

"Vale ressaltar que a expressão $b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante e, é representado pela letra grega delta, ou seja, $\Delta = b^2 - 4ac$"(LIMA, 2013, p. 110). Pode-se ainda concluir que se:

(i) $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e diferentes, isto é,

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

(ii) $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais.

(iii) $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais, ou seja,

$$x = -\frac{b}{2a}. \tag{5}$$

1.3.2 Soma e Produto das Raízes

Como $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, chamando a soma das raízes de S e o produto de P, sucede que:

$$S = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Rightarrow \qquad S = -\frac{b}{2a}.$$

E o produto P é

$$P = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$P = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{c}{a}.$$

1.3.3 Máximo e Mínimo da Função Quadrática

A função quadrática em sua forma canônica é dada por

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

Dentro dos colchetes se exibe uma soma de duas parcelas, a primeira depende de x e a segunda é representado por um valor constante, assim o valor de $f(x)$ depende apenas da primeira parcela. A primeira parcela é sempre $\geqslant 0$. Assim,

I) Supondo $a > 0$, temos que o menor valor de $f(x)$ é dado quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0, \text{ assim, } x = -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, o valor mínimo assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

II) Se $a < 0$, então o valor de $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ é o maior valor dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

NOTA: Mais uma pergunta respondida pela forma canônica. Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ para quais valores $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) = f(x_2)$?

Pela forma canônica, decorre que $f(x_1) = f(x_2)$ se, e somente se,

$$\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Como $x_1 \neq x_2$, isto significa que

$$x_2 + \frac{b}{2a} = -\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right),$$

isto é,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}.$$

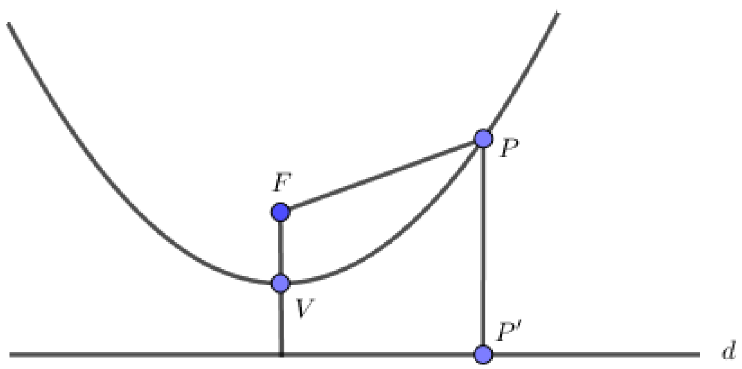
Enfim, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume valor $f(x_1) = f(x_2)$ para $x_1 \neq x_2$ se, e somente se, os pontos x_1 e x_2 são equidistantes de $-\dfrac{b}{2a}$.

1.3.4 Gráfico da Função Quadrática

De acordo com Lima (2013), o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$ com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ é uma parábola.

DEFINIÇÃO: "Dados um ponto **F** e uma reta **d** pertencentes a um plano α, com **F** $\notin$ **d**, seja **p** a distância entre o ponto **F** e a reta **d**. Parábola é o conjunto dos pontos de α que estão à mesma distância de **F** e de **d**"(IEZZI et al, 2015, p. 724). Na figura 7 tem-se a representação geométrica da parábola com seus elementos.

Figura 7: Elementos da Parábola I.



Fonte: Próprio autor

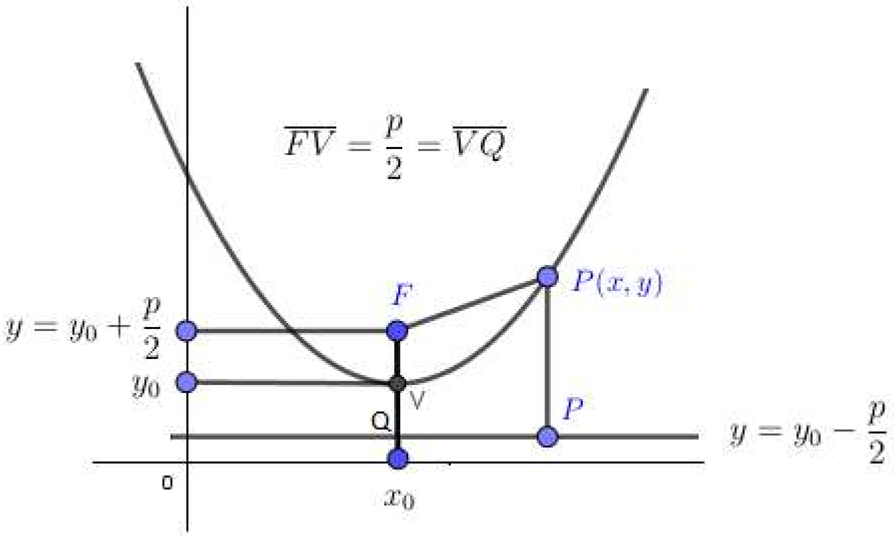
Parábola $= \{P \in \alpha | PF = PP'\}$

ELEMENTOS:

- F : Foco.
- p : é a distância entre o foco e a reta diretriz
- V : vértice da parábola (ponto mais próximo da reta diretriz).
- P : Ponto qualquer da parábola.
- P' : Projeção de P sobre a diretriz.
- d: Reta diretriz

Agora, sem perca de generalidade, considere uma parábola no plano cartesiano com reta diretriz paralela ao eixo das abcissas, vértice acima da reta diretriz e um ponto qualquer $P(x, y)$ pertencente a parábola como mostra a figura 8.

Figura 8: Elementos da Parábola II.



Fonte: Próprio autor

Por definição $\overline{PF} = \overline{PP'}$, desenvolvendo a igualdade, obtem-se

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \tag{6}$$

chamada equação reduzida da parábola com $V(x_0, y_0)$ acima da diretriz, foco $\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$ e reta diretriz $y = y_0 - \frac{p}{2}$. Reescrevendo a equação (6) como $y = ax^2 + bx + c$, obtem-se

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

$$x^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x + x_0^2 = 2py - 2y_0$$

$$2py = x^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x + x_0^2 + 2y_0$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{x_0}{p}x + \frac{x_0^2 + 2y_0}{2p}.$$

"Sendo $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{x_0}{p}$ e $c = \frac{x_0^2 + 2y_0}{2p}$. Assim, concluí-se que o gráfico de uma função quadrática é, de fato uma parábola (CHAVANTE; PRESTES, 2016, p. 158)".

1.3.5 Concavidade da Parábola

Tomando como base o exemplo da parábola anterior onde o foco é $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$, a reta diretriz é $y = y_0 - \frac{p}{2}$, e vértice $V(x_0, y_0)$ e $a = \frac{1}{2p}$, o que implica $p = \frac{1}{2a}$, temos que se:

(i) $a > 0$, então a concavidade da parábola será voltada para cima, pois a ordenada do vértice é menor que a do foco, ou seja,

$$y_0 < y_0 + \frac{1}{4a};$$

(ii) $a < 0$, então a concavidade da parábola será voltada para baixo, já que a ordenada do vértice é menor que a do foco, isto é,

$$y_0 > y_0 - \frac{1}{4a}.$$

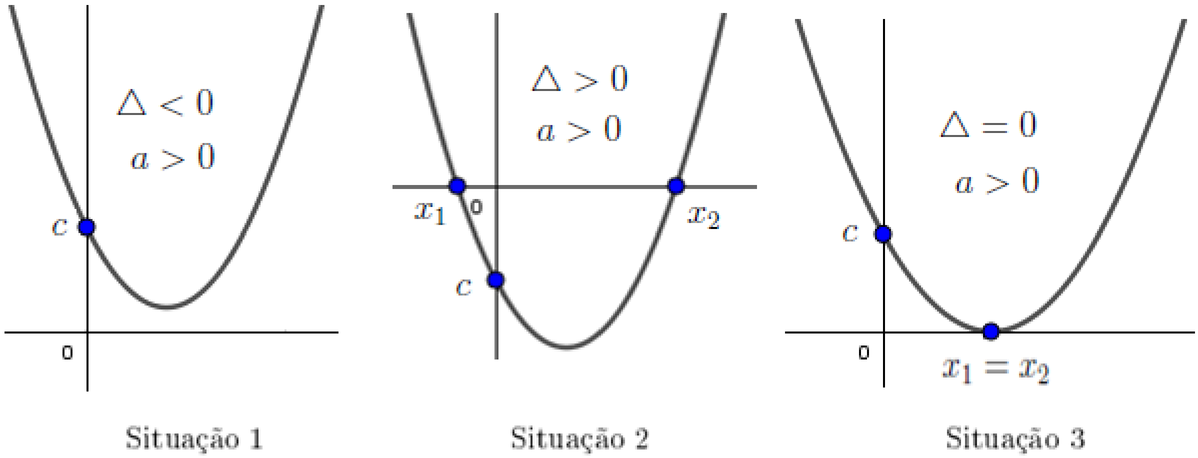
1.3.6 Resumo do Estudo da Função Quadrática

Para finalizar o estudo da função quadrática, nesta parte será feito uma associação dos resultados obtidos algebricamente a sua interpretação geométrica.

- Se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima (figura 9), caso contrário, isto é, $a < 0$, a concavidade será voltada para baixo (figura 10). Quando

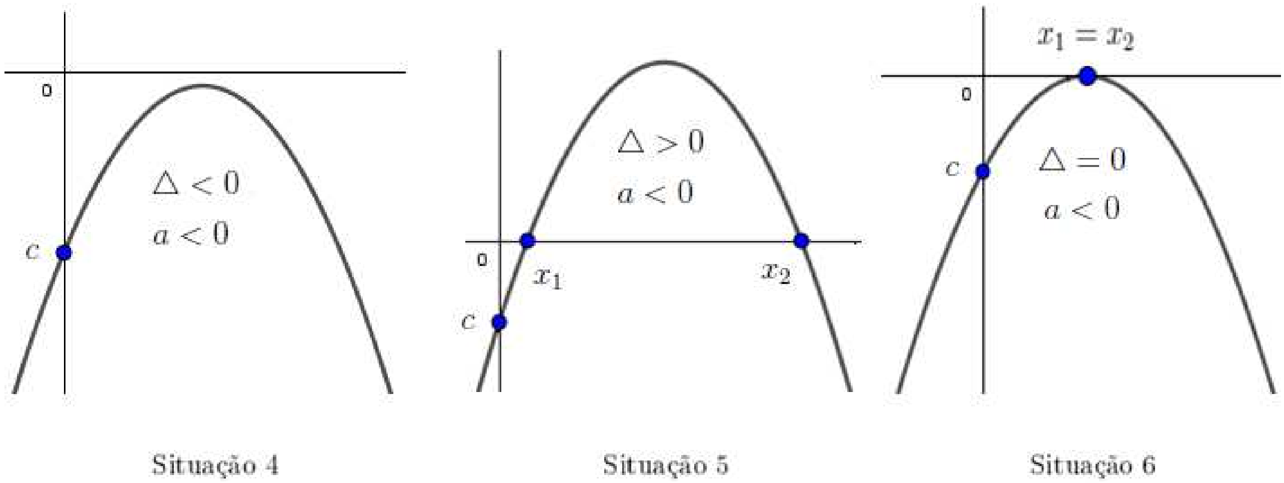
$\triangle < 0$ o gráfico não toca o eixo horizontal como mostra a situação 1 e 4 das figuras 9 e 10 respectivamente, se $\triangle > 0$, o gráfico toca o eixo da abscissas em dois pontos distintos, representados nas situações 2 e 5 das Figuras 9 e 10, e se $\triangle = 0$, toca apenas uma vez do eixo horizontal conforme as situações 3 e 6.

Figura 9: Concavidade Voltada para Cima.



Fonte: Próprio autor

Figura 10: Concavidade Voltada para Baixo.



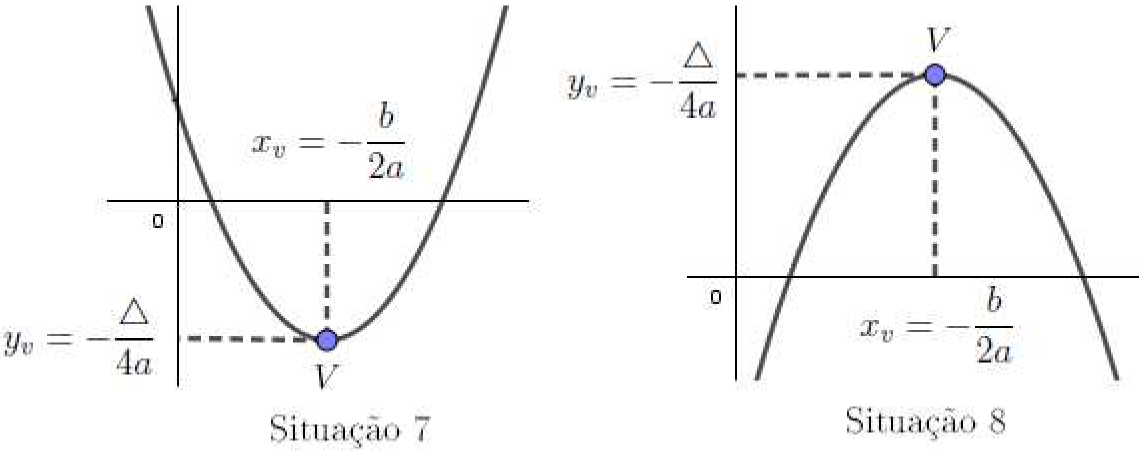
Fonte: Próprio autor

- O vértice representa o ponto do gráfico em que a parábola muda de sentido, ou seja, o ponto onde a parábola deixa de crescer alcançado o valor máximo e passa a decrescer, quando $a < 0$, e quando $a > 0$, representa o local onde a função para de diminuir alcançando valor mínimo e começa a crescer. O vértice é dado por

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right) \tag{7}$$

e as situações descritas estão representadas na Figura 11 nas situações 7 e 8.

Figura 11: Máximo e Mínimo da Função Quadrática.



Fonte: Próprio autor

1.4 Resolução de Problemas Modelados de Função Afim e Quadrática

A subseção a seguir tem por objetivo expor a solução dos problemas de uma maneira que o aluno possa compreender melhor o conteúdo e suas propriedades(características). Os problemas abordados por terem uma conexão com a realidade do educando mostra a importância dos conteúdos na grade curricular e também funcionará como um estimulo ao aluno.

NOTA: Os problemas **2** e **4** desta seção, corresponde aos exemplos **1** e **3** respectivamente citados na página 17.

PROBLEMA 1: Um ônibus de 50 lugares foi fretado para uma viagem de férias. A empresa cobrou uma quantia $R\$\ 400$ de cada passageiro e exigiu que cada lugar vago custaria $R\$\ 10,00$ a cada passageiro. Qual o número de passageiros que torna máxima a receita da empresa ?

RESOLUÇÃO: Chamaremos a receita de R e a quantidade de passageiros de x. A receita é dada pelo produto entre a quantidade de passageiros x e a quantia que cada um irá pagar. A quantia que cada um irá pagar é formado por duas parcelas, uma fixa que é o valor de R\$ 400 e a outra que depende da quantidade de lugares vazios, ou seja, $10 \cdot (50 - x)$. Assim, a expressão que define a receita é

$$R(x) = x \cdot [400 + 10 \cdot (50 - x)]$$

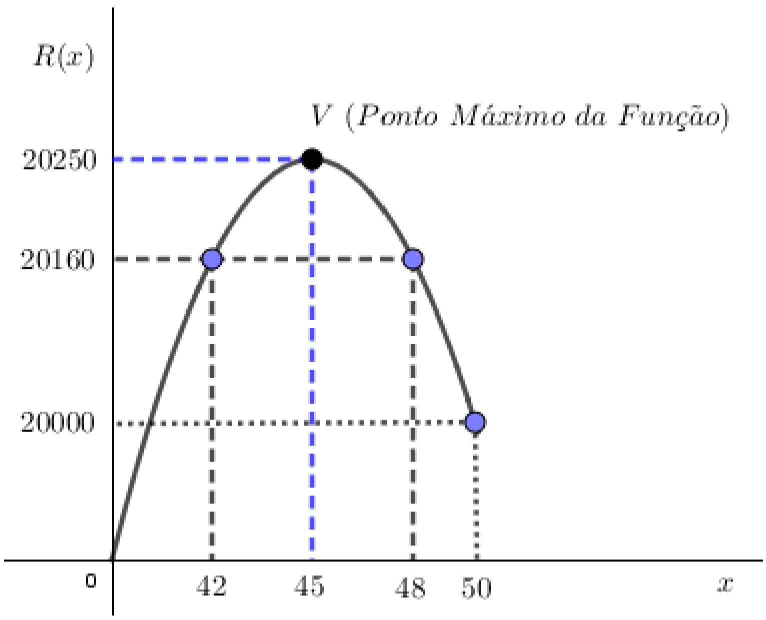
$$R(x) = -10x^2 + 900x.$$

Como a receita é dada por uma função quadrática e se pede o número de passageiros que torna máxima a receita, assim a resposta será dada por

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{900}{-2 \cdot 10} = 45.$$

Portanto, para se alcançar a receita máxima deve-se vender 45 passagens, alcançando receita de R$ 20250. Observe o gráfico representado na Figura 12 para uma maior compreensão da resposta obtida.

Figura 12: Receita em Função do Número de Passagens.



Fonte: Próprio autor

O problema proporciona uma visão mais ampla do conteúdo ao oferecer que o aluno visualize uma propriedade importante da parábola. O fato de 42 e 48 serem equidistantes de 45, faz com que $f(42) = f(48) = 20160$.

NOTA: Quando o problema foi proposto no curso na resolução de problemas, um determinado aluno respondeu de imediato que a resposta seria 50, ou seja, quando vendesse todas as passagens. Uma má análise da questão pode conduzir ao erro, porém o aluno se retratou e disse que o problema serviu para que o mesmo tivesse um senso crítico maior na resolução de problemas.

PROBLEMA 2: (UFGO) Para fazer traduções de textos para o inglês, um tradutor **A** cobra um valor inicial de R$ 16,00 mais R$ 0,78 por linha traduzida e um outro tradutor, **B**, cobra um valor de inicial de R$ 28,00 mais R$ 0,48 por linha traduzida. A quantidade mínima de linhas de um texto a ser traduzido para o inglês, de modo que o custo seja menor se for realizado pelo tradutor **B**, é?

RESOLUÇÃO: Chamando de V o valor cobrado pelos tradutores que depende da quantidade x linhas traduzidas, temos que para cada aumento de h reais $V(x+h)-V(x)$ não depende de x, assim pela caracterização da função afim a lei que define a relação entre V e x é uma função afim. Dessa forma,

$$V_A(x) = a \cdot x + b \qquad \text{e} \qquad V_B(x) = a \cdot x + b,$$

Com $a = 0,78$ e $b = 16$ para o tradutor A e para o B, tem-se $a = 0,48$ e $b = 28$, logo

$$V_A(x) = 0,78 \cdot x + 16 \qquad \text{e} \qquad V_B(x) = 0,48 \cdot x + 28.$$

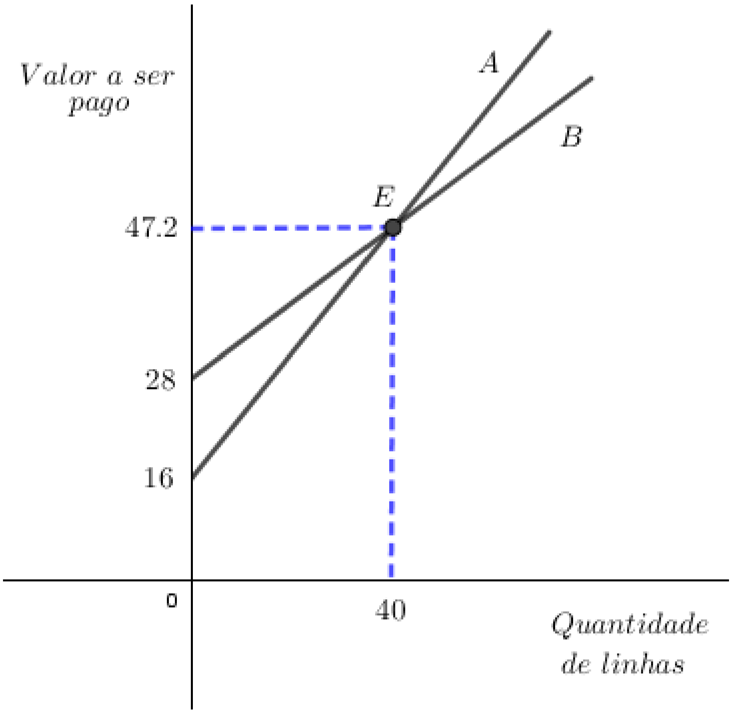
Assim, basta fazer $V_B < V_A$, ou seja,

$$0,48 \cdot x + 28 < 0,78 \cdot x + 16 \qquad \Rightarrow \qquad 0,30 \cdot x > 12 \qquad \Rightarrow \qquad x > 40.$$

O resultado da inequação anterior diz que para qualquer texto acima de 40 linhas, o custo do tradutor B é menor do que o A. Portanto, tem-se como resposta 41 linhas. Para uma melhor análise dos valores cobrados pelos tradutores em função do número de linhas, observemos o comportamento dos gráficos de ambas as funções na Figura 13.

O ponto de encontro entre os gráficos representa a quantidade de linhas onde tanto faz escolher o tradutor A ou o B, para uma quantidade de linhas menor do que 40 o tradutor A é mais barato como mostra o gráfico já que B está sobre A, e caso contrário B é mais barato, isto é, para qualquer quantidade acima de 40 linhas, logo o texto precisa ter no mínimo 41 linhas.

Figura 13: Relação Entre os Tradutores.



Fonte: Próprio autor

PROBLEMA 3: Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo no fundo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, ás 6 da tarde desse dia, só tinha 850 litros. Quando a caixa ficará pela metade?

RESOLUÇÃO: Se é uma vazão constante, logo a relação entre o volume existente na caixa e o número de horas que se passaram do início é uma função afim, ou seja, chamando de V o volume restante após t horas do início, obtem-se

$$v(t) = a \cdot t + b \tag{8}$$

Como $\boldsymbol{a}$ é a taxa de variação e $\boldsymbol{b}$ o valor inicial, temos que

$$a = \frac{850 - 1000}{18 - 12} = \frac{-150}{6} = -25\ l/h \quad \text{e} \quad b = 1000\ l. \tag{9}$$

Substituindo os resultados da equação (9) na (8), tem-se $v(t) = -25 \cdot t + 1000$, assim fazendo $v(t) = 500$, segue-se que

$$500 = -25 \cdot t + 1000 \qquad \Rightarrow \qquad t = 20\ horas.$$

Então, depois de 20 horas a caixa d'água terá volume de 500 litros, isto é, ás 8 horas do dia seguinte.

OUTRO MODO: Solução alternativa.

o problema poderia ter sido resolvido também usando apenas a ideia da vazão constante, ou seja, a taxa de variação. Se ao meio dia tinha 1000 l e ás 18 h 850 litros, logo a cada 6 horas a caixa está derramando 150 litros. Assim, poderíamos analisar a resposta como na Tabela 1

Tabela 1: Tabela Para Análise da Quantidade de Água.

Volume(litros)	1000	850	700	550	500
horário(horas)	12	18	00	6	8

Fonte: Próprio autor

PROBLEMA 4: Cavar um buraco retangular de 1m de largura de modo que o volume cavado seja de 300 m^3. Sabendo que cada metro quadrado de área cavada custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar as dimensões do buraco de modo que seu custo seja mínimo.

RESOLUÇÃO: Tomemos 1, x e y sendo as dimensões, em metros, do buraco. Como o volume é dado nesse caso pelo produto das dimensões, temos que $1 \cdot x \cdot y = 300$. Chamando o custo de c, tem-se que $c = 10x + 30y$, do volume obtemos

$$y = \frac{300}{x}. \tag{10}$$

Assim, substituindo a equação (10) no custo, obtém-se

$$c = 10x + 30 \cdot \frac{300}{x}$$

$$c = \frac{10x^2 + 9000}{x}$$

$$10x^2 - cx + 9000 = 0. \tag{11}$$

Como o problema possui solução e ela se dá quando o discriminante da equação (11) é maior do que ou igual a zero, ou seja, $\Delta \geqslant 0$. Logo $c^2 - 4 \cdot 10 \cdot 9000 \geqslant 0$, isto é,

$$c \geqslant 600.$$

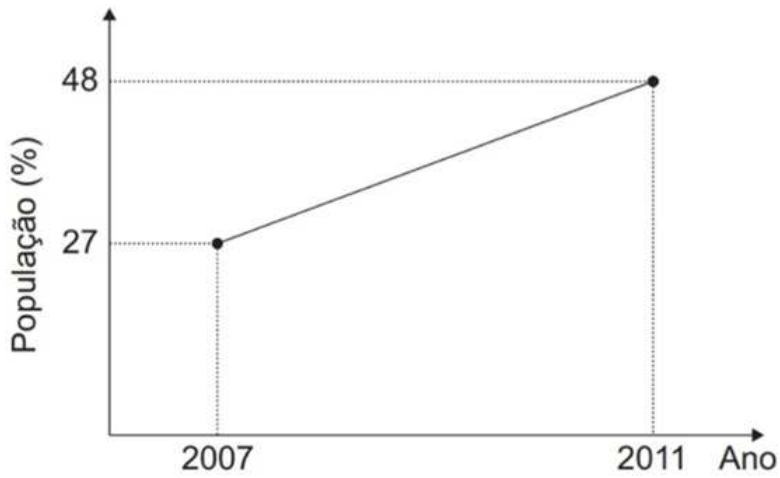
Consequentemente, o valor mínimo para o custo é de R\$ 600. Já que c = 600, temos $10x^2 - 600x + 9000 = 0$, resolvendo a expressão, obtemos $x = 30\ m$ e por consequência $y = 10\ m$. Portanto, o buraco retangular deve ter dimensões 1, 10 e 30 para que o custo seja mínimo.

1.5 Função Afim e Quadrática no Enem

O objetivo nesta seção é aplicar os conhecimentos adquiridos nos estudos de funções afins e quadráticas através da metodologia da resolução de problema em problemas do exame nacional do ensino médio (**ENEM**) e verificar de que modo esses conhecimentos são cobrados.

(QUESTÃO 160, ENEM 2016 3ª APLICAÇÃO) O percentual da população brasileira conectada à internet aumentou nos anos de 2007 a 2011. Conforme dados do Grupo Ipsos, essa tendência de crescimento é mostrada no gráfico.

Figura 14: Brasileiros Conectados á Internet.



Suponha que foi mantida, para os anos seguintes, a mesma taxa de crescimento registrada no período 2007-2011. A estimativa para o percentual de brasileiros conectados à internet em 2013 era igual a:

a) 56,40%. b) 58,50%. c) 60,60%. d) 63,75%. e) 72,00%.

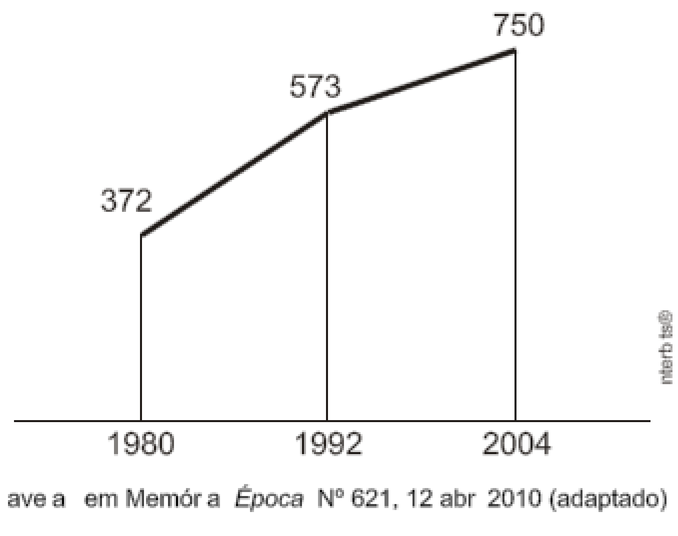
RESOLUÇÃO: O gráfico que relaciona as duas grandezas mostradas no plano cartesiano é o de uma função afim, ou seja, $f(x) = ax+b$, onde $f(x)$ é a população (em porcentagem) para um dado ano x. Para resolver tal questão basta saber a taxa de crescimento da função, isto é, o valor do coeficiente a, assim tomando os pontos $(2011, 48)$ e $(2007, 27)$, obtemos

$$a = \frac{48 - 27}{2011 - 2007} = 5,25.$$

Isso mostra que a cada ano a um crescimento de 5,25% da população que se conecta a internet. Desse modo, se em 2011 o percentual de brasileiros conectados era 48%, então em 2013 temos que esse percentual é de 58,50%.

(ENEM 2010 QUESTÃO 166) O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.

Figura 15: Número de Favelas no RJ Entre 1980 e 2004.



Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será

a) Menor que 1150.

b) 218 unidades maior que em 2004.

c) Maior que 1150 e menor que 1200.

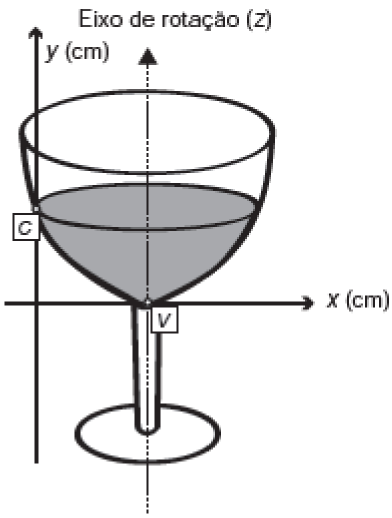
d) 177 unidades maior que em 2010.

e) Maior que 1200.

RESOLUÇÃO: O problema aborda a ideia do coeficiente $\boldsymbol{a}$ da função afim, ou seja, a taxa de variação. Logo se de 2004 a 2010 cresce $968 - 750 = 218$, então de 2010 a 2016 também crescerá 218 favelas. Portanto, como em 2010 tinha 968 favelas, em 2016 terá $968 + 218 = 1186$ favelas. Resposta letra C.

(ENEM 2013 QUESTÃO 159) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.

Figura 16: Taça Gerada Pela Parábola.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + C$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

RESOLUÇÃO: O problema é uma modelagem da função quadrática e apenas requer que se saiba aplicar uma de suas propriedades para se obter a resposta correta. O valor de C é o que procuramos, agora cabe as seguintes perguntas:

- Como encontrá-lo?

- O que foi nos dado para encontra-lo?

A resposta é simples, basta observar que a parábola toca o eixo das abscissas em apenas um ponto, logo $\triangle = 0$, assim

$$b^2 - 4ac = 0, onde\ a = \frac{3}{2},\ b = -6\ e\ c = C$$
$$(-6)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 6.$$

Como $c = C$, segue-se que $C = 6$.

(ENEM 2014 QUESTÃO 149) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- a nota zero permanece zero.
- a nota 10 permanece 10.
- a nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

c) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2$

e) $y = x$

RESOLUÇÃO: Como o grau do polinômio que representa a função é menor que 3, logo é do tipo $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, com $a, b\ e\ c \in \mathbb{R}$, pela descrição dos dados temos que os pontos $(0, 0)$, $(10, 10)\ e\ (5, 6)$ pertencem a função. De imediato $c = 0$, pois para $x = 0$ corresponde a $y = 0$, assim substituindo os demais pontos na função obtemos:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 10 \\ 25a + 5b = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $a = -\dfrac{1}{25}$ e $b = \dfrac{7}{5}$. Portanto, a expressão procurada é $y = -\dfrac{1}{25}x^2 + \dfrac{7}{5}x$.

2 FUNÇÕES E A FÍSICA

Muitos dos fenômenos encontrados na física são descritos pelas funções afins e quadráticas, assim o conhecimento do estudo das funções se faz necessário para compreensão dos variados objetos de estudos da física.

Por isso, a seção faz uma ponte entre as disciplinas de matemática e física através dos estudos das funções afim e quadrática. Inicialmente a relação entre tais currículos é feita teoricamente e logo após esse estudo, as características e propriedades dos mesmos ganharão vida nas aplicações dos problemas.

2.1 Função Afim e Movimento Uniforme

A conexão entre função afim e o movimento uniforme começa pela definição, observemos a definição a seguir:

Um determinado objeto está em movimento uniforme (MU) em um dado intervalo de tempo quando sua velocidade escalar instantânea for mantida constante e diferente de zero em todo intervalo considerado, ou seja, percorre sempre a mesma distância em intervalos de tempos iguais (MARTINI, 2016).

Isto significa que a distância $s(t+h) - s(t)$ percorrida no tempo h desde a posição $s(t)$, depende apenas de h, mas não de t, como vimos na caracterização da função afim. Então s é uma função afim, assim $s(t) = a \cdot t + b$, sendo $a = s(t+1) - s(t)$ o espaço percorrido na unidade de tempo, chama-se *velocidade média* do movimento realizado pelo objeto, b = s(0) é a posição inicial e s(t) é a posição no instante t (LIMA, 2013).

Como velocidade média representada pelo coeficiente a na função é o espaço percorrido na unidade de tempo, dados dois pontos do móvel (objeto) na trajetória $(t_1, s(t_1))$ e $(t_2, s(t_2))$, onde $t_1 \neq t_2$ pode-se obtê-la pela relação

$$a = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Assim, se $a = v =$ velocidade média e $b = s_0 =$ posição inicial, logo a função horária da posição em função do tempo no MU é dada pela equação

$$s(t) = v \cdot t + s_0.$$

APLICAÇÃO: Dois automóveis, A e B, desenvolvem movimento uniforme sobre a mesma estrada retilínea, no sentido da trajetória, com velocidades escalares iguais a, respectivamente 72 km/h e 90 km/h. No momento em que A passa pelo quilômetro 100, B passa pelo quilômetro 140.

a) Quando A passa pelo quilômetro 140, qual será a posição de B?

b) Depois de quanto tempo, a partir do momento em que o automóvel A passar pelo quilômetro 100, a distância entre os dois será igual a 67 km? Qual será, então, a posição de cada automóvel?

RESOLUÇÃO:

a) Primeiro encontremos a função horária de cada móvel. Como o movimento é uniforme, logo para o móvel A e B, temos que

$$S_A = v \cdot t + b \quad \text{e} \quad S_B = v \cdot t + b.$$

Como a análise do movimento se dá quando A se encontra no quilômetro 100 e B no 140, logo o valor de $b = 100$ para o móvel A e $b = 140$ para B, logo

$$S_A = 72 \cdot t + 100 \quad \text{e} \quad S_B = 90 \cdot t + 140.$$

Para saber a posição do móvel B, é preciso saber o tempo que A gastou até atingir a posição 140 km, assim, temos que

$$72t \cdot t + 100 = 140 \qquad \Rightarrow \qquad 72t \cdot t = 40 \qquad \Rightarrow \qquad t = \frac{5}{9}h.$$

Desse modo, a posição que B ocupa quando A está no quilômetro 140 é quanto $t = \frac{5}{9}$, portanto

$$S_B = 90 \cdot \frac{5}{9} + 140 \qquad \Rightarrow \qquad S_B = 190\ km.$$

b) A distância entre os automóveis A e B, é dada por $S_B - S_A$, assim queremos encontrar o valor de t para quando

$$S_B - S_A = 67$$

$$90 \cdot t + 140 - (72 \cdot t + 100) = 67$$

$$18 \cdot t = 27$$

$$t = \frac{27}{18} = 1,5h.$$

Nesse instante para saber a posição de A e B, basta substituir $t = 1,5h$ em cada uma das funções horárias. Assim, obtemos

$$S_A = 72 \cdot 1,5 + 100 = 208$$

$$S_B = 90 \cdot 1,5 + 140 = 275.$$

OUTRO MODO: Solução alternativa para letra B.

No momento inicial da análise do movimento a distância entre eles é de 40 km, pois um se encontra na posição 100 e o outro na posição 140. O móvel A percorre 72 km a cada 1 h e B 90, assim a cada hora que passa a distância entre aumenta $90 - 72 = 18\ km$, como a distância entre já de 40 km, só preciso de mais 27 km para atingir 67 km, então é de fácil percepção que o tempo necessário é de 1,5 h.

2.2 Função Quadrática e Movimento Uniformemente Variado

A função quadrática possui relação com vários tipos de movimento dentro da física e fora dela, porém um dos exemplos mais relevantes em que ela se aplica é o movimento uniformemente variado. Aqui se tem um ponto móvel, que se desloca ao longo de um eixo. Sua posição no instante t é determinada pela função $s(t)$. O que caracteriza o movimento uniformemente variado é o fato de s ser uma função quadrática, que se escreve usualmente sob a forma

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c. \tag{12}$$

Na equação (12) , a constante a chama-se aceleração, b é chamado de velocidade inicial (quando $t = 0$) e c a posição inicial do objeto. Geralmente nos livros de física do ensino médio a expressão acima é escrita da seguinte forma

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \tag{13}$$

Dessa forma, comparando (13) e (12), temos $b = v_0$, $c = s_0$. Em qualquer movimento retilíneo, dado por uma função arbitrária s(t), a razão dada por

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{distância\ percorrida}{tempo\ de\ percurso}$$

é chamada de velocidade média do ponto no intervalo cujos extremos são t e $t + h$. No caso em que s é dada pela expressão (12), a velocidade média nesse intervalo é

$$\frac{\frac{1}{2}a(t+h)^2 + b(t+h) + c - \left(\frac{1}{2}at^2 + bt + c\right)}{h}$$

$$\frac{tah + bh + \frac{1}{2}ah^2}{h}$$

$$at + b + \frac{ah}{2}. \tag{14}$$

Se tomarmos na expressão (14), h cada vez menor, ela se aproxima de $at + b$. Por isso que se diz que

$$v(t) = at + b \tag{15}$$

é a *velocidade* do ponto (no MUV) no instante t, e a expressão (15) é chamada de equação horária da velocidade.

"Quando $t = 0$ por consequência $v(0) = b$, por isso b se chama velocidade inicial. Além disso, vê-se que $a = [v(t + h) - v(t)]/h$ para quaisquer t e h, logo a aceleração constante a é a taxa de variação da velocidade"(LIMA, 2013, p.127).

Lima (2013, p.127), afirma: "Nosso conhecimento da função quadrática permite obter uma descrição completa do movimento uniformemente variado."

2.3 A conexão Entre Matemática e Física por Meio da Resolução de Problemas

O presente capítulo tem como objetivo mostrar a relação existente entre matemática e física, através da resolução de questões da física usando apenas os conhecimentos adquiridos nos estudos de função afim e quadrática, e da significado a alguns elementos da física.

PROBLEMA 1: O grau Fahrenheit (símbolo: ^{o}F) é uma escala de temperatura proposta por Daniel Gabriel Fahrenheit em 1724. Nesta escala, o ponto de fusão da água ($0\,^{o}C$) é de $32\,^{o}F$ e o ponto de ebulição da água ($100\,^{o}C$) é de $212\,^{o}F$. Em que temperatura as escalas Celsius e Fahrenheit assinalam o mesmo valor?

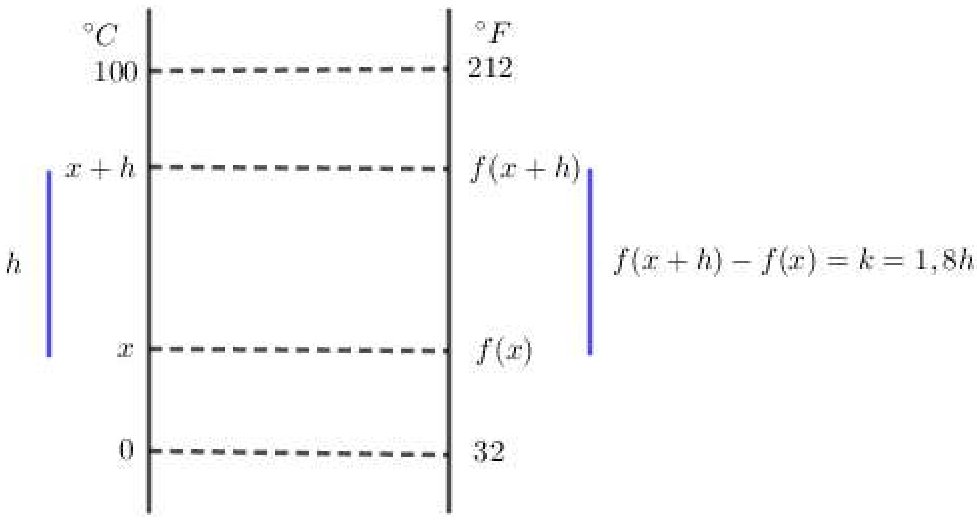
RESOLUÇÃO: É fato que existe uma proporcionalidade entre as escalas e que para cada variação h de temperatura na escala Celsius faz corresponder uma variação k na escala fahrenheit, assim, temos que

$$\frac{100}{h} = \frac{180}{k}.$$

Daí se obtém $h = 1,8k$, ou seja, cada unidade em graus Celsius corresponde a 1,8 na escala Fahrenheit.

Pelo teorema da caracterização da função afim, resulta que a função que relaciona as duas escalas termométricas é a afim, pois o acréscimo $f(x + h) - f(x)$ depende apenas de h e não de x, como se observa na figura 17. Como para cada x em Celsius faz corresponder um único $f(x)$ em Fahrenheit, temos que existe um função que relacionada essas duas grandezas.

Figura 17: Caracterização da Função Afim.



Seja $f(c) = a \cdot c + b$, sendo $f(c)$ a temperatura em fahrenheit para um certa temperatura c em graus Celsius. Pelos conhecimentos adquiridos temos que

$$f(0) = 32 \Rightarrow b = 32 \qquad \text{e} \qquad a = \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8.$$

Assim, função é dada por $f(c) = 1,8 \cdot c + 32$. Como queremos encontrar a temperatura que representa o mesmo valor em ambas as escalas temos que $f(c) = n = c$, ou seja, $n = 1,8 \cdot n + 32 \;\Rightarrow n = -40$.

PROBLEMA 2: Duas partículas, A e B, movem-se numa mesma trajetória. Suas funções horárias são respectivamente $S_A = -30 + 20t$ e $S_B = 20 + 5t + t^2$, sendo S_A e S_B medidos em metros e t em segundos. Em que instante(s) e posição(ões) os automóveis A e B se cruzam?

RESOLUÇÃO: Como o interesse é em saber dados relativos ao ponto de encontro das partículas é razoável que:

$$S_A = S_B$$

$$-30 + 20t = 20 + 5t + t^2$$

$$t^2 - 15t + 500 = 0$$

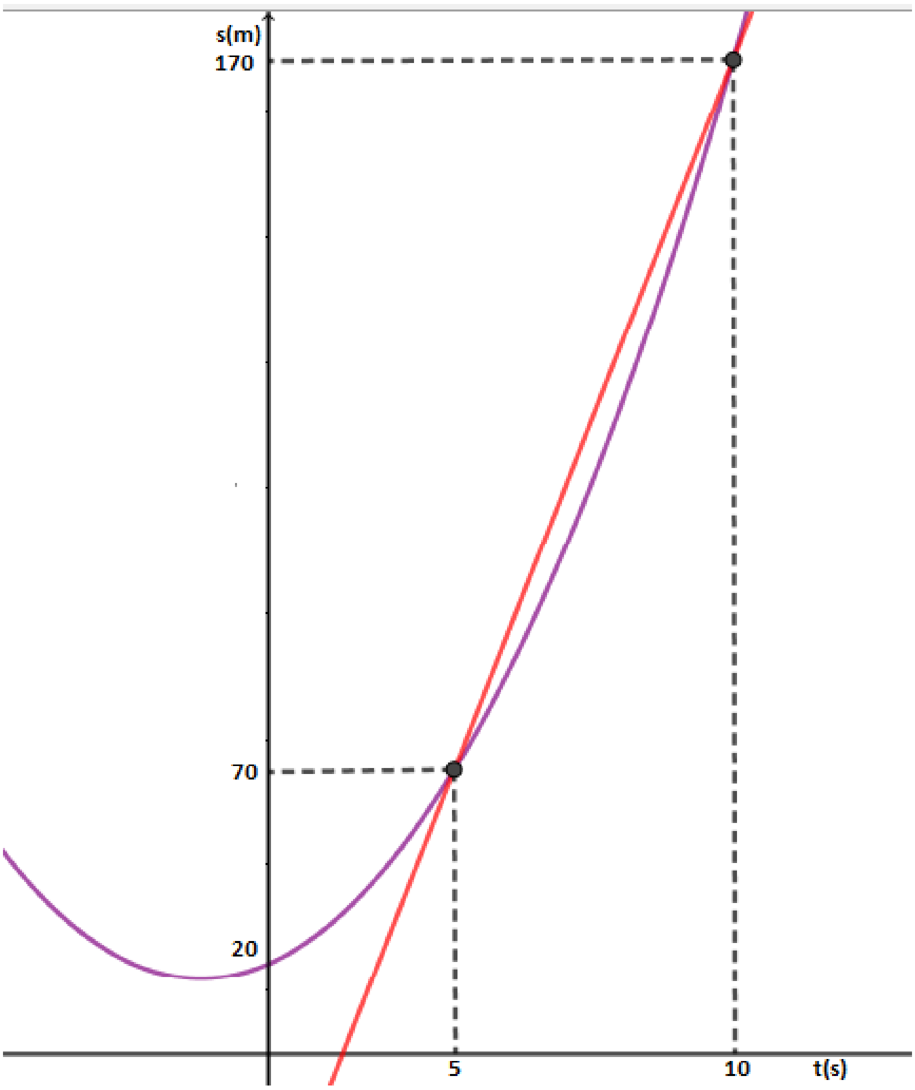
$$\triangle = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 50 \qquad \Rightarrow \qquad \triangle = 25$$

$$t = \frac{-(-15) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{15 \pm 5}{2} \qquad \Rightarrow \qquad t = 10\ s \quad \text{e} \quad t = 5\ s.$$

Dessa forma, os dois moveis se encontram nesses dois instantes. Quanto $t = 10\ s$ tem-se $S = 170\ m$ e $t = 5\ s$, $S = 70\ m$. De modo que, eles se encontram nas posições $70\ m\ e\ 170\ m$, depois de $5\ s\ e\ 10\ s$ respectivamente. Observe os gráficos na Figura 18 para uma melhor compreensão.

Figura 18: Funções Horárias das Partículas A e B.



Fonte: Próprio autor

PROBLEMA 3 Um móvel realiza um movimento uniformemente variado sobre um trajetória retilínea obedecendo a função horária $s = 5 - 6t + t^2$ $(no\ SI)$. O instante e a posição em que o móvel muda de sentido é?

RESOLUÇÃO: Através da função horária da posição é fácil verificar que velocidade inicial é $-6\ m/s$ e sua aceleração é de $2\ m/s^2$. Assim, a função horária da velocidade é $v = 2t - 6$. A partir dessas duas funções observemos o movimento do móvel por meio dos seus respectivos gráficos na figura 19 e da tabela ??.

Figura 19: Análise do Movimento Através dos Gráficos.

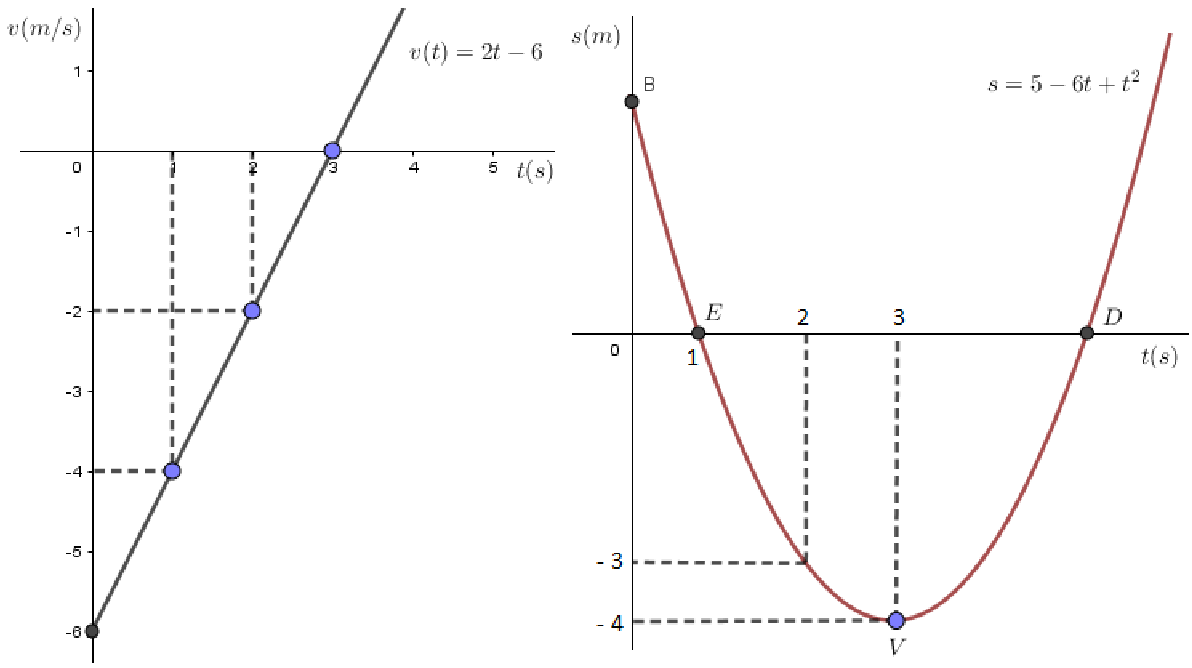


Tabela 2: Tabela para Análise do Movimento.

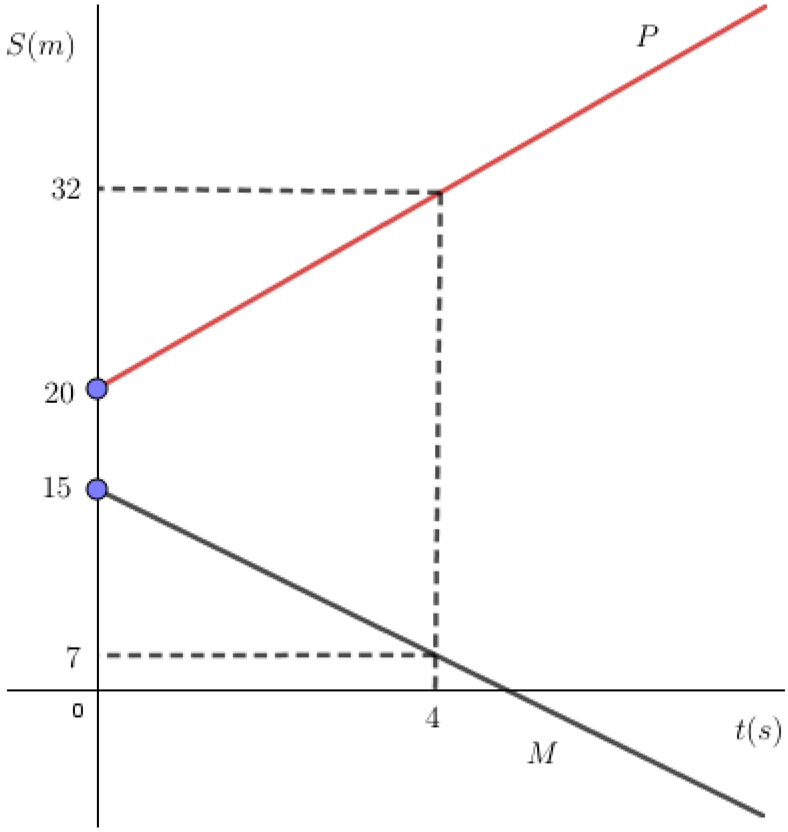
$t(s)$	0	1	2	3
$v(m/s)$	$-6\ m/s$	$-4\ m/s$	$-2\ m/s$	$0\ m/s$
$s(m)$	$5\ m$	$0\ m$	$-3\ m$	$-4\ m$

Fonte: Próprio autor

Na tabela 2 pode-se observar a evolução da velocidade e da posição ao longo do tempo, e é de fácil verificação que o móvel terá velocidade nula no instante 3 s e inverterá o sentido do movimento como mostra o gráfico da posição em função do tempo na Figura 19. O gráfico da posição em função do tempo é uma parábola e o vértice da mesma é o ponto onde móvel muda de sentido como observado no gráfico. Assim, a resposta para o problema é que o móvel muda de sentido nos instante 3 s e a sua posição é $-4\ m$.

PROBLEMA 4: O gráfico 20 representa o movimento de dois automóveis, M e P, pela mesma estrada retilínea. Responda:

Figura 20: Gráficos dos Automóveis P e M.



a) Quais as funções horárias da posição desses automóveis?

b) Qual a distância entre eles aos 2 s?

c) Quanto tempo a contar do instante inicial, demorará para que a distância entre M e P seja igual a 60 m?

RESOLUÇÃO:

a) É fácil notar que o movimento descrito pelos automóveis é dado por uma função afim tendo em vista que o gráfico do mesmo é uma reta não-vertical como visto no tópico de estudo sobre função afim, por consequência segue-se que a função horária dos móveis M e P são do tipo

$$S_P = at + b \qquad \text{e} \qquad S_M = at + b$$

Para P, temos $b = 20$, e $b = 15$ para M, pois $b = s(0)$. Já o valor de a para o móvel M e P diferem já que ambos crescem ou decrescem de maneira diferente. Como visto, basta termos dois pontos distintos sobre cada gráfico para encontrar o valor de a, assim para o móvel M pegaremos os ponto (0, 15) e (4 e 7) e para P os pontos (0, 20) e (4, 32). Desse modo, temos que

para o móvel P, $a = \dfrac{32-20}{4-0} = 3$ e para M $a = \dfrac{7-15}{4-0} = -2$. Portanto,

$$S_P = 3t + 24 \qquad \text{e} \qquad S_M = -2t + 24$$

b) Como a posição se encontra em metros e o tempo em segundos a taxa de variação do móvel P é 3 m/s e para M é de -2 m/s, ou seja, a cada segundo que passa o móvel P cresce 3 m e o móvel M decresce 2 m, dessa forma fazendo apenas a análise da taxa de variação (velocidade média) é fácil perceber que o móvel P se encontra na posição de número 26 m e M na posição 11 m depois de 2 segundos de movimento, assim a distância entre os móveis é $26 - 11 = 15$ m.

c) Pelo item anterior temos que os móveis estão andando em sentidos opostos na trajetória, um andando 3 m a cada segundo e o outro 2 m, assim a cada segundo eles se distanciam $5m$, como inicialmente a distância entres eles é de 5 m então precisam se deslocar mais 55 m desse modo o tempo gasto para que a distância entre eles seja de 60 m é de $55/5 = 11$ s.

3 METODOLOGIA

O capítulo em questão, será dividido em duas seções. A primeira revela o caminho traçado para colher os resultados e a segunda expõe a visão de alguns autores sobre a importância da resolução de problemas.

3.1 Caminho da Pesquisa

Para alcançar os resultados desejados, foi realizado um curso através da metologia da resolução de problemas com alunos do primeiro e terceiro ano do ensino médio da escola estadual C.E.NINA RODRIGUES na cidade de Anajatuba-MA durante um bimestre.

O curso tem por finalidade que os alunos respondam a quatro questionamentos (APÊNDICE), pois a analise e discussão dos resultados da pesquisa será dada mediante as respostas dos alunos.

O curso deu ênfase na resolução de problemas, porém inicialmente foi ministrado durante 10 aulas (cerca de duas semanas) os conteúdos de função afim, função quadrática, movimento uniforme (MU) e movimento uniformemente variado (MUV), logo após a exposição dos conteúdos, o curso foi dividido em três momentos. O primeiro com uma variedade de problemas contemplando os conteúdos abordados. O segundo momento foi voltado a análise de questões do ENEM que contemple as funções afim e quadrática. O terceiro momento foi dedicado a resolução de problemas da Física.

O primeiro momento do curso de resolução de problemas visa dar significados as características e propriedades dos conteúdos, e valorizar as aplicações. O segundo momento objetivou mostrar como a principal porta de entrada ao ensino superior tem abordado os conteúdos de função afim e quadrática. Na terceira parte, o objetivo era mostrar a conexão entre Matemática e Física, e a importância da Matemática na descrição de alguns movimentos da física.

Por fim, ao final do bimestre foi aplicado o questionário (APÊNDICE) com os questionamentos a serem respondidos e posteriormente analisados através dos comentários dos alunos. Participaram do curso cerca de 60 alunos (1º e 3º ano do ensino médio).

3.2 A Importância da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

Um dos pilares da metodologia da resolução de problemas é quanto ao tipo de exercício proposto ao aluno, visando minimizar a ênfase dos exercícios padronizados onde geralmente o objetivo maior é aplicar fórmulas e regras, se voltando mais para as situações problemas que conecte o conteúdo com a realidade, traga significados as características do conteúdo e motive o aluno a prosseguir os estudos.

Os problemas propostos por tal metodologia busca desenvolver no aluno a capacidade de estabelecer estratégias, rapidez na compreensão dos dados e também um senso crítico apurado. A resolução de problemas como metodologia de ensino não tem apenas o objetivo de encontrar a solução correta do problemas, mas vê em cada problema uma oportunidade de ir além, de questionar o próprio, a solução do problema e assim construir um conhecimento mais sólido e significativo.

Andrade e Oliveira (2014, p. 15) afirmam:

> Dentre as tendências mais relevante está a resolução de problemas e o uso de tecnologias educacionais, como proposta de mudança no modo de conceber a matemática.[...] São situações diversificadas que visam desafiar e estimular os alunos a pensar, explorando tanto quanto possível os problemas da vida real.(ANDRADE; OLIVEIRA,2014, p. 15)

A resolução de problemas além de oportunizar o professor para que possa resolver os diferentes tipos de problemas por diversos ângulos, também permite que os alunos utilize estratégias pessoais, podendo socializar e assim valorizar o raciocínio utilizado por cada um. Verificar as semelhanças e diferenças nas estratégias são ações imprescindíveis do professor no trabalho com resolução de problemas (Reame; Montenegro, 2014).

> Essas ações contribuem de maneira determinante para o desenvolvimento da autonomia do aluno no enfrentamento de uma situação nova; para o domínio de uma atitude positiva e crítica em relação aos problemas; para o execício de ações competentes pelo aluno diante de situações competentes pelo aluno diante de situações imprevistas, desconhecidas, diferentes daquelas que ele já domina; para ampliação do repertório de cálculo e estratégias para a resolução de um problema.(Reame; Montenegro, 2014, p. 294)

Diniz (1991, p. 12) faz uma observação tão atual quanto na época em que escreveu para a RPM(Revista do professor de matemática), ele diz:

> o ensino da matemática tem se constituído de duas ações, são elas propor questões e resolver as questões propostas. Porém, dentro da perspectiva da resolução de problemas se exige que além dessas duas ações citadas, se coloquem mais duas, isto é, questionar as respostas obtidas e questionar a própria questão original.(DINIZ, 1991, p. 12)

Ainda sobre essa perspectiva ele afirma que resolver um determinado vai muito além do que aplicar regras, técnicas ou fórmulas adequadas para se chegar ao resultado correto, porém vai além disso, se constitui uma atitude de "investigação científica"daquilo que está pronto Diniz (1991, p. 12). Assim, a ênfase será dada ao processo que permite chegar ao resultado e que significado esse resultado traz em relação ao problema original proposto.

Uma das etapas importantes da metodologia da resolução de problemas é a valorização do erro, onde busca extrair o motivo que o causou e qual o significado tem para o problema abordado.

> Na nova concepção de erro, este é interpretado como parte natural, inevitável e indispensável ao processo de aprendizagem, o erro é um indicador de (re)direcionamento pedagógico porque ele oferece a oportunidade de crescimento, ao aluno, bem como de evolução, ao professor. (LORENZATO, 2010, p. 49-50)

A maioria se não 100% dos educadores, principalmente os das disciplinas de cálculo em especial os de matemática já ouviram perguntas do tipo: "para que esse conteúdo serve?", "vou usar isso onde e quando?". Uma das vertentes mais interessantes e que possibilita responder a tais perguntas na resolução de problemas é as aplicações matemáticas.

> Ensinar matemática utilizando-se de suas aplicações torna a aprendizagem mais interessante e realista e, por isso mesmo, mais significativa. A presença de aplicações da matemática nas aulas é um dos fatores que mais podem auxiliar nossos alunos a se prepararem para viver melhor sua cidadania; ainda mais,as aplicações explicam muitos porquês matemáticos e são ótimas auxiliares na resolução de problemas.(LORENZATO, 2010, p. 53)

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p. 96) do ensino médio, uma das competências e habilidades que aluno deve possuir é "compreender conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas, e aplicá-las a situações diversas no contexto das ciências, da tecnologia e das atividades cotidianas."

A principal porta de entrada a universidade, o exame nacional do ensino médio (SM, 2014, p. 12) tem como objetivo na sua quinta competência que aluno "esteja pronto a modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas."

O ENEM (SM, 2014, p. 9) está embasado em torno de cinco eixo, neles o aluno encontrá o norte para enfrentar as 180 questões que compõe a prova e dentre eles o terceiro exige que o educando saiba "enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema."

Soares e Pinto (2014, p.1) diz em seu artigo sobre a metodologia de resolução de problemas que:

> Visando-se uma sociedade mais justa, capaz de intervir no desenvolvimento da humanidade crítica e criativamente, buscando uma melhoria na qualidade de vida do cidadão, não é suficiente apresentar conhecimentos cristalizados e fora do contexto moderno. É preciso fazer com que os alunos tornem-se pessoas capazes de enfrentar situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que eles busquem aprender novos conhecimentos e habilidades. Só assim estarão melhor preparados para adaptar-se às mudanças culturais, tecnológicas e profissionais do novo milênio (SOARES; PINTO, 2014, p. 1).

Tendo em vista que os avanços da sociedades são constantes exigindo que cada profissional esteja sempre em formação e se adaptando a novas situações é necessário que o aluno desenvolva a habilidade de aprender a aprender. Segundo Soares e Pinto “Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino”.

Uma das finalidades do ensino médio encontrada no inciso II do artigo 35 da Lei de Diretrizes e Bases (BRASIL, 1996) é a "preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores."

A resolução de problemas é uma metodologia importante no processo de ensino aprendizagem, além de despertar a curiosidade e motivação a quem está inserido nesse âmbito. Nessa perspectiva cabe a seguinte pergunta: Quando se deve explorar tal metodologia e estimular a resolução de situações problemas? Desde de o início da sua vida escolar, pois é nessa fase onde o ser humano possui um maior senso investigativo, a curiosidade é ampla e a vontade de descobrir coisas novas é incansável.

Quando não se desenvolve as habilidades necessárias para a resolução de problemas desde a educação infantil passando pelo fundamental e chegando ao ensino médio o resultado pode ser desastroso já que esse período da educação básica é a etapa onde o educando está mais abertos a novas experiências, descobertas que o impulsionaram a continuar descobrindo.

Lopes e Grando afirmam:

> As crianças estão imersas em um mundo sócio-cultural em que as pessoas fazem matemática a todo o momento. Elas observam os adultos nos processos de comprar, vender, trocar, controlam quantidades avaliando o que aumenta, o que diminui, o que não se altera, planejam casas e fazem os cálculos dos materiais necessários, estimam distâncias, tamanho, capacidade, etc. [...] Tais conhecimentos matemáticos que foram produzidos pelo homem e que o ajudam a fazer uma "leitura matemática de mundo" exercem certo fascínio nas crianças e estimulam a curiosidade epistemológica delas, aumentando o desejo por conhecê-los (LOPES; GRANDO, 2012, p. 3).

Ainda sobre essa perspectiva afirmam

> defendemos a resolução de problemas na infância, considerando-a como base da aprendizagem da criança, pois a criança vai adquirindo inteligência a partir de suas ações intencionais.[...] Na infância a imaginação aguça a curiosidade, gera problematizações e provoca a busca por descoberta, esse fato torna essencial a resolução de problemas nesse momento do desenvolvimento humano (LOPES; GRANDO, 2012, p. 3)

A Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) homologada em dezembro ratifica a importância de uma metodologia eficiente que dê suporte e busque desenvolver a matemática no aluno desde as séries iniciais, quando estabelece como uma das oito competências para o estudante do ensino fundamental a seguinte competência.

> reconhecer que a matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BRASIL, 2017, p.265).

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O trabalho enfatiza a resolução de problemas como uma ferramenta capaz de desenvolver uma aprendizagem significativa e fazer a relação da matemática com outras disciplinas em especial a física por meio da função afim e quadrática.

Os resultados da pesquisa estão expostos durante esse capítulo. A análise será feita através das respostas dos alunos no teste avaliativo com os devidos comentários acerca dos mesmos. Os resultados foram satisfatórios, pode-se afirmar que alguns comentários superaram as expectativas.

O primeiro questionamento feito na pesquisa foi se a metodologia da resolução de problemas permite que se observe de uma maneira mais efetiva as características e propriedades dos conteúdos trabalhados? Todos responderam que sim.

Os comentários dos alunos revelam a eficácia da metodologia, o aluno 2 diz "*A metodologia faz com que a gente veja as características dos conteúdos nos problemas contextualizados e também os significados dessas características*", ou seja, a resolução de problemas da vida ao conteúdo quando mostra o seu significado.

O aluno 1 acrescenta "*Sem dúvidas a metodologia nos dá o nível necessário de observação e compreensão, no qual se obtém de maneira geral uma forma utilizável dos problemas, ampliando a visão do aluno com relação aos conteúdos.*"O fato do conteúdo está incluso em situações problemas contextualizadas permite que o educando amplie sua visão em relação ao assunto estudado.

A metodologia da resolução de problema mostra sua importância quando possui alternativas para que o educando compreenda a solução e desenvolva o aprendizado, o comentário do aluno 3 confirma essa afirmação dizendo "[..]*usamos o gráfico para entender os cálculos que fizemos, e usamos diferentes problemas para compreender as propriedades.*"

Em grande parte o aluno não consegue compreender o resultado algébrico, assim o aspecto geométrico o ajudará a visualizar o que foi feito algebricamente. A diversidade de situações problemas também é um fator importante para que o aluno possa comparar e entender propriedades.

Por meio da exemplificação o aluno 5 concretiza a eficiência da metodologia, "*A metodologia abordada permite que vejamos as características dos conteúdos nos problemas contextualizados e também entendemos o significado dessas características, o que significa* *o **a** e o **b** da função afim."*

Os comentários dos alunos revelam o alcance de um dos objetivos que é aumentar a capacidade de associar o conteúdo a situações problemas. Os comentários também fazem uma ponte com o pensamento do autor registrado no primeiro parágrafo do capítulo 3 e com os Parâmetros Curriculares Nacionais(BRASIL, 2000) e a matriz de competências e habilidades também no referido capítulo.

O segundo questionamento é: Que postura a metodologia de resolução de problemas exige e desperta no aluno? De maneira geral a visão dos alunos é de que a resolução de problemas desperta a curiosidade em querer descobrir sempre mais e motiva a continuar os estudos.

Albert Einstein se perguntou como é possível que a matemática funcionasse tão bem para explicar o universo tal como o vemos. Existem muitos padrões na natureza que a matemática descreve como nenhuma uma outra ciência, essa ciência não é uma criação humana, e sim uma descoberta pois se encontra na natureza de forma clara. Então, a matemática não pode ser ensinada principalmente na educação básica como se fosse algo tão distante da vida diária que se vive.

É inegável que se faz necessário do uso de uma metodologia que traga uma motivação em estudar a matemática, o aluno 4 diz "O fato da metodologia proporcionar questões diferenciadas deixou a matemática mais interessante e motivou um desejo maior"e o aluno 8 completa afirmando "A resolução de problemas desperta no aluno o gosto pela matemática e motiva a querer descobrir sempre mais."

Na visão dos alunos 6 e 7 a resolução de problemas exige e desenvolve no aluno um senso crítico capaz de ajudá-los nos julgamento da resposta alcançada, como se pode observar nos comentários

[...] Essa postura desperta interesse em resolver diversos problemas no estudo da matemática. Desperta também um senso crítico que nos ajuda a exigir mais da nossa capacidade de resolução. [...] Ela exige muita estratégia e organização, ela também exige um senso crítico mais aberto para resolver os problemas.

Um outro ponto positivo da resolução de problemas é o de desenvolver no educando a capacidade de analise dos problemas favorecendo o desenvolvimento de estratégias, assim afirma o aluno 9: "Exige que a cada problema uma estratégia seja traçada e um pensamento seja criado e desenvolvido e dessa forma nos impulsiona a vencer os obstáculos".

O comentário do aluno 4 está de acordo com o pensamento do autor, pois o autor afirma no capitulo 3 que um dos pilares da resolução de problemas é propor questões não padronizadas para assim motivar e desenvolver as competências e habilidades necessárias.

Os educandos 6 e 7 nos seus comentários expõem que tal metodologia exige e desenvolve um senso crítico, este permite que o aluno questione as respostas obtidas e o próprio problema original confirmando aquilo que Diniz(1991, p.12) revela sobre as ações que tal metodologia propõe.

O terceiro questionamento diz respeito a conexão entre matemática e física. Uma das três áreas de estudo descrita pelos Parâmetros Curriculares Nacionais(BRASIL,2000, p. 96) contém a matemática interagindo com a ciências da natureza(física, química e biologia) tendo em vista a importância da relação entre a matemática e tais áreas.

> A presença da matemática nessa área se justifica pelo que de ciência tem a matemática, por sua afinidade com as ciências da natureza, na medida em que é um dos principais recursos de constituição e expressão dos conhecimentos destas últimas, e finalmente pela importância de integrar a Matemática com os conhecimentos que lhe são mais afins.(BRASIL, 2000, p. 93)

Os Parâmetros curriculares Nacionais (BRASIL, 2000, p. 76) afirmam "essa 'interdisciplinaridade singela' é importante para que os alunos aprendam a olhar o mesmo objeto sob perspectivas diferentes."

Sobre o terceiro questionamento todos afirmaram observar tal relação por meio da resolução dos exercícios. O aluno 1 diz *"para que resolvamos problemas nestas disciplinas, necessitamos de propriedades e métodos de interpretação existentes que não diferem"*, ou seja, as disciplinas possuem uma interação tão grande que os métodos para resolução em tais disciplinas não diferem.

A conexão entre matemática e física por meio da resolução de problemas desenvolve um aprendizado significativo, percebe-se tal fato quando os alunos 4, 5 e 6 comentam exemplificando situações.

[...]"por exemplo fazendo a relação entre elas percebi que a taxa de variação da reta é justamente a velocidade média do móvel."[...] "Em uma das questões pude perceber que o coeficiente a que é a taxa de variação da função afim é a velocidade média e b o ponto de partida do movimento do móvel."[...] observei que o vértice da função é o ponto da trajetória que o móvel muda de sentido."

O comentário do aluno 10 chama atenção pelo peso da afirmação exposta *"porque ambas se relacionam, pois a matemática é uma ferramenta essencial para a física. E a física é uma rica fonte de inspiração para a matemática. Portanto, a convicção de os números governam o mundo."*

Por conseguinte, os comentários dos estudantes nos permite alcançar mais dois objetivos que era mostra a conexão entre matemática e física por meio da resolução de problemas e motivá-los através da interdisciplinaridade.

O quarto e último questionamento era quanto aos benefícios de tal metodologia na principal porta de entrada da universidade o ENEM. Na visão dos educandos o exame nacional do ensino médio exige um bom nível de interpretação de texto (questões) para se fazer uma ponte do texto com a resolução do problema, e segundo eles a metodologia proporciona tal competência como se observa nos comentários a seguir

Aluno 1: *"A metodologia não só nos prepara para o exame, como também nos incita a elevar o nível de resolução acima do próprio vestibular."*

Aluno 2: *"Ela faz com que a pessoa fique bem melhor na interpretação de texto, sendo assim o aluno vai tirar uma nota melhor, porque se a pessoa tiver o costume de resolver esse tipo de problema vai facilitar a visualização das características e propriedades dos conteúdos."*

Aluno 4: *"Um dos grandes benefícios é o poder de interpretação que ela nos dá no ENEM é necessário que se tenha uma interpretação e agilidade na resolução das questões."*

Aluno 6: *"Essa metodologia ajuda muito, pois observando as questões do ENEM são questões contextualizadas, ai resolução nos ajuda saber aplicar o conhecimento dos conteúdos nesse tipo de situação"*.

Aluno 10: *"traz facilidade, conhecimento daquilo que de fato é os questionários do ENEM, por isso, se torna mais de interpretar o que os problemas pede na hora de realizar as questões, que exerce um pouco de raciocínio e atenção para que ás vezes possa resolver mentalmente sem precisar de fazer cálculos que isso irá resultar de uma vantagem para solucionar o problema em menor tempo"*.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados do desenvolvimento do trabalho analisados mediante a visão dos alunos, superaram em muito as expectativas e nos mostram a importância da resolução de problemas como uma ferramenta importante no processo de ensino aprendizagem, pois através da mesma muitos objetivos para a melhoria da educação podem ser alcançados.

A reação dos alunos foi surpreendente na aplicação do trabalho proposto. A matemática se conectou com o mundo deles, proporcionando a aplicação do conteúdo de diferentes formas, desde as aplicações mais simples até as mais complexas.

O depoimento de um dos alunos após à aplicação do projeto mostra a sua relevância, ele disse "[...] a matemática é uma ferramenta essencial para a física. E a física é uma rica fonte de inspiração para a matemática. Portanto a convicção de que os números governam o mundo."O fato de um aluno expor tal comentário depois de perceber a conexão existente entre as duas disciplinas coroa a importância da resolução de problemas como uma ferramenta de extrema importância.

Por fim, a pesquisa demonstra os grandes benefícios da resolução de problemas como estratégia de ensino. Bastando para isso que o professor utilize tal ferramenta com problemas que busque motivar, acrescentar algo ao no seu currículo e surpreender o aluno. Todavia, diante dos resultados apresentados na seção anterior sobre o tema proposto, novas pesquisas são de suma importância, assim indico principalmente aos educadores das disciplinas de matemática e física, como também para professores e acadêmicos de áreas como química, as engenharias e tantas outras que se relacionam. Como sugestão deixo a inserção da tecnologia como auxilio na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Paulo Eduardo de; OLIVEIRA, Luciana Schreiner de. **A metodologia da resolução de problemas e o desempenho escolar**. 2014. Artigo, Paraná.ISBN 978-85-8015-080-3. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2014/2014_utfpr_mat_artigo_paulo_eduardo_de_andrade.pdf> Acesso em: 02 Dez. 2018.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Edução Básica, 2017. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em: 14 Dez. 2018.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília : MEC, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acessado em: 01 Jan. 2019.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Média e tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasilia: Imprensa Nacional, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 07 nov 2018.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **3º ano**: Ensino médio. - 1. ed. - São Paulo: Edições SM, 2016. ISBN 978-85-418-1410-2.

CHUNG, Kenji. **A parábola, sua propriedade refletora e aplicações**.2013. Disertação(Mestrado profissional-PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013. Disponível em:<http://www.dm.ufrpe.br/sites/www.dm.ufrpe.br/files/tcc_kenji_chung_saldanha.pdf>. Acesso em: 10 Dez 2018.

DINIZ, M.I.S.V. A metodologia "Resolução de problemas". REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA nº 18. Rio de Janeiro: SBM, 1º semestre de 1991. ISSN 0102-4981.9.

EDIÇÕES SM.(Org.). Ser protagonista: matemática: competências ENEM:ensino médio. São Paulo, 2014. Disponível em: <http://www.smbrasil.com.br/serprotagonista2015/assets/matematica-cadernos.pdf>. Acesso em: 25 Out 2018

IEZZI, Gelson et al. **Matemática**: Volume único. - 6. ed. - São Paulo: Atual, 2015. ISBN 978-85-357-2006-8.

INEP - INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. Disponível em: <portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=94161-saeb-2017-versao-ministro-revfinal&category_slug=agosto-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 11 Nov. 2018.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT, 07). ISBN: 978-85-85818-81 -4.

LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 225 p (Coleção do professor de matemática; 17). ISBN 978-85-85818-16-6.

LORENZATO, Sergio. **Para aprender matemática**. 3. ed. rev. - Campinas, SP: Autores associados, 2010. (Coleção formação de professores). ISBN 978-85-7496-154-5.

REAME, Eliane; MONTENEGRO, Priscila. **Projeto Coopera matemática**. - 1. ed. - São Paulo : Saraiva, 2014. ISBN 978-85-02-22450-6(professor)

SOARES, M. T. C., PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. In: 24ª Reunião. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Acesso em: 10 de Nov. 2018.

Usatelimport. Antena Parabólica de Fibra 2,60 m Lerosat. Disponível em: <https://www.lojadolnbf.com.br/antena-parabolica-de-fibra-260-m-lerosat>. acessado em : 20 Out 2018.

APÊNDICE

Apêndice A - Questionário

C.E.NINA RODRIGUES
Mestrando: Nathanael de Sousa Barreto
Série: ________ **Turno:** ________
Aluno(a): ______________________________________

1. A metodologia de resolução de problemas permite que se observe de uma maneira mais efetiva as características e propriedades dos conteúdos trabalhados?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Comente sua resposta:

   ____

   ____

   ____

   ____

2. Que postura a metodologia de resolução de problemas exige e desperta no aluno?

   ____

   ____

   ____

   ____

3. Existe uma conexão direta direta entre matemática e física?

   ( ) Sim

   ( ) Não

   Comente sua resposta:

   ____

   ____

   ____

   ____

4. Que benefícios essa metodologia aplicada aos problemas modelados traz ao aluno em relação ao Exame Nacional do Ensino Médio(ENEM)?

   ____

   ____

   ____

   ____