

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS

LUCAS SOUSA RIBEIRO

**ALGORITMO GENÉTICO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DA ESTRUTURA DE BANDAS DE
CRISTAIS FONÔNICOS 1D**

São Luís - MA

2020

LUCAS SOUSA RIBEIRO

**ALGORITMO GENÉTICO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DA ESTRUTURA DE BANDAS DE
CRISTAIS FONÔNICOS 1D**

Texto de dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Engenharia de Computação e Sistemas da Universidade Estadual do Maranhão (PECS-UEMA), sob a orientação do Prof. Dr. Ewaldo Eder Carvalho Santana e Coorientação do Prof. Dr. Edson Jansen Pedrosa de Miranda Junior.



Assinatura do Orientador



Assinatura do Bolsista

São Luís - MA
2020

Ribeiro, Lucas Sousa.

Algoritmo genético aplicado à otimização da estrutura de bandas de cristais fonônicos 1D / Lucas Sousa Ribeiro. – São Luís, 2020.

69 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Curso de Engenharia de Computação e Sistemas, Universidade Estadual do Maranhão, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Ewaldo Éder Carvalho Santana

Coorientador: Prof. Dr. Edson Jansen Pedrosa de Miranda Júnior.

1.Estruturas periódicas. 2.Método IPWE. 3.Otimização. 4.Algoritmos genéticos. I.Título

CDU: 004.9:534

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALGORITMO GENÉTICO APLICADO À OTIMIZAÇÃO DA ESTRUTURA DE BANDAS DE CRISTAIS FONÔNICOS 1D

Autor: Lucas Sousa Ribeiro

Orientador: Ewaldo Eder Carvalho Santana

Coorientador: Edson Jansen Pedrosa de Miranda Junior

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta
Dissertação:

Prof. Dr. Ewaldo Eder Carvalho Santana
PECS – Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Prof. Dr. Edson Jansen Pedrosa de Miranda Junior
PPGEM – Instituto Federal do Maranhão – IFMA

Prof. Dra. Danúbia Soares Pires
Instituto Federal do Maranhão – IFMA

Prof. Dr. Mauro Sérgio Silva Pinto
PECS – Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no
processo de vida acadêmica do aluno.

São Luís/MA, 18 de maio de 2020.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha família, em especial aos meus pais e avós, que me educaram e me guiaram nos caminhos corretos, para que eu me tornasse a pessoa que sou hoje.

Agradecimentos

Durante este projeto tive ajuda de muitas pessoas e instituições, que me deram força e fizeram que este trabalho acontecesse. Apesar de o espaço ser pequeno, tentarei incluir todos que me auxiliaram nesta caminhada.

Inicialmente agradeço a Deus e a minha família, pois sem eles nada disto seria possível. Minha família sempre me deu forças para continuar perseverando e acreditando nos meus sonhos e mesmo com as dificuldades e provações, que não foram poucas, eles seguiram me apoiando e fazendo-me chegar aonde cheguei. Em especial, agradeço ao meu irmão, que sempre me motivou a estudar e seguir os mesmos passos que ele tem trilhado, sendo sempre uma referência para mim e alguém que futuramente pretendo alcançar academicamente e profissionalmente.

Gostaria também de agradecer aos meus orientadores, Prof. Dr. Ewaldo Eder Carvalho Santana e Prof. Dr. Edson Jansen Pedrosa de Miranda Junior por todo apoio durante o andamento deste projeto, foram inúmeros problemas que passamos, porém com a ajuda destes e de outros parceiros que ainda irei citar, conseguimos contornar e finalizar o trabalho.

Agradeço as instituições que fizeram este trabalho acontecer. Primeiramente, a FAPEMA por conceder o auxílio da bolsa de estudos. Gostaria também de agradecer as instituições UEMA, representada neste texto pelo professor Dr. Ewaldo Eder Carvalho e professor Dr. Mauro Sérgio Silva Pinto, e IFMA representada pelo professor Dr. Edson Jansen Pedrosa de Miranda Junior e pela professora Dra. Danúbia Soares Pires pelo acolhimento e ajuda durante este trabalho.

Por fim, mas não menos importante, agradeço também a todos os meus amigos que me deram força durante esta caminhada, em especial aos amigos Judimar Ramos, Luciano Lima e Periandro Sampaio, que sempre que preciso, estenderam a mão para me auxiliar.

RESUMO

Este trabalho visa otimizar a estrutura de bandas (diagrama de dispersão) de cristais fonônicos 1D utilizando-se algoritmos genéticos com o método de expansão de ondas planas melhorado, *improved plane wave expansion* (IPWE). Os cristais fonônicos consistem em uma rede periódica de dispersores imersos em um ambiente hospedeiro. Devido às bandas proibidas, onde há apenas ondas mecânicas (elásticas ou acústicas) evanescentes (ondas não propagantes), eles têm sido extensivamente estudados nas últimas décadas. Existem diversas aplicações dos cristais fonônicos, por exemplo, envolvendo o controle de vibroacústico. Existem várias técnicas na literatura para obtenção da estrutura de bandas. Uma das mais utilizadas é o IPWE, a qual é empregada neste estudo. A variação dos tipos de material e do fator de preenchimento do cristal fonônico pode maximizar as bandas proibidas, aumentando a largura da banda. Desta forma, investigou-se a estrutura de bandas obtida pelo IPWE para cristais fonônicos 1D de barra e de viga de Euler-Bernoulli usando um algoritmo genético. O IPWE é uma técnica semi-analítica utilizada para o cálculo da estrutura de bandas, a partir de um problema de autovalor-autovetor, o qual é resolvido de forma computacional. A técnica de otimização associada ao IPWE é implementada considerando-se a variação da porcentagem de cada material presente na célula unitária do cristal fonônico e dos materiais selecionados, buscando-se um valor otimizado para a largura de banda proibida. Pode-se observar que a técnica de otimização associada ao IPWE é efetiva para aumentar a largura da banda proibida para uma determinada faixa de frequência.

Palavras-chaves: estruturas periódicas, método IPWE, otimização, algoritmos genéticos.

ABSTRACT

This work aims to optimize the band structures (dispersion diagrams) of 1D phononic crystal using genetic algorithms with the improved plane wave expansion (IPWE) method. The phononic crystals consist of a periodic network of dispersers immersed in a host environment. Due to band gaps, where there are only evanescent (non-propagating) mechanical (elastic or acoustic) waves, they have been extensively studied in recent decades. There are several applications of phononic crystals, for example vibroacoustic control. There are several techniques in the literature to obtain the band structures. One of the most used is the IPWE, which is applied in this study. The variation of the types of material and the filling factor of the phononic crystal can maximize prohibited bands, increasing the bandwidth. In this way, it is investigated the band structures obtained by IPWE for 1D phononic crystal rods and Euler-Bernoulli beams using a genetic algorithm. IPWE is a semi-analytical technique used for calculating the band structures, based on an eigenvalue-eigenvector problem, which is computationally solved. The optimization technique associated with IPWE is used considering the variation of the percentage of each material present in the unit cell of the phononic crystal and the selected materials, seeking an optimized value for the prohibited bandwidth. It is observed that the optimization technique associated with IPWE is effective to increase the prohibited bandwidth for a specific range of frequency.

Keywords: periodic structures, IPWE method, optimization, genetic algorithms.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Cristais fonônicos 1D, 2D e 3D formados por dois materiais diferentes arranjados periodicamente.	14
Figura 2 - Célula unitária de um cristal fonônico genérico com variação apenas do material, simulado pela diferença de cores.	16
Figura 3 - Estrutura simplificada de um algoritmo genético.	25
Figura 4 - Operadores de cruzamento com pontos de corte.	29
Figura 5 - Exemplo de mutação discreta.	29
Figura 6 - Fluxograma da metodologia utilizada no trabalho.	30
Figura 7 - Fluxograma do algoritmo genético aplicado ao PWE e IPWE.	34
Figura 8 - Comparação da convergência de γ_x para o modelo de cristal fonônico 1D, modelo de barra simples.	35
Figura 9 - Comparação da convergência das estruturas de bandas para um cristal fônico 1D, modelo de viga de Euler-Bernoulli, utilizando-se o PWE, onde o círculo vermelho representa 20 ondas, o quadrado preto 60 ondas e o losango azul 200 ondas.	36
Figura 10 - Comparação da convergência das curvas de dispersão para o modelo de viga de Euler-Bernoulli simples do cristal fonônico 1D em IPWE, onde o círculo vermelho representa 20 ondas, o asterisco laranja representa 40 ondas e o quadrado preto representa 60 ondas.	37
Figura 11 - Comparação da convergência das curvas de dispersão para o modelo de viga de Euler-Bernoulli simples do cristal fonônico 1D em IPWE para $N = 20, 40$ e 60 e PWE para $N = 200$, onde o círculo vermelho representa 20 ondas (IPWE), o asterisco laranja representa 40 ondas (IPWE), o quadrado preto representa 60 ondas (IPWE) e o losango azul representa 200 ondas (PWE).	38
Figura 12 - Representação esquemática de cristal fonônico 1D de barra com células unitárias compostas por 2 materiais, que podem variar entre epóxi, aço e alumínio.	39
Figura 13 - Estrutura de banda de um cristal fonônico 1D de barra, utilizando IPWE, considerando 10 ondas planas, $f = 0,4$, $LC = 0,1$ m com os materiais alumínio e epóxi.	40
Figura 14 - Variação da largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).	41
Figura 15 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).	43
Figura 16 - Variação da largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).	43
Figura 17 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).	44

Figura 18 - Variação da largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).....	44
Figura 19 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).....	45
Figura 20 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de barra considerando IPWE com 10 ondas.....	45
Figura 21 - Curva de evolução do algoritmo genético demonstrando a otimização do resultado pelas gerações.	46
Figura 22 - Média do valor fitness por geração para o caso de barra.....	46
Figura 23 - Método IPWE com Algoritmo Genético. Estrutura da banda do cristal fonônico 1D de barra do melhor valor <i>fitness</i> , com $f = 71\%$, combinação aço e epóxi.....	47
Figura 24 - Representação esquemática de cristal fonônico 1D de viga de Euler-Bernoulli com células unitárias compostas por 2 materiais.	48
Figura 25 - Variação da largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).	49
Figura 26 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).	50
Figura 27 - Variação da largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).....	50
Figura 28 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).....	51
Figura 29 - Variação da largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).....	51
Figura 30 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).	52
Figura 31 - Melhores valores de largura dos <i>band gaps</i> em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros <i>band gaps</i> presentes em um cristal fonônico 1D de viga considerando IPWE com 10 ondas. .	52
Figura 32 - Curva de evolução do algoritmo genético demonstrando a otimização do resultado pelas gerações.	53
Figura 33 - Média do valor fitness por geração para o caso de viga.....	54
Figura 34 - Método IPWE com Algoritmo Genético. Estrutura da banda do cristal fonônico 1D de viga do melhor valor <i>fitness</i> , com $f = 59\%$, combinação Aço e Epóxi.....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Características do algoritmo genético.	31
Tabela 2 - Geometria do cristal fonônico 1D de barra e as propriedades dos materiais utilizados.	39
Tabela 3 - Geometria do cristal fonônico 1D de viga e as propriedades dos materiais utilizados.	48

LISTA DE SIGLAS

- AG - Algoritmo genético
- EPWE - *Extended plane wave expansion*
- FBZ - *First Brillouin zone*
- FIBZ - *First irreducible Brillouin zone*
- FPWE - *Fast plane wave expansion method*
- IFPWEM - *Improved fast plane wave expansion method*
- IPWE - *Improved plane wave expansion*
- PWE - *Plane wave expansion*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
1.1 Objetivos	10
1.2 Organização do trabalho	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1 Cristais Fonônicos	12
2.2 Método de Expansão em Ondas Planas (PWE)	14
2.2.1 Formulação do PWE para Cristal Fonônico 1D de Barra	15
2.2.2 Formulação do PWE para Cristal Fonônico 1D de Viga de Euler-Bernoulli	18
2.3 Método de Expansão em Ondas Planas Melhorado (IPWE)	20
2.4 Métodos Computacionais Aplicados a Cristais Fonônicos	21
2.5 Algoritmos Genéticos (AGs)	22
2.5.1 Terminologia dos Algoritmos Genéticos	23
2.5.2 Funcionamento do Algoritmo Genético	24
2.5.3 Seleção	26
2.5.4 <i>Crossover</i> ou Recombinação	28
2.5.5 Mutação	28
3 METODOLOGIA	30
4 RESULTADOS	35
4.1 Cristal Fonônico 1D de Barra Modelado com IPWE e AG	38
4.2 Cristal fonônico 1D modelo de Viga de Euler-Bernoulli Modelado com IPWE e AG	48
5 CONCLUSÃO	56
REFERÊNCIAS	58

1 INTRODUÇÃO

Compósitos periódicos artificiais, conhecidos como cristais fonônicos, são materiais sintéticos que consistem na distribuição periódica de inclusões imersas em uma matriz. Sua estrutura periódica cria bandas onde há apenas ondas mecânicas evanescentes, ou seja, não propagantes, chamadas de bandas proibidas (*band gaps*) (HUANG e SHI, 2013; YU *et al.*, 2013; ANJOS *et al.*, 2015). As bandas proibidas dos cristais fonônicos existem devido ao mecanismo do espalhamento de Bragg. O uso de diferentes características geométricas, ou de diferentes materiais, para a formação de uma rede periódica em uma estrutura, gera a sobreposição de ondas transmitidas e refletidas. Quando essa superposição resulta apenas em ondas evanescentes, essa faixa de frequência é denominada de *band gap* (LAUDE, 2015).

Os cristais fonônicos possuem várias aplicações, por exemplo, controle de vibração (JENSEN, 2003), barreiras/filtros acústicos (YANG *et al.*, 2010), dispositivos de supressão de ruído (XIAO *et al.*, 2012), escudos sonoros (GORISHNYY, 2005), metamateriais elásticos/acústicos (YANG *et al.*, 2010), também conhecidos como cristais fonônicos localmente ressonantes (LRs), dentre outras. Lee *et al.* (2014), Tol *et al.* (2019), Nguyen *et al.* (2019) apresentaram as tendências atuais e futuras das pesquisas em fotônica e fonônica. Segundo estes pesquisadores, a pesquisa sobre estes materiais vem aumentando nas últimas três décadas.

Uma aplicação importante e que vem se destacando no estudo dos cristais fonônicos é a utilização de técnicas de otimização para obtenção de bandas proibidas largas com alta atenuação (YI e YOUN, 2016; SRIKANTHA e HUSSEIN, 2017; XIE *et al.*, 2017). Yi e Youn (2016) realizaram uma revisão da literatura sobre projeto de cristais fonônicos utilizando métodos de otimização. No projeto destas estruturas periódicas, os métodos de otimização baseada e não baseada em gradiente têm sido utilizados.

No que diz respeito aos modelos de otimização que podem ser aplicados compósitos periódicos artificiais, existe o modelo estrutural, amplamente utilizado pela literatura, no qual se destaca a otimização topológica e os modelos de otimização computacionais que vêm ganhando espaço nos últimos anos, principalmente os baseados na computação evolucionária (EIBEN e SCHOENAUER, 2002). O modelo de otimização estrutural pode ser classificado em três tipos: otimização de forma,

otimização paramétrica e otimização topológica (BENDSØE e SIGMUND, 2003). A primeira, mais genérica, tem uma forma variável, topologia fixa e não permite a inclusão de furos na estrutura durante o processo de otimização. O segundo tipo apresenta topologia e forma fixas, havendo alternância nas variáveis de projeto relacionadas à dimensão. Por fim, a otimização topológica, similar ao modelo de forma tem modelo finito e cada um dos elementos possui densidade de material única a ser determinada no desenvolvimento do processo de otimização. A diferença entre este modelo e o modelo de forma está em não haver necessidade de remalhamento (FISH e BELYTSCHKO, 2007). Em relação aos modelos de otimização computacionais, existem diversos tipos que podem ser aplicados na solução de uma vasta quantidade de problemas. Entretanto, os métodos de otimização mais utilizados por pesquisadores para análise de cristais fonônicos estão dentro da área de computação evolucionária, que se utiliza de conceitos da teoria biológica da evolução para desenvolver modelos matemático-computacionais. Um dos exemplos mais clássicos desse tipo de otimização são os algoritmos genéticos (LIU *et al.*, 2014; XIE *et al.*, 2017).

Yang *et al.* (2010) apresenta em sua pesquisa a utilização de otimização topológica aplicada aos cristais fonônicos. Eles calcularam as bandas proibidas e aumentaram a largura das bandas proibidas com a utilização da otimização. Eles aplicaram a otimização na variação da área, considerando-se um número de barras sólidas ou vazias, embutidas em uma matriz.

Xie *et al.* (2017) utilizaram um algoritmo genético (AG) para aplicação no dimensionamento de cristais fonônicos através do *improved fast plane wave expansion method* (IFPWEM). O IFPWEM é o método aprimorado de expansão de ondas planas. Um AG foi utilizado com o objetivo de aumentar a largura de banda de cristais fonônicos bidimensionais (2D).

Liu *et al.* (2014) demonstram a otimização, por meio de um algoritmo genético, da estrutura de bandas de cristais fonônicos 2D calculada pelo método de *fast plane wave expansion method* (FPWE). Desta forma, eles obtiveram melhores *band gaps* com a variação da geometria da célula unitária do cristal.

Dentre os estudos de otimização aplicada a cristais fonônicos, observou-se vantagens na aplicação dos algoritmos genéticos tradicionais onde os trabalhos

conseguiram buscar bandas proibidas mais largas. Os algoritmos genéticos tendem a ter boa correlação com a aplicação em cristais fonônicos devido suas características (LIU *et al.*, 2014; XIE *et al.*, 2017). Uma das particularidades desta técnica é sua flexibilidade, pois ela é uma ferramenta de otimização de propósito geral, ou seja, ela depende apenas de uma função avaliadora, chamada de função *fitness*, que será responsável pela ordenação das soluções, onde as outras estruturas do algoritmo permanecem iguais, podendo ser aplicadas para diversos problemas (PIRES, 2014; HAUPT e HAUPT, 2004; ZHI e LIU, 2019; HOSSEINABADI *et al.*, 2019). Em segundo ponto, a baixa complexidade do algoritmo, comparado a outras técnicas de otimização, é um fator fundamental para a utilização deste, pois não é necessário um desenvolvimento matemático complexo, utilizando equações e modelos, e há uma menor carga computacional (HAUPT e HAUPT, 2004). Este algoritmo também possui outras características importantes, como a possibilidade de implementação paralela e distribuída e a possibilidade de analisar problemas matemáticos já modelados sem a necessidade de conhecimento das características do problema a ser otimizado (PIRES, 2014; HAUPT e HAUPT, 2004; ZHI e LIU, 2019; HOSSEINABADI *et al.*, 2019).

Desta forma, sua utilização no projeto de cristais fonônicos pode trazer ganhos na largura de bandas proibidas, melhorando assim o controle de vibrações mecânicas. Com isso, este trabalho propõe otimizar a estrutura de bandas de cristais fonônicos 1D utilizando-se algoritmos genéticos com o IPWE.

1.1 Objetivos

Este trabalho visa criar um algoritmo genético para à otimização das bandas proibidas de um cristal fonônico 1D, variando-se os materiais e o fator de preenchimento.

Como objetivos específicos, podem ser citados:

- Criar uma estrutura computacional baseada na técnica de algoritmo genético;
- Comparar a estrutura de bandas dos cristais fonônicos 1D obtida através do PWE e do IPWE;
- Modelar os cristais fonônicos 1D para o caso de barra simples utilizando o IPWE associado a um AG;
- Modelar os cristais fonônicos 1D para o caso de viga de Euler-Bernoulli utilizando IPWE associado a um AG;
- Obter a formação de bandas proibidas largas com o uso de um AG.

1.2 Organização do trabalho

O trabalho está organizado em mais 4 capítulos que são descritos resumidamente a seguir:

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos fundamentais, incluindo os conceitos de cristal fonônico, formulação do método PWE para os modelos de barra simples e viga de Euler-Bernoulli, aplicação de métodos computacionais no dimensionamento dos cristais fonônicos, detalhando o funcionamento do AG.

A metodologia proposta é apresentada no Capítulo 3. Neste capítulo, as configurações do algoritmo genético são utilizadas para a otimização do IPWE, tanto para o modelo de barra quanto para o modelo de viga. É também apresentado um fluxograma que demonstra de forma genérica como funciona a aplicação do algoritmo genético no código do IPWE.

Os resultados e a discussão são apresentados no Capítulo 4. São detalhados cada uma das aplicações do algoritmo genético a cada um dos modelos de cristal fonônico, ou seja, barra simples e viga de Euler-Bernoulli. É demonstrado como as gerações se comportam em relação à otimização das soluções e a comparação de um caso já estudado a fim de validar o algoritmo. Por fim, no Capítulo 5, estão contidas as considerações finais do trabalho e perspectivas futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Cristais Fonônicos

Uma possível definição dos cristais fonônicos é de serem estruturas periódicas compostas por dois ou mais materiais com diferentes propriedades mecânicas. A propriedade básica dos cristais fonônicos é que as ondas mecânicas, com frequências dentro de uma faixa específica (*band gap*), não são capazes de se propagar dentro da estrutura periódica. Essa faixa de frequências proibidas é chamada de *gap* fonônico, ou *band gap*. Nesta situação, existem modos de onda separados por lacunas, onde os modos propagação são proibidos (ELFORD, 2010).

Zhang *et al.* (2012) definem os cristais fonônicos como estruturas periódicas que possuem faixas de frequências ajustáveis para a atenuação de vibração, ou seja, há a possibilidade de ajustar a faixa de frequências das bandas proibidas. Eles também citam diversos métodos, como o PWE.

Ni *et al.* (2012) mencionam que os cristais fonônicos são uma inspiração de outras estruturas periódicas, como os cristais fotônicos. Eles também citam que a propagação de ondas elásticas em cristais fonônicos, com impedância acústica espacialmente modulada, é análoga ao comportamento da luz ou ondas eletromagnéticas em cristais fotônicos.

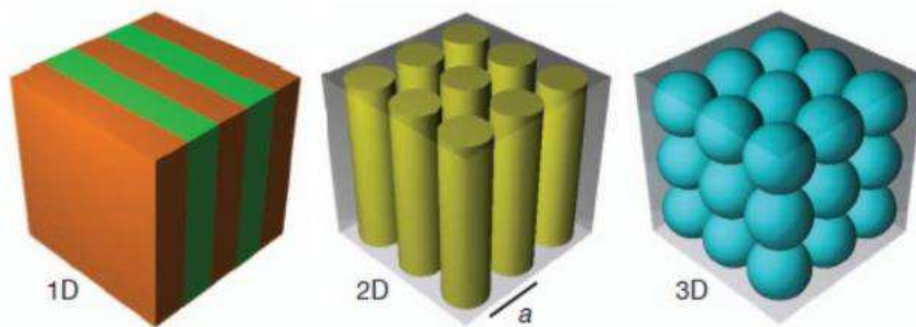
O primeiro estudo sobre cristais fonônicos foi realizado por Sigalas e Economou (1992). Eles consideraram um cristal fonônico composto por esferas periódicas embutidas em uma matriz (periodicidade 3D). A propagação de ondas de volume em um sólido isotrópico de cristal fonônico foi abordada e um *band gap* fonônico foi observado teoricamente pela primeira vez utilizando-se o PWE. Outras investigações iniciais (SIGALAS e ECONOMOU, 1993; KUSHWAHA *et al.*, 1993; KUSHWAHA *et al.*, 1994) também foram importantes para estabelecer conceitos básicos relacionados aos cristais fonônicos. Uma das primeiras revisões sobre cristais fonônicos foi relatada por Kushwaha (1996). Ele se concentrou em uma breve pesquisa sistemática do desenvolvimento histórico dos princípios, ferramentas e aplicações da teoria das bandas para elétrons, fótons e fônons, dando uma base para os conceitos básicos dos cristais fotônicos e fonônicos.

Após o surgimento dos cristais fonônicos nos anos 90, muitas pesquisas foram desenvolvidas. Qiu e Liu (2006) investigaram numericamente a radiação de uma fonte acústica de linha colocada dentro de um cristal sônico de treliça quadrada composta por inclusões de aço na água. Eles observaram que é possível obter uma fonte acústica altamente direcional com um grande aprimoramento de radiação, operando na frequência de borda de banda do cristal sônico. As distribuições angulares da potência de radiação e o fator de aprimoramento da radiação são fortemente dependentes da posição da fonte acústica em relação à célula unitária na qual ela é colocada.

Zhou *et al.* (2011) analisaram teoricamente a modulação de intervalos de banda de ondas elásticas no plano pelo número de onda fora do plano paralelo ao eixo da haste do material piezoelétrico nos cristais fonônicos piezoelétricos. A dependência dos intervalos de bandas das ondas elásticas no plano e a fração de preenchimento foram consideradas com e sem a piezoeletricidade. Os intervalos de bandas no plano podem ser abertos ou fechados e os modos de onda no plano podem ser ajustados, controlando a propagação de ondas elásticas fora do plano. O intervalo de banda no plano na faixa de baixa frequência pode ser facilmente obtido com a introdução de um número de onda fora do plano e era quase independente da piezoeletricidade. Os autores destacaram que o cristal fonônico piezoelétrico é muito útil no projeto de transdutores ultrassônicos, para evitar os modos inválidos de ondas elásticas no plano, sem afetar os modos de trabalho correspondentes ao número de ondas fora do plano.

Gonçalves (2016) cita que os cristais fonônicos podem ser classificados de acordo com sua periodicidade. O cristal fonônico 1D possui uma estrutura de planos alternados, cada plano composto por materiais diferentes. O cristal fonônico 2D é formado por inclusões perpendiculares ordenadamente espaçadas dentro do material hospedeiro. O cristal fonônico 3D é composto por centros espalhadores suspensos em uma formação cristalina dentro do meio hospedeiro. Os três tipos de cristais fonônicos, em relação à periodicidade, são ilustrados na Figura 1.

Figura 1 - Cristais fonônicos 1D, 2D e 3D formados por dois materiais diferentes arranjados periodicamente.



Fonte: Maldovan, 2013.

2.2 Método de Expansão em Ondas Planas (PWE)

Considerando a necessidade do desenvolvimento teórico dos cristais fonônicos, muitos métodos para calcular a sua estrutura de bandas foram desenvolvidos. O PWE, o método da matriz de transferência e o método das diferenças finitas no domínio do tempo são os métodos mais populares. Devido à simplicidade da teoria e de implementação, o PWE é considerado o método mais utilizado para calcular a estrutura de bandas dos cristais fonônicos e prever suas bandas proibidas (NI *et al.*, 2012).

No PWE, os parâmetros periódicos dos materiais são expandidos em séries de Fourier no espaço do número de onda (espaço de rede recíproca), baseados em sua estrutura de rede. As equações diferenciais governantes são transformadas em equações algébricas, aplicando-se o teorema de Floquet-Bloch (NI *et al.*, 2012). Portanto, obtém-se um problema de autovalor-autovetor, $\omega(k)$, o qual deve ser resolvido para cada valor de vetor de onda de Bloch (número de onda) na primeira zona irredutível de Brillouin (*first irreducible Brillouin zone* – FIBZ) (MIRANDA JR., 2018).

O PWE é considerado um método semi-analítico, por alguns autores, porque a expansão da série de Fourier deve ser truncada. Este método também possui algumas desvantagens, por exemplo, quando há alta incompatibilidade de material ou de geometria, o PWE apresenta convergência lenta e o método IPWE deve ser usado (ZHANG *et al.*, 2012; MIRANDA JR., 2018).

2.2.1 Formulação do PWE para Cristal Fonônico 1D de Barra

Inicialmente, a partir da teoria de barra simples, a equação governante para as vibrações longitudinais em uma barra infinitamente uniforme pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

onde E é o módulo de Young, S é a área da seção transversal, u é o deslocamento longitudinal no domínio do tempo, x é a posição espacial e t é o tempo (MIRANDA JR., 2018). Aplicando a transformada de Fourier temporal na Equação 1, resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ES \frac{\partial \hat{u}(x, \omega)}{\partial x} \right] + \omega^2 \rho S \hat{u}(x, \omega) = 0, \quad (2)$$

onde ω é a frequência angular e \hat{u} é o deslocamento longitudinal no domínio da frequência. Supõe-se que a barra tenha uma variação periódica de material dada por $\rho(x)$ e $E(x)$ (MIRANDA JR., 2018). Aplicando o teorema de Floquet-Bloch e considerando a propagação de uma onda unidimensional, obtém-se:

$$\hat{u}(x, \omega) = \tilde{u}(x) e^{jk(\omega)x}, \quad (3)$$

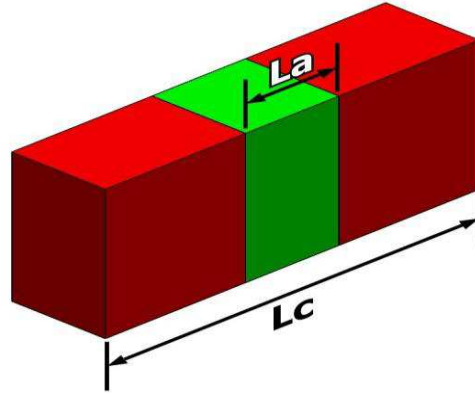
onde $j = \sqrt{-1}$ e k , $k \in R$, é o número de onda. A amplitude da onda de Bloch $\tilde{u}(x)$ é periódica de período “ a ”, isto é, $\tilde{u}(x + a) = \tilde{u}(x)$. Note que $\hat{u}(x + a) = \hat{u}(x) e^{jka}$, onde e^{jka} é a condição de contorno periódica de Floquet-Bloch. O número de onda tem seu valor dentro da FIBZ, no espaço recíproco, $[0, \pi/a]$, ou dentro da primeira zona de Brillouin (FBZ), $[-\pi/a, \pi/a]$. Expandindo a amplitude de onda Bloch $\tilde{u}(x)$ em série de Fourier no espaço recíproco, omitindo a dependência de frequência de k , produz:

$$\hat{u}(x, \omega) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_m e^{jg_m x} \right) e^{jkx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_m e^{j(k+g_m)x}, \quad (4)$$

onde \tilde{u}_m são os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{u}(x)$ e $g_m = 2\pi m/a$, $m \in Z$, é a norma euclidiana do vetor de rede recíproca 1D. Nota-se que g_m é um escalar, uma

vez que a periodicidade unidimensional é considerada. Um exemplo de célula unitária do cristal proposto 1D de barra simples, onde a área é constante, variando apenas o material, onde L_a é o comprimento referente à porcentagem do material A e L_c é o comprimento da célula é ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Célula unitária de um cristal fonônico genérico com variação apenas do material, simulado pela diferença de cores.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Definido a variação apenas do material, a densidade e o módulo de Young variam e podem ser expandidos em séries de Fourier no espaço recíproco como:

$$\rho(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho_m e^{jg_m x}, \quad E(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_m e^{jg_m x}, \quad (5)$$

onde $g_n = 2\pi n/a, n \in Z$. É usado g_n e n para destacar a diferença entre as expansões de densidade, o módulo de Young e a amplitude da onda de Bloch. Nota-se que os coeficientes da série de Fourier ρ_n e E_n , na Equação 5, podem ser calculados usando:

$$\rho_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \rho(x) e^{-jg_n x} dx, \quad E_n = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} E(x) e^{-jg_n x} dx. \quad (6)$$

Substituindo as Equações 4 e 5 na Equação 2, tem-se:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [E_n(k + g_m)(k + g_m + g_n) - \omega^2 \rho_n] \tilde{u}_m e^{j(k+g_m+g_n)x} = 0. \quad (7)$$

Multiplicando a Equação 7 por $e^{-j(k+g_r)x/a}$, com $g_r = 2\pi r/a$, $r \in Z$, e integrando de $-a/2$ a $a/2$, tem-se:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [E_n(k+g_m)(k+g_m+g_n) - \omega^2 \rho_n] \tilde{u}_m \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j(g_m+g_n-g_r)x} dx = 0. \quad (8)$$

Sendo que

$$\frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j(g_m+g_n-g_r)x} dx = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j2\pi/a(m+n-r)x} dx = \delta_{n,r-m}, \quad (9)$$

onde $\delta_{n,r-m}$ é o delta de Kronecker. O delta de Kronecker poderá assumir dois valores, $\delta_{n,r-m} = 1$, se $n = r - m$ e $\delta_{n,r-m} = 0$ nos outros casos. Portanto, pode-se reescrever a Equação 9 como:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} [E_{r-m}(k+g_m)(k+g_r) - \omega^2 \rho_{r-m}] \tilde{u}_m = 0. \quad (10)$$

Equivalente, tem-se

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} [E_{r-m}(k+g_m)(k+g_r) - \omega^2 \rho_{r-m}] \tilde{u}_m = \omega^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho_{r-m} \tilde{u}_m. \quad (11)$$

A Equação 11 é um sistema com equações infinitas. Assim, para resolver este sistema, pode-se truncar a série de Fourier, considerando-se os primeiros M termos, isto é, $r, m \in [-M, \dots, M]$, $M \in Z$, logo o número total de ondas planas é $2M + 1$. A Equação 11 pode ser reescrita como:

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}} = \omega^2 \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}, \quad (12)$$

onde os coeficientes do vetor $\tilde{\mathbf{u}}$ possuem elementos \tilde{u}_m e os coeficientes das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são dados por:

$$A_{mr} = E_{r-m}(k + g_m)(k + g_r), \quad B_{mr} = \rho_{r-m}. \quad (13)$$

Note que a Equação 13 representa um problema de autovalor generalizado em ω^2 e deve ser resolvido para cada k , dentro da FBZ ou FIBZ (MIRANDA JR., 2018).

2.2.2 Formulação do PWE para Cristal Fonônico 1D de Viga de Euler-Bernoulli

Inicialmente, a partir da teoria da viga de Euler-Bernoulli, a equação governante para as vibrações de flexão em uma viga infinitamente uniforme pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho S \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

onde w é o deslocamento transversal no domínio do tempo. Aplicando a transformada temporal de Fourier na Equação 14, resulta em:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I \frac{\partial^2 \hat{w}(x, \omega)}{\partial x^2} \right] - \omega^2 \rho(x)S \hat{w}(x, \omega) = 0, \quad (15)$$

onde \hat{w} é o deslocamento transversal no domínio da frequência. Supõe-se que a viga tenha uma variação periódica de material dada por $\rho(x)$ e $E(x)$, similar ao caso da barra (MIRANDA JR., 2018). Aplicando o teorema de Floquet-Bloch e considerando a propagação de uma onda unidimensional, obtém-se:

$$\hat{w}(x, \omega) = \tilde{w}(x) e^{jk(\omega)x}. \quad (16)$$

A amplitude da onda de Bloch $\tilde{w}(x)$ é periódica de período “ a ”, isto é, $\tilde{w}(x + a) = \tilde{w}(x)$. Note que $\hat{w}(x + a) = \hat{w}(x) e^{jka}$. Expandindo a amplitude de onda

Bloch $\tilde{w}(x)$ em série de Fourier no espaço recíproco, omitindo a dependência de frequência de k , produz:

$$\hat{w}(x, \omega) = \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{w}_m e^{jg_m x} \right) e^{jkx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{w}_m e^{j(k+g_m)x}, \quad (17)$$

onde \tilde{w}_m são os coeficientes da série de Fourier de $\tilde{w}(x)$. Além disso, a densidade e o módulo de Young também podem ser expandidos em séries de Fourier no espaço recíproco, conforme Equação 5.

Substituindo as equações 17 e 5 na Equação 15, tem-se:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [E_n I(k + g_m)^2 (k + g_m + g_n)^2 - \omega^2 \rho_n S] \tilde{w}_m e^{j(k+g_m+g_n)x} = 0. \quad (18)$$

Multiplicando a Equação 18 por $e^{-j(k+g_r)x}/a$ e integrando de $-a/2$ a $a/2$, tem-se:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [E_n I(k + g_m)^2 (k + g_m + g_n)^2 - \omega^2 \rho_n S] \tilde{w}_m \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{j(g_m+g_n-g_r)x} dx = 0. \quad (19)$$

A partir da definição da Equação 9, pode-se reescrever a Equação 19 como:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} [E_{r-m} I(k + g_m)^2 (k + g_r)^2 - \omega^2 \rho_{r-m} S] \tilde{w}_m = 0. \quad (20)$$

A Equação 20 é um sistema com infinitas equações (MIRANDA JR., 2018). Truncando-se a Equação 20, de maneira similar ao caso da barra simples, esta pode ser reescrita como:

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{w}} = \omega^2 \mathbf{C}\tilde{\mathbf{w}}, \quad (21)$$

onde os coeficientes do vetor $\tilde{\mathbf{w}}$ possuem elementos \tilde{w}_m e os coeficientes das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são dados por:

$$B_{mr} = E_{r-m}I(k + g_m)^2(k + g_r)^2, \quad C_{mr} = \rho_{r-m}S. \quad (22)$$

Note que a Equação 22 representa um problema de autovalor generalizado em ω^2 e deve ser resolvido para cada k , dentro da FBZ ou FIBZ. Nota-se também que a formulação para o caso de viga de Euler-Bernoulli e para barra simples são parecidas, alterando apenas poucas variáveis (MIRANDA JR., 2018).

2.3 Método de Expansão em Ondas Planas Melhorado (IPWE)

O IPWE possui a vantagem de apresentar uma convergência mais alta da série de Fourier do que o PWE tradicional, além de ser muito utilizado quando há alta incompatibilidade de material ou de geometria (CAO *et al.*, 2004). Assim, o IPWE é muito importante quando são considerados cristais fonônicos localmente ressonantes. Li (1996) propôs o primeiro estudo do método IPWE para cristais fotônicos. Depois disso, Cao *et al.* (2004) estenderam o IPWE para lidar com os cristais fonônicos.

A diferença básica entre as formulações do PWE e IPWE estão na aplicação da regra inversa de Laurent. Desta forma, considerando o estudo de barra simples e viga de Euler-Bernoulli, temos que as equações dos dois modelos de cristal fonônico 1D estão expressas respectivamente nas Equações 23 e 24:

$$\sum_{m=-M}^M \left\{ \left[\frac{1}{E} \right]_{\bar{m}-m}^{-1} (k + g_m)(k + g_{\bar{m}}) - \omega^2 \rho_{\bar{m}-m} \right\} \tilde{u}_m = 0, \quad (23)$$

$$\sum_{m=-M}^M \left\{ \left[\frac{1}{E} \right]_{\bar{m}-m}^{-1} I(k + g_m)^2(k + g_{\bar{m}})^2 - \omega^2 S \rho_{\bar{m}-m} \right\} \tilde{w}_m = 0, \quad (24)$$

onde $\left[\frac{1}{E} \right]$ denota a matriz Toeplitz de uma função $1/E$ com o elemento de ordem (\bar{m}, m) para $\left[\frac{1}{E_{\bar{m}-m}} \right]$ e -1 indica a matriz inversa. O conteúdo matemático detalhado da teoria acima não é apresentado neste trabalho. Entretanto, é possível verificar as

demonstrações matemáticas mais aprofundadas nos trabalhos de Li (1996) e Cao *et al.* (2004).

2.4 Métodos Computacionais Aplicados a Cristais Fonônicos

Em comparação com as soluções projetadas sem otimização, os resultados otimizados por métodos computacionais podem fornecer uma orientação mais ampla para as aplicações de uma dada área do conhecimento (DONG *et al.*, 2017). Desta forma, com o avanço dos estudos dos cristais fonônicos e metamateriais, a aplicação de técnicas computacionais se tornou primordial para aumentar a diversidade de aplicações. Novos resultados para a utilização deste novo tipo de material, principalmente pelo rápido desenvolvimento de novos métodos de fabricação e impressão 3D, tornando viável a fabricação de estruturas complexas otimizadas (DONG *et al.*, 2017).

Um destes métodos é a otimização topológica. Para os cristais fonônicos, ela é uma abordagem computacional da distribuição de material, que cria layouts de estrutura sem informações pré-concebidas sobre a forma. Desta maneira, ela aplica uma pesquisa interna, comparando distribuições de materiais de forma inovadora, dentro de um domínio de design necessário, atuando semelhante a uma condição de contorno, para obter um desempenho estrutural ideal (LI *et al.*, 2020). O projeto de cristais fonônicos usando otimização topológica é muito utilizado para atingir a largura máxima de *band gap*, a largura máxima de *band gap* relativa ou os espectros de frequência desejados. Recentemente, a introdução de métodos de aprendizado de máquina na mecânica fornece novas maneiras de resolver problemas mecânicos (LUO *et al.*, 2020).

Outra abordagem é o *deep learning*. Recentemente, o *deep learning* foi utilizado no projeto de estruturas e dispositivos fotônicos (LIU *et al.*, 2017). Neste estudo, os autores propõem um método baseado em dados para projetar um cristal fotônico com uma antecipação dos *band gaps* com base *deep learning*. Diferentemente das abordagens convencionais, o método proposto por Liu *et al.* não requer cálculo mecânico em tempo real. Em vez disso, modelos de aprendizado profundo são treinados para escavar o mapeamento inerente entre estruturas topológicas e os *band gaps* dos elementos de volume infinitesimal de um cristal

fonônico. Os modelos são ainda utilizados para gerar a estrutura topológica correspondente, devido à antecipação dos *band gaps* (LIU *et al.*, 2017).

2.5 Algoritmos Genéticos (AGs)

Um AG é uma técnica de inteligência artificial que usa os conceitos de evolução, estudados em biologia, para estruturar um algoritmo capaz de otimizar soluções de um dado problema matematicamente modelado. As possíveis soluções do problema são chamadas de cromossomos, e cada cromossomo é formado por um conjunto de parâmetros (genes) que se apresentam como possíveis soluções para o problema matemático, parâmetros estes que se busca otimizar (LEE *et al.*, 2009).

Uma das principais aplicações deste tipo de algoritmo é a utilização em problemas de otimização combinatória, que são problemas que possuem um conjunto de parâmetros e almeja-se encontrar a combinação que melhor se adapte as condições de contorno imputadas no problema (GIANNAKIS e SERPEDIN, 2001; GOLDBERG, 1989; OSMAN e KELLY, 1996). Um algoritmo genético realiza uma busca em um universo de possíveis soluções, utilizando regras probabilísticas para combinar essas soluções a fim de obter um refinamento, aumentando a qualidade das soluções a cada iteração.

Diversos problemas de engenharia podem ser desenvolvidos matematicamente como problemas de otimização combinatória, onde suas soluções são obtidas através de métodos algébricos, numéricos ou heurísticos, métodos esses que geram uma espécie de busca em um espaço multidimensional das variáveis daquele problema. O desempenho destes métodos tende a ser baixo quando os problemas possuem características não lineares, descontinuidade ou grande universo de variáveis. Nestes casos, os algoritmos genéticos apresentam utilidade e robustez (LOPES, 1999; GOLDBERG, 1989).

Os algoritmos genéticos avaliam um conjunto de soluções e, posteriormente, utilizam critérios para ranqueamento das soluções ótimas para um dado problema modelado matematicamente, com estruturas de combinação e mutação. Assim, o universo de soluções é criado a partir das soluções encontradas anteriormente (CAMPOS *et al.*, 2004).

Em relação às aplicações, Pires e Serra (2014) utilizaram um algoritmo genético para um controlador PID Fuzzy, baseado na margem e ganho do controlador, a fim de controlar parâmetros dinâmicos e não lineares presentes no dia-a-dia das plantas industriais e demais setores de desenvolvimento.

Liu *et al.* (2014) demonstraram a necessidade da otimização aplicada ao estudo dos cristais fonônicos, uma vez que distribuição topológica de materiais dentro de uma célula unitária tem um efeito significativo nas propriedades do *band gap* e é algo complexo de ser determinado sem a utilização de uma técnica de otimização. Desta forma, eles buscaram otimizar, por meio de um algoritmo genético, a estrutura de bandas de cristais fonônicos 2D calculada pelo FPWE.

2.5.1 Terminologia dos Algoritmos Genéticos

Conforme mencionado, um algoritmo genético utiliza nomenclaturas usuais da biologia, mais especificamente dentro do estudo de genética. Abaixo, apresenta-se a explicação dos principais termos da genética dentro do contexto de um algoritmo genético (MICHALEWICZ, 1996; GOLDGERB, 1989; MITCHELL, 1997, FABRO, 2003):

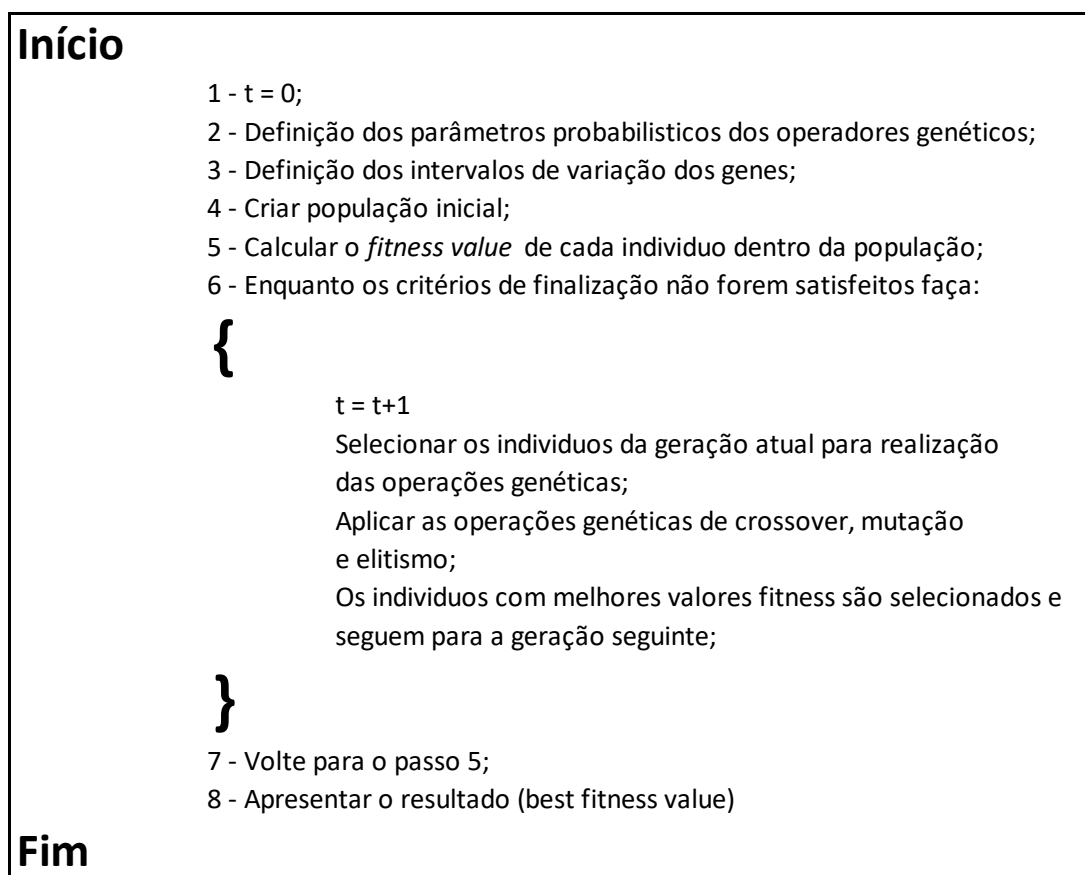
- Cromossomos/Indivíduos: vetores formados por uma combinação das variáveis do problema. Cada indivíduo representa uma possível solução para o problema estudado;
- Gene: descreve uma das variáveis do problema, sendo assim a unidade básica do cromossomo. Portanto, os cromossomos são formados por genes;
- População: conjunto de cromossomos/indivíduos inseridos no processamento da busca pela solução do problema;
- Função *fitness*: tem por objetivo avaliar cada indivíduo estabelecendo um valor numérico que representa a distância de cada um deles para a solução otimizada ou ideal. A função *fitness* possui como entrada uma cadeia de variáveis ou um vetor, chamado de cromossomo ou indivíduo, e como saída um valor real. Portanto, a função *fitness* consegue avaliar o problema através da codificação de possíveis soluções sobre o problema, permitindo assim quantificar cada solução, criando uma espécie de ranqueamento. Este critério é o único direcionador da busca do algoritmo pela otimização;

- Operadores genéticos: operações que o algoritmo genético realiza sobre os indivíduos com o objetivo de garantir a evolução da espécie e explorar novos espaços de busca, são eles – seleção, *crossover*, mutação e competição;
- Geração: além de determinar em qual número de processamento o AG está, ou seja, quantas vezes o AG já processou os operadores genéticos na população, a geração mostra o acompanhamento evolutivo dos indivíduos, mostrando se a otimização está ou não acontecendo;
- *Crossover*: consiste na troca de genes entre dois indivíduos, formando novos indivíduos com o objetivo de buscar aumenta a diversidade de possíveis soluções;
- Mutação: consiste na troca de gene de um indivíduo de forma individual, onde o valor anterior atribuído a variável será trocado por um possível valor que essa variável pode assumir, escolhido de forma aleatória.

2.5.2 Funcionamento do Algoritmo Genético

A partir de uma população inicial, geralmente criada de forma aleatória, a aplicação da seleção, *crossover* e mutação combinam a sobrevivência do mais apto nesta população, realizando uma troca de informações estruturada e aleatória entre os cromossomos, que são as possíveis soluções do problema. Assim, cada novo conjunto de indivíduos é criado usando partes dos cromossomos mais adequados da geração anterior. Depois de algumas gerações, um dos critérios para limitar o processamento do AG, a maior probabilidade de que os indivíduos mais aptos estejam presentes na última geração, onde este será o conjunto de soluções encontradas pelo algoritmo para o problema (JONG e SPEARS, 1993). É ilustrado na Figura 3 um esquema de forma simples a estrutura de um algoritmo genético.

Figura 3 - Estrutura simplificada de um algoritmo genético.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, para que o AG funcione corretamente, é necessária a identificação de alguns parâmetros, sendo esses de fundamental importância para a eficiência do AG. São eles:

- Tamanho da população: este parâmetro demonstra quantos indivíduos formarão cada geração, o que reflete diretamente o funcionamento do AG. Quando a população é reduzida ou o compartilhamento de genes se torna limitado, o AG reduz seu espaço de busca, tornando a evolução da solução mais limitada. Uma grande população acaba por melhorar o desempenho do AG, evitando tomar soluções pontuais, porém reflete também no processamento computacional, que se torna maior à medida que se aumenta a população (PIRES, 2013; JONG e SPEARS, 1993);
- Taxa de recombinação: determina a porcentagem de indivíduos que serão recombinados entre si. Quanto maior for esta taxa, maior a probabilidade de haver

perda de possíveis indivíduos, pois a maioria dos cromossomos será substituída por cromossomos originado após a utilização do operador. Por outro lado, quando a taxa é muito baixa, ocorrerá o atraso de convergência do AG para uma solução ótima, o que implicará no aumento do custo computacional (PIRES, 2013; JONG e SPEARS, 1993);

- Taxa de mutação: esta taxa dita a chance de ocorrência da operação de mutação em uma dada população. A mutação é a substituição de um gene presente no cromossomo por outro gene aleatório dentro do *range* proposto para cada variável, ou seja, indivíduos da população terão novas características, prevenindo a existência de muitos indivíduos semelhantes (PIRES, 2013; JONG e SPEARS, 1993).

A partir desses parâmetros, pode-se avançar para os operadores do AG, quais sejam a seleção, *crossover* e mutação, que serão discutidos nos tópicos seguintes.

2.5.3 Seleção

Este operador seleciona os melhores indivíduos de uma população e lhes garante a preferência para as próximas gerações. Basicamente, este operador organiza os melhores indivíduos, não possuindo nenhum tipo de envolvimento com a otimização em si (PIRES, 2013; MURATA *et al.*, 1996). Os métodos de seleção mais utilizados na literatura de algoritmos genéticos serão descritos neste tópico.

O algoritmo genético clássico utiliza um esquema de seleção de indivíduos chamado seleção por roleta (MICHALEWICZ, 1996; GOLDGERB, 1989; MITCHELL, 1997). Este tipo de seleção faz com que cada indivíduo ocupe, em uma roleta, uma região proporcional ao seu valor *fitness*. Desta forma, os cromossomos de maior aptidão terão uma maior área na roleta e os indivíduos com menor aptidão terão uma área menor na roleta. Com as áreas da roleta definidas, faz-se a simulação do giro da roleta “*n*” vezes, selecionando-se os “*n*” indivíduos que permanecerão para etapa seguinte.

O método de seleção por roleta é o mais usualmente inserido nos algoritmos genéticos devido a simplicidade, porém, apresenta algumas limitações. Com este método de seleção, o algoritmo tende a reduzir a diversidade da população, podendo

ocasionar uma convergência das soluções de forma prematura, dificultando a possibilidade de criação de novos indivíduos a partir dos operadores genéticos (FABRO, 2003). Outra limitação desta técnica é devido à utilização da probabilidade como forma de seleção, havendo a possibilidade de um indivíduo com um valor *fitness* elevado não ser selecionado, perdendo assim uma boa solução para criação de novos indivíduos logo nas primeiras gerações do AG.

Devido às limitações do método por roleta, outros métodos de seleção foram desenvolvidos, como a seleção por ordenamento, seleção por torneio, seleção bi-classista, seleção por sorteio universal, técnica elitista (BLICKLE e THIELE, 1995; GOLDBERG, 1989).

A técnica de seleção por ordenamento enumera os indivíduos conforme os seus respectivos valores *fitness*. Para a caracterização de escolha, podem ser utilizados mapeamentos lineares ou exponenciais. Este método não possui a limitação de convergência prematura do algoritmo, mas exige um esforço computacional maior para ordenação dos indivíduos de forma constante em cada geração (BLICKLE e THIELE, 1995; GOLDBERG, 1989).

A seleção por torneio acontece pela criação de grupos aleatórios de indivíduos. O indivíduo que possuir a aptidão no grupo é selecionado, enquanto os demais são eliminados da seleção. Este método não possui a limitação de convergência prematura do algoritmo, colaborando assim para a não ocorrência de estagnação do processo (BLICKLE e THIELE, 1995; GOLDBERG, 1989).

A técnica de seleção bi-classista organiza as possíveis soluções de uma população e escolhe uma porcentagem pré-estabelecida de melhores indivíduos, e também de piores indivíduos, com o objetivo de manter a diversidade durante os operadores genéticos e permear esta diversidade de genes por todas as gerações (BLICKLE e THIELE, 1995; GOLDBERG, 1989).

A metodologia de seleção elitista é usualmente utilizada em conjunto com alguma outra metodologia de seleção, normalmente a roleta, buscando acelerar a convergência do AG e que uma determinada parcela de boas soluções, com alto nível de aptidão, alcance a próxima geração. Esta técnica direciona uma determinada quantidade de indivíduos mais aptos de uma população para a geração posterior, reduzindo a possibilidade de perda de boas soluções durante a etapa de seleção.

Geralmente, é comum utilizar este método pelo menos para enviar o melhor indivíduo da população para a geração seguinte. A desvantagem do uso da técnica elitista é a permanência do mesmo indivíduo em várias gerações, aumentando sua reprodução e podendo causar a convergência prematura do AG (BLICKLE e THIELE, 1995; GOLDGERB, 1989).

2.5.4 *Crossover* ou Recombinação

Este operador é responsável pela troca de genes dos cromossomos entre si, sendo este processo realizado com parte dos indivíduos da população. Pode existir um ou mais pontos de recombinação que são escolhidos de forma aleatória. A recorrência de recombinação entre os indivíduos depende da taxa de recombinação indicada pelo usuário do AG (PIRES, 2013; SIKORA, 1996).

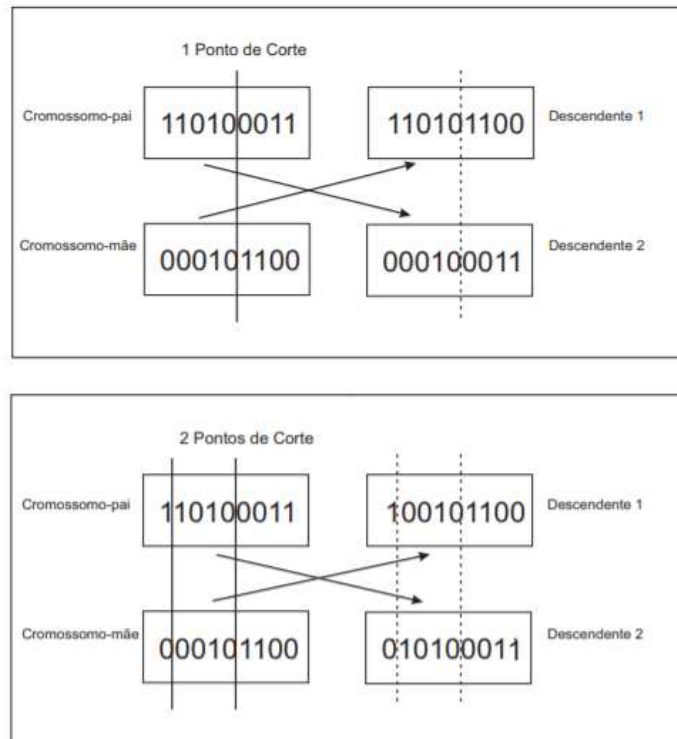
O tipo de recombinação mais utilizada é a recombinação por pontos de corte. Após a seleção de dois indivíduos para recombinação, é escolhido um ponto de corte, onde o cromossomo será dividido em partes e os indivíduos irão trocar essas partes entre si (PIRES, 2013), conforme ilustrado na Figura 4.

2.5.5 Mutação

Este operador permite a seleção aleatória de um dos genes do cromossomo e a troca deste gene selecionado por outro valor aleatório condizente com a variável. Desta forma, a população acaba por não convergir a indivíduos semelhantes, porém, se a taxa de mutação for muito elevada, pode levar a perda de indivíduos significativos para as gerações futuras do AG (PIRES, 2013; WEILE e MICHIELSSEN, 1997).

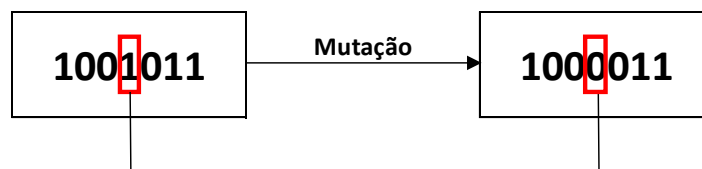
A maneira mais usual de utilizar o operador de mutação é de forma discreta, onde o AG seleciona um ou mais genes do cromossomo e o substitui por outro valor que esteja predeterminado no intervalo inicial do gene escolhido (PIRES, 2013; WEILE e MICHIELSSEN, 1997). Um exemplo de mutação é ilustrado na Figura 5.

Figura 4 - Operadores de cruzamento com pontos de corte.



Fonte: Adaptado: Pires, 2013.

Figura 5 - Exemplo de mutação discreta.

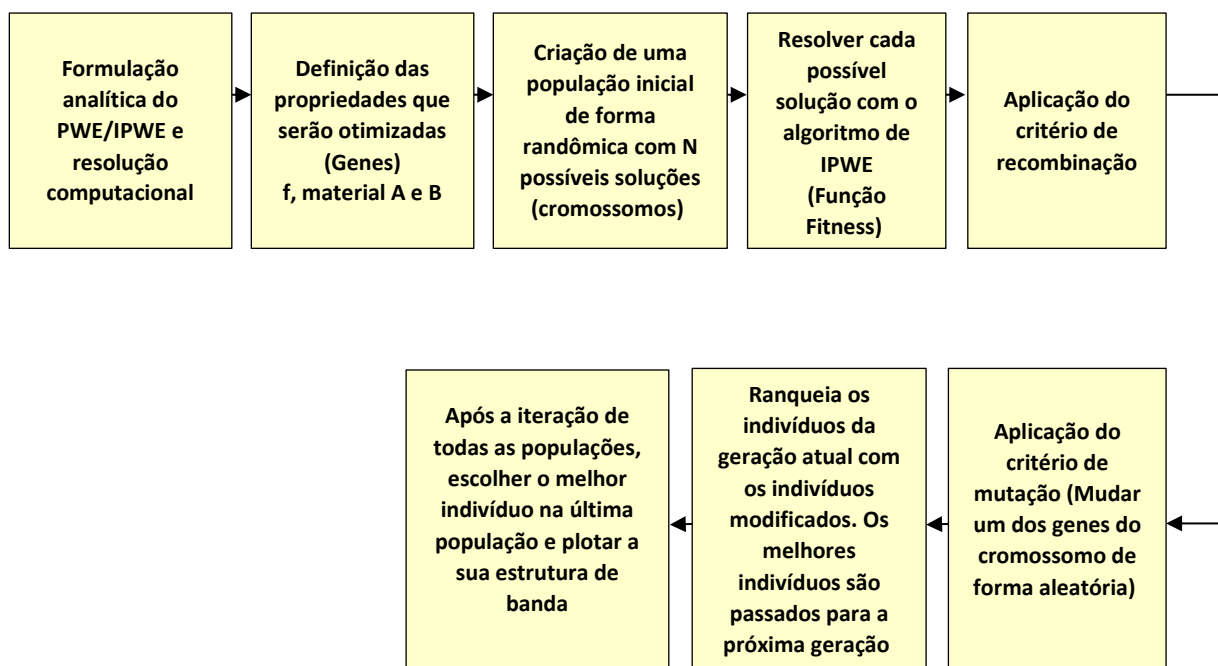


Fonte: Elaborado pelo autor.

3 METODOLOGIA

Inicialmente, formulou-se o PWE e IPWE aplicados para o caso 1D (modelo de barra simples e viga de Euler-Bernoulli) utilizando o teorema e as condições de contorno periódicas de Floquet-Bloch. Em seguida, foi utilizada uma rotina computacional para resolução do problema de autovalor $\omega(k)$, obtendo-se a estrutura de bandas para uma dada combinação de parâmetros. Podemos observar na Figura 6 o fluxograma que mostra as etapas de desenvolvimento do estudo.

Figura 6 - Fluxograma da metodologia utilizada no trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a implementação dos modelos de projeto de cristais fonônicos 1D (PWE e IPWE) para os casos físicos de barra simples e viga de Euler-Bernoulli em uma estrutura computacional, faz-se necessário o estudo de quais variáveis serão otimizadas no algoritmo genético, uma vez que ele precisa de pelo menos duas variáveis para ir correlacionando dentro de sua estrutura e buscando possíveis valores ótimos para essas combinações. Para casos de cristal 1D e 2D, a aplicação de otimização é geralmente utilizada no fator de preenchimento, combinação de materiais e na área da seção transversal, podendo ser em todas as variáveis ou em uma combinação de pelo menos duas delas. Neste trabalho, optou-se por fazer a otimização do fator de preenchimento e variar os materiais da célula, com uma

composição de dois materiais diferentes (ZHANG *et al.*, 2012; NI *et al.*, 2012; MIRANDA JR., 2018).

O algoritmo genético funciona em funções, onde cada função é responsável por um operador evolucionário e existe uma função responsável pelo cálculo do valor *fitness*, ou valor custo, a qual é formada pela própria formulação do PWE e IPWE dentro da estrutura computacional implementada na primeira etapa do fluxograma da Figura 6. O AG inicia com a função de geração da população inicial. Ela é gerada de forma aleatória, utilizando os intervalos limitadores de cada parâmetro. Dentro destes intervalos, serão geradas “*n*” combinações de parâmetros, sendo “*n*” o tamanho da população. As características escolhidas para o algoritmo genético e o intervalo dos parâmetros a serem otimizados podem ser visualizadas na Tabela 1. Como a variável “material” é uma variável discreta, ela não terá um intervalo de atuação e sim valores específicos, por isso são determinados os materiais correspondentes a ela e suas propriedades físicas.

Tabela 1 - Características do algoritmo genético.

Características do AG	Valor
Tamanho da população <i>n</i>	20
Número de Gerações	20
Intervalo de contorno (Fator de preenchimento)	$0 < f < 1$, variação 0,01
Intervalo de contorno (materiais)	Aço, Alumínio e Epóxi
Densidade ($\rho_{Alumínio}$, $\rho_{Epóxi}$, $\rho_{Aço}$)	2730 kg/m^3 , 1180 kg/m^3 , 7780 kg/m^3
Módulo de Young ($E_{Alumínio}$, $E_{Epóxi}$, $E_{Aço}$)	$77,6 \text{ N/m}^2$, $4,35 \text{ N/m}^2$, $210,6 \text{ N/m}^2 \times 10^9$
Taxa de Recombinação	50%
Taxa de Mutação	18%
Taxa de Elitismo	10%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a formação da população inicial, o grupo de parâmetros de cada indivíduo será inserido na função do PWE/IPWE para o cálculo do valor *fitness* de cada um. Com isso, será feito um ranqueamento na população, fazendo o ordenamento dos indivíduos, do mais apto para o menos apto, considerando o valor *fitness*.

A organização dos indivíduos é aplicada para o auxílio no próximo operador, ou seja, a seleção. Neste momento, são escolhidos os indivíduos mais aptos para serem recombinados. A seleção utilizada foi por ordenamento, onde é feito uma espécie de ranqueamento utilizando a razão de valor *fitness* do indivíduo pelo valor *fitness* do grupo. A escolha dessa técnica se dá principalmente pela não convergência

prematura do algoritmo, apesar de aumentar o processamento computacional. A seleção organiza os indivíduos para entrarem na função de recombinação e se agruparem para fazer a permuta, sendo ela dependente da taxa de recombinação, que neste trabalho é de 50%. A escolha desta taxa se deu baseada em outros trabalhos de algoritmo genético, onde se observa que 50% é um valor aproximado desta taxa para que se reduza a probabilidade de demora de convergência da otimização e também reduza a probabilidade de convergência prematura (PIRES, 2014; HAUPT e HAUPT, 2004; ZHI e LIU, 2019; HOSSEINABADI *et al.*, 2019).

A recombinação é feita utilizando os indivíduos selecionados na função do operador de seleção. Os indivíduos são agrupados em dois para passarem pelo operador. Basicamente, a função seleciona pontos de corte nos indivíduos e faz uma permuta entre os dois, em que uma parte do material genético do indivíduo um vai para o indivíduo dois e vice-versa. Para o caso estudado, foi escolhido a recombinação por pontos de corte, devido ser a técnica mais difundida na literatura, sendo escolhido apenas um ponto de corte devido a pequena quantidade de parâmetros a serem otimizados.

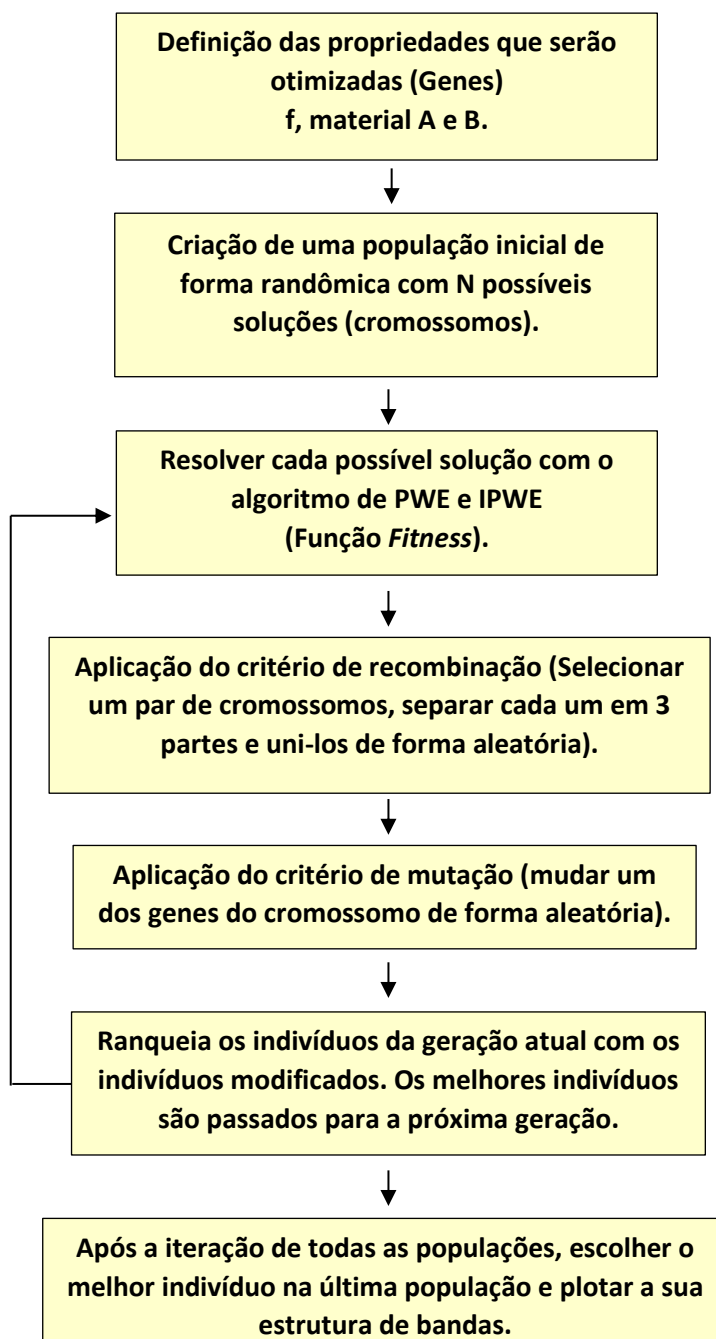
O próximo operador a atuar na população é a mutação. Essa função seleciona de forma aleatória indivíduos na população para trocarem material genético. Diferentemente da recombinação, a mutação realiza a substituição do material genético por outro aleatório. Existe a seleção do parâmetro que sofrerá a mutação e, após isso, seu valor é substituído por um valor aleatório presente no intervalo limitante do dado parâmetro. A mutação escolhida foi discreta, devido à presença de parâmetros discretos dentre as variáveis a serem otimizadas. Ressalta-se que a utilização de mutação contínua traria erros ao processamento do AG.

A mutação dentro do AG depende da taxa de mutação, que neste trabalho é de 20%. De forma análoga a escolha da taxa de seleção ou taxa de recombinação, esta taxa foi escolhida baseada em outros trabalhos com aplicação de algoritmo genético, onde os valores variam entre 12% a 18%. Como o tamanho da população é pequeno, aplicou-se 20% para arredondamento da taxa. Este intervalo também descreve como valor médio para redução da probabilidade de perda de bons indivíduos para um alto fluxo de mutação, porém também faz sua função que é de aumentar a diversidade na

população (PIRES, 2014; HAUPT e HAUPT, 2004; ZHI e LIU, 2019; HOSSEINABADI *et al.*, 2019).

Com isso, a população terá passado por todos os operadores, em seguida, será feito um novo ranqueamento para seleção dos melhores indivíduos que seguirão para a próxima geração. Neste momento, é aplicado o elitismo, uma nova técnica de seleção. O elitismo irá escolher os melhores cromossomos da população que iniciou a iteração para mandá-los para a próxima geração. Esta escolha depende da taxa de elitismo, que neste estudo foi de 10%. Desta forma, os indivíduos sem mudanças genéticas, que pertencem à população antes da passagem nos operadores do AG, serão ranqueados e 10% deles permaneceram na próxima geração. Com a seleção dos mais aptos, cria-se a nova geração e todo o processo de operadores se repete, sendo o número de gerações o fator limitante para que o AG selecione o melhor indivíduo. O fluxograma que demonstra os passos do algoritmo genético aplicado ao PWE e IPWE é ilustrado na Figura 7.

Figura 7 - Fluxograma do algoritmo genético aplicado ao PWE e IPWE.

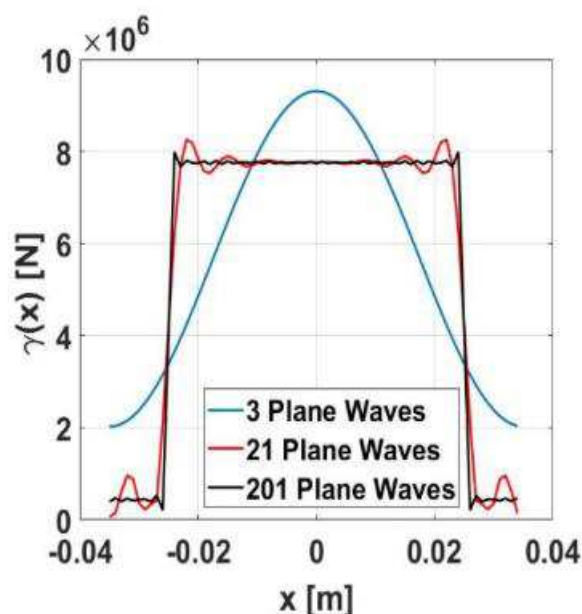


Fonte: Elaborado pelo autor.

4 RESULTADOS

Inicialmente, para obtenção de um resultado coerente por meio do AG, é necessário verificar a convergência das estruturas de bandas dos cristais fonônicos calculadas pelo PWE e IPWE em relação ao número de ondas utilizadas na expansão em séries de Fourier. Na Figura 8, Miranda Jr. (2018) ilustra a convergência dos coeficientes da série de Fourier com relação ao número de ondas planas, utilizando-se o PWE.

Figura 8 - Comparação da convergência de $\gamma(x)$ para o modelo de cristal fonônico 1D, modelo de barra simples.



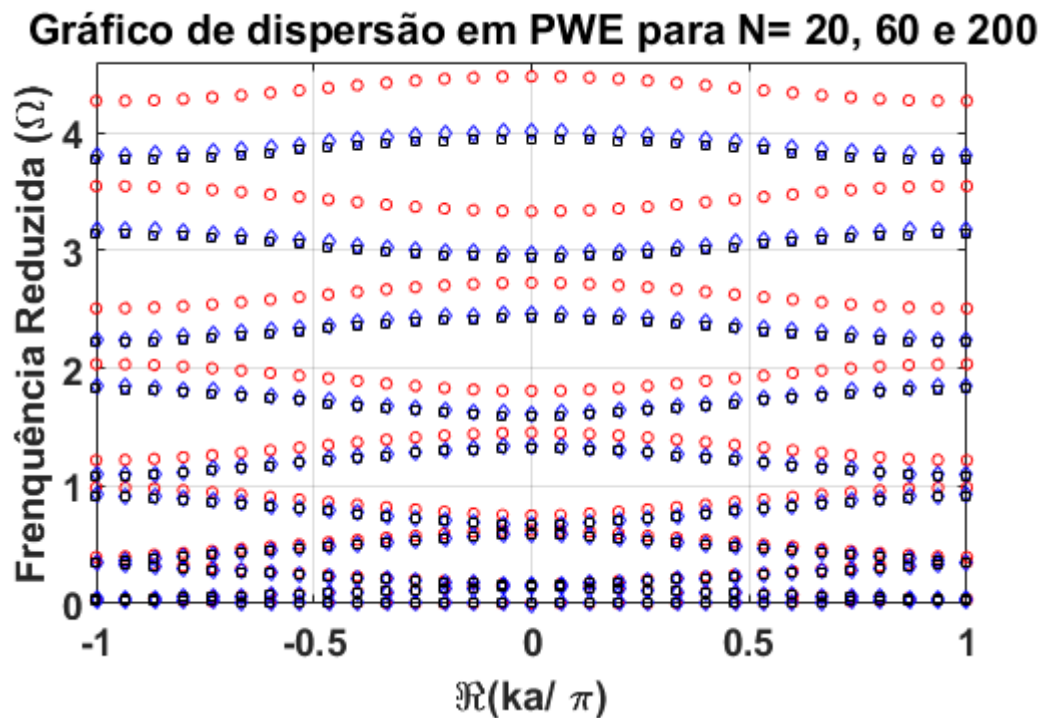
Fonte: Miranda Jr. (2018).

Na Figura 8, pode-se observar que, dependendo do número de ondas planas, a expansão em série de Fourier pode não convergir (neste caso, considerando-se 3 ondas planas), conseqüentemente, a estrutura de bandas e os *band gaps* são incoerentes.

Da mesma forma que a convergência do PWE/IPWE pode ser analisada em relação aos coeficientes da série de Fourier (Figura 8), ela também pode ser analisada comparando-se diferentes estruturas de bandas, considerando-se diferentes números de ondas planas. A partir da Figura 9 ilustra-se a estrutura de bandas de um cristal

fonônico 1D, modelo de viga de Euler-Bernoulli, utilizando o PWE e variando o número de ondas planas em 20, 60 e 200. O círculo vermelho representa 20 ondas, o quadrado preto 60 ondas e o losango azul 200 ondas.

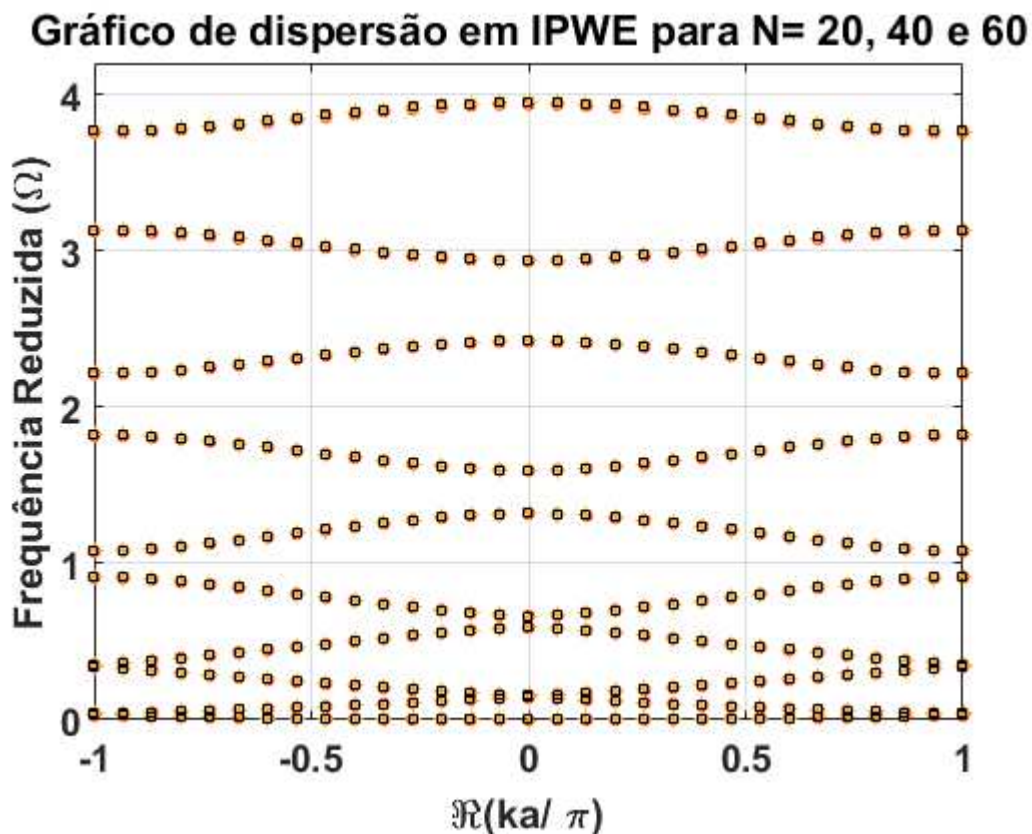
Figura 9 - Comparação da convergência das estruturas de bandas para um cristal fônico 1D, modelo de viga de Euler-Bernoulli, utilizando-se o PWE, onde o círculo vermelho representa 20 ondas, o quadrado preto 60 ondas e o losango azul 200 ondas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível observar que existe uma boa concordância entre os primeiros modos (curvas) para o caso de 60 e 200 ondas planas. Entretanto, ainda não é satisfatória a partir do sexto modo. Desta maneira, nesta figura é visto que o PWE demora a convergir, devido às diferenças das propriedades dos materiais na célula unitária. Portanto, seria necessário um elevado número de ondas planas, aumentando o custo computacional. Para o caso do IPWE, foi feita a mesma análise, porém utilizando 20, 40 e 60 ondas, conforme Figura 10. O círculo vermelho representa 20 ondas, o asterisco laranja representa 40 ondas e o quadrado preto representa 60 ondas.

Figura 10 - Comparação da convergência das curvas de dispersão para o modelo de viga de Euler-Bernoulli simples do cristal fonônico 1D em IPWE, onde o círculo vermelho representa 20 ondas, o asterisco laranja representa 40 ondas e o quadrado preto representa 60 ondas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

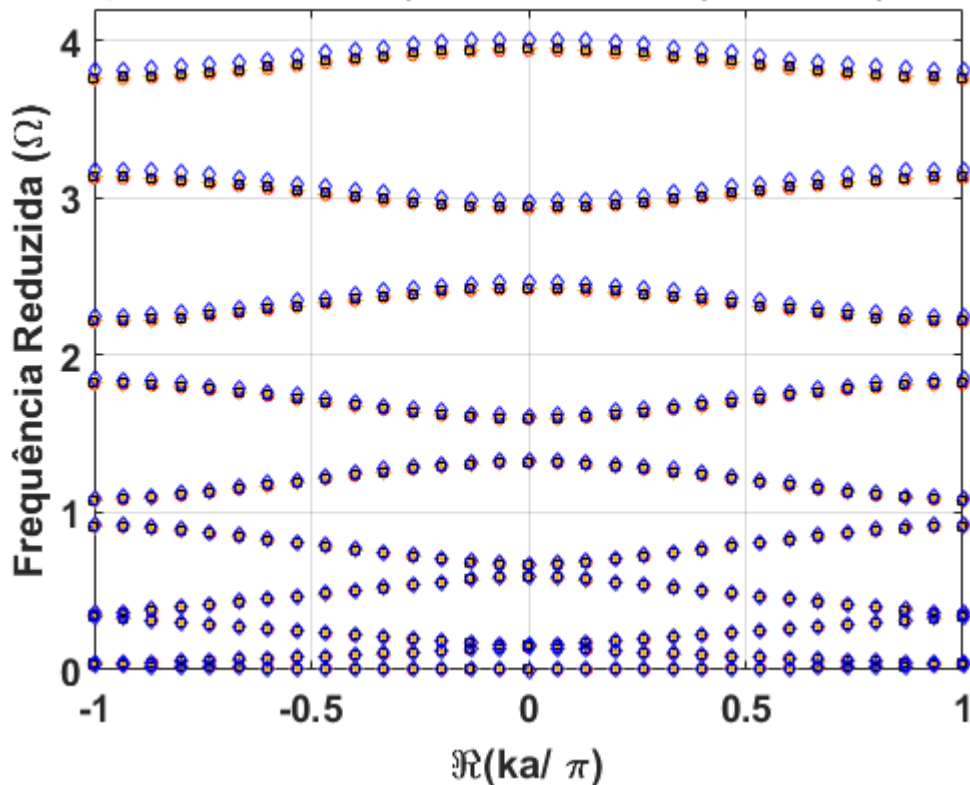
Para o IPWE, é possível observar que a convergência existe nos três casos simulados, mesmo para um número não elevado de ondas planas. Desta forma, conclui-se que o IPWE apresenta rápida convergência em relação ao PWE, reduzindo o custo computacional. Para a última análise de convergência, foi utilizado o caso do IPWE para 20, 40 e 60 ondas planas e o caso PWE para 200 ondas planas, conforme observado na Figura 11. O círculo vermelho representa 20 ondas (IPWE), o asterisco laranja representa 40 ondas (IPWE), o quadrado preto representa 60 ondas (IPWE) e o losango azul representa 200 ondas (PWE).

É possível observar que a convergência do IPWE se assemelha com os resultados do PWE acima de 200 ondas planas, mesmo considerando-se apenas 20 ondas planas. Desta forma, é mais interessante prosseguir com as análises baseadas

apenas no IPWE, devido ao seu menor custo computacional e maior convergência em relação à expansão em série de Fourier.

Figura 11 - Comparação da convergência das curvas de dispersão para o modelo de viga de Euler-Bernoulli simples do cristal fonônico 1D em IPWE para $N = 20, 40$ e 60 e PWE para $N = 200$, onde o círculo vermelho representa 20 ondas (IPWE), o asterisco laranja representa 40 ondas (IPWE), o quadrado preto representa 60 ondas (IPWE) e o losango azul representa 200 ondas (PWE).

Comparativo IPWE ($N = 20, 40$ e 60) e PWE ($N = 200$)



Fonte: Elaborado pelo autor.

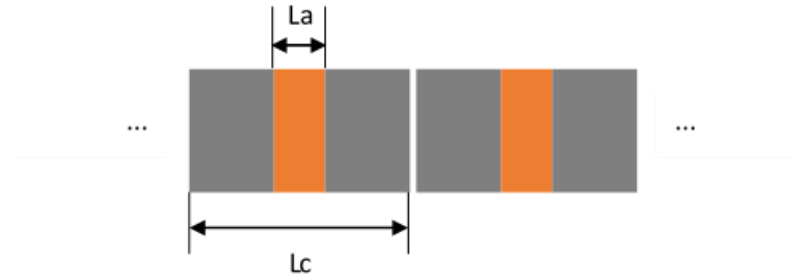
Definido os modelos dos cristais fonônicos 1D a serem estudados, como já mencionado anteriormente, de barra simples e viga de Euler-Bernoulli, e o método a ser utilizado, IPWE, com 20 ondas, pode-se iniciar os resultados relacionados ao AG.

4.1 Cristal Fonônico 1D de Barra Modelado com IPWE e AG

Inicialmente, faz-se necessária uma análise em um ambiente delimitado, onde se conhece as possíveis soluções ótimas para comparação com o processamento encontrado no AG. A partir da Figura 12, ilustra-se um cristal fonônico 1D de barra

simples, composto por dois materiais, onde as cores laranja e cinza representam os materiais A e B, respectivamente, que podem variar entre epóxi, aço e alumínio.

Figura 12 - Representação esquemática de cristal fonônico 1D de barra com células unitárias compostas por 2 materiais, que podem variar entre epóxi, aço e alumínio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A porcentagem do material A na célula unitária é o fator de preenchimento f multiplicado por 100. A geometria da barra fonônica, os possíveis materiais adotados e as propriedades desses materiais estão descritas na Tabela 2.

Tabela 2 - Geometria do cristal fonônico 1D de barra e as propriedades dos materiais utilizados.

Geometria/Propriedades	Valor
Tamanho da célula unitária (L_C)	0,1 m
Área da seção transversal ($S = b \times h$)	$0,01 \times 0,01 \text{ m}^2$
Densidade ($\rho_{\text{Alumínio}}, \rho_{\text{Epóxi}}, \rho_{\text{Aço}}$)	$2730 \text{ kg/m}^3, 1180 \text{ kg/m}^3, 7780 \text{ kg/m}^3$
Modulo de Young ($E_{\text{Alumínio}}, E_{\text{Epóxi}}, E_{\text{Aço}}$)	$77,6 \text{ N/m}^2, 4,35 \text{ N/m}^2, 210,6 \text{ N/m}^2 \times 10^9$

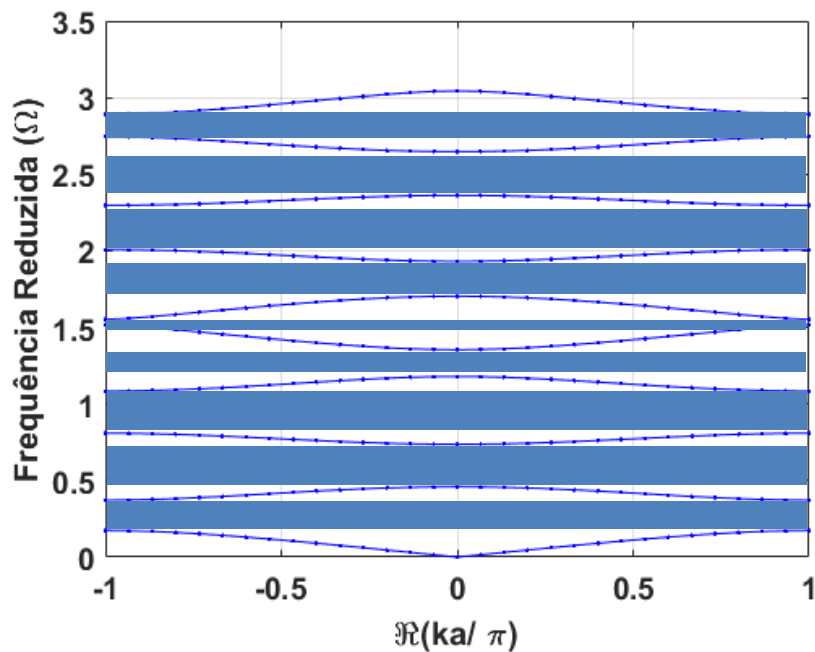
Fonte: Elaborado pelo autor.

Usando o IPWE, sem a aplicação do AG, é possível obter a estrutura de bandas de um cristal fonônico qualquer. A frequência reduzida Ω é utilizada para o cálculo, pois ela elimina a influência do tamanho da célula na estrutura de bandas, tornando o resultado mais geral. Ela pode ser calculada pela relação $\Omega = \frac{\omega L_C}{2\pi C_L}$, onde ω é a frequência angular resultante do problema de autovalor-autovetor e C_L é a velocidade de propagação longitudinal. O valor de C_L foi estimado para os dois materiais usando o fator de preenchimento como base, como mostrado na Equação 25:

$$C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{fE_A + (1-f)E_B}{f\rho_A + (1-f)\rho_B}} \quad (25)$$

Como exemplo, a fim de introduzir o conceito de cristal fonônico de barra, considera-se um fator de preenchimento de $f = 0,4$ e os materiais A e B como sendo alumínio e epóxi, respectivamente. Desta forma, a estrutura de bandas deste cristal está ilustrada na Figura 13.

Figura 13 - Estrutura de banda de um cristal fonônico 1D de barra, utilizando IPWE, considerando 10 ondas planas, $f = 0,4$, $L_C = 0,1 \text{ m}$ com os materiais alumínio e epóxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os *band gaps*, espaços entre curvas sinalizados com os retângulos azuis na Figura 13, tendem a serem maiores quanto maior é a frequência analisada, porém não é vantajoso este resultado, uma vez que *band gaps* em frequências elevadas acabam tendo suas aplicações restritas ou impossíveis. A largura dos *band gaps* normalizados podem ser calculados subtraindo a frequência mínima do modo superior e a frequência máxima do modo inferior. Neste estudo, realizou-se a normalização dos

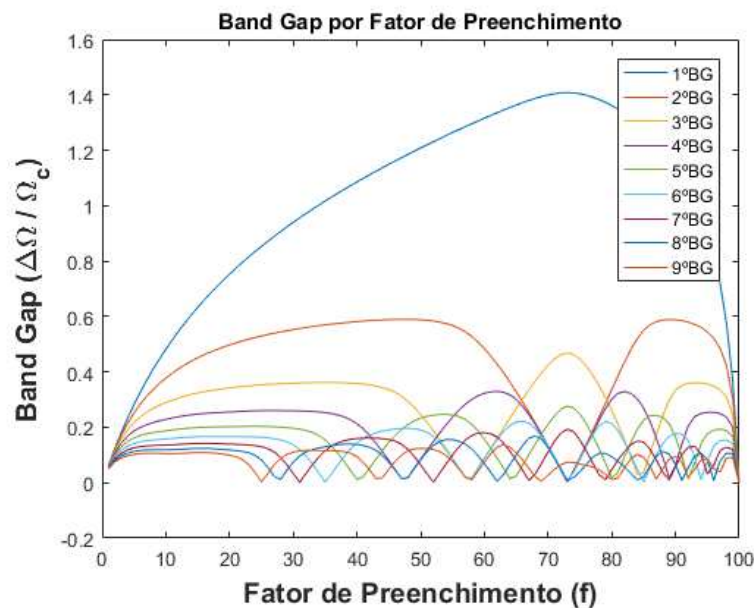
dados, onde é aplicada a divisão do valor da largura do *band gap* pela frequência central do *band gap*, conforme Equação 26. Assim, para um número N de modos, existem $N - 1$ *band gaps*.

$$B_G = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_c} = \frac{\Omega_n - \Omega_{n-1}}{\frac{\Omega_n + \Omega_{n-1}}{2}}. \quad (26)$$

Tendo introduzido todas as observações e parâmetros iniciais sobre os cristais fonônicos 1D de barra, faz-se necessária a análise das variáveis a serem otimizadas de forma manual para comparação posterior com o valor obtido pelo AG. Desta forma, nas Figuras 14 a 19, apresentam-se as larguras dos nove primeiros *band gaps* normalizados em função do fator de preenchimento de um cristal fonônico 1D de barra, considerando-se 3 casos: caso 1 – aço (A) e epóxi (B); caso 2 – alumínio (A) e epóxi (B); e, caso 3 – alumínio (A) e aço (B). Esta análise é feita a fim de se observar o caso que apresenta a maior largura de *band gap* e para qual fator de preenchimento isso ocorre.

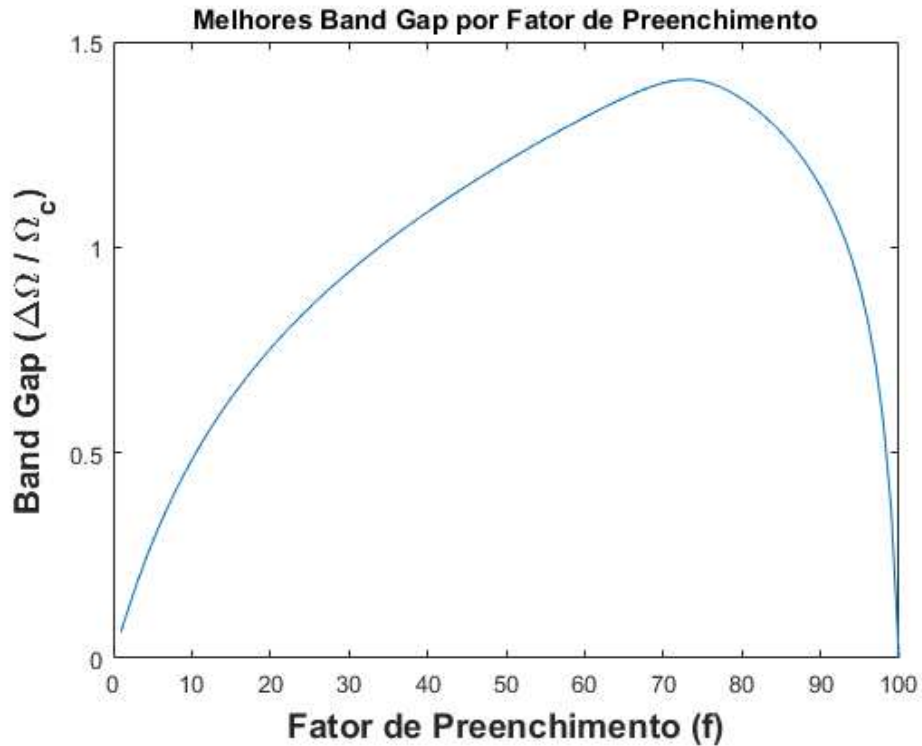
Logo, são mostradas duas figuras para cada combinação de material, uma mostra os 9 *band gaps* calculados e a outra mostra a junção dos melhores valores de *band gap* por fator de preenchimento, ou seja, para cada porcentagem de f foi analisado qual dos 9 *band gaps* tem o valor mais elevado.

Figura 14 - Variação da largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).



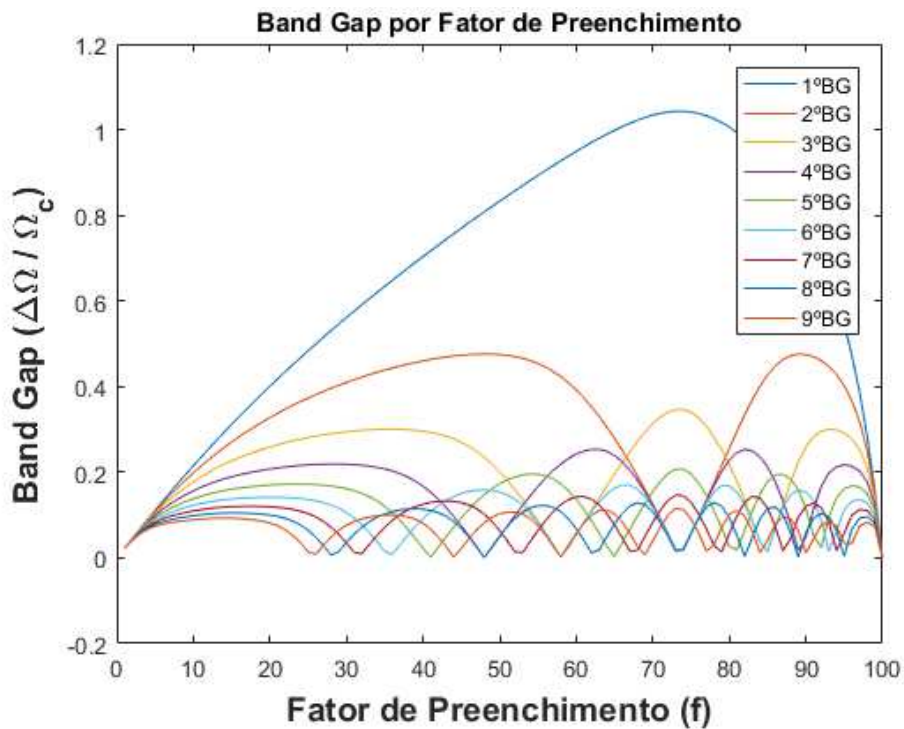
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).



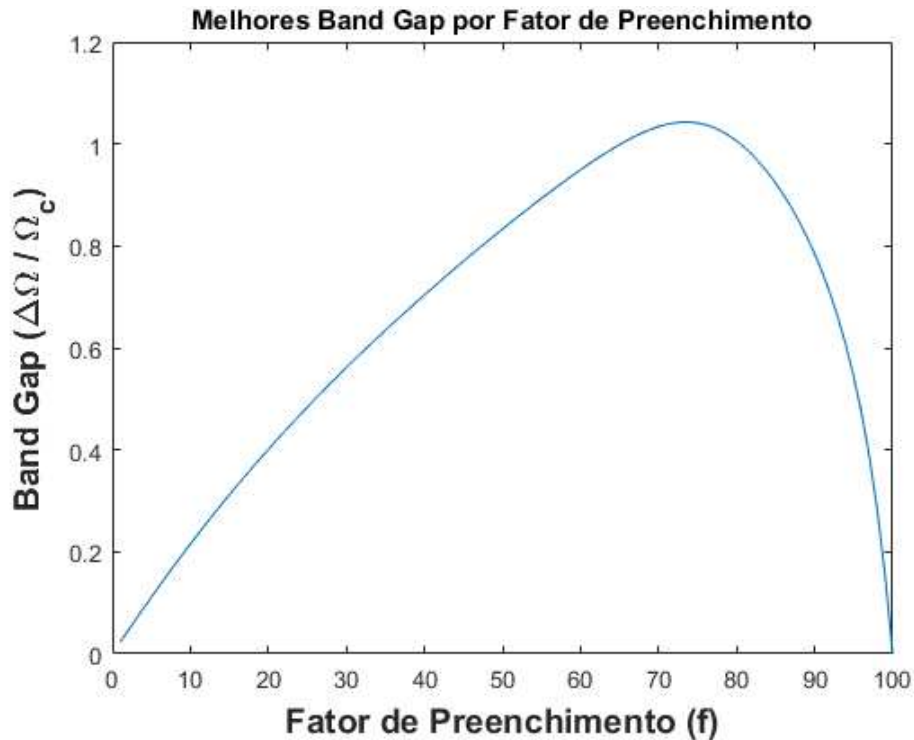
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 16 - Variação da largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).



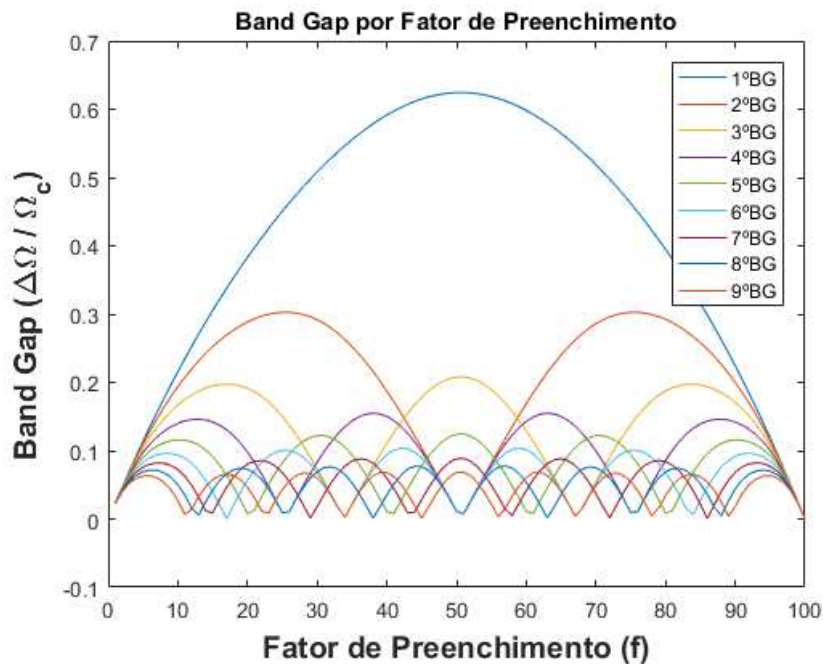
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).



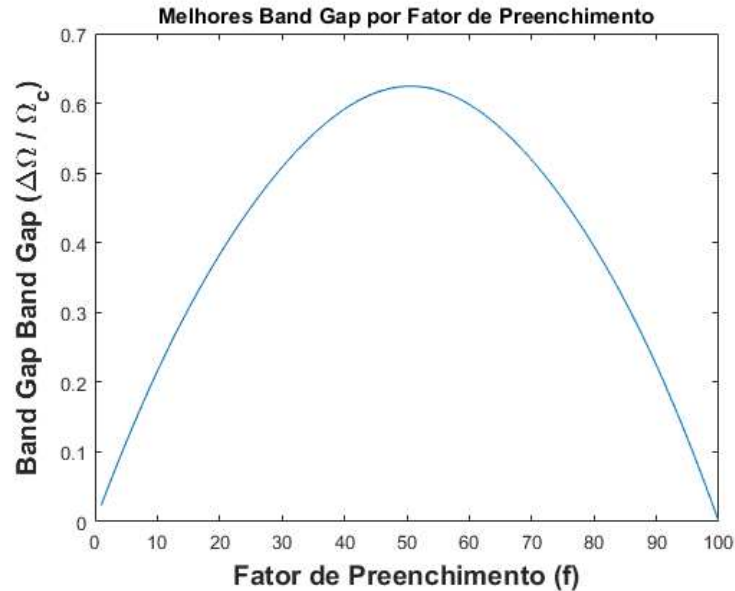
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 - Variação da largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

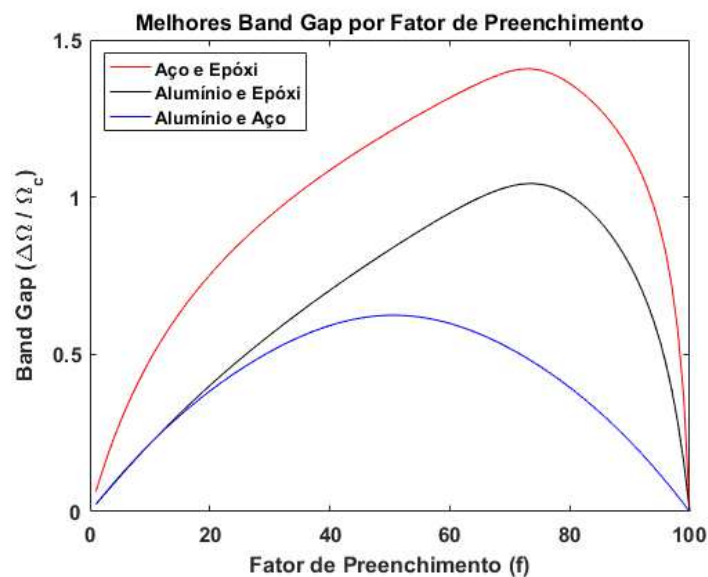
Figura 19 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, tem-se a melhor combinação será o do aço com epóxi (caso 1), com um *band gap* próximo de 1,5 e um fator de preenchimento próximo de 70%. Na Figura 20, apresenta-se os melhores *band gaps* para o caso de barra com os pares de aço e epóxi (caso 1), alumínio e epóxi (caso 2) e alumínio e aço (caso 3).

Figura 20 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de barra considerando IPWE com 10 ondas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir do uso do AG, aplicado à solução do problema de autovalor da Equação 23, é possível verificar os *band gaps* do cristal fonônico. A evolução do algoritmo genético até chegar ao possível melhor indivíduo é ilustrada na Figura 21.

Figura 21 - Curva de evolução do algoritmo genético demonstrando a otimização do resultado pelas gerações.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A média do valor fitness por geração é um dos indicadores utilizados no estudo de algoritmo genético para demonstrar a variação dos indivíduos comparando duas gerações diferentes e demonstrar o avanço da média das gerações. Podemos observar esta análise através da Figura 22.

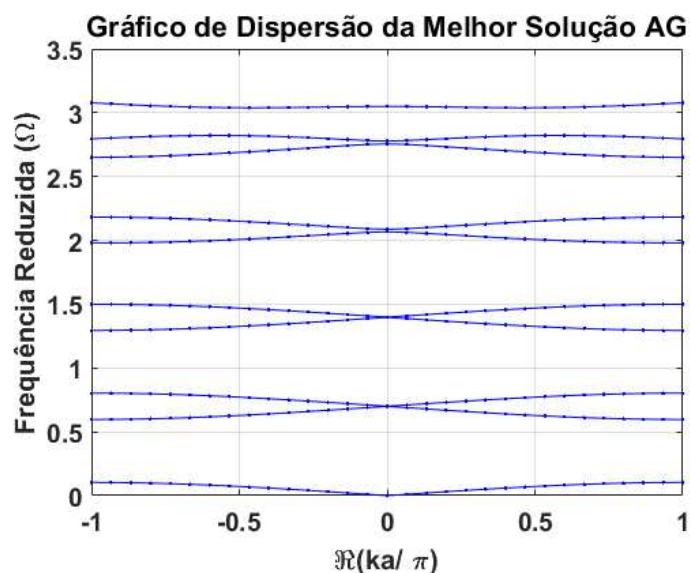
Figura 22 - Média do valor fitness por geração para o caso de barra.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A estrutura de bandas do melhor indivíduo da última população, que obteve a banda proibida mais larga, normalizada em frequência, é ilustrada na Figura 23.

Figura 23 - Método IPWE com Algoritmo Genético. Estrutura da banda do cristal fonônico 1D de barra do melhor valor *fitness*, com $f = 71\%$, combinação aço e epóxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o caso de barra simples é possível observar na Figura 20 que todos os casos convergiram a um único máximo, caracterizando um problema convexo. Desta forma, é possível admitir um algoritmo genético clássico para resolução deste problema, uma vez que ele converge a um único máximo.

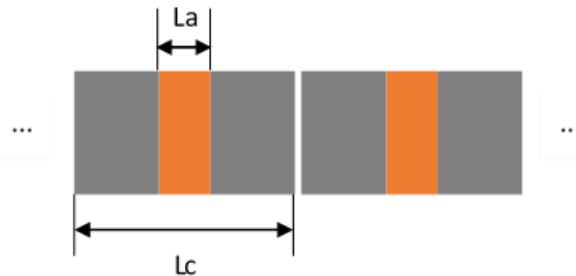
É possível observar na Figura 21 que o valor ótimo do fator do $B_G = 1,408$, que é o valor *fitness* da última geração criada pelo algoritmo genético. Após a escolha do melhor indivíduo, o AG mostrou que ele foi composto por aço e epóxi e que o valor de *band gap* se deu na célula composta por 73% de aço e 27% de epóxi. Comparando estes resultados encontrados pelo AG com a Figura 20, feita sem otimização, é possível observar que a solução extraída pelo AG convergiu para o valor dado como máximo na resolução sem otimização.

Desta forma, comprova-se que o AG conseguiu buscar o valor ótimo para o cristal fonônico 1D modelo de barra simples através do método IPWE.

4.2 Cristal fonônico 1D modelo de Viga de Euler-Bernoulli Modelado com IPWE e AG

De maneira análoga, faz-se necessária uma análise em um ambiente delimitado também para o caso de viga, onde se conhecem as possíveis soluções ótimas para comparação com o processamento encontrado no algoritmo genético. A partir da Figura 24, ilustra-se um cristal fonônico 1D de viga de Euler-Bernoulli, composto por dois materiais, onde as cores laranja e cinza representam os materiais A e B, respectivamente.

Figura 24 - Representação esquemática de cristal fonônico 1D de viga de Euler-Bernoulli com células unitárias compostas por 2 materiais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 3 mostra as propriedades utilizadas para o estudo de viga. Para demonstração de que o AG funciona de forma assertiva independente da mudança das constantes, foi adotada uma geometria diferente para o estudo da viga, seção transversal circular, onde na barra foi utilizada uma área da seção transversal retangular.

Tabela 3 - Geometria do cristal fonônico 1D de viga e propriedades dos materiais utilizados.

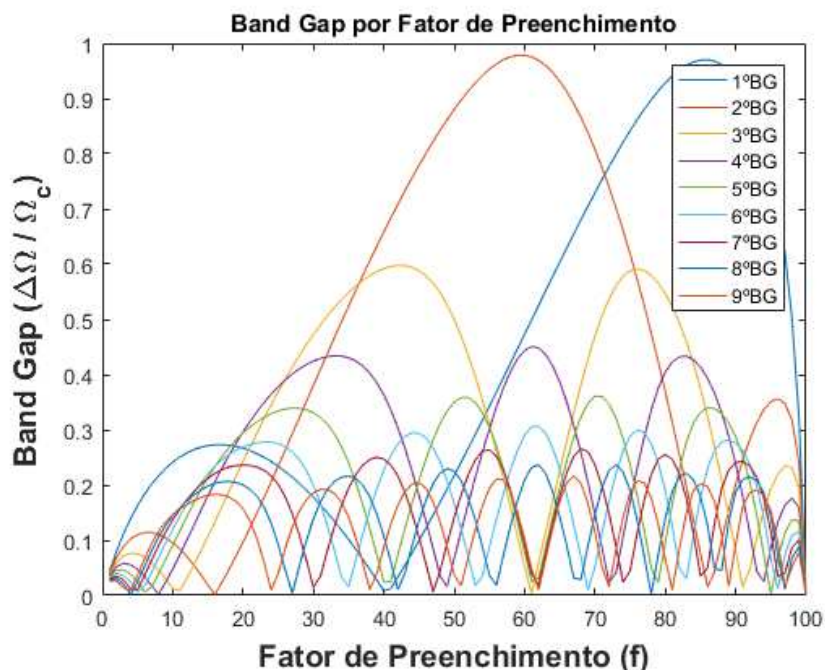
Geometria/Propriedades	Valor
Tamanho da célula unitária (L_C)	0,0424 m
Raio da seção transversal	$9,45 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
Área da seção transversal ($S = \pi r^2$)	$2,8 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Momento de Inercia ($I = \frac{\pi r^4}{4}$)	$6,2635 \times 10^{-9} \text{ m}^2$
Densidade ($\rho_{\text{Alumínio}}, \rho_{\text{Epóxi}}, \rho_{\text{Aço}}$)	$2730 \text{ kg/m}^3, 1180 \text{ kg/m}^3, 7780 \text{ kg/m}^3$
Modulo de Young ($E_{\text{Alumínio}}, E_{\text{Epóxi}}, E_{\text{Aço}}$)	$77,6 \text{ N/m}^2, 4,35 \text{ N/m}^2, 210,6 \text{ N/m}^2 \times 10^9$

Fonte: Elaborado pelo autor.

De maneira análoga aos cristais fonônicos 1D de barra simples, no modelo de viga de Euler-Bernoulli também se utiliza os conceitos de frequência reduzida e de cálculo do *band gap* através da frequência normalizada. Vale ressaltar que a frequência reduzida Ω que é utilizada para o cálculo, no caso de viga de Euler-Bernoulli, possui uma particularidade. Nesta solução, alguns termos da Equação 24 estão na forma quadrática, o que torna necessária elevar o termo L_C ao quadrado para que a solução se torne independente do tamanho da célula unitária. Desta forma, a frequência reduzida pode ser calculada pela relação $\Omega = \frac{\omega L_C^2}{2\pi C_L}$, onde se optou por utilizar a velocidade longitudinal mesmo para o caso de viga.

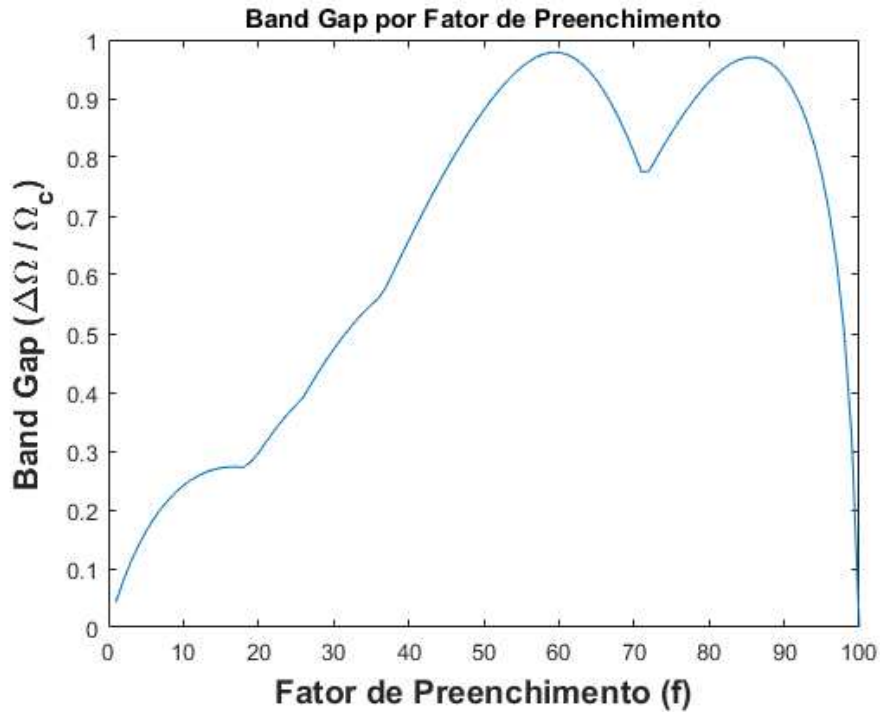
Com isso, inicialmente precisa-se fazer a análise manual com a variação dos materiais, Tabela 3, para posteriormente comparar aos resultados obtidos com o AG, semelhante ao feito no modelo de barra simples. Desta forma, nas Figuras 25 a 29, são apresentados os resultados do cálculo de todos os *band gaps*, utilizando a normalização, para as combinações de materiais aço e epóxi (caso 1), alumínio e epóxi (caso 2) e alumínio e aço (caso 3).

Figura 25 - Variação da largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).



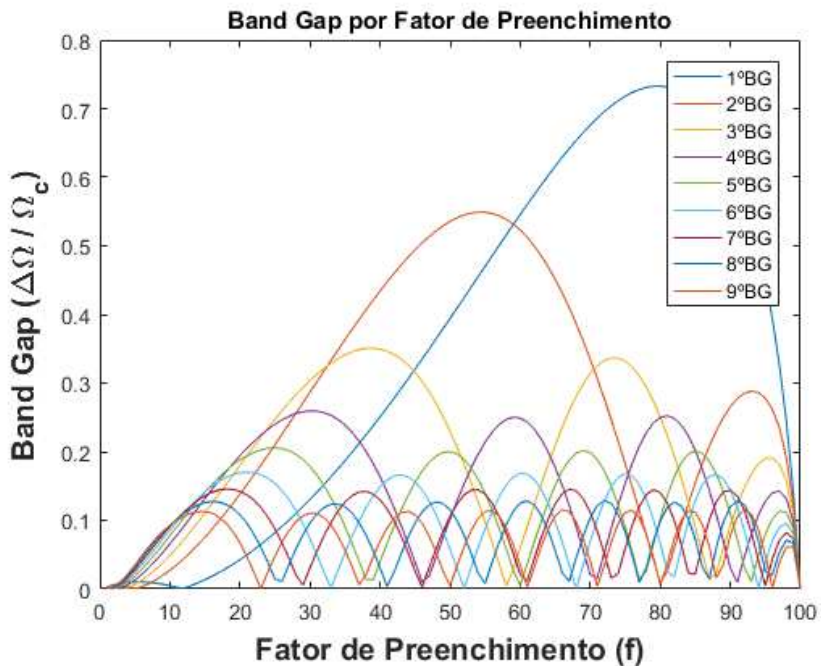
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando aço e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 1).



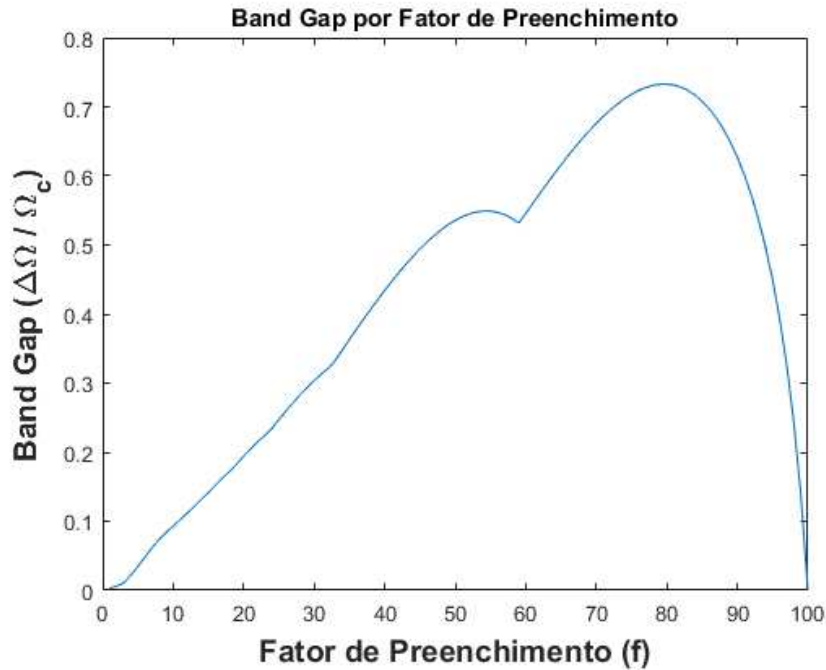
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 - Variação da largura dos band gaps em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros band gaps presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).



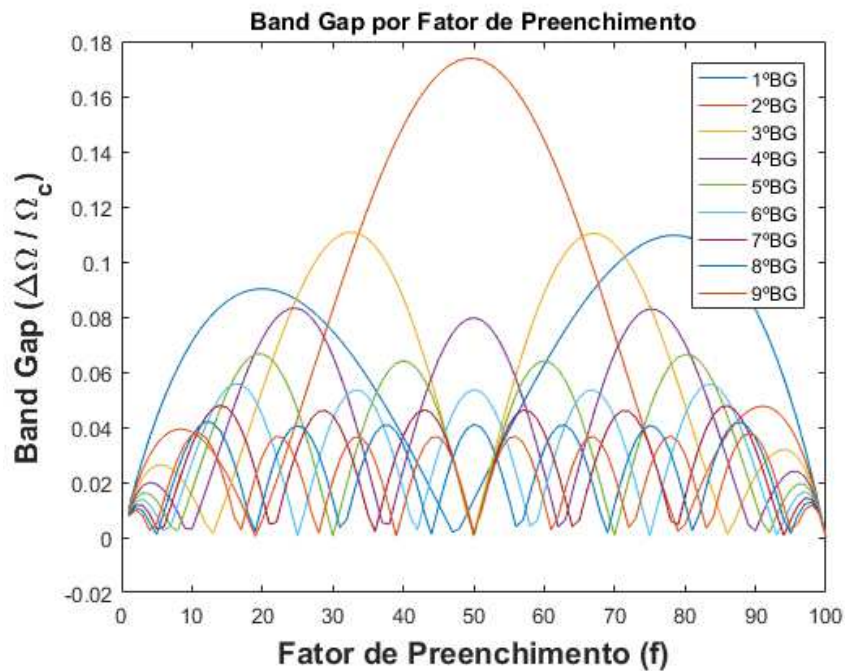
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e epóxi e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 2).



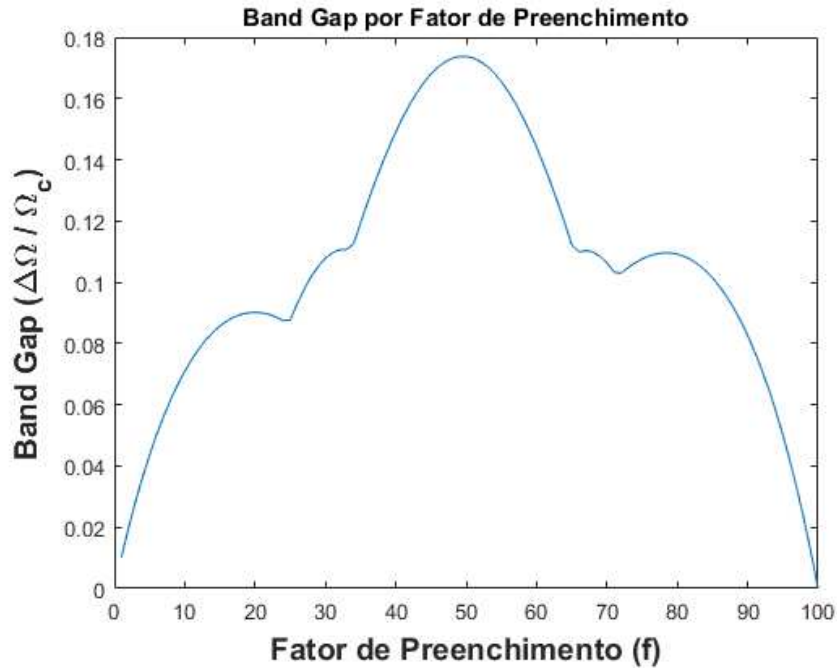
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 - Variação da largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).



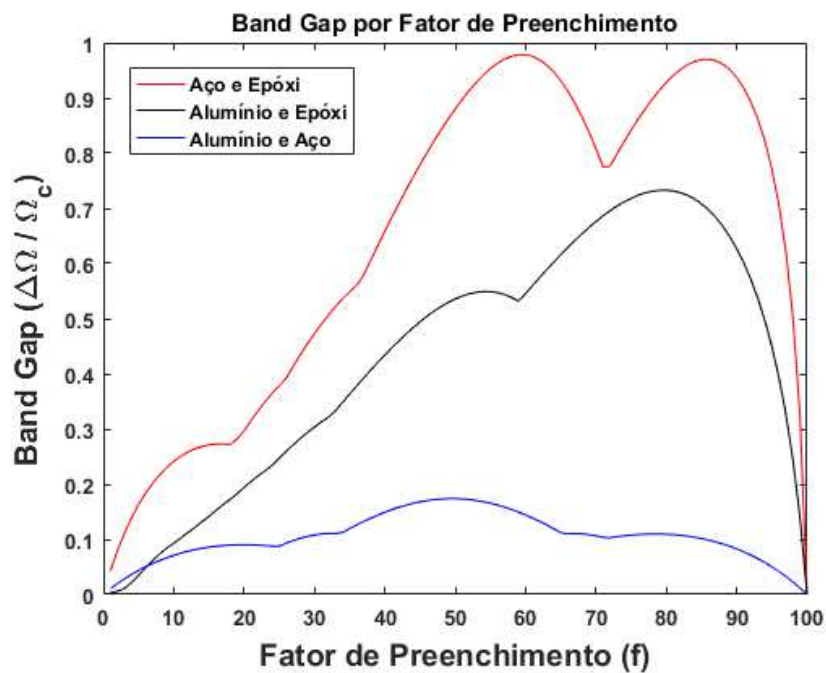
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de viga utilizando alumínio e aço e considerando IPWE com 10 ondas (Caso 3).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 31 - Melhores valores de largura dos *band gaps* em função do fator de preenchimento para os 9 primeiros *band gaps* presentes em um cristal fonônico 1D de viga considerando IPWE com 10 ondas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, tem-se que a melhor combinação será o do aço com epóxi, com um *band gap* próximo de 1,0 e um fator de preenchimento próximo de 50% e 85%. A partir da Figura 31, é observado o resumo dos melhores *band gaps* para o caso de viga com as combinações de aço e epóxi, alumínio e epóxi e alumínio e aço.

Para o caso de viga de Euler-Bernolli, através da análise da Figura 31, é possível observar que em o caso 1 possui praticamente dois valores ótimos em sua extensão. Para estes casos, chame-se o problema de não convexo, uma vez que ele não irá convergir para um único ponto máximo ou resposta ótima. Para este caso em específico, devido comparação das respostas com e sem AG, é possível afirmar se a técnica de otimização conseguiu ou não alcançar um dos valores máximos e atestar sua eficiência, porém em casos mais complexos isso seria mais difícil. Para estes casos, já existem adequações ao AG para que ele consiga convergir a respostas de problemas não convexos (ARYANEZHAD e HERMATI, 2008). O algoritmo genético utilizado neste trabalho é limitado à resolução de problemas convexos, que foram os casos considerados neste trabalho, devido suas condições de contorno pré-definidas.

Aplicando o AG à solução do problema de autovalor da Equação 24, é possível verificar os *band gaps* do cristal fonônico. De acordo com a Figura 32, observa-se a evolução do algoritmo genético até chegar ao possível melhor indivíduo para o caso de viga.

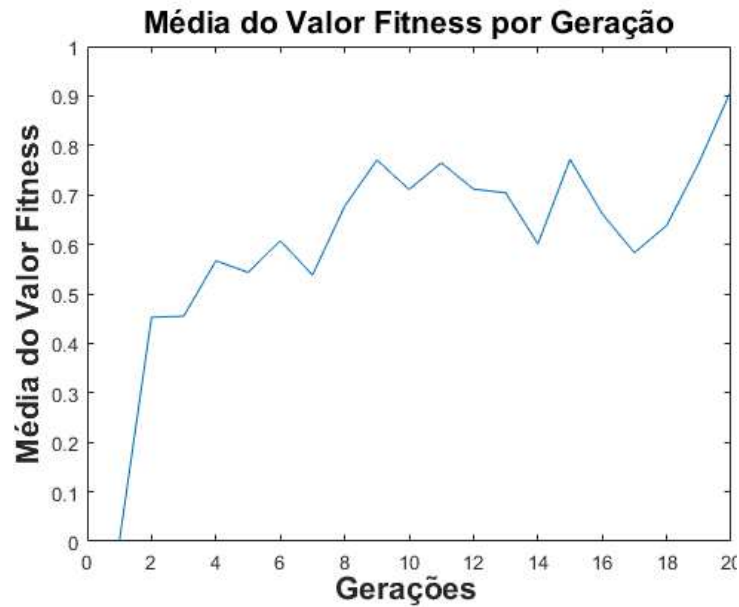
Figura 32 - Curva de evolução do algoritmo genético demonstrando a otimização do resultado pelas gerações.



Fonte: Elaborado pelo autor.

De maneira análoga ao caso de barra, observa-se a análise da média dos valores fitness por geração na Figura 33.

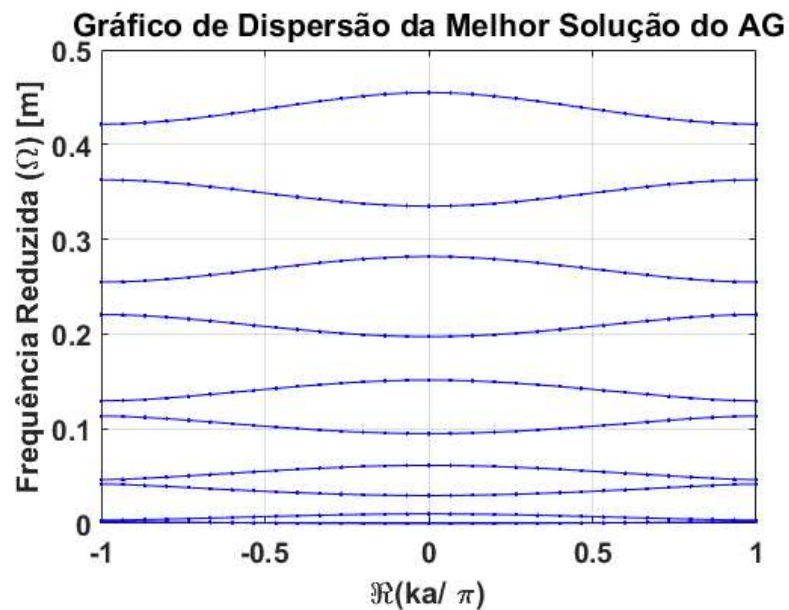
Figura 33 - Média do valor fitness por geração para o caso de viga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível observar a estrutura de banda do melhor indivíduo da última população, que obteve a banda proibida mais larga, normalizada em frequência expressos na Figura 34.

Figura 34 - Método IPWE com Algoritmo Genético. Estrutura da banda do cristal fonônico 1D de viga do melhor valor fitness, com $f = 59\%$, combinação Aço e Epóxi.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível observar na Figura 32 que o valor ótimo encontrado foi de $B_G = 0,9784$, sendo ele o melhor valor *fitness* da última geração criada pelo algoritmo genético. Após a escolha do melhor indivíduo, o AG mostrou que ele foi composto por aço e epóxi e que o valor desse *band gap* se deu na célula composta por 59% de aço e 41% de epóxi. Comparando estes resultados encontrados pelo AG com o da Figura 31, feita sem otimização, é possível observar que a solução extraída pelo AG convergiu para o valor dado como máximo na resolução sem otimização. A partir da Figura 34, observa-se a curva de dispersão do melhor indivíduo encontrado pelo AG.

Desta forma, prova-se que o AG conseguiu buscar o valor ótimo para o cristal fonônico 1D modelo de viga de Euler-Bernoulli através do método IPWE.

5 CONCLUSÃO

A convergência dos resultados apresentados pelos métodos IPWE e PWE mostram-se diferentes, onde o método PWE demora mais para convergir para um pequeno número de ondas planas. Desta forma, o resultado que poderíamos obter utilizando um determinado número de ondas planas poderia ser facilmente considerado incoerente, se comparado a outro trabalho similar com o número de ondas planas diferente. De forma análoga, foi feita a avaliação de convergência para o IPWE, que mostrou uma convergência elevada desde a aplicação de poucas ondas planas, o que levou a escolha deste método para aplicação do AG.

A partir deste estudo, foi possível observar que os métodos de projeto de cristais fonônicos (PWE e IPWE) ainda podem ser aprimorados com a aplicação do AG. Com esta aplicação, os cristais fonônicos podem alcançar *band gaps* mais largos. A partir da utilização do algoritmo genético com o IPWE, verificou-se a melhoria gradual das possíveis soluções para cada nova população gerada, chegando assim a um valor ótimo para uma determinada aplicação.

O fator de preenchimento e os materiais A e B foram as variáveis escolhidas para serem otimizadas pelo AG, sendo o fator de preenchimento variando de 0% a 100% e os materiais A e B podendo ser aço, alumínio e epóxi. Para o caso de barra simples foi encontrado um valor de $B_G = 1,408$, considerando o resultado independentemente do tamanho da célula L_C . O cromossomo escolhido como melhor solução tem como fator de preenchimento $f = 71\%$, material A como sendo aço e o material B como sendo epóxi. Vale ressaltar também que, a partir da 17ª geração, o valor do *band gap* se estabilizou como ótimo para o problema. Desta forma, foi possível observar que o AG conseguiu otimizar o problema do dimensionamento de cristais fonônicos para este modelo.

Para o caso de viga de Euler-Bernoulli, foi encontrado um valor de $B_G = 0,9784$, considerando o resultado independentemente do tamanho da célula L_C . O cromossomo escolhido como melhor solução tem como fator de preenchimento $f = 59\%$, sendo também o material A como aço e o material B como epóxi. Vale ressaltar também que a partir da 15ª geração o valor do *band gap* se estabilizou no resultado encontrado como ótimo para o problema. Desta forma, foi possível observar que o AG

também conseguiu otimizar o problema do projeto de cristais fonônicos para este modelo.

Vale ressaltar que o trabalho não levou em consideração a aplicação de algoritmo genético com adequações para problemas não convexos, desta forma delimitou-se o objeto de estudo para avaliar a eficácia do AG para estes casos específicos, porém o AG mostrou bons resultados, mesmo sem uma análise de convexidade.

A proposta para trabalhos futuros são as aplicações de modelos mais complexos de cristais fonônicos, abrangendo os cristais fonônicos 2D e 3D, fazendo a comparação entre métodos semi-analíticos também utilizados na literatura como o *extended plane wave expansion* (EPWE) e também a aplicação de AG para modelos não convexos aplicados aos métodos utilizados neste trabalho e comparados com os resultados do AG convencional.

REFERÊNCIAS

ANJOS, V., ARANTES, A. Phononic band structure in carbon microtube composites. **RSC Advances**, 5, p. 11248-11253, 2015.

ARYANEZHAD M. B., HERMATI, M. A new genetic algorithm for solving nonconvex nonlinear programming problems. **Applied Mathematics and Computation**, 199(1), p. 186-194, 2008.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: Theory, methods, and applications**. [s.l.] Springer Verlag, 2003. p. 370.

BLICKLE, T.; THIELE, L. A comparison of selection schemes used in genetic algorithms. TIK-Report 11, TIK Institut für Technische Informatik und Kommunikationsnetze. **Computer Engineering and Networks Laboratory, ETH, Swiss Federal Institute of Technology, Gloriastrasse**, v. 35, n. 8092, p. 279-284, 1995.

CAMPOS, M. M., AND SAITO, K. **Sistemas inteligentes em controle e automação de processos**. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2004.

CAO, Y.; HOU, Z. and LIU, Y. Convergence problem of plane-wave expansion method for phononic crystals. **Physics Letters A**, 327, 247-253, 2004.

DONG H. W.; WANG, Y. S.; ZHANG, C. Inverse design of high-Q wave filters in two-dimensional phononic crystals by topology optimization. **Ultrasonics**, 76, p. 109-124, 2017.

EIBEN, A. E.; SCHOENAUER, M. Evolutionary computing, **Information Processing Letters**, 82, p. 1-6, 2002.

ELFORD, D. P. **Band gap formation in acoustically resonant phononic crystals**, 2010. 190 p. Ph. D. thesis, Loughborough University, Leicestershire, UK, 2010.

FABRO, J. A. **Uma abordagem neuro-nebulosa para controle preditivo de processos multi-estágios**. 2003. 189 p. Tese de doutorado, Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, Curitiba, PR, 2003.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First course in finite elements**. 4th. ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2007.

GIANNAKIS, G. B.; SERPEDIN, E. A bibliography on nonlinear system identification. **IEEE Transactions Signal Processing**, 81 (3), p. 533-580, 2001.

GOLDGERB, D. E. **Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning**. Adison-Wesley. Ann Arbor, 1989.

GONÇALVES, A. A. **Estudo da Condutividade Térmica de Cristais Fonônicos em Temperaturas Sub-Kelvin**, 2016. 66 p. Tese de doutorado, Universidade Federal de Juiz de Fora, Maranhão, Juiz de Fora, MG, 2016.

GORISHNYI, T., ULLAL, C.K., MALDOVAN, M., FYTAS, G., THOMAS, E.L. Hypersonic phononic crystals. **Physical Review Letters**, 94(115501), p. 1-4, 2005.

HAUPT, R. L.; HAUPT, S. E. **Practical genetic algorithms**, second edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2004.

HOSSEINABADI, A. A. R.; VAHIDI, J.; SAEMI, B.; SANGAIAH, A. K. Extended genetic algorithm for solving open-shop scheduling problem. **Soft Computing**, 23, p. 5099-5116, 2019.

HUANG, J., SHI, Z. Attenuation zones of periodic pile barriers and its application in vibration reduction for plane waves. **Journal of Sound and Vibration**, 332, p. 4423-4439, 2013.

JENSEN, J.S. Phononic band gaps and vibrations in one and two dimensional mass-spring structures. **Journal of Sound and Vibration**, 266, p. 1053-1078, 2003.

JONG, K.D.; SPEARS, W. On the state of evolutionary computation. **Fifth International Conference on Genetic Algorithms**, USA, 1993, p. 618-623.

KUSHWAHA, M.; HALEVI, P.; DOBRZYNSKI, L.; DJAFARI-ROUHANI, B. Acoustic band structure of periodic elastic composites. **Physical Review Letters**, 71, p. 2022-2025, 1993.

KUSHWAHA, M.; HALEVI, P. and MARTÍNEZ, G. Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. **Physical Review B**, 49, p. 2313-2322, 1994.

KUSHWAHA, M. Classical band structure of periodic elastic composites. **International Journal of Modern Physics B**, 10, p. 977-1094, 1996.

LAUDE, V. **Phononic crystals: Artificial crystals for sonic, acoustic, and elastic waves**. De Gruyter, 2015.

LEE, J. E.; GEN, M.; RHEE, K. G. Network model and optimization of reverse logistics by hybrid genetic algorithm. **Computers & Industrial Engineering**, 56(3), p. 951-964, 2009.

LEE, J.H.; KOH, C.Y.; SINGER, J.P.; JEON, S.J.; MALDOVAN, M.; STEIN, O.; THOMAS, E.L. 25th Anniversary article: **Ordered polymer structures for the engineering of photons and phonons**. *Advanced Materials*, 26, 2014, p. 532-569.

Li, X., Ning, S., Liu, Z., Yan, Z., Luo, C., Zhuang, Z. Designing phononic crystal with anticipated band gap through a deep learning based data-driven method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 361, p. 112737, 2020.

LI, L. Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. **Journal of the Optical Society of America A**, 13, p. 1870-1876, 1996.

LIU D.; TAN Y.; YU Z. Training deep neural networks for the inverse design of nanophotonic structures, **ACS Photonics**, 5(4), p. 1365-1369, 2017.

LIU, Z.F.; WU B.; HE C.F. Band-gap optimization of two-dimensional phononic crystals based on genetic algorithm and FPWE, **Wave in Random and Complex Media**, 24(3), p. 286-305, 2014.

LOPES, H. S. Algoritmos genéticos em projetos de engenharia: aplicações e perspectivas futuras. **Anais do 4º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente** (1999), 64-74.

LUO, C. et al. Interactive inverse design of layered phononic crystals based on reinforcement learning. **Extreme Mechanics Letters**, p. 100651, 2020.

MALDOVAN, M. Sound and heat revolutions in phononics. **Nature**, 503(7475), p. 209-217, 2013.

MICHALEWICZ, Z. **Genetic algorithms + data structures = Evolution programs**. Springer-Verlag, New York, 1996.

MIRANDA JR., E. J. P. **Dynamic analysis of phononic crystals and elastic metamaterials using semi-analytical and numerical approaches**, 2018. 77 p. Doc thesis, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2018.

MITCHELL, M. **An introduction to genetic algorithms**. A Bradford Book. The MIT Press, London, 1997.

MURATA, T., ISHIBUCHI, H., TANAKA, H. Multi-objective genetic algorithm and its applications to flowshop scheduling. **Computers & Industrial Engineering**, 30(4), p. 957-968, 1996.

NGUYEN, B. H. et al. Tunable topological bandgaps and frequencies in a pre-stressed soft phononic crystal. **Journal of Applied Physics**, v. 125, n. 9, p. 095106, 2019.

NI, Z. Q. et al. Study on the convergence of plane wave expansion method in calculation the band structure of one-dimensional typical phononic crystal. **Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications**, v. 6, n. 1-2, p. 87-90, 2012.

OSMAN, I. H.; KELLY, J. P. **Meta-heuristics: Theory and applications**. Kluwer Academic Publishers Norwell, 1996.

PIRES, D. S. **Proposta de controle de nebuloso baseado em critérios de estabilidade no domínio do tempo discreto via algoritmo genético multiobjectivo**, 2013. 175 p. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, MA, 2013.

PIRES, D. S.; SERRA, G. L. O., Fuzzy digital PID controller design based on robust stability criteria, 2014 **12th IEEE International Conference on Industrial Informatics (INDIN)**, Porto Alegre, 2014, pp. 654-659.

QIU, C. and LIU, Z. Acoustic directional radiation and enhancement caused by band-edge states of two-dimensional phononic crystals. **Applied Physics Letters**, 89, p. 063106-063108, 2006.

SIGALAS, M. and ECONOMOU, E. Elastic and acoustic wave band structure. **Journal of Sound and Vibration**, 158, p. 377-382, 1992.

SIGALAS, M. and ECONOMOU, E. Band structure of elastic waves in two dimensional systems. **Solid State Communications**, 86, p. 141-143, 1993.

SIKORA, R. A genetic algorithm for integrating lot-sizing and sequencing in scheduling a capacitated flow line. **Computers & Industrial Engineering**, 30(4), p. 969-981, 1996.

SRIKANTHA, P.; HUSSEIN, M.I. **Dynamics of lattice materials**. John Wiley & Sons Ltd., 2017.

TOL, S.; DEGERTEKIN, F. L.; ERTURK, A. 3D-printed phononic crystal lens for elastic wave focusing and energy harvesting. **Additive Manufacturing**, v. 29, p. 100780, 2019.

WEILE, D. S.; MICHIELSEN, E. Genetic algorithm optimization applied to electromagnetics: a review, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, 45(3), p. 343-353, 1997.

XIAO, Y., WEN, J., WEN, X. Sound transmission loss of metamaterial-based thin plates with multiple subwavelength arrays of attached resonators. **Journal of Sound and Vibration**, 331, p. 5408-5423, 2012.

XIE, L., XIA, B., LIU, J., HUANG, G., LEI, J. An improved fast plane wave expansion method for topology optimization of phononic crystals. **International Journal of Mechanical Sciences**, 120, p. 171-181, 2017.

YANG, Z., DAI, H.M., CHAN, N.H., MA, G.C. Acoustic metamaterial panels for sound attenuation in the 50-1000 Hz regime. **Applied Physics Letters**, 96(041906), p. 1-3, 2010.

YI, G.; YOUN, B.D. A comprehensive survey on topology optimization of phononic crystals. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 54, p. 1315-1344, 2016.

YU, K., CHEN, T., WANG, X. Band gaps in the low-frequency range based on the two-dimensional phononic crystals plates composed of rubber matrix with periodic steel stubs. **Physica B**, 416, 2013, p. 12-16.

ZHANG, Y.; NI, Z.; HAN, L.; ZHANG, Z.-M.; JIANG, L. Flexural vibrations band gaps in phononic crystal Timoshenko beam by plane wave expansion method. **Optoelectronics and Advanced Materials – Rapid Communications**. 2012, 1049-1053.

ZHI, H.; LIU, S. Face recognition based on genetic algorithm. **Journal of Visual Communication and Image Representation**, 58, p. 495-502, 2019.

ZHOU, X.Y.; XU, S.Z.; LIANG, B. and CHENG, J.C. Modulation of the bandgaps of in-plane elastic waves by out-of-plane wavenumber in the piezoelectric composite structures. **Smart Materials and Structures**, 20, p. 035009-035016, 2011.