UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CÂMPUS BALSAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

EDUARDO SILVA FEITOSA

A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS JOGOS DE AZAR

Balsas
2024

EDUARDO SILVA FEITOSA

A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS JOGOS DE AZAR

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Campus Balsas da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito básico para a conclusão do Curso de Matemática Licenciatura.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa

Balsas

2024

F311m

Feitosa, Eduardo Silva

A matemática por trás dos jogos de azar. / Eduardo Silva Feitosa .– Balsas, 2024.

65 f.

Monografia (Graduação em Matematica) Universidade Estadual do Maranhão – UEMA / Balsas, 2024.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa

1. Jogos de Azar. 2. Probabilidade. 3. Cassino. I. Título.

CDU: 51(043)

Elaborado pela bibliotecária Maria da Consolação Coelho Rocha CRB 13/604

EDUARDO SILVA FEITOSA

A MATEMÁTICA POR TRÁS DOS JOGOS DE AZAR

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do *Campus* Balsas da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito básico para a conclusão do Curso de Matemática Licenciatura.

Aprovado em: 06 / 03 / 2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa (Orientador)
Doutor em Física e Astronomia
Universidade Estadual do Maranhão

Lusitonia da Silva Leite

Profa. Dra. Lusitonia da Silva Leite
Doutora em Educação, Ciências e Matemática
Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dr. Sergio Noleto Turibus
Doutor em Engenharia Nuclear na área de Física Nuclear Aplicada
Universidade Estadual do Maranhão

Dedico esta monografia a Deus, a meus pais, a meus colegas de turma e a todos os que amam a matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e salvação, pela saúde e forças para a conclusão dessa monografia e consequentemente da graduação.

Agradeço aos meus pais pelo total apoio no curso de Matemática e todo o suporte durante os tempos difíceis da pandemia, me guiando para terminar a graduação.

Agradeço ao meu professor orientador Antônio Nilson por me incentivar a cursar licenciatura na minha cidade natal, e consequentemente a me ajudar a finalizar a monografia, fechando um ciclo de muitos que virão.

Agradeço a OBMEP por me abrir portas para as novas descobertas da Matemática e ao Instituto TIM pelo apoio financeiro durante a minha graduação, assim garantindo a minha permanência dentro da universidade.

Agradeço ao finado *Fusajiro Yamauchi* pela criação da empresa *Nintendo*, me possibilitando de conhecer mais sobre jogos de azar durante a minha infância, que mais de 10 anos depois se converteu nessa monografia.

Agradeço aos meus colegas de classe e à turma de 2019 que me "adotaram", assim me sentindo parte da família UEMA.

Agradeço aos meus professores por todos os ensinamentos durante esses 4 anos, que auxiliaram a moldar meu caráter como cidadão.

Agradeço à Universidade Estadual do Maranhão por me dar todo o suporte necessário para estar efetivando o curso, e assim formando novos professores. É vero afirmar que eu saio da UEMA, todavia a UEMA não sairá de mim.

Mas busquem em primeiro lugar, o Reino de Deus e a sua justiça, e todas estas coisas lhes serão acrescentadas.

Mateus 6:33

RESUMO

Este estudo foi concebido a partir da aspiração, originada ao final do ensino médio, de apresentar um artigo científico que estabelecesse uma relação entre jogos eletrônicos sobre cassinos, vivenciados durante a infância, e explorasse o tema que entrelaça jogos de azar e Matemática, convergindo duas áreas de interesse pessoal. A pesquisa buscou compreender o contexto histórico por meio da análise de artigos em *websites* e periódicos que abordam diversas modalidades de apostas, tanto aquelas amplamente difundidas por meios de comunicação de grande alcance quanto as praticadas clandestinamente no Brasil. A análise das regras de cada jogo destacado foi acompanhada de um estudo aprofundado, visando identificar os conceitos matemáticos mais relevantes em cada modalidade. Nesse contexto, foram investigadas probabilidades, valores de premiação, chances reais de lucro e outros tópicos correlacionados. A pesquisa demonstrou que a Matemática pode ser uma ferramenta valiosa para os apostadores em jogos de azar, proporcionando *insights* para estratégias mais informadas. Além disso, revelou-se que a análise matemática destas práticas também evidencia os lucros obtidos pelas casas de apostas, estimulando os apostadores a almejarem ganhos mais inacessíveis.

Palavras-chave: jogos de azar; probabilidade; cassino.

ABSTRACT

This study was conceived based on a high school end-of-year dream of presenting a scientific paper that establishes a connection between electronic games about casinos, experienced during childhood, and explores the theme that intertwines gambling and mathematics, merging two areas of personal interest. The research sought to understand the historical context through the analysis of articles on websites and periodicals that address various types of bets, both those widely disseminated through mainstream media and those practiced illegally in Brazil.The analysis of the rules of each highlighted game was accompanied by an in-depth study, aiming to identify the most relevant mathematical concepts in each modality. In this context, probabilities, prize values, real chances of profit, and other related topics were investigated. The research demonstrated that mathematics can be a valuable tool for gamblers in games of chance, providing insights for more informed strategies. Furthermore, it was revealed that the mathematical analysis of these practices also highlights the profits obtained by betting houses, encouraging gamblers to aspire to more inaccessible gains.

Keywords: gambling; probability; casino.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Ômega
$\in$	Pertence
$\vert$	Qualquer
$\geq$	Maior ou igual a
N	Números naturais
$\times$	Multiplicação
$=$	Igual a
$+$	Mais
$!$	Fatorial
A	Arranjo
AR	Arranjo com repetição
C	Combinação
CR	Combinação com repetição
$\forall$	Qualquer
$\cup$	União
$\cap$	Intersecção
$\%$	Porcentagem
$\approx$	Aproximadamente
$\cong$	Aproximadamente igual a
$R\$$	Reais
$>$	Maior que
$\Rightarrow$	Então

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática contemporânea é resultado de um processo que envolveu diversas contribuições de estudiosos, entre os quais se destacam *Blaise Pascal*[1] e *Pierre Laplace*[2]. Suas colaborações abrangeram várias áreas, sendo a probabilidade, sem dúvida, uma das mais relevantes nos estudos cotidianos. A consolidação da ciência e o avanço de tecnologias que utilizam cálculos complexos foram amplamente fundamentados nas teorias desenvolvidas por esses dois cientistas.

Há registros na história que os jogos de azar[3] são muito antigos, e mostram a presença destes há mais de 4000 anos. Portanto, é uma aplicação de destaque no estudo da Matemática, de modo especial à probabilidade. Tal importância foi se divulgando cada vez mais com a popularização desse tipo de jogo no Brasil, uma vez que permitiu algumas ações conjuntas de flexibilização entre os governantes e organizadores desse tipo de evento.

Os jogos de azar vão além do entretenimento, pois abrem várias vias para análises matemáticas complexas. A Matemática é crucial para a compreensão e a elaboração de estratégias, visando a probabilidade de cada jogo. Assim há uma compreensão mais aprofundada dos motivos que determinam o sucesso, além de padrões que auxiliam os jogadores. Percebe-se que a Matemática permeia a prática desses jogos como também contribui para o enriquecimento do lado teórico. Assim, a correlação entre a Matemática e os jogos de azar auxiliam nos avanços científicos, progredindo a teoria e a prática, já que a tecnologia está cada vez mais interligada.

Para demonstrar a aplicação da Matemática nos jogos de azar, pode-se citar alguns exemplos de modalidades que envolvem cálculos de probabilidade, como o pôquer e a loteria. Em cada um desses jogos, há um conjunto de

---

[1] Foi um filósofo, matemático, físico e escritor francês que viveu no século XVII, conhecido por suas contribuições para a ciência, a religião e a literatura.
[2] Foi um matemático, astrônomo e físico francês que viveu no século XVIII. Ele é considerado um dos fundadores da mecânica celeste.
[3] São atividades nas quais os participantes apostam dinheiro ou bens em eventos cujos resultados são predominantemente determinados pelo acaso, sem influência significativa de habilidades pessoais.

possibilidades, eventos e resultados que podem ser analisados matematicamente, usando fórmulas, tabelas e gráficos. Por exemplo, na roleta, é possível calcular a probabilidade de sair um número par, ímpar, vermelho, preto, alto ou baixo, usando a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. No pôquer, pode-se calcular a probabilidade de obter uma determinada combinação de cartas, como um par, uma trinca, ou uma quadra, usando a análise combinatória e o princípio da contagem. Na loteria, é intuitivo calcular a probabilidade de acertar todos os números sorteados, usando-se regras conhecidas.

Esses são apenas alguns exemplos de como a Matemática pode ajudar a entender e a praticar melhor alguns jogos de azar que serão abordados. Nesse contexto, a compreensão dessa relação de como a Matemática auxilia no conhecimento acadêmico, ajuda a agir de forma prudente, e assim podendo ser exportado para futuras práticas regulatórias governamentais. Desta maneira, a interação entre a Matemática e os jogos de azar são interessantes para um estudo mais abrangente e que colabora com a ascensão de estudos na comunidade acadêmica e da sociedade como um todo.

Esta pesquisa se fundamentou em uma extensa revisão bibliográfica, englobando livros didáticos, artigos científicos, colunas em sites de apostas e vídeos do *YouTube*, visando compreender o contexto histórico e as normativas associadas a cada jogo de azar. Após a coleta desses dados, procedeu-se à análise detalhada dos cinco jogos selecionados, envolvendo a elaboração de cálculos relativos a premiações, probabilidades de obtenção de resultados específicos, bem como a avaliação dos benefícios ou malefícios inerentes a tais modalidades, além da consideração de sua conformidade com a legislação vigente.

2 HISTÓRIA DOS JOGOS DE AZAR

2.1 Origem

Embora não se tenha uma data concreta para o surgimento dos jogos de azar, estudos arqueológicos citados por Taylor (2011) indicam que as nações mais antigas a se envolverem com esse tipo de modalidade foram os egípcios, pois se entretinham com uma espécie de jogo de dados, enquanto os chineses brincavam com azulejos, assim se tornando o conhecido *Mahjong*[4].

Figura 1 - Pessoas em um tabuleiro de Mahjong

Fonte: HackingChinese (2023).[5]

Taylor (2011) aponta que o livro baseado na obra *The Book of Songs*[6] referenciava várias formas de desenho em madeira, sendo assim uma das formas primitivas dos jogos de loterias, o qual visava financiar a construção da Grande Muralha da China. Outras civilizações também começaram a praticar em massa esse tipo de entretenimento, por exemplo, os soldados gregos e romanos costumavam apostar através de jogos de dados a fim de ficarem mais entretidos o que mitigava o estresse causado pelas batalhas. A fim de evitarem roubos, eles inventaram as primeiras versões das famosas fichas[7], a fim de facilitarem a aposta personalizada em vez de carregarem grandes quantias.

[4] É um jogo de tabuleiro originário da China, geralmente jogado por quatro jogadores. O jogo envolve um conjunto de 144 peças decoradas, conhecidas como "telhas", que são embaralhadas e distribuídas entre os jogadores.
[5] Disponível em: https://bit.ly/49AkoPE. Acesso em 13 Fev. 2024.
[6] ARTHUR, Waley. **The Book of Songs**: The Ancient Chinese Classic of Poetry. Reino Unido: [*s. n.*], 1996. 400 p. ISBN 0802134777.
[7] São discos ou moedas usados como representação de valor nos cassinos.

Ainda nessa cronologia, Taylor (2011) afirma que os primeiros cassinos[8] como se conhece hoje surgiram em 1638 na Itália, porém a sua popularização a nível global surgiu na cidade *de Las Vegas* nos EUA no século XX. Uma imagem icônica à nível de cinema eram a zona urbana super iluminada como hotéis-cassinos brilhantes, atraindo o olhar de um público curioso.

Figura 2 - Vista interna de um cassino

Fonte: Cadastur (2022).[9]

2.2 Contexto no Brasil

Segundo Carta (2022), os jogos de azar eram legalizados no Brasil até o ano de 1946 durante o governo do ex-presidente Getúlio Vargas, e assim cidades como Rio de Janeiro, Santos, Petrópolis e São Paulo eram grandes atrativos para pessoas com grande poder aquisitivo para se entreterem e fomentar o turismo nessas regiões. Todavia, conforme Henriques (2008), o ex-presidente Eurico Dutra argumentando que o jogo de azar era uma forma de destruir o ser humano sancionou o Decreto-Lei 9215[10] assim proibindo a maioria das formas de jogos de azar no Brasil. Isso não mitigou as atividades ilegais, já que, com o advento da *internet*, diversas formas de jogos de azar se tornaram mais populares e acessíveis à população. Segundo Passarinho (2023), a Lei nº 13.756 de 2018 abriu caminho para a operação de sites de apostas esportivas que

---

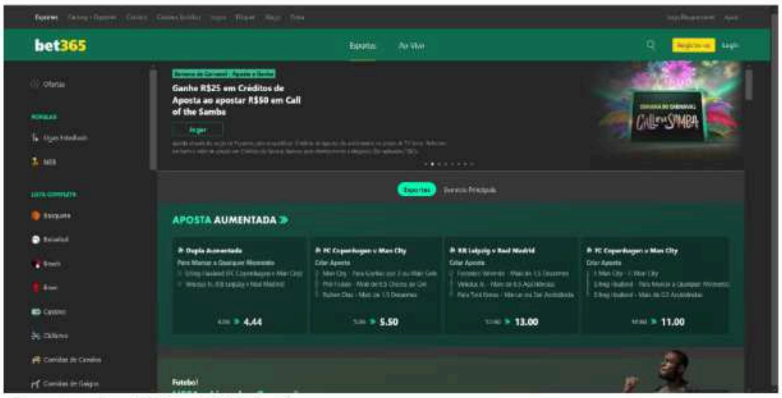
[8] São estabelecimentos de entretenimento que oferecem uma variedade de jogos de azar e atividades de apostas.

[9] Disponível em: https://www.agenciatodosabordo.com.br/post/cassinos-nos-cruzeiros-como-funciona. Acesso em: 13 Fev. 2024.

[10] Sancionado em 30 de abril de 1946, proíbe a prática ou exploração de jogos de azar em todo o território nacional.

deram um crescimento estrondoso a ponto de patrocinarem diversos times de futebol, porém a regulamentação nunca saiu de fato[11].

Figura 3 - Página inicial de um site de apostas esportivas



Fonte: Bet365 (2024).[12]

2.3 Efeitos decorrentes dos jogos de azar

Devido a proibição da prática de jogos de azar pelas autoridades, muito se estuda sobre as consequências psíquicas de se viciar com jogos de azar, justificando sua proibição. Pode-se afirmar que:

> Apesar de existir, há muito tempo, entre as mais diversas culturas, os jogos de azar ainda seduzem milhares de pessoas através do lúdico combinado à sorte, bem como ao prazer associado às probabilidades do “ganhar”. Entretanto, em determinados casos, ele pode conduzir o indivíduo a desenvolver sérios problemas psíquicos e sociais, assumindo a forma de uma patologia: o jogo patológico. (Omais, 2007, p.17).

No âmbito familiar, é notório que:

> O transtorno do jogo patológico provoca impactos sobre as relações familiares, desestruturando e fragilizando o vínculo entre os membros da família, além de ter outras implicações. Tais consequências irão repercutir não só na qualidade dos relacionamentos, como sobre a própria pessoa, levando-a a um isolamento maior dos seus pares. Esse transtorno produz efeitos sobre os vários subgrupos familiares: no relacionamento conjugal, no relacionamento com os filhos e no relacionamento com a família de origem. (Omais, 2007, p. 123).

Dessa maneira, embora haja a consciência sobre riscos iminentes para a saúde mental ao hábito de jogar, para além do prazer de entretenimento com os

[11] Até a finalização dessa monografia.
[12] Disponível em: https://www.bet365.com. Acesso em: 13 Fev. 2024.

jogos de azar, esse ainda é um assunto muito questionado, mas precisa ser cada vez mais explorado no âmbito da Matemática, especialmente na Educação Básica, pois envolve diversos campos de estudo da contagem e probabilidade.

2.4 Casino kid 2

Pode-se obter informações relevantes do funcionamento de algumas modalidades do cassino, segundo a *Wikipedia* (2005), através um jogo lançado em 1993 na América do Norte para *NES*[13], chamado *Casino Kid 2*. Este jogo fala sobre um apostador que obteve êxito em Las Vegas através da jogatina em cassinos, e seu objetivo era ganhar de vários *dealers*[14] ao redor do mundo.

Figura 4 - Tela inicial do jogo Casino Kid 2

Fonte: Sofel (1992)[15].

Assim, a pessoa que está jogando esse *game* precisa traçar estratégias para vencer as três modalidades presentes (*roulette*, pôquer e *blackjack*), tornando-se o melhor apostador do mundo dentro da história do jogo. As mecânicas do jogo ajudam a pessoa a encontrar as melhores formas de obter sucesso no jogo, como também estimular a pequenos cálculos matemáticos para a tomada de decisões.

---

[13] É a abreviação para *Nintendo Entertainment System*. É um console de videogame de 8 bits lançado pela Nintendo. O NES foi lançado pela primeira vez no Japão em 1983 e, posteriormente, em outras regiões, incluindo América do Norte e Europa.

[14] É a pessoa encarregada de distribuir as cartas durante um jogo de cartas ou outras modalidades dentro dos cassinos.

[15] Disponível em: https://www.retrogames.cc/nes-games/casino-kid-2-usa.html. Acesso em 13 Fev. 2024.

3 REVENDO CONCEITOS

A fim de investigar as principais aplicações da Matemática dentro dos jogos de azar, é mister relembrar os assuntos e conceitos que são apresentados na educação básica, e assim revistos neste capítulo, agregando informações ao trabalho.

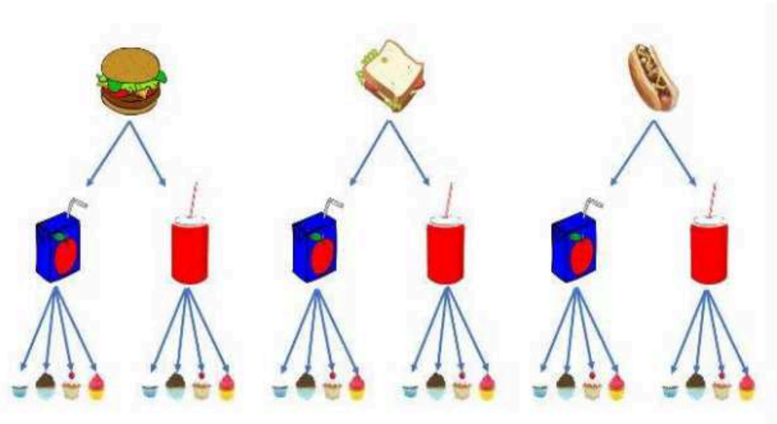
3.1 Contagem

3.1.1 Princípio fundamental da contagem

A fim de efetuar uma coleta de dados mais sistemática e poupar tempo, fazendo-se desnecessário elencar todo o espaço amostral, o princípio fundamental da contagem tende a facilitar o cálculo geral.

> Esse princípio afirma que, se eu preciso tomar mais de uma decisão e cada uma delas pode ser tomada de x, y, z maneiras, para sabermos a quantidade de formas que essas decisões podem ser tomadas simultaneamente, basta calcular o produto dessas possibilidades. (Oliveira, 2007).

Figura 5 - Ramo de possibilidades



Fonte: Toda Matéria (2014)[16]

Exemplo 1: Um restaurante universitário pretende preparar refrescos para os estudantes do campus. Há 3 opções de sabores (goiaba, acerola e caju) e há 3

---

[16] Disponível em: https://www.todamateria.com.br/analise-combinatoria/. Acesso em: 13 Fev. 2024.

opções de adoçantes (açúcar, stevia e puro). Quantas são as combinações para os sucos?

Solução: Pelo princípio multiplicativo, há ao todo $3 \times 3 = 9$ combinações de sucos, constando no quadro abaixo.

Quadro 1 - Combinações de adoçamento de sucos

	Goiaba	**Acerola**	**Caju**
Açúcar	Goiaba com açúcar	Acerola com Açúcar	Caju com Açúcar
Stevia	Goiaba com Stevia	Acerola com Stevia	Caju com Stevia
Puro	Goiaba Puro	Acerola Puro	Caju puro

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante ressaltar que o princípio multiplicativo também pode ser combinado com o princípio aditivo que consiste em somar vários eventos independentes.[17]

Exemplo 2: Em uma universidade há 2 restaurantes. O aluno pode optar por um deles para se alimentar. No primeiro restaurante há 2 opções de prato principal, 3 opções de carne e 2 opções de sucos. No segundo restaurante há 3 opções de prato principal, 3 opções de carnes e 4 opções de sucos. Se esse estudante só pode escolher 1 opção em algum dos dois restaurantes, de quantas maneiras ele pode escolher se alimentar?

Solução: Pelo princípio multiplicativo, o aluno pode almoçar de

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

maneiras no primeiro restaurante e de

$$3 \times 3 \times 4 = 36$$

maneiras no segundo restaurante. Como ele só pode escolher um dos restaurantes, ele terá soma das maneiras, resultando em

$$12 + 36 = 48$$

[17] A ocorrência de um evento não influencia a probabilidade de ocorrência do outro.

maneiras de se alimentar em um desses restaurantes.

3.1.2 Fatorial

Na análise combinatória é essencial ter a noção de alguns termos que vão ser aplicados constantemente nos exercícios. Suponha que uma criança esteja com quatro cartas nas mãos, cada uma com uma letra distinta e que forma a palavra “AMOR”. Se essa criança embaralhar as letras dessas cartas e manter em uma ordem crescente, é possível, por exemplo, formar a palavra “ROMA”. Note que é simples formar várias palavras (ou anagramas[18]) e contabilizar os resultados obtidos, todavia se uma criança estiver com uma quantidade maior de cartas nas mãos, o número de possiblidades aumenta substancialmente, e para isso uma “fórmula” ajuda a efetuar esse cálculo sem precisar contar manualmente, e assim, pode-se aplicar o princípio da permutação, como base os números fatoriais. Segundo Iezzi *et al*. (2016, v.2, p. 233), “Dado um número natural n, define-se o fatorial de n (indicado por $n!$).” O autor ainda elenca três regras para definir fatorial, que são:

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1, para\ n \geq 2.$$

Segundo Iezzi et al. (2016, v.2, p.234) afirma que “Dados n elementos distintos, chama-se permutação simples ou simplesmente permutação todo agrupamento ordenado (sequência) formado por esses n elementos.” O autor traz à tona a simbologia da permutação definida pela letra “P”. Dessa maneira, fica convencionado que:

$$P_0 = 0!$$

$$P_1 = 1!$$

[18] É uma palavra ou frase formada pela reorganização das letras de outra palavra ou frase, utilizando todas as letras originais exatamente uma vez.

$$\ldots$$

$$P_n = n!$$

Exemplo 1: Quantos anagramas podem ser feitos com a palavra “AMOR”?

Solução: Para a primeira letra há 4 possibilidades, para a segunda letra há 3 possibilidades, para a terceira letra há 2 possibilidades e para a primeira letra há 1 possibilidade. Logo há ao todo $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas como a palavra “AMOR”.

Figura 6 - Formando a palavra "Amor"

Fonte: Dreamstime (2022)[19]

Exemplo 2: Quantos anagramas podem ser formados com a palavra “DESLUMBRATIVO”?

Solução: São ao todo 13 letras nessa palavra, logo, pelo princípio da permutação há

$$P_{13} = 13 \times 12 \times 11 \times \cdots \times 2 \times 1 = 6.227.020.800$$

anagramas possíveis.

3.1.3 Arranjo e combinação

Na hora de analisar um enunciado que envolve análise combinatória, o autor pode se confundir com o modo de calcular determinadas possibilidades, uma das mais comuns é se o cálculo vai ou não considerar a ordem dos fatores.

[19] Disponível em: https://bit.ly/4btHRDE. Acesso em 13 Fev. 2024.

> Problemas de contagem são, muitas vezes, considerados difíceis entre alunos e professores, apesar de as técnicas matemáticas necessárias serem bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão. (Carvalho,2015, v.1, p.1)

Para delimitar esses cálculos, foi convencionado dois termos organizando a compreensão, sendo “arranjo” e “combinação”. Deste modo,

> Na matemática, a diferença fundamental entre arranjo e combinação é a ordem dos objetos. No arranjo a ordem dos objetos é muito importante, ou seja, os objetos devem obedecer uma ordem estipulada. Em contrapartida, no caso de uma combinação, a ordem não tem importância nenhuma. (Marques, 2018)

Carvalho (2015) classifica o cálculo matemático por volta de arranjo com a letra A e a combinação com a letra C. Dessa maneira, são obtidas as seguintes fórmulas, considerando todas as incógnitas como números naturais, sendo n a quantidade total de elementos disponíveis e r a quantidade de elementos escolhidos:

$$A_n^r = A_n^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_n^r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

Exemplo 1: Em um cofre eletrônico convencional é utilizado uma senha de bloqueio com 4 dígitos, escolhidos entre 0 ao 9, não sendo possível repetir os mesmos dígitos. De quantas maneiras possíveis pode ser escolhido essa senha?

Solução: Nesse enunciado, há 10 dígitos que podem ser escolhidos e há 4 elementos disponíveis para essa escolha, dessa forma como a ordem dos dígitos escolhidos altera a senha, tem-se um arranjo simples. Dessa maneira há

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

senhas possíveis dentro das regras estabelecidas.

Figura 7 - Desbloqueio de um cofre digital

Fonte: Menno (2018)[20]

Exemplo 2: Uma professora resolveu realizar uma prova em sua turma para escolher os 5 melhores alunos para ganharem um certificado de destaque, sendo todos os certificados com a mesma importância. Sabe-se que a turma possui 19 alunos. De quantas maneiras podem ser distribuídos esses certificados?

Solução: Nota-se que há uma delimitação da quantidade de alunos destaques. Como a ordem das notas dos 5 melhores alunos não interferem no valor desse certificado, o enunciado se trata de uma combinação simples. Portanto, os certificados podem ser distribuídos de

$$C_{19}^{5} = \frac{19!}{5! \times (19-5)!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{5!} = 11.628$$

maneiras distintas.

Todavia, o cálculo de arranjos e combinações também pode constar com repetições, e tais fórmula apresentadas não abrangem essa particularidade. Segundo Oliveira (2021) “Conhecemos como arranjo com repetição, ou arranjo completo, todos os reagrupamentos ordenados que podemos formar com parte dos elementos de um conjunto, permitindo repetições.”. Ele também afirma que combinação com repetição, conhecida também como combinação completa, são todos os agrupamentos não ordenados que se pode formar com parte dos elementos de um conjunto.

[20] Disponível em: https://www.menno.com.br/blog/7-cofres-pessoais-extremamente-seguros-para-proteger-seus-bens/. Acesso em 13 Fev. 2024.

Dessa maneira, quando há reincidência nas escolhas dos exercícios, as iniciais usadas são CR (Combinação com repetição) e AR (Arranjo com repetição), sendo as duas fórmulas definidas por:

$$AR_n^r = n^r$$

$$CR_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Exemplo 3: Uma prova de múltipla escolha é composta por 15 questões com 4 alternativas cada (A,B,C e D). De quantas maneiras um aluno pode marcar as questões dessa prova?

Solução: Note que nessa prova se um aluno marca A e B ou B e A, se trata de duas escolhas distintas, também pode repetir alternativas nas questões, logo há a possibilidade de repetição. Pela fórmula de arranjo com repetição há

$$AR_4^{15} = 4^{15} = 1.073.741.824$$

maneiras de marcar a prova.

Exemplo 4: Em uma feira, um feirante vende 5 tipos de frutas diferentes. Um cliente deseja comprar 7 frutas, não sendo obrigado a comprar todos os tipos. De quantas maneiras diferentes esse cliente pode comprar as frutas na feira?

Solução: Nota-se que a ordem que o cliente comprar as frutas não altera as quantidades de cada, como também ele pode comprar várias frutas do mesmo tipo. Dessa maneira se tem uma combinação por repetição, dessa maneira há

$$CR_5^7 = \frac{(7+5-1)!}{7!\,(5-1)!} = \frac{11!}{7! \times 4!} = 330$$

formas de comprar as frutas.

3.2 Probabilidade

Dentro do estudo de espaço amostral e eventos aleatórios, há uma delimitação sobre as chances de ocorrer determinado evento, que é o que se estuda na probabilidade, por definição:

> Seja $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ o espaço amostral finito de um experimento aleatório. Para cada $i \in \{1,2, \cdots, k\}$, consideremos o evento elementar ou unitário $\{a_i\}$. Vamos associar a cada um desses eventos um número real, indicado por $p(\{a_i\})$ ou simplesmente p_i, chamado probabilidade de ocorrência do evento $\{a_i\}$, tal que:
> $0 \leq p_i \leq 1, \forall i \in \{1,2, \cdots, k\}$
> $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Iezzi *et al*. (2016, v.1, p.257)

3.2.1 Espaço amostral

Para se efetuar uma pesquisa quantitativa[21], é essencial saber o objetivo desta, quais dados serão analisados e as métricas usadas para se efetuar a coleta de dados. Segundo Correa (2003, p.67) “a probabilidade só tem sentido no contexto de um espaço amostral, que é o conjunto de todos os resultados possíveis de um ‘experimento’.” Dessa maneira, há diversas formas de se organizar os dados do espaço amostral como tabelas e infográficos. O espaço amostral pode ser definido pela letra grega ômega (Ω), sendo que a mesma autora define que cada subconjunto pertencente a esse espaço amostral é denominado como evento aleatório.

Exemplo 1: Um dado não viciado[22] com 6 faces numeradas de 1 a 6 é jogado ao acaso. Quais são os possíveis números que podem ser sorteados?

[21] É uma abordagem metodológica utilizada na coleta e análise de dados que se concentra na quantificação e mensuração de variáveis por meio de métodos estatísticos.
[22] É aquele que tem a mesma probabilidade de mostrar cada uma das suas faces.

Figura 8 - Dado de seis faces

Fonte: Shopee (2024)[23]

Solução: Como os números desse dado seguem uma ordem crescente abrangendo todos os números desse intervalo, tem-se os números *1,2,3,4,5* e *6*. O espaço amostral será definido como:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Exemplo 2: O mesmo dado é jogado 2 vezes consecutivas. Quais serão as possíveis ordens de sorteios desse dado, ou seja, qual espaço amostral? Use como referência "(x,y)" com $\{x, y \in N \mid 1 \leq x \leq 6 \; e \; 1 \leq y \leq 6\}$.

Solução: Utilizando-se os mesmos conceitos do primeiro exemplo, ter-se-á o espaço amostral no quadro abaixo:

Quadro 2 - Espaço amostral do lançamento de dados

(x,y)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: Elaborado pelo autor.

[23] Disponível em: https://bit.ly/42HS2Av. Acesso em 13 Fev. 2024.

3.2.2 Probabilidade de um evento

Como visto anteriormente, um evento pode ocorrer de diversas maneiras possíveis. Segundo Iezzi *et al*. (2016), ao elencar os possíveis eventos e as maneiras, pode-se estabelecer uma razão entre o número de elementos prováveis *"n(E)"* e o número de elementos possíveis "n(Ω)", e este resultado é justamente a probabilidade do evento *P(A).*

Exemplo: Um icosaedro[24] não viciado possui vinte números inteiros não repetidos do 1 ao 20. Ao ser lançado, qual é a probabilidade de cair o número 3? E qual é a probabilidade de cair um número ímpar?

Solução: Como existe apenas 1 número três entre 20 números possíveis, a probabilidade de cair o 3 é de

$$\frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%.$$

Sabe-se que há dez números ímpares entre o 1 e o 20, portanto a probabilidade de cair um número ímpar é de

$$\frac{10}{20} = 0{,}5 = 50\%.$$

3.2.3 Probabilidade da união de dois ou mais eventos

Na ocorrência de múltiplos eventos, Iezzi *et al.* (2016) elenca eles em "eventos mutuamente exclusivos" e "ocorrência simultânea". No primeiro caso, caso haja vários eventos denominados A, B, C e assim por diante, tem-se que:

$$P(A \cup B \cup \cdots \cup Z) = P(A) + P(B) + \cdots P(Z)\ .$$

No segundo caso são excluídas as repetições para que os cálculos estejam corretos, assim, tem-se que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

[24] É uma figura geométrica tridimensional que possui 20 faces.

Exemplo 1: Em uma urna[25] há ao todo 12 bolas, todas numeradas distintamente com um número entre 1 e 12. Qual é a probabilidade de ser sorteado um número maior que 10 ou múltiplo de 7?

Solução: Nota-se que entre 1 e 12 há apenas um múltiplo de 7, que é ele próprio, e assim há $\frac{1}{12}$ de chances deste ser sorteado. No intervalo $[1,12]$ os únicos números maiores que 10, são o 11 e o 12, havendo $\frac{2}{12}$ de chances deste ser sorteado. Portanto, há ao todo

$$\frac{1}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3}{12}=0{,}25=25\%$$

de chances de algum desses números serem sorteados.

Exemplo 2: Um mágico tem em suas mãos um baralho contendo 20 cartas, todas distintas numeradas do 1 ao 20. Ele pede para que uma pessoa da plateia retire uma dessas cartas sem olhar o número que está contido na carta. Qual é a probabilidade que essa pessoa escolha ao acaso um número primo ou múltiplo de 5?

Solução: Nota-se que entre 1 e 20, há oito números primos, e assim a probabilidade de se retirar um número primo é de $\frac{8}{20}$. Note que há quatro múltiplos de 5 nesse intervalo, a saber 5,10,15 e 20, ou seja, há $\frac{4}{20}$ de chances de se retirar esse número. Note que o número 5 faz parte desses dois conjuntos, ou seja, há $\frac{1}{20}$ dele ser retirado. Portanto, a probabilidade da pessoa na plateia escolher um número primo ou múltiplo de 5 é de

$$\frac{8}{20}+\frac{4}{20}-\frac{1}{20}=\frac{11}{20}=0{,}55=55\%.$$

[25] É um recipiente geralmente utilizado para armazenar, coletar ou sortear objetos pequenos, como papéis, fichas ou votos.

Figura 5 - Mágico com cartas na mão

Fonte: Freepik (2021)[26].

3.2.4 Probabilidade condicional

Nota-se que o cálculo de probabilidades não se resume em apenas uma forma de resolver. Há a possibilidade de haver uma interferência de eventos nos enunciados, assim causando a alteração do resultado. Suponha que uma mulher fez uma lista de compras com uma quantidade de itens, todavia ela já havia feito a compra de alguns desses itens anteriormente em outro supermercado, dessa forma a quantidade a ser comprada no final sofre interferência na primeira compra. Analogamente a isso, pode-se denotar por probabilidade condicional, que é, segundo Pereira (2016) "A probabilidade de ocorrer um evento A, sabendo que que ocorreu o evento B é $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$".

Exemplo: Um baralho contém 20 cartas, sendo 10 amarelas e 10 azuis. Retirando-se arbitrariamente 4 cartas, qual é a probabilidade de sair uma carta azul sabendo que as três primeiras cartas retiradas foram amarelas?

Solução usual: Seja *P(Z)* a probabilidade de se retirar uma carta azul e *P(M)* a probabilidade de se retirar uma carta amarela. Como foram retiradas 3 cartas amarelas consecutivas sem reposição, tem-se que:

$$P(M) = \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18} = \frac{720}{6840}$$

A probabilidade de se retirar uma carta azul após três cartas amarelas é de:

[26] Disponível em: https://br.freepik.com/fotos/baralho. Acesso em 13 Fev. 2024.

$$P(Z \cap M) = \frac{10}{20} \times \frac{9}{19} \times \frac{8}{18} \times \frac{10}{17} = \frac{7200}{116280}.$$

Portanto, pela fórmula, tem-se que:

$$P(Z/M) = \frac{P(Z \cap M)}{P(M)} = \frac{720}{6840} \div \frac{7200}{116280} = \frac{10}{17} \cong 0{,}588 = 58{,}8\%.$$

Solução simplificada: Sabe-se que após sorteadas as três primeiras cartas amarelas, sobram 17 cartas. Como 10 dessas cartas são azuis, logo a probabilidade de se retirar uma carta azul é:

$$P(Z) = \frac{10}{17} \cong 0{,}588 = 58{,}8\%.$$

4 JOGOS DE AZAR CONHECIDOS

4.1 *Blackjack*

4.1.1 Origem do *blackjack*

Segundo Sceschim (2022), o jogo *blackjack* é derivado de um jogo francês chamado *Vingt-et-Um* (literalmente traduzido para “vinte e um”) que era muito popular pelos nobres que jogavam nos cassinos da época. No século XVII ele foi levado para os Estados Unidos da América onde se popularizou, principalmente pelos incentivos de bonificação. Rodrigues (2022) aponta que através de estratégias e da Matemática, é possível encontrar formas de aumentar as chances de vencer o *dealer*, e assim houve diversas modificações, os quais

> Ao longo do tempo, o blackjack sofreu algumas mudanças nas suas regras. Uma das principais variações é o número de baralhos usados no jogo. A maioria dos cassinos usa seis ou oito baralhos, mas alguns usam apenas um. Além disso, existem variações do *blackjack* que oferecem pagamentos diferentes ou regras específicas, como o “Pontoon”[27] ou o “Switch”[28]. (Rodrigues, 2022)

Após a grande popularização dos jogos de azar e ascensão da *internet*, “Em 1996, o primeiro cassino online abriu suas portas virtuais e junto com ele veio a capacidade de jogar *blackjack* quando quiser, onde quer que esteja.” (Sceschim, 2022).

Figura 6 - Mesa de blackjack

Fonte: The Telegraph (2021)[29].

---

[27] É uma variação do jogo de cartas *blackjack*. O objetivo principal é alcançar uma mão que some vinte e um pontos, ou o mais próximo possível desse valor, sem ultrapassá-lo.

[28] Nesse jogo, os jogadores têm a opção de trocar as cartas das suas duas mãos iniciais para melhorar suas chances.

[29] Disponível em: https://www.telegraph.co.uk/betting/casino-guides/blackjack/21-plus-3/. Acesso em: 13 Fev. 2024.

4.1.2 Como jogar *blackjack*

Inicialmente são dispostas as 52 cartas de um naipe tradicional[30], segundo Pimentel (2023), vence o jogo se o apostador fizer uma pontuação maior que a do anfitrião do jogo não excedendo 21 pontos. Cada carta do naipe vale uma quantidade de pontos dos quais as cartas Ás (letra A) vale 1 ou 11 pontos dependendo da combinação, as cartas de 1 a 9 valem o respectivo número de pontos e as cartas 10, valete (letra J), damas (letra Q) e rei (letra K) valem 10 pontos. Inicialmente é feita a aposta – que geralmente são usadas fichas – seguindo a distribuição de 2 cartas para o anfitrião (sendo uma delas virada para baixo) e mais duas cartas para o apostador viradas para cima. Dessa maneira, o apostador pode elaborar estratégias para tentar vencer o anfitrião como “comprar” mais cartas, e assim tentar vencer o jogo que consiste em retirar cartas do monte e somar às da mesa. Caso a soma das cartas exceda 21 pontos, o apostador perde o jogo independente da pontuação do anfitrião, e caso o jogo dê empate, o valor integral é devolvido. Há a possibilidade de haver de 1 a 7 jogadores, sendo que normalmente são usados de 6 a 8 naipes completos.

Segundo *Gasparik* (2023), a forma de pagamento consiste no dobro do valor apostado, ou seja, se um apostador investiu 10 fichas, ele receberá 20 fichas. A exceção é quando o apostador consegue as duas cartas com soma 21, chamado *blackjack* (o apostador consegue um Ás e uma carta que vale 10 pontos), assim ele recebe na proporção 3:2, ou seja, se foi apostado 10 fichas, ele recebe 25 fichas. A carta Ás pode ser confusa, porém o valor dela vai depender das combinações recebidas. Se num primeiro momento o Ás for retirado, ele vai valer 11 pontos, assim se houver a combinação “A-5”, o apostador terá 16 pontos. Se ele retirar por acaso uma carta 8, ou seja, a combinação “A-5-8”, a soma valerá 14 pontos, não havendo o Ás, é impossível que a pontuação diminua a cada “compra” de carta. Dessa maneira, as ações básicas de um jogador seria de comprar (pedir) cartas e de ficar com as cartas, ou seja, aceitar as jogadas impostas.

---

[30] Refere-se a cartas de baralho convencionais usadas em jogos de cartas padrão, consistindo em quatro divisões principais: copas, ouros, paus e espadas.

4.2 Roulette

4.2.1 Origem do *roulette*

Segundo Castilho (2021), o jogo traduzido como “pequena roleta” teve origem com o físico francês Blaise Pascal que “acidentalmente” criou o conceito do *roulette* moderno durante uma experiência sobre energia infinita e cicloides. Dessa maneira, o continente europeu foi o protagonista em adicionar esse jogo dentro dos cassinos, e durante os contextos históricos de guerras e ditaduras, a cidade de Monte Carlo foi a protagonista nessa modalidade de jogo, sendo mais tarde introduzida aos Estados Unidos e a todo o continente americano.

> Assim, foi feito várias modificações no design da roleta, onde “No final do século XVIII, para ser mais específico, no ano de 1800 o jogo chegou a América, aos Estados Unidos embora com algumas modificações, como por exemplo, tendo ao invés dos 38 números, apenas 28 números, dois zeros e o símbolo da águia americana, que dava uma vantagem maior à casa, algumas dessas intervenções não foram bem aceitas por seus jogadores e logo voltaram a origem da roleta europeia. (Neves, 2021)

Figura 7 - *Dealer* e apostador no tabuleiro de *roulette*

Fonte: Jornal Preliminar (2023)[31].

4.1.2 Como jogar *roulette*

Segundo John *et al.* (2013), o jogo é composto por um tabuleiro e uma roleta, com os números pintados de preto e de branco não havendo uma regra para a pintura deles (ou seja, podem ser contemplados tanto números ímpares ou pares com ambas as cores). A roleta funciona através do giro do eixo central no qual uma bola é inserida nela, e o número ganho é onde a bola para após

[31] Disponível em: https://www.jornalpreliminar.com.br/apostas/a-matematica-por-tras-dos-jogos-de-cassino/. Acesso em 13 Fev. 2024.

esse giro. Os números utilizados em ambos são todos do 1 ao 36. Dependendo do modelo de roleta, pode-se ser acrescida dois números extras, sendo o “0” e o “00” que são pintados em verde, e consequentemente dão vantagem ao *dealer* (o que será provado nos cálculos). O tabuleiro possui algumas subdivisões que são chamados popularmente de “ruas” ou “avenidas”. Assim há alguns grupos nessa roleta, aos quais tem-se:

Terços: são intervalos numéricos equidistantes que são compostos entre “1 ao 12”, “13 ao 24” e “25 ao 36”.

Carreiras: nessa modalidade, são dividias 3 fileiras dos quais se tem “1, 4, 7...,34”, “2,5,8...,35” e o “3,6,9...36”.

Black-red: Nessa modalidade o apostador decide se o número que irá ser contemplado está pintado de vermelho ou de preto.

Pair-Odd: O jogador decide se o número que vai cair será ímpar ou será par. Lembrando que o “0” e o “00” não podem ser jogados.

High-low: Nessa modalidade o apostador decide se o número será mais alto ou mais baixo que a metade das quantidades (ou seja, 18 ou menor; ou; 19 ou maior).

Cada modalidade tem um certo valor a ser pago. Se o jogador apostar em um número específico e acertar, ele recebe 3500% a mais do valor apostado. Nas modalidades *black-red*, *high-low* e *pair-odd*, o jogador ganha 100% a mais do valor apostado. Nas modalidades terços e carreiras, o jogador receber 200% a mais sobre o valor apostado.

Há também a possibilidade de o jogador apostar em vários números ao mesmo tempo, assim aumentando suas possibilidades de ganho, mas em contrapartida, diminuir o valor do prêmio.

4.3 Pôquer *5-cards draw*

4.3.1 Origem do pôquer *5-cards draw*

Segundo o Globo Esporte (2023), o jogo pôquer provavelmente se derivou de um jogo de cartas persas, porém a etimologia teria advindo da França sendo que a partir do século XVIII foi trazido aos Estados Unidos por colonizadores franceses. Esse jogo era composto por 20 cartas, porém com o tempo foram introduzidas 52 cartas para assim abranger mais jogadores adeptos em várias modalidades.

Figura 8 - Mesa de pôquer em um clube

Fonte: Poker Discover (2016)[32]

Hertel (2020) aponta que o pôquer no Brasil se popularizou em 2004 com o advento da *internet* e de programas de televisão com jogos de estratégia. Assim, havia um impasse da legislação brasileira[33] sobre o pôquer ser ou não ser considerado um jogo de azar, uma vez que este usa estratégia.

> Havia muito preconceito e pouquíssimas pessoas entendiam que não era ilegal. Só depois que criou-se uma argumentação baseada Código de Contravenções que define o que é Jogo de Azar definindo que poker é um jogo de habilidade, já que estudos matemáticos apontavam que a habilidade contava mais de 50% para o resultado do jogo – portanto seria um jogo em que o azar influenciava, mas não definia. (Hertel, 2020).

---

[32] Disponível em: https://pt.pokerdiscover.com/blog/top-10-biggest-poker-clubs-world. Acesso em 13 Fev. 2024.

[33] Decreto-Lei nº 9215, de 30 de abril de 1946. Proíbe a prática ou exploração de jogos de azar em todo o território nacional.

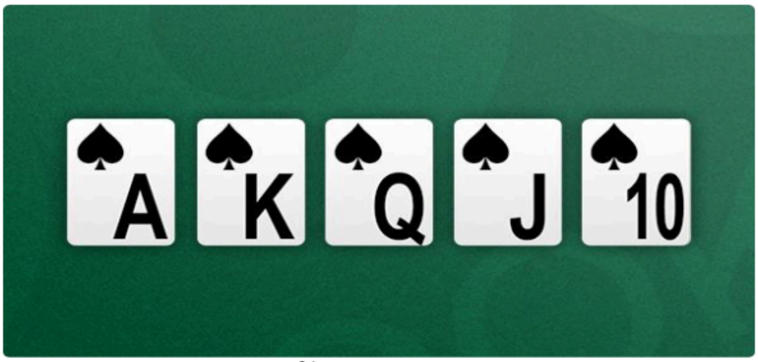
4.3.2 Como jogar *5-cards draw*

Cunha (2020) aponta as principais regras dessa modalidade de pôquer (uma vez que há outras formas de jogar), sendo que naipe é formada pelas mesmas cartas do *blackjack*, e assim cada jogador recebe 5 cartas, sendo que em uma mesa pode haver até 9 jogadores simultâneos ou a opção de ser 1 jogador contra 1 anfitrião (*dealer*). A vitória (ou derrota) do jogador é dada pela combinação das 5 cartas, sendo que há prioridades em relação aos pontos das cartas. Vale ressaltar que o jogador pode escolher entre manter as cartas, trocar elas pela mesma quantidade de outras cartas no monte, dobrar a aposta ou até mesmo de desistir. Assim cabe a ele escolher a melhor estratégia para se atingir os melhores resultados.

Targino (2021) aponta a relação “A > K > Q > J > 10 > 9 > .... > 2”, no qual simboliza a ordem de força para as cartas. Há as seguintes possibilidades de combinações por ordem de importância:

Royal flush*:* O jogador atingir a combinação “A, K, Q, J, 10” com todas do mesmo naipe. Por ter a maior raridade, é a combinação mais forte de todas no pôquer.

Figura 9 - Combinação "*royal flush*" com naipe de espadas

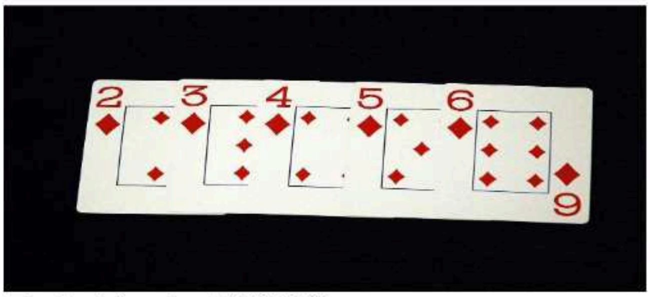


Fonte: 888 poker (2023)[34].

[34] Disponível em: https://www.888poker.de/how-to-play-poker/hands/royal-flush-poker-hand-ranking/. Acesso em 13 Fev. 2024.

Straight flush: É uma combinação qualquer de cinco cartas em sequência que tenham o mesmo naipe.

Figura 10 - Combinação *Straight flush* com naipe de ouro



Fonte: Live about (2020)[35]

***Four of a Kind* (Quadra)**: Haver 4 cartas de mesmo valor na combinação escolhida.

Figura 11 - Combinação de *four of a kind* com as cartas "damas"

Fonte: Upswing Poker (2021).[36]

Full House: Haver uma trinca e um par de cartas dentre das 5 cartas.

Figura 12 - *Full house* com Ás e dois "setes"

Fonte: 888 Poker (2023).[37]

[35] Disponível em: https://www.liveabout.com/poker-hand-rankings-2728127. Acesso em 13 Fev. 2024.
[36] Disponível em: https://upswingpoker.com/why-does-four-of-a-kind-beat-a-straight-or-a-flush/. Acesso em 13 Fev. 2024.
[37] Disponível em: https://www.888poker.de/how-to-play-poker/hands/full-house-poker-hand-ranking/. Acesso em 13 Fev. 2024.

Flush: As 5 cartas pertencerem ao mesmo naipe não havendo uma sequência.

Figura 13 - Flush com o naipe de ouro

Fonte: 888 Poker (2023)[38]

Straight: Haver a sequência de 5 cartas, porém com naipes distintos.

Figura 14 - Straight contendo as cartas mais "fortes"

Fonte: Upswing Poker (2021)[39].

***Three of a Kind* (trinca)**: Três cartas iguais dentre as 5.

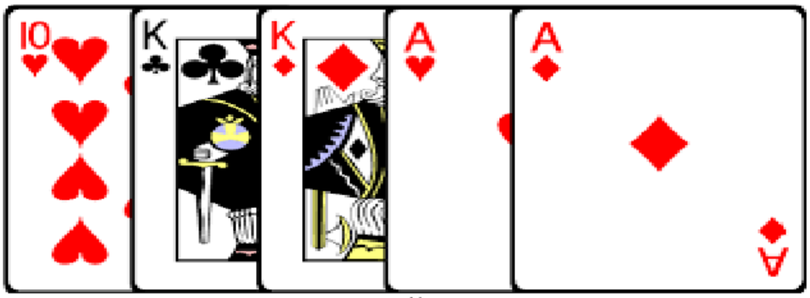
Figura 15 - Uma trinca contendo três cartas de valor quatro

Fonte: Gaming (2024).[40]

[38] Disponível em: https://br.888poker.com/how-to-play-poker/hands/flush-poker-hand-ranking/. Acesso em 13 Fev. 2024.
[39] Disponível em: https://upswingpoker.com/flopped-straight/. Acesso em 13 Fev. 2024.
[40] Disponível em: https://www.gaming.net/pt/o-que-%C3%A9-trio/. Acesso em 13 Fev. 2024.

Two pair: Haver dois pares de números iguais dentre as 5 cartas.

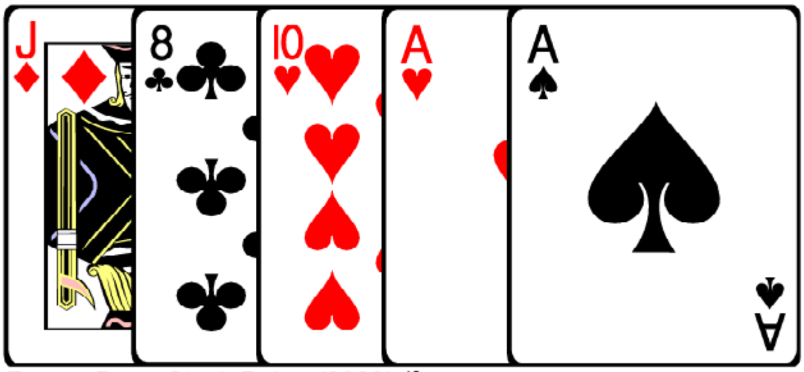
Figura 16 - Um par de reis e um par de Ás



Fonte: Deep Stack Poker (2023).[41]

One pair: Haver 1 par de números iguais dentre as 5 cartas.

Figura 17 - Um par de Ás (copas e espada)



Fonte: Deep Stack Poker (2023).[42]

Não formando nenhuma dessas combinações, ganha o jogo que tiver a(s) carta(s) mais alta(s).

4.4 Jogo do Bicho

4.4.1 Origem do jogo do bicho

Segundo Ratier (2011), o jogo do bicho surgiu em 1892 no Rio de Janeiro pelo proprietário de um zoológico chamado João Drummond como forma de compensar os cortes de subsídios pela presidência, e assim salvar o zoológico. O jogo inicialmente se tratava na entrega de bilhetes com animais estampados

[41] Disponível em: https://www.deepstackpoker.com.au/poker-hands-explained. Acesso em 13. Fev. 2024

[42] Disponível em: https://www.deepstackpoker.com.au/poker-hands-explained. Acesso em 13. Fev. 2024.

aos visitantes, sendo que havia ao todo 25 animais, no qual ao final do dia seria sorteado 1 animal. Os vencedores desse sorteio obtiveram um prêmio 20x maior que o valor do ingresso pago, estimulando uma maior visita ao zoológico, salvando-se os animais presentes com o dinheiro arrecadado a mais. Como o jogo era totalmente legalizado na época juntamente com a popularização do sorteio, era comum cambistas denominados de “bicheiros” comprarem um lote grande de ingressos e revenderem em outros locais da cidade, e assim um simples sorteio diário, similar ao de um título de capitalização, se transformou em um jogo de azar pelas autoridades, dessa forma:

> Com a desculpa de proteger os bons costumes, a criminalização do jogo do bicho ancorava-se em uma área cinza que permitia às figuras de autoridade exercerem um poder arbitrário ou desfrutarem de certo grau de flexibilidade. Esse fenômeno de criminalização de práticas populares não ocorreu somente no Brasil, mas na América Latina toda e criou uma dinâmica cultural, jurídica e social da vida pública urbana desses lugares. Assim, Chazkel afirma: “coloco o jogo do bicho no contexto do mundo de práticas populares criminalizadas, mas ainda assim generalizadas, que são, elas próprias, uma marca da vida pública urbana e moderna por boa parte do globo”. Nesse sentido, o jogo do bicho assemelha-se a outras práticas de jogos de azar que apareceram pelo mundo na mesma época. (Pereira, 2022).

Ratier (2011) ainda aponta que embora ilegal devido a lei[43], o jogo do bicho continua bem difundido pelo Brasil, entretanto a popularidade decresceu devido a ascensão de loterias oficiais e de cassinos *online*.

Figura 18 - Cartela tradicional do jogo do bicho

Fonte: Pinterest (2016).[44]

[43] Decreto-Lei nº 9215, de 30 de abril de 1946. Proíbe a prática ou exploração de jogos de azar em todo o território nacional.
[44] Disponível em: https://br.pinterest.com/pin/665969863621827474/. Acesso em 13 Fev. 2024.

4.4.2 Como jogar o jogo do bicho

Segundo Jesus (2022), esse jogo pode mudar conforme a modalidade jogada, porém a raiz é praticamente a mesma. Inicialmente são dispostas 25 figuras de 25 animais diferentes, os quais são associados a 4 números consecutivos, que variam entre 00 e 99. Por exemplo, o carneiro é contemplado pela sequência “25, 26, 27 e 28” enquanto a vaca é contemplada pela sequência “97, 98, 99 e 00”. O sorteio geralmente é em quatro globos de ar, os quais são colocadas 10 bolas, numerada de 0 a 9 em cada. Dessa forma, são sorteadas 4 bolas (sendo 1 em cada globo), as quais a primeira bola forma as unidades, a segunda forma a dezena, a terceira forma as centenas e a quarta forma as unidades de milhar, assim, são escolhidas os dois últimos algarismos formados para se escolher o animal. Por exemplo, se o sorteio formou o número “8716”, o animal será associado ao número 16. Normalmente as premiações são divididas em 5 sorteios, ou seja, o jogador pode escolher a quantidade de sorteios que ele quer apostar (ex: somente o 1º número, ou os dois primeiros, ou todos os números sorteados), assim o prêmio é dividido conforme a quantidade de sorteios que o jogador pediu para participar. Se 1 sorteio paga x vezes o valor apostado, caso o jogador queira participar de y sorteios, ele irá receber $\frac{x}{y}$ vezes o valor apostado. As duas modalidades mais conservadoras são:

Aposta em animais: O jogador pode escolher entre 1 e 5 animais que serão sorteados no jogo, sendo que a aposta pode envolver tanto que algum desses animais aparecerão em algum dos números sorteados, ou que todos os animais escolhidos aparecerão nas apostas. Logo, o jogador pode, por exemplo, apostar que 3 animais aparecerão em 3 números sorteados diferentes dos cinco disponíveis, ou pode dizer que 1 animal pode aparecer em um dos quatro primeiros números sorteados.

Aposta em grupo de números: Nessa modalidade, o jogador pode apostar no grupo das dezenas (dois últimos dígitos), grupo das centenas (três únicos dígitos) ou no número inteiro sorteado. Assim, se forem sorteados, em sequência, as bolas “2-7-5-3”, o número correspondente será o 3572. Assim, se o apostador apostar nos números “72”, “572” ou “3572”, este ganhará a aposta feita, com o valor proporcional que a banca oferece.

4.5 Mega-Sena

4.5.1 Origem da Mega-Sena

Segundo Santos (2022), a Mega-Sena surgiu em março de 1996 pela CEF[45] como mudança de nome de uma aposta chamada Sena. Diferente dos demais jogos de azar citados, este tem regulamentação do Governo Federal e não visa somente o lucro, porém tem um papel social importante dentro das premiações uma vez que uma porcentagem dos lucros é destinada para cobrir diversas despesas de políticas públicas, beneficiando a população. Assim

> A Mega-Sena pode ser caracterizada como um grande Sonho de muitos brasileiros, pois é uma modalidade de apostas (Lotérica) do Brasil, dentre as outras nove disponíveis pela Loteria da Caixa (administrada pela Caixa Econômica Federal), que são: Lotofácil, Dupla Sena, Loteria Federal, Loteria Instantânea, Lotomania, Loteca, Lotogol, Timenania e a Quina. Os sorteios acontecem duas vezes por semana e no final do ano acontece a Mega-Sena da Virada, lançada no ano de 2008, sendo que em 2012 foi pago o valor de R$ 81 milhões para três pessoas sorteadas. (Adami, 2018)

Figura 19 - Bilhetes da Mega-Sena

Fonte: PortalSeis (2023)[46]

---

[45] Abreviação que significa Caixa Econômica Federal, que é uma instituição financeira pública brasileira, criada em 1861. Ela desempenha um papel significativo no sistema financeiro do Brasil e tem diversas atribuições, incluindo a gestão das lotéricas.

[46] Disponível em: https://portal6.com.br/2023/02/16/resultado-da-mega-sena-concurso-2565/. Acesso em 13 Nov. 2023.

4.5.2 Como jogar a Mega-Sena

Segundo Brasil (2024), a modalidade de aposta chamada Mega-Sena é composta por 60 números numerados de 01 até 60 ao qual o jogador pode escolher entre 06 e 20 números para concorrer às premiações. Os valores começam com 5 reais e vão aumentando conforme a quantidade de números escolhidos de maneira que fique indiretamente proporcional à probabilidade de ganho, dessa forma quando o apostador escolhe 20 números, ele pagará a quantia de 193.800 reais. As apostas normalmente são feitas em lotéricas[47] credenciadas pela Caixa Econômica Federal, todavia, é possível jogar na Mega-Sena sem sair de casa. Além das agências lotéricas, os jogos de aposta estão disponíveis em versões para computador e celular, através dos canais da Caixa Econômica Federal no site ou no aplicativo (iOS ou Android).[48]

> Para apostar, existem alguns pré-requisitos: ter mais de 18 anos; possuir um cartão de crédito válido; fazer um cadastro nas Loterias Online por site ou aplicativo; fazer no máximo 999 apostas por carrinho, e respeitar o horário limite de cada aposta (19h do dia do sorteio). O bolão, por sua vez, não está disponível online e só pode ser feito em lotéricas físicas." (Toigo, 2023)

Ainda Toigo (2023) cita que os sorteios são feitos nas terças-feiras, quintas-feiras e aos sábados, e assim caso a pessoa ganhe um valor bruto abaixo da faixa de isenção do IR[49], pode-se resgatar nas lotéricas, e em valores superiores somente em alguma agência da Caixa.

> Além das apostas individuais, o apostador pode fazer apostas em grupo chamado de Bolão, no qual "O Bolão Caixa é a possibilidade que o apostador tem de realizar apostas em grupo. Basta preencher o campo próprio no volante ou solicitar ao atendente da lotérica. Você também pode comprar cotas de bolões organizados pelas Unidades Lotéricas." (Brasil, 2024)

---

[47] É um estabelecimento comercial autorizado a realizar diversos serviços relacionados a jogos de loteria e transações financeiras.
[48] Sistemas operacionais presentes em diversos modelos de celular.
[49] Abreviação para "Imposto de Renda".

5 A MATEMÁTICA ENVOLVIDA NOS JOGO DE AZAR

5.1 Matemática envolvida no *blackjack*

Com base nas regras do *blackjack*, há várias análises matemáticas que podem ser envolvidas durantes as etapas do jogo. A fim de resumir as explicações, vão ser analisados alguns casos específicos, mas primeiramente há de se mostrar que independente se houverem 6, 7 ou 8 baralhos completos, a probabilidade do apostador obter algum resultado específico são muito aproximados.

Suponha que X e Y sejam duas cartas recebidas pelo apostador, sendo que ambas as letras representam algum valor do naipe. Nota-se que em cada baralho há 4 cartas com X e 4 cartas com Y. Então em uma mão com 6 baralhos haverá $4 \times 6 = 24$ cartas de cada, em uma mão de 7 cartas haverá $4 \times 7 = 28$ cartas de cada, e em uma mão com 8 baralhos haverá $4 \times 8 = 32$ cartas de cada valor. Em uma jogada arbitrária no qual X é retirado e depois Y, a probabilidade será de

$$\frac{24}{6 \times 52} \times \frac{24}{6 \times 52 - 1} = \frac{576}{97032} = \frac{24}{4043} \approx 0{,}5936\%$$

quando é uma mão de 6 baralhos, será de

$$\frac{28}{7 \times 52} \times \frac{28}{7 \times 52 - 1} = \frac{784}{132132} = \frac{28}{4719} \approx 0{,}5933\%$$

quando é uma mão de 7 baralhos, e será de

$$\frac{32}{8 \times 52} \times \frac{32}{8 \times 52 - 1} = \frac{1024}{172640} = \frac{32}{5395} \approx 0{,}5931\%$$

quando é uma mão de 8 baralhos. Nota-se que a diferença entre probabilidades envoltas nas quantidades de baralhos de uma mão para a outra são pequenas.

Admita que o apostador gostaria de obter um blackjack (21 pontos) no primeiro par de cartas recebidos. Dessa maneira, uma das cartas deve valer 11 enquanto a outra 10, ou seja, necessariamente uma das cartão é um Ás. Assim, as combinações possíveis para se obter 21 pontos são o Ás mais uma das cartas de 10 pontos (K, J, Q ou 10). Em um baralho com 52 cartas, a chance de se obter um *blackjack* é dada pelo produto da probabilidade de se obter um Ás pela probabilidade de se obter uma das quatro cartas em detrimento das 51 que sobraram, ou vice-versa, caso as cartas que valem 10 pontos sejam sorteadas primeiro, sendo que as cartas sorteadas são repetidas 2 vezes.

Assim, tem-se que:

$$\left(\frac{4}{52} \times \frac{16}{52-1}\right) \times P_2 = \frac{64}{1326} \approx 4{,}826\%$$

é a probabilidade de êxito em ambas as ordens, ou seja, como há $P_2 = 2$ ordens possíveis de sorteio, há ao todo aproximadamente $2 \times 2{,}413\% = 4{,}826\%$ de chances de se obter um *blackjack* nas duas primeiras jogadas. Porém isso ainda não é garantia de vitória, pois o *dealer* também tem a chance de obter *blackjack*, causando empate. Portanto, sobram-se 50 cartas no naipe para o *dealer* recolher, sendo 3 Ás e $4 \times 4 - 1 = 15$ cartas com valor 10 pontos. Dessa maneira, o anfitrião teria em qualquer uma das ordens do sorteio

$$P_2 \times \frac{3}{50} \times \frac{15}{49} = \frac{90}{2450} \approx 3{,}673\%$$

de chances de se obter *blackjack*. Dessa maneira, a chance de empates com ambos obtendo *blackjack* é de aproximadamente

$$P_2 \times P_2 \times \frac{64}{2652} \times \frac{45}{2450} \approx 0{,}1773\%.$$

Usa-se agora uma mão com 8 baralhos, ou seja, $8 \times 52 = 416$ cartas. Assim, há ao todo $8 \times 4 = 32$ cartas de Ás e $8 \times 4 \times 4 = 128$ cartas quem valem 10 pontos. A probabilidade do apostador obter um *blackjack* utilizando as duas ordens possíveis de obtenção das cartas é de

$$P_2 \times \frac{32}{416} \times \frac{128}{415} = \frac{8192}{172640} \approx 4{,}745\%$$

enquanto a probabilidade do *dealer* obter um *blackjack* em seguida é de

$$P_2 \times \frac{31}{414} \times \frac{127}{413} = \frac{7874}{170982} \approx 4{,}605\%$$

e assim a probabilidade de se obter 2 *blackjacks* seguidos entre o dealer e o apostador é de

$$\frac{8192}{172640} \times \frac{7874}{170982} = \frac{64.503.808}{29.518.332.480} \approx 0{,}218\%.$$

Assim, se averiguou que as chances de ocorrer uma "coincidência" de dois *blackjacks* ascendeu com um maior número de baralhos utilizados numa mão de jogo.

5.2 Matemática envolvida no *roulette*

Será feita a análise das modalidades que são envolvidas no *roulette* que contenha o "0" (lê-se um zero) e/ou "00" (lê-se dois zeros), para isso se deve notar o espaço amostral Ω = {37,38}, pois são 36 números convencionais e um ou dois símbolos zeros representados. Dessa maneira, há as seguintes divisões:

Nas modalidades individuais (escolhendo-se 1 número), o jogador possui $\frac{1}{\Omega}$ de probabilidade de ganhar caso acerte o número, sendo $\frac{1}{37} \approx 2{,}703\%$ ou $\frac{1}{38} \approx 2{,}632\%$ dependendo da quantidade de zeros presentes na roleta. Assim, ao se jogar um combinado de 3 apostas consecutivas, ele obterá

$$\left(\frac{1}{37}\right)^3 = \frac{1}{50.653} \approx 0{,}0019\%$$

para 1 zero e

$$\left(\frac{1}{38}\right)^3 = \frac{1}{54.872} \approx 0{,}0018\%$$

para 2 zeros.

Nas modalidades *pair-odd, red-black e high-low*, o jogador possui a seu favor 18 números que lhe concedem vitória enquanto a banca possui 19 ou 20 números. Desta maneira, em um giro dessa roleta, a chance do apostador de vencer é de $\frac{18}{37} \approx 48{,}64\%$ quando se há 1 zero, e $\frac{18}{38} \approx 47{,}36\%$ quando se há 2 zeros.

Assim, se um jogador quiser ganhar 3, 5 e 10 vezes consecutivas, ele terá:

$$\left(\frac{18}{37}\right)^3 = \frac{5.832}{50.653} \approx 11{,}513\%$$

$$\left(\frac{18}{37}\right)^5 = \frac{1.889.568}{69.343.957} \approx 2{,}725\%$$

$$\left(\frac{18}{37}\right)^{10} = \frac{3.570.467.226.624}{4.808.584.372.417.849} \approx 0{,}074\%$$

de chances de obter êxito, respectivamente, no caso de uma roleta com 1 zero, e:

$$\left(\frac{18}{38}\right)^3 = \frac{5.832}{54.872} \approx 10{,}628\%$$

$$\left(\frac{18}{38}\right)^5 = \frac{1.889.568}{79.235.168} \approx 2{,}385\%$$

$$\left(\frac{18}{38}\right)^{10} = \frac{3.570.467.226.624}{6.278.211.847.988.224} \approx 0{,}057\%$$

de chances de obter êxito, respectivamente, no caso de uma roleta com 2 zeros.

Agora nas modalidades “terços” e “carreiras”, o jogador terá $\frac{1}{3}$ dos números convencionais (1 ao 36) a seu favor, ou seja, $\frac{1}{3} \times 36 = 12$ números, enquanto a banca terá 25 ou 26 números a seu favor, dependendo da quantidade de zeros contidos nessa roleta. Dessa maneira, o jogador terá ao todo $\frac{12}{37} \approx 32{,}432\%$ ou $\frac{12}{38} \approx 31{,}579\%$ de chances de obter vitória.

Supondo-se que o jogador queira acumular as jogadas em 3, 5 ou 10 jogadas consecutivas, ele terá

$$\left(\frac{12}{37}\right)^3 = \frac{1.728}{50.653} \approx 4{,}411\%$$

$$\left(\frac{12}{37}\right)^5 = \frac{248.832}{69.343.957} \approx 0{,}359\%$$

$$\left(\frac{12}{37}\right)^{10} = \frac{61.917.364.224}{4.808.584.372.417.849} \approx 0{,}0012\%$$

respectivamente, em caso da roleta com 1 zero, e

$$\left(\frac{12}{38}\right)^{3} = \frac{1.728}{50.653} \approx 3{,}411\%$$

$$\left(\frac{12}{38}\right)^{5} = \frac{248.832}{79.235.168} \approx 0{,}314\%$$

$$\left(\frac{12}{38}\right)^{10} = \frac{61.917.364.224}{6.278.211.847.988.224} \approx 0{,}001\%$$

respectivamente, caso a roleta possua 2 zeros.

Com base nas análises feitas anteriormente, há de se calcular a média de retorno do valor apostado em cada uma das modalidades, sendo usado a Teoria das Grandes Perdas[50]. Nas modalidades em que se pagam 100% do valor a mais apostado, o jogador tem uma média de

$$\frac{18}{37} \times 2 = \frac{36}{37} \approx 97{,}3\%$$

numa roleta de 1 zero e

$$\frac{18}{38} \times 2 = \frac{36}{38} \approx 94{,}74\%$$

de volta caso seja usado uma roleta com 2 zeros. Ou seja, se um apostador desembolsou R$100,00, este terá retornado cerca de R$97,30 (prejuízo de R$2,70) no caso de uma roleta com 1 zero e R$94,74 de retorno (prejuízo de R$5,26) no caso de uma roleta de 2 zeros.

Utilizando-se as modalidades que pagam 200% a mais do valor apostado, o apostador terá um retorno médio de $\frac{12}{37} \times 3 = \frac{36}{37}$ ou $\frac{12}{38} \times 3 = \frac{36}{38}$, e nas modalidades que pagam 3500% a mais do valor apostado, tem-se um retorno médio de $\frac{1}{37} \times 36 = \frac{36}{37}$ ou $\frac{1}{38} \times 36 = \frac{36}{38}$. Nota-se que em todas as modalidades de

50 Quando em uma aposta alguma das partes tem vantagem, mesmo que pequena, o volume de jogadas vai favorecer quem tem melhores probabilidades a longo prazo. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=2jQuuCMRpZk. Acesso em 21 Jan. 2024.

pagamentos, a média de retorno são iguais, claramente dando tendência de a banca obter maior êxito a longo prazo.

5.3 Matemática envolvida no pôquer *5-cards draw*

Com base nas regras dessa modalidade de pôquer, será analisada a probabilidade de ocorrer cada um dos eventos possíveis, considerando-se que o apostador receberá as cartas primeiro. Deve-se calcular o espaço amostral Ω. Para isso, considera-se que há ao todo 52 cartas nesse baralho, e serão escolhidas 5 cartas, na qual a ordem às quais as cartas serão escolhidas não influenciarão na combinação de cartas efetuada, logo, tem-se uma combinação, assim havendo ao todo

$$C_5^{52} = \frac{52!}{5! \times (52-5)!} = \frac{52!}{5! \times 47!} = 2.598.960$$

possibilidades de obtenção das cartas pelo apostador, ou seja, $\Omega = C_5^{52} = 2.598.960$. Feito isso, será analisado cada uma das modalidades citadas no tópico anterior.

Royal Flush: Como serão aceitas somente cartas do mesmo naipe, logo cada naipe possibilita apenas 1 combinação desejada. Como há 4 naipes ao todo, então há 4 combinações desejadas possíveis dentro do baralho convencional. Dessa maneira, a probabilidade de se obter um *Royal Flush* será de

$$\frac{4}{2.598.960} = \frac{1}{649.740} \approx 0{,}0000014711507341 \approx 0{,}000147\%.$$

Straight Flush: Em cada naipe, pode-se obter essa combinação começando por "A-2-3-4-5" até o "10-J-Q-K-A", ou seja, cada naipe oferece 10 combinações de *Straight Flush*. Como há 4 naipes no baralho, há $10 \times 4 = 40$ combinações. Dessa maneira, a probabilidade de se obter um *Straight Flush* será de

$$\frac{40}{2.598.960} = \frac{1}{64.974} \approx 0{,}000014711507341 \approx 0{,}00147\%.$$

***Four of a Kind* (quadra)**: Como no baralho há 4 cartas de mesmo valor, jogo há ao todo $\frac{52}{4} = 13$ quadras possíveis. Todavia, a quinta carta pode ser qualquer uma das que sobraram no naipe, portanto, há ao todo $13 \times (52-4) = 13 \times 48 =$

624 maneiras de se obter um *Four of a Kind*. Logo, a probabilidade de um apostador obter uma quadra é de

$$\frac{624}{2.598.960} = \frac{1}{4.165} \approx 0{,}024\%.$$

Full House: Para calcular mais facilmente as maneiras de se obter o *full house*, pode-se dividir as 5 cartas em duas partes: uma com 2 cartas e a outra com 3 cartas. Obtendo-se 3 cartas iguais, a escolha de 3 cartas de 4 disponíveis dá ao todo $C_4^3 = \frac{4!}{3!\times 1!} = 4$ possibilidades. Havendo-se 13 números disponíveis, há ao todo $13 \times 4 = 52$ possibilidades de fazer esse trio. Nas duas cartas restantes se escolhe duas cartas em 4 disponíveis, ou seja, $C_4^2 = \frac{4!}{2!\times 2!} = 6$ possibilidades. Havendo-se 12 números disponíveis (pois o número escolhido do trio já foi sorteado), há ao todo $12 \times 6 = 72$ possibilidades de se obter o par. Portanto, há ao todo $52 \times 72 = 3744$ maneiras diferentes de se obter um *full house*. Logo, a probabilidade de um apostador obter o *full house* é de

$$\frac{3.744}{2.598.960} \approx 0{,}001440576 \approx 0{,}144\%.$$

Flush: Para calcular o *flush*, deve-se saber que há 4 naipes distintos que possam ocorrer tais combinação. Portanto, para um flush ocorrer, é a mesma coisa que em um grupo de 13 cartas distintas, 5 destas são escolhidas. Portanto, o número total de flush é de

$$4 \times C_{13}^5 = 4 \times \frac{13!}{5! \times (13-5)!} = \frac{4 \times 13!}{5! \times 8!} = \frac{24.908.083.200}{4.838.400} = 5.148$$

combinações possíveis. Dessa maneira, a probabilidade de se obter um *flush* é de

$$\frac{5.148}{2.598.960} = \frac{33}{16.660} \approx 0{,}00198079 \approx 0{,}198\%.$$

Straight: Assim como o *Straight Flush*, existem 10 possíveis sequências de cartas, todavia estas precisam ser todas de naipes diferentes. Assim, há 4 naipes possíveis da 1ª até a 5ª cartas escolhidas dentro dessas 10 sequências. Logo, existem ao todo

$$10 \times (C_4^1)^5 = 10 \times \left(\frac{4!}{1! - (4-1)!}\right)^5 = 10 \times 4^5 = 10 \times 1024 = 10.240$$

combinações. Todavia, há de observar que nesse cálculo o *Straight Flush* é escolhido, portanto, descartando-se as 40 possíveis maneiras de se obter *Straight Flush*, tem-se ao todo $10.240 - 40 = 10.200$ *Straights*. Portanto, a probabilidade de se obter um *Straight* é de

$$\frac{10.200}{2.598.960} = \frac{5}{1.274} \approx 0{,}0039246 \approx 0{,}392\%.$$

***Three Of a Kind* (trinca):** Primeiramente, deve-se compreender que há ao todo 13 valores distintos possíveis para essa trinca, sendo que há de ser escolhido 3 dos 4 naipes disponíveis, ou seja, um total de

$$13 \times C_4^3 = 13 \times \frac{4!}{3! \times (4-3)!} \Rightarrow 13 \times 4 = 52$$

modos dessas 3 cartas de valores iguais serem escolhidos. Agora resta descobrir a quantidade de maneiras que as duas demais cartas podem ser escolhidas. Como há 12 números distintos sobrando (pois o número correspondente à trinca está limitado) e se deve escolher dois valores, tem-se

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \times (12-2)!} = \frac{12!}{2! \times 10!} = \frac{479.001.600}{7.257.600} = 66$$

combinações possíveis de números. Nota-se que há 4 possibilidades de naipes em cada uma das cartas, logo há ao todo $4 \times 4 \times 66 = 1056$ maneiras de ordenar os demais números. Assim, há ao todo $52 \times 1056 = 54.912$ trincas distintas disponíveis. Portanto, a probabilidade de se obter uma trinca é de

$$\frac{54.912}{2.598.960} = \frac{88}{4.165} \approx 0{,}021128 \approx 2{,}113\%.$$

Two pair: Para se descobrir a quantidade de maneiras de se obterem os dois pares, deve-se escolher os dois números que serão usados nesse par. Como são 13 números distintos e 2 escolhidos, há ao todo

$$C_{13}^2 = \frac{13!}{2! \times (13-2)!} = \frac{13!}{2! \times 11!} = \frac{6.227.020.800}{79.833.600} = 78$$

pares de números escolhidos. Como em cada par há de se escolher 2 naipes de 4 disponíveis, há ao todo

$$78 \times C_4^2 \times C_4^2 = 78 \times \left(\frac{4!}{2! \times 2!}\right)^2 = 78 \times 36 = 2808$$

combinações de pares disponíveis. Para o número restante, deve-se descartar os 2 números escolhidos para os pares e escolher 1 dos 4 naipes, assim há $11 \times 4 = 44$ cartas disponíveis para o último número. Portanto, existem ao todo $2808 \times 44 = 123.552$ maneiras de se obter o *two pair*. Logo, a probabilidade de se obter um *two pair* é de

$$\frac{123.552}{2.598.960} = \frac{198}{4.165} \approx 0{,}047539 \approx 4{,}754\%.$$

One pair: Para se descobrir a quantidade de maneiras de se obter o *one pair*, deve-se saber que se pode obter 13 números diferentes. Como são duas cartas e quatro naipes, há $C_4^2 = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$ maneiras de escolha desse naipe, assim havendo a possibilidade de receber $13 \times 6 = 78$ pares disponíveis. Para as três cartas restantes, há 12 números distintos a serem escolhidos, sendo que cada número está contido em 4 naipes, assim havendo um total de

$$C_{12}^3 \times (C_4^1)^3 = \frac{12!}{3! \times (12-3)!} \times 4^3 \Rightarrow 220 \times 64 = 14.080$$

escolhas distintas dessas 3 cartas. Portanto, há ao todo $78 \times 14080 = 1.098.240$ maneiras distintas de se obter o *one pair*. Portanto, a probabilidade de se obter o *one pair* é de

$$\frac{1.098.240}{2.598.960} = \frac{352}{833} \approx 0{,}422569 \approx 42{,}257\%.$$

5.4 Matemática envolvida no jogo do bicho.

Há de se fazer uma análise simples das principais modalidades desse jogo de azar. A primeira delas é envolvendo a aposta em grupos de números, os quais o jogador pode escolher a dezena, centena ou o número total formado pelo sorteio individual dos quatro dígitos. Nota-se que como são utilizados globos de sorteio individuais, os dois números sorteados nas dezenas não são influenciados pelos resultados das centenas e unidades de milhar, logo, o cálculo das chances não é condicionada aos demais sorteios. A quantidade de dezenas possíveis é de

$$C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} = \left(\frac{10!}{1! \times (10-1)!}\right)^{2} = 10^{2} = 100,$$

e como é escolhida um número, portanto o apostador tem $\frac{1}{100} = 1\%$ de chances de vencer. Na modalidade centena também é similar, pois o jogador precisa acertar 1 escolha de 10 em cada dígito sorteado, dessa forma, são

$$C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} = 10^{3} = 1.000$$

centenas possíveis, logo a probabilidade do apostador acertar em uma das centenas é de $\frac{1}{1000} = 0{,}001 = 0{,}1\%$. Finalmente, se o apostador escolher o número de quatro dígitos sorteados, são ao todo

$$C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} \times C_{10}^{1} = 10^{4} = 10.000$$

números possíveis sorteados. Assim, o apostador tem

$$\frac{1}{10000} = 0{,}0001 = 0{,}01\%$$

de chances de ser sorteado.

Na modalidade de animais, ocorre uma curiosidade: matematicamente a probabilidade de se ganhar o jogo do bicho escolhendo um animal, seja na primeira rodada ou nas cinco rodadas se mantém. Para isso, considera-se que que os números sorteados nas centenas e nas unidades de milhar não influenciam nos números das dezenas. Como há 100 combinações distintas para as dezenas, e cada animal escolhido corresponde a 4 números, logo a probabilidade do jogador acertar um animal é de $\frac{4}{100} = 0{,}04 = 4\%$. Se o jogador desejar que esse animal apareça nos dois números sorteados, obtém-se $100 + 100 = 200$ sorteios possíveis diferentes, uma vez que as bolas são respostas a cada fim de sorteio. Assim, o jogador possui $4 + 4 = 8$ chances de ter o número correspondido ao animal sorteado, ou seja, a probabilidade de êxito se mantém em $\frac{8}{200} = 0{,}04 = 4\%$. Com 5 números escolhidos também a probabilidade se mantém a, que fica em

$$\frac{4+4+4+4+4}{100+100+100+100+100} = \frac{20}{500} = 0{,}04 = 4\%.$$

Para a escolha de mais animais, a probabilidade aumenta. Assim com 2 bichos, a probabilidade fica em

$$\frac{4 \times 2}{100} = \frac{8}{100} = 8\%$$

para 3 bichos fica

$$\frac{4 \times 3}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$$

para 4 bichos fica

$$\frac{4 \times 4}{100} = \frac{16}{100} = 16\%$$

e para 5 bichos fica

$$\frac{4 \times 5}{100} = \frac{20}{100} = 20\%.$$

Também é aplicada a regra de proporcionalidade dentro das rodadas. Assim, se o apostador ganha 18 vezes o valor apostado caso acerte de primeira os dígitos escolhidos, com duas tentativas ele ganha

$$\frac{18}{2} = 9$$

vezes, com três tentativas ele ganha

$$\frac{18}{3} = 6$$

vezes, com quatro tentativas ele ganha

$$\frac{18}{4} = 4{,}5$$

vezes e com cinco tentativas ele ganha

$$\frac{18}{5} = 3,6$$

vezes.

5.5 Matemática envolvida na Mega-Sena.

Se um apostador escolher 6 números do 60 disponíveis, esses números poderão ser sorteados de

$$C_{60}^{6} = \frac{60!}{6! \times (60 - 6)!}$$

$$C_{60}^{6} = \frac{60!}{6! \times 54!}$$

$$C_{60}^{6} = \frac{60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55}{6!}$$

$$C_{60}^{6} = \frac{36.045.979.200}{720}$$

$$C_{60}^{6} = 50.063.860$$

maneiras distintas. Portanto, a probabilidade desse apostador obter êxito na aposta é de

$$\frac{1}{50.063.860} \approx 0,0000199\%.$$

Dessa maneira, o apostador para ter certeza de que irá acertar os 6 números escolhidos no sorteio, ele precisaria apostar, no mínimo, 50063860 vezes. Como cada aposta de seis números custa cinco reais, esse apostador desembolsaria

$$R\$5,00 \times 50.063.860 = R\$250.319.300,00.$$

Através da tabela oferecida no site da Caixa Econômica Federal[51], há de se descobrir em qual quantidade de números o apostador desembolsará o menor valor para ter certeza de que acertará os 6 números da Mega-Sena.

Ao se escolher x números para se apostar, tendo-se êxito na partida, sendo $20 \geq x \geq 6$, o apostador obtém um sucesso de C_x^6, ou seja, a quantidade mínima de apostas distintas para garantir o acerto será de ${C_{60}^6}/{C_x^6}$ jogos. Desta maneira, tem-se o seguinte:

Escolhendo-se 7 números, o apostador precisará apostar, no mínimo

$$C_{60}^6 \div C_7^6 = \frac{50.063.860}{7} = 7.151.980$$

vezes, assim ele desembolsará, no mínimo,

$$R\$35{,}00 \times 7.151.980 = R\$250.319.300{,}00.$$

Escolhendo-se 8 números, o apostador desembolsará, no mínimo,

$$R\$140{,}00 \times (C_{60}^6 \div C_8^6) = R\$140{,}00 \times 1.787.995 = R\$250.319.300{,}00.$$

Com 9 números, esse valor será de

$$R\$420{,}00 \times (C_{60}^6 \div C_9^6) = R\$420{,}00 \times 595.998 = R\$250.319.160{,}00.$$

Com 10 números, esse valor será de

$$R\$1.050{,}00 \times (C_{60}^6 \div C_{10}^6) = R\$1.050{,}00 \times 238.399 = R\$250.318.950{,}00.$$

Com 11 números, esse valor será de

$$R\$2.310{,}00 \times (C_{60}^6 \div C_{11}^6) = R\$2.310{,}00 \times 108.363 = R\$250.318.530{,}00.$$

Com 12 números, esse valor será de

$$R\$4.620{,}00 \times (C_{60}^6 \div C_{12}^6) = R\$4.620{,}00 \times 54.182 = R\$250.320.840{,}00.$$

Com 13 números, esse valor será de

$$R\$8.580{,}00 \times (C_{60}^6 \div C_{13}^6) = R\$8.580{,}00 \times 29.175 = R\$250.321.500{,}00.$$

[51] Disponível em: https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Mega-Sena.aspx.

Com 14 números, esse valor será de

$$R\$15.015{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{14}^{6}) = R\$15.015{,}00 \times 16.671 = R\$250.320.840{,}00.$$

Com 15 números, esse valor será de

$$R\$25.025{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{15}^{6}) = R\$25.025{,}00 \times 10.003 = R\$250.315.064{,}00.$$

Com 16 números, esse valor será de

$$R\$40.040{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{16}^{6}) = R\$40.040{,}00 \times 6.252 = R\$250.330.080{,}00.$$

Com 17 números, esse valor será de

$$R\$61.880{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{17}^{6}) = R\$61.880{,}00 \times 4.045 = R\$250.304.600{,}00.$$

Com 18 números, esse valor será de

$$R\$92.820{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{18}^{6}) = R\$92.820{,}00 \times 2.697 = R\$250.335.540{,}00.$$

Com 19 números, esse valor será de

$$R\$135.660{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{19}^{6}) = R\$135.660{,}00 \times 1.845 = R\$250.292.700{,}00.$$

Com 20 números, esse valor será de

$$R\$193.800{,}00 \times (C_{60}^{6} \div C_{20}^{6}) = R\$193.800{,}00 \times 1.292 = R\$250.389.600{,}00.$$

Quadro 1 - Valor “investido” na Mega-Sena em vitória absoluta

Quantidade de números	Valor por jogo	Quantidades de resultados possíveis	Valor total desembolsado
6	R$ 5,00	50.063.860	R$ 250.319.300
7	R$ 35,00	7.151.980	R$ 250.319.300
8	R$ 140,00	1.787.995	R$ 250.319.300
9	R$ 420,00	595.998	R$ 250.319.160
10	R$ 1.050,00	238.399	R$ 250.318.950
11	R$ 2.310,00	108.363	R$ 250.318.530
12	R$ 4.620,00	54.182	R$ 250.320.840
13	R$ 8.580,00	29.175	R$ 250.321.500
14	R$ 15.015,00	16.671	R$ 250.320.840
15	R$ 25.025,00	10.003	R$ 250.315.064

16	R$ 40.040,00	6.252	R$ 250.330.080
17	R$ 61.880,00	4.045	R$ 250.304.600
18	R$ 92.820,00	2.697	R$ 250.335.540
19	R$ 135.660,00	1.845	R$ 250.292.700
20	R$ 193.800,00	1.292	R$ 250.389.600

Fonte: Elaborado pelo autor.

Portanto, se uma pessoa quisesse ter certeza de que iria ganhar na Mega-Sena, ela desembolsaria, no mínimo, $R\$250.292.700{,}00$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os jogos de azar podem ser vistos com desprezo por algumas pessoas, uma vez que há todo um contexto histórico envolvendo tanto a sua proibição no território brasileiro como também a possibilidade de haver um adoecimento psicológico das pessoas, assim havendo alguma forma de repulsa de abordar esse assunto em um âmbito acadêmico. Todavia foi visto com mais maturidade uma forma de abordar o assunto de forma que foi mostrado o seu contexto histórico e científico, e que faz parte da cultura de muitas civilizações.

A análise do assunto foi realizada de forma abrangente, assim mostrando a popularidade e a sua direta relação com a rotina de muitas pessoas, mesmo que algumas modalidades infrinjam a legislação vigente, as leis não são suficientes para mitigar a curiosidade de ter novas “emoções” e perpetuar a esperança de multiplicar o patrimônio de forma rápida e fácil. Com essa demanda de jogadores, a oferta de opções ilegais na área de apostas tende a crescer, assim oferecendo um leque de opções para os jogadores.

A Matemática acaba estando presente em toda a cadeia desses jogos, uma vez que são realizados vários cálculos para se obter o lucro médio (ou prejuízo) tanto dos apostadores quanto da banca, sendo que intuitivamente a banca continua se perpetuando (mesmo que de algumas maneiras ilegalmente) caso ela obtenha uma vantagem maior que os apostadores. Dessa maneira, as análises compreendem também a porcentagem de êxito, novas modalidades que podem modular o psicológico dos apostadores, como é o caso do jogo do bicho que independentemente da quantidade de números apostados, a sua probabilidade somada ao final continua a mesma e o apostador acaba desembolsando mais dinheiro.

O mesmo ocorre com o *roulette,* pois mesmo que a banca tenha uma “pequena” vantagem na escolha de números, a tendência sempre que a longo prazo os cassinos obtenham uma boa lucratividade. Assim, esse estudo veio apresentar, além das análises matemáticas, também uma forma que aproxima a área acadêmica com relações sociais que muitas vezes podem ter um olhar marginalizado devido esse contexto histórico. Dessa maneira, fica visualizado matematicamente o porquê de os jogos de azar terem esse nome, uma vez que foi compreendido que a longo prazo a banca tende a ficar mais rica, e o apostador tende a ter mais prejuízos, mesmo em jogos de azar legalizados como o caso das loterias que cumprem um papel social importante.

REFERÊNCIAS

ADAMI, Anna. **Mega-Sena**. [S. l.]: InfoEscola, [2018?]. Disponível em: https://www.infoescola.com/curiosidades/mega-sena/. Acesso em: 25 jan. 2024.

BRASIL. Decreto-Lei nº 9215, de 30 de abril de 1946. **Proíbe a prática ou exploração de jogos de azar em todo o território nacional**. Lex: Subchefia para Assuntos Jurídicos. Rio de Janeiro, 30 abr. 1946. Legislação Federal e marginalia.

BRASIL. Lei nº 13756, de 12 de dezembro de 2018. **Dispõe sobre o Fundo Nacional de Segurança Pública (FNSP), sobre a destinação do produto da arrecadação das loterias e sobre a promoção comercial e a modalidade lotérica denominada apostas de quota fixa**. Lex: Subchefia para Assuntos Jurídicos. Brasília, 12 dez. 2018. Legislação Federal.

BRASIL. **Mega-Sena**: A loteria que paga milhões para o acertador dos seis números sorteados. Brasília: Caixa Econômica Federal, [2024]. Disponível em: https://loterias.caixa.gov.br/Paginas/Mega-Sena.aspx. Acesso em: 25 jan. 2024.

CARTA, Parceiro. **A história dos jogos de azar no Brasil**. Campinas: Carta Campinas, 18 nov. 2022. Disponível em: https://bit.ly/3Sa5Y2Y. Acesso em: 23 out. 2023.

CARVALHO, Paulo. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015. 89 p. v. 1. ISBN 978-85-244-0343-9.

CASTILHO, Ivan. **Uma viagem pela história da Roleta**. Florianópolis: PSXBR, 22 nov. 2021. Disponível em: https://psxbrasil.com.br/uma-viagem-pela-historia-da-roleta/. Acesso em: 22 jan. 2024.

CESCHIM, Beatriz. **Cassinos online, origem e mais: uma breve história do Blackjack**. São Paulo: DIÁRIO DO GRANDE ABC, 30 mar. 2022. Disponível em: https://www.dgabc.com.br/Noticia/3837979/cassinos-online-origem-e-mais-uma-breve-historia-do-blackjack. Acesso em: 20 nov. 2023.

CORREA, Sonia Maria. **Probabilidade e Estatística**. 2. ed. Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003. 116 p.

CUNHA, Leandro. **Regras do Poker Fechado com 5 Cartas na Mão (5 Card Draw)**. [S. l.], 14 fev. 2020. Disponível em: https://www.portaldopoker.com/poker-fechado/. Acesso em: 23 jan. 2024.

FARIAS, Ana Maria. **Probabilidade e estatística**. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010. 374 p. v. 1. ISBN 978-85-7648-500-1.

GASPARIK, Maros. **O melhor guia para principiantes em Blackjack**. Bratislava, 15 nov. 2023. Disponível em: https://pt.casino.guru/introducao-ao-blackjack. Acesso em: 11 dez. 2023.

GLOBO ESPORTE (São Paulo). **Como surgiu o poker? Veja história e curiosidades**. São Paulo: GE.com, 14 dez. 2023. Disponível em: https://bit.ly/42aa0LH. Acesso em: 23 jan. 2024.

HENRIQUES, Juliana. **A proibição de jogos de azar e cassinos no brasil é compatível com o Estado Democrático de Direito?**. Belo Horizonte, 24 mar. 2008. Disponível em: https://bit.ly/3tRMoyj. Acesso em: 23 out. 2023.

HERTEL, Rafael. História do Poker: **Tudo sobre o jogo de cartas mais popular do mundo**. [S. l.]: SPR, 27 mar. 2020. Disponível em: https://sharkpokerreviews.com.br/blog/historia-do-poker/. Acesso em: 23 jan. 2024.

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática**: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. 418 p. v. 2. ISBN 978-85-472-0538-6.

JESUS, Isaias. **Como Jogar no Jogo do Bicho? Tipos de apostas e quanto Você Ganha?**. YouTube, 27 jun. 2022. Disponível em: https://youtu.be/dI1vXd5ZW_k. Acesso em: 24 jan. de 2024.

MARQUES, Rui. **Arranjo e combinação**: Qual a diferença entre arranjo e combinação?. [S. l.]: 7Grau, 2018. Disponível em: https://bit.ly/3SfUSJJ. Acesso em: 26 out. 2023.

NEVES, Gustavo. **A história da roleta; onde surgiu a roleta e suas transformações ao longo do tempo**. Curitiba: Pop Cyber, 13 maio 2021. Disponível em: https://www.portalpopcyber.com/a-historia-da-roleta-onde-surgiu-a-roleta-e-suas-transformacoes-ao-longo-do-tempo/. Acesso em: 22 jan. 2024.

OLIVEIRA, Raul. **Princípio fundamental da contagem**. Goiânia: Brasil Escola, 2007. Disponível em: https://bit.ly/3Q8VFd0. Acesso em: 24 out. 2023.

OLIVEIRA, Raul. **Arranjo com repetição**. Goiânia: Brasil escola, 19 abr. 2021. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/arranjo-com-repeticao.htm. Acesso em: 27 out. 2023.

OLIVEIRA, Raul. **Combinação com repetição**. Goiânia: Brasil escola, 16 set. 2021. Disponível em: https://bit.ly/3QdbWh1. Acesso em: 27 out. 2023.

OMAIS, Sálua. **JOGOS DE AZAR: ANÁLISE DO IMPACTO PSÍQUICO E SOCIO-FAMILIAR DO JOGO PATOLÓGICO A PARTIR DAS VIVÊNCIAS DO JOGADOR**. Orientador: Regina Calil. 2007. 177 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2007.

PEREIRA, Ana Carolina. **A trajetória do jogo do bicho na sociedade brasileira**. [S. l.], 27 out. 2022. Disponível em: https://bit.ly/42dK1TH. Acesso em: 24 jan. 2024.

PEREIRA, Paulo. **PROBABILIDADE CONDICIONAL**. Youtube, 28. jun. 2016. Disponível em:

https://www.youtube.com/watch?v=uo16XTg2CIQ&ab_channel=EquacionaComPauloPereira. Acesso em: 27 out. 2023.

PIMENTEL, Monica. **Aprenda como jogar Blackjack e com nosso guia completo!**. [S. l.], 7 mai. 2023. Disponível em: https://bit.ly/4a9ANM1. Acesso em: 11 dez. 2023.

RATIER, Rodrigo. **Qual é a origem do jogo do bicho?**. São Paulo: Mundo Estranho, 18 abr. 2011. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-e-a-origem-do-jogo-do-bicho. Acesso em: 24 jan. 2024.

RODRIGUES, Erick. **BLACK-JACK: A ORIGEM E A HISTÓRIA DO JOGO MAIS POPULAR DOS CASSINOS**. [S. l.]: EL HOMBRE, 13 abr. 2023. Disponível em: https://www.elhombre.com.br/black-jack-a-origem-e-a-historia-do-jogo-mais-popular-dos-cassinos/. Acesso em: 20 nov. 2023.

SANTOS, Maiza. **Mega Sena: Veja a história da maior modalidade lotérica do Brasil**. Ananideua: O Liberal, 16 fev. 2022. Disponível em: https://bit.ly/492AeTj. Acesso em: 25 jan. 2024.

TARGINO, Maurício. **Como jogar poker Five Card Draw passo a passo**. São Paulo: BolaVip, 25 maio 2021. Disponível em: https://bit.ly/3vNd4l7. Acesso em: 23 jan. 2024.

TAYLOR, Isaac. **The History of Gambling**. [S. l.], [2011?]. Disponível em: http://bit.ly/3Mfo14e. Acesso em: 23 out. 2023.

THOMPSON, William. **Gambling in America: An Encyclopedia of History, Issues, and Society**. [S. l.]: ABC-CLIO, 2001. 509 p. ISBN 1576071596.

TOIGO, Claudio. **Aprenda como jogar na Mega Sena online**. Porto Alegre: GZH, [2023]. Disponível em: https://bit.ly/3OgzjpM. Acesso em: 25 jan. 2024.

WIKIPEDIA. **Casino Kid**. [S. l.], 25 jul. 2005. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Casino_Kid. Acesso em: 13 fev. 2024.

WRIGHT, John et al. **Como Jogar Roleta**. [S. l.]: WikiHow, 2 nov. 2013. Disponível em: https://pt.wikihow.com/Jogar-Roleta. Acesso em: 23 jan. 2024.