



Universidade Estadual do Maranhão – UEMA
Pró-Reitoria de Pós-Graduação – PPG
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional/PROFMAT



Agnaldo dos Santos Pereira

MÉTODO SIMPLEX e sua aplicação na resolução de problemas de programação linear em um curso técnico de administração

São Luís–MA

2020

Agnaldo dos Santos Pereira

MÉTODO SIMPLEX e sua aplicação na resolução de problemas de programação linear em um curso técnico de administração

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos

São Luís–MA

2020

Pereira, Agnaldo dos Santos.

Método simplex e sua aplicação na resolução de problemas de programação linear em um curso técnico de administração / Agnaldo dos Santos Pereira. – São Luís, 2020.

77 f

Dissertação (Mestrado Profissional) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos.

1.Programação linear. 2.Método simplex. 3.Metodologias ativas. I.Título

CDU: 519.852

Agnaldo dos Santos Pereira

MÉTODO SIMPLEX e sua aplicação na resolução de problemas de programação linear em um curso técnico de administração

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática de PROFMAT/UEMA, como requisito obrigatório para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

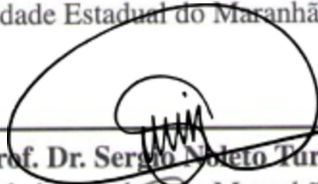
Área de concentração: MATEMÁTICA

Aprovado em: ____ / ____ / ____



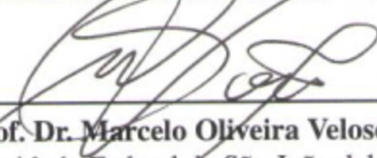
**Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos -
Orientador**

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA



Prof. Dr. Sérgio Nóbilo Turibus

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA



Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso

Universidade Federal de São João del-Rei,
Campus Alto Paraopeba – UFSJ

São Luís–MA

2020

Dedico este trabalho à minha família, pelo estímulo e compreensão durante a minha pós-graduação, em especial a minha mãe Maria de Fátima dos Santos Pereira, minha esposa Leydiane dos Santos Ribeiro Pereira.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me permitir sonhar e tornar meus sonhos realidade no tempo determinado por Ele.

Ao meu orientador Prof. Dr Roberto Batista dos Santos, pela permanente presença, paciência e contribuições durante a realização desse trabalho.

Ao Prof. Dr João Coelho pela forma competente e sonhadora que conduz o programa PROFMAT–UEMA.

Aos professores do Mestrado da UEMA, e em especial ao Profa. Dra Sandra Imaculada, pelo comprometimento e incansável disponibilidade em nos ensinar.

Aos meus colegas de mestrado: Francycarla, Kleyton, Marcelo, Fernando, Rafael, Alan, Enio, Francinaldo, Neto, Milton, Rogério e Vicente que além de parceiros de curso, se mostraram amigos de batalhas.

A Ananda, secretária do curso, pela disponibilidade e atenção a todos.

Aos alunos e servidores do IFMA Campus Avançado Rosário, pelo incentivo e colaboração na construção desta pesquisa.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da idealização e construção desta pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os resultados da pesquisa sobre o Método Simplex aplicado em um Curso Técnico de Administração e destacamos a importância desse conhecimento para um Técnico em Administração. Os aplicativos GeoGebra, OR Simplex e o Solver, uma ferramenta da Planilha do Calc, foram utilizados para agilizar e facilitar nas resoluções dos problemas aplicados. O primeiro método apresentado foi o método gráfico usado somente quando o problema envolve duas variáveis de decisão. O segundo foi o método analítico (Método Simplex Primal) utilizando o tableau do Simplex, isto é, um quadro para organizar os cálculos, além disso, destacamos os principais passos para resolver um problema envolvendo três ou mais variáveis de decisão. Em seguida apresentamos aos alunos o OR Simplex um aplicativo de celular próprio para resolver Problema de Programação Linear (PPL) que pode ser utilizado em problemas envolvendo até trinta variáveis de decisão (esse foi o método que os alunos mais gostaram pela simplicidade na resolução de PPL). E finalmente utilizamos o Solver para resolver alguns problemas da lista de exercícios que os alunos tinham que montar o problema na sua forma padrão e verificar se há uma relação entre os problemas que já estão na forma padrão.

Palavras-chave: Programação Linear, Método Simplex, Metodologias Ativas.

ABSTRACT

In this paper, we present the results of the research on the Simplex Method applied in a Technical Administration Course and highlight the importance of this knowledge for an Administration Technician. The GeoGebra, OR Simplex and Solver applications, a tool in the Calc Spreadsheet, were used to streamline and facilitate the resolution of applied problems. The first method presented was the graphical method used only when the problem involves two decision variables. The second was the analytical method (Simplex Primal Method) using the Simplex tableau, that is, a table to organize the calculations, in addition, we highlight the main steps to solve a problem involving three or more decision variables. Then we present OR Simplex students with their own mobile application to solve Linear Programming Problem (PPL) that can be used in problems involving up to thirty decision variables (this was the method that students liked the most for the simplicity in solving PPL). And finally we used Solver to solve some problems in the list of exercises that the students had to put the problem in its standard form and check if there is a relationship between the problems that are already in the standard form.

Keywords: Linear Programming, Simplex Method, Active Methodologies.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Solução da inequação $x_1 - x_2 \leq 2$	18
Figura 2 – Solução do sistema de inequação.	19
Figura 3 – Região convexa e não convexa.	22
Figura 4 – Região factível Exemplo 2.1	25
Figura 5 – Solução ótima Exemplo 2.1	26
Figura 6 – Região factível e solução ótima Exemplo 2.2	27
Figura 7 – Múltiplas solução ótimas	29
Figura 8 – Função objetivo ilimitada.	30
Figura 9 – Não existe solução.	31
Figura 10 – Solução degenerada.	32
Figura 11 – Fluxograma da descrição geral do algoritmo Simplex.	42
Figura 12 – Região factível Problema 5.1	51
Figura 13 – Resolução utilizando o método gráfico.	52
Figura 14 – Utilizando o método simplex.	56
Figura 15 – OR simplex.	57
Figura 16 – OR Simplex.	57
Figura 17 – OR Simplex.	58
Figura 18 – Introdução dos dados na planilha.	60
Figura 19 – Inserindo as fórmulas na planilha.	60
Figura 20 – Abrindo o Solver.	61
Figura 21 – Inserindo os dados no Parâmetro do Solver.	61
Figura 22 – Solução final dada pelo Solver.	62
Figura 23 – Introdução dos dados na planilha.	62
Figura 24 – Construção da tabela no Excel.	63
Figura 25 – A adoção do Método Simplex contribuiu para o desenvolvimento de sua aprendizagem?	63
Figura 26 – As atividades e discussões em grupo motivaram seus estudos e contribuíram para um melhor desempenho na resolução de PPL já montados?	64
Figura 27 – Dos métodos apresentados para resolução de PPL quais foram o que você mais se identificou?(Pode ser mais de uma alternativa)	65
Figura 28 – Você teve dificuldades para interpretar os PPL apresentados?	65
Figura 29 – O conhecimento do Método Simplex pode contribuir de alguma forma para sua profissão?	66
Figura 30 – O tempo foi suficiente para resolver os problemas apresentados?	67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABP	Aprendizagem Baseada em Problemas
ALIO	Asociación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa
APDIO	Associação Portuguesa de Investigação Operacional
EURO	The Association of European Operational Research Societies
IFORS	International Federation of Operational Research Societies
LD	Linearmente Dependente
LI	Linearmente Independente
NL	Nova Linha
NLP	Nova Linha Pivô
PBL	Problem Based Learning
PL	Programação Linear
PPL	Problema de Programação Linear
PO	Pesquisa Operacional
SBF	Solução Básica Factível
SBFA	Solução Básica Factível Adjacente
SOBRAPO	Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional
TDIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
VB	Variável Básica
VBF	Variável Básica Factível
VNB	Variável Não Básica

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	REVISÃO DE LITERATURA	13
1.1	<i>Sistema de Equações Lineares</i>	13
1.1.1	<i>Solução de um Sistema de Equações Lineares</i>	15
1.2	<i>Inequação e Sistema de Inequações Lineares</i>	17
1.2.1	<i>Inequação</i>	17
1.2.2	<i>Sistema de Inequações</i>	18
1.3	<i>Espaços Vetoriais</i>	20
1.4	<i>Base de um Espaço Vetorial</i>	21
1.5	<i>Conjunto Convexo</i>	21
2	RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR	23
2.1	<i>Método de Resolução Gráfica de um Problema de Programação Linear</i>	23
2.2	<i>Casos Especiais</i>	27
2.2.1	<i>Múltiplas Soluções Ótimas</i>	28
2.2.2	<i>Função Objetiva z Ilimitada</i>	29
2.2.3	<i>Não Existe Solução Ótima</i>	30
2.2.4	<i>Solução Ótimas Degenerada</i>	31
3	O MÉTODO SIMPLEX	33
3.1	<i>Um breve histórico de programação linear</i>	33
3.2	<i>O Método Simplex Primal</i>	34
3.2.1	<i>Conceitos Preliminares do Algoritmo Simplex</i>	34
3.2.2	<i>Fórmula Geral do Problema de Programação Linear</i>	35
3.2.3	<i>Transformação da função objetivo</i>	36
3.2.4	<i>Transformação de lados direitos negativos</i>	36
3.2.5	<i>Transformação de restrições de desigualdade</i>	36
3.2.6	<i>Transformação de variáveis irrestritas</i>	37
3.3	<i>Solução Analítica de um Problema de Programação Linear</i>	37
3.4	<i>Algoritmo Simplex</i>	41
3.4.1	<i>Quadro do Simplex para Solução Manual do Problema de Programação Linear</i>	43
4	APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO	49

4.1	<i>Programação Linear no Ensino Médio</i>	49
4.2	<i>Procedimentos Metodológicos</i>	49
4.3	<i>Conceitos Básicos</i>	50
4.4	<i>Método Gráfico</i>	51
4.5	<i>Método Simplex</i>	52
4.6	<i>Utilizando o OR Simplex para Resolver Problemas de Programação Linear</i>	56
4.7	<i>Utilizando o Solver para Resolver Problema de Programação Linear</i> . .	58
4.8	<i>Resultados e discussões</i>	63
5	<i>CONCLUSÃO</i>	68
	<i>REFERÊNCIAS</i>	69
	<i>ANEXOS</i>	71
	<i>ANEXO A – LISTA DE PROBLEMAS</i>	72
	<i>ANEXO B – QUESTIONÁRIO</i>	75

INTRODUÇÃO

Quando decidimos utilizar o Método Simplex em uma turma do Curso Técnico de Administração do Ensino Médio IFMA/Campus Avançado Rosário, estávamos pensando em como dar sentido a vários conteúdos de matemática que são ensinados durante os três anos letivos.

Os **problemas** desta pesquisa são questões de Programação Linear (PL) específica para o curso de administração como “mix de produção” (são problemas que visam ou lucro máximo ou custo mínimo de produção de uma determinada indústria, fábrica ou empresa) que são relevantes para um técnico em administração. Neste contexto, temos como **hipótese** a utilização do Método Simplex para fazer uma conexão entre os conteúdos ensinados no ensino médio e sua importância na resolução de problemas do dia a dia de um técnico em administração, nesse sentido, temos como **objetivo geral** mostrar a contribuição do Método Simplex enquanto metodologia de ensino na resolução de PPL e a verificação de aprendizagem e temos como objetivos específicos resolver equações lineares com várias incógnitas, construção e análise de gráficos lineares, reconhecer os problemas de programação linear, utilizar o OR Simplex e o Solver para resolução de problemas de programação linear.

Assim, acredita-se que apresentando o Método Simplex aos alunos do Curso Técnico de Administração, contribui-se para uma melhor preparação desses alunos para enfrentarem as dificuldades de sua profissão no mercado de trabalho. Esse é um dos grandes desafios que as Escolas Públicas enfrentam nos dias atuais, e somente, com o conhecimento adquirido durante os estudos é que eles serão capazes de enfrentarem as dificuldades que o mercado de trabalho apresenta no momento atual.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL.MEC, 2006), a tecnologia impacta no ensino da matemática exigindo habilidades e procedimentos adequados por parte do professor. Por esse motivo, é preciso que o professor busque suporte para o seu trabalho em sala de aula e a utilização de aplicativos para facilitar o ensino da Matemática, proporcionando uma aproximação entre o tradicional e o novo, modificando o processo de ensino.

Dessa forma, vamos utilizar as metodologias ativas como a sala de aula invertida, aprendizagem baseada em problemas e o laboratório de informática como suporte para o ensino do Método Simplex proporcionando aos alunos novos meios de aprendizagens.

Esta dissertação foi organizada da seguinte forma: apresentamos a introdução; na primeira seção, revisamos os principais conteúdos estudados no segundo ano do ensino médio que é essencial para o desenvolvimento deste trabalho, assim como, para a solução gráfica e analítica de equações lineares. Na segunda seção, apresentamos o método de solução gráfica de um

PPL. Usamos o GeoGebra para a construção dos gráficos o que torna o processo mais simples e rápido. Na terceira seção, falamos do Método Simplex, um pouco de sua história e seus conceitos e destacamos os principais passos necessário para a resolução manual de um problema envolvendo mais de duas variáveis de decisão. Na quarta seção apresentamos as aplicações que foram desenvolvidas em sala de aula com os alunos. Aqui foi apresentado também a solução computacional utilizando o OR Simplex e o Solver da Planilha Calc um *software* livre do LibreOffice para solução de PL. E, finalmente na quinta seção apresentamos as conclusões desse trabalho.

1 REVISÃO DE LITERATURA

Nessa seção faremos uma breve revisão dos conteúdos básicos que constam na grade curricular do ensino médio como: equações e inequações lineares, sistema de equações e inequações lineares, resolução de sistema de equações e inequações lineares, representação de um sistema de equações na forma matricial e vetores que serão utilizados para o desenvolvimento da PL. Muitos destes conceitos são aprofundados e estudados em uma disciplina chamada de Álgebra Linear, geralmente, em nível de graduação. Para maior embasamento recomendamos (BOLDRINI, 1993; LIMA, 2009; HARDLEY, 1993a).

1.1 Sistema de Equações Lineares

Inicialmente vamos apresentar uma equação linear nas incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n que é uma equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

sendo, a_1, a_2, \dots, a_n e b os valores reais e constantes. Vejamos um exemplo simples de equação linear envolvendo três incógnitas, $2x_1 + 3x_2 - 10x_3 = -34$.

Um sistema de m equações e n incógnitas é um coleção finita de equações lineares dada por:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

Vejamos como podemos escrever o sistema (1.2) na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma forma compacta de representarmos um sistema de equações lineares é apresentado a seguir:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \quad (1.3)$$

em que, \mathbf{A} é chamada de matriz dos coeficiente do sistema, \mathbf{X} matriz das incógnitas e \mathbf{B} é a matriz dos termos independentes. Também podemos escrever os vetores colunas da matriz dos coeficientes na forma $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t$. Na próxima seção vamos falar sobre os vetores

com mais detalhes, utilizamos a notação $[A|B]$ para representar a matriz aumentada de um sistema de equações lineares.

Listaremos as principais **operações elementares** sobre linha em uma matriz que utilizaremos na resolução de sistemas de equações lineares.

1. Trocar a posição de duas linhas L_i e L_j , indicada por $L_i \longleftrightarrow L_j$;

$$L_2 \longleftrightarrow L_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

significa que a segunda linha foi trocada pela primeira linha e o símbolo (\sim) significa que as duas matrizes são equivalentes.¹

2. Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com (λ) vezes uma outra linha L_j , indicada por $L_i \longrightarrow L_i + \lambda L_j$;

$$L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & 13 & 3 \end{bmatrix},$$

aqui a linha três foi substituída pelo dobro da linha um somada com a linha três.

3. Multiplicação de um linha L_i por um número real (α) diferente de zero, indicada por $L_i \longrightarrow \alpha L_i$.

$$L_1 \longrightarrow 2L_1 \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 10 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

a linha um foi substituída pelo dobro da linha um.

Faremos constantemente o uso dessas operações elementares em todos os problemas que envolvem programação linear, por isso, é muito importante sua compreensão.

Exemplo 1.1. Consideremos o sistema abaixo:

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases} \quad (1.4)$$

vejamos como podemos escrevê-lo em sua forma matricial.

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

¹ “Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$. A matriz A é dita ser equivalente por linhas à matriz B se B pode ser obtida de A pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.”

cujo os vetores colunas da matriz dos coeficientes são: $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1)^t$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -3)^t$ e $\mathbf{a}_3 = (2, -1, -1)^t$.

1.1.1 Solução de um Sistema de Equações Lineares

Existem vários métodos de resolução de um sistema de equações lineares. Neste trabalho utilizaremos o Método de Eliminação de Gauss e o Método de Eliminação de Gauss-Jordan. Vejamos cada um deles:

O **Método de Eliminação de Gauss** consiste numa sequência de passos “elementares” que transforma o sistema dado em outro sistema equivalente. Lembrando que *dois sistemas são equivalentes quando tem a mesma solução*. Os passos elementares são conduzidos de maneira a eliminar a incógnita x_1 de todas as equações, a partir da segunda, sendo necessário que a_{11} não seja nulo, em seguida eliminamos as incógnitas x_2 de todas as equações, a partir da terceira, sendo que \hat{a}_{22} (novo coeficiente da segunda equação) não nulo, repete-se este processo até não ser possível continuá-lo mais. Sendo que os números $a_{11}, \hat{a}_{22}, \dots$ são chamados de pivotes de eliminação.

As operações elementares que podemos aplicar na matriz aumentada dos coeficientes de um sistema são as mesmas já citadas acima. O método de eliminação é a maneira mais eficiente de resolver um sistema de m equações lineares com n incógnitas.

Exemplo 1.2. Vejamos como resolver um sistema de equações lineares (1.4) usando o método de eliminação de Gauss.

Solução: inicialmente escrevemos a matriz aumentada do sistema:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

Agora vamos fazer as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada acima. Os cálculos deixaremos para o leitor, por isso, não os faremos aqui.

- Cálculo da segunda linha:

$$L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ -1 & -3 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

- Cálculo da terceira linha:

$$L_3 \longrightarrow L_3 + L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

Vamos multiplicar a segunda linha da matriz acima por (-1) . Obtendo a matriz abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

- Cálculo da terceira linha:

$$L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 21 \end{array} \right]$$

Assim, obtemos a seguinte matriz aumentada do sistema

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 21 \end{array} \right]$$

que representa o sistema de equações lineares abaixo:

$$S = \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ 0x_1 + 0x_2 + 11x_3 = 21 \end{cases}$$

equivalente ao sistema (1.4) que pode ser resolvido de baixo para cima, cuja solução é $S = \left\{ \left(\frac{41}{11}, -\frac{39}{11}, \frac{21}{11} \right) \right\}$ que é uma terna ordenada. Observe que ao aplicarmos o método de eliminação de Gauss o sistema foi resolvido de forma mais simples.

Segundo (LIMA, 2009) o Método de Eliminação de Gauss-Jordan “contínua a eliminação iniciada pelo método de Gauss, chegando no final a uma matriz escalonada, com a propriedade adicional de que, acima e abaixo do primeiro elemento não-nulo de cada linha, todos os elementos são iguais a zero. Se a matriz for (quadrada e) invertível, o primeiro elemento não-nulo de cada linha da matriz escalonada está sobre a diagonal principal. Portanto, neste caso, o método Gauss-Jordan produz uma matriz cujos elementos não-nulos constituem a diagonal”.

Exemplo 1.3. No exemplo 1.2 vamos aplicar o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema de equações lineares.

Solução: vamos continuar aplicando operações elementares sobre as linhas da matriz abaixo obtida pelo método de Gauss.

$$[\mathbf{A}|\mathbf{B}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 21 \end{array} \right]$$

- Vamos eliminar o elemento $a_{12} = 1$:

$$L_1 \longrightarrow -L_2 + L_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 11 & 21 \end{array} \right]$$

Vamos multiplicar a terceira linha da matriz acima por $\frac{1}{11}$. Obtendo a matriz abaixo:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{11} \end{array} \right]$$

- Finalmente, vamos eliminar os elementos $a_{13} = -3$ e $a_{23} = 5$:

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow -5L_3 + L_2 \\ L_1 \longrightarrow 3L_3 + L_1 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{41}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{39}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{21}{11} \end{array} \right]$$

Após todas as eliminações temos o seguinte sistema

$$S = \begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 = \frac{41}{11} \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = -\frac{39}{11} \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = \frac{21}{11} \end{cases}$$

cuja solução é $S = \left\{ \left(\frac{41}{11}, -\frac{39}{11}, \frac{21}{11} \right) \right\}$.

Note-se que após a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan o sistema equivalente obtido tem seus elementos da diagonal principal igual a um, os elementos fora da diagonal iguais a zero e os termos independente representam a solução do sistema.

1.2 Inequação e Sistema de Inequações Lineares

Nesta seção vamos apresentar os principais tipos de inequações e sistema de inequações, e um procedimento para sua resoluções algébricas e gráficas.

1.2.1 Inequação

É uma sentença matemática, com uma ou mais incógnitas, expressa por uma desigualdade. Vejamos alguns exemplos envolvendo duas ou três variáveis:

- 1) $3x_1 + 4x_2 \leq 2$;
- 2) $x_2 - 2x_3 < 4$;
- 3) $x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 3$.

Para nosso objetivo iremos utilizar apenas as inequações com duas ou três variáveis e, como podemos representá-las em um plano cartesiano. Vejamos o procedimento para a resolução de uma inequação envolvendo duas variáveis.

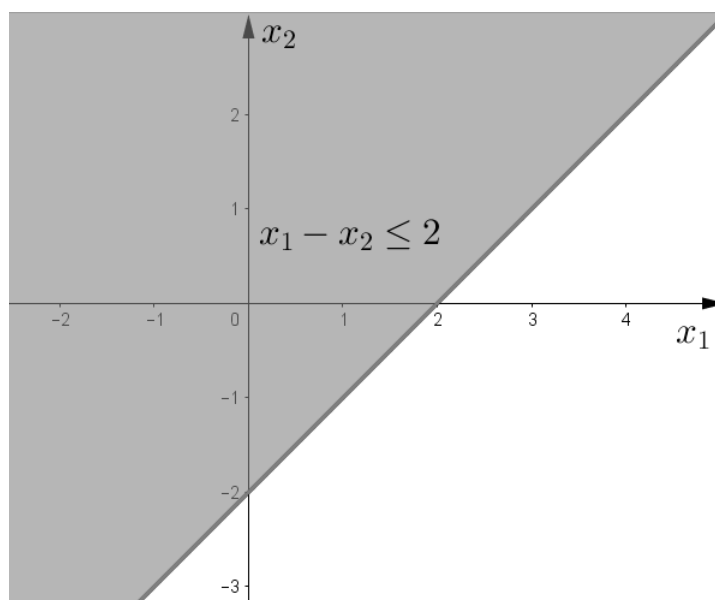
1. Substituímos a desigualdade por uma igualdade;
2. Resolvemos a equação obtida a cima fazendo uma das incógnitas igual a zero;
3. Em seguida plotamos o gráfico da equação e destacamos a região da desigualdade proposta pela inequação.

Vejamos a aplicação desses passos em um exemplo.

Exemplo 1.4. Representar graficamente a inequação $x_1 - x_2 \leq 2$.

Solução: inicialmente transformamos a inequação $x_1 - x_2 \leq 2$ na equação $x_1 - x_2 = 2$, agora fazemos uma das incógnitas igual a zero, isto é, $x_1 = 0$, então $x_2 = -2$. Assim, temos o ponto $(0, -2)$. De forma análoga obtemos o ponto $(2, 0)$. Daí, traçamos o gráfico da reta $x_1 - x_2 = 2$. Logo, a região sombreada representa a solução da inequação, veja Figura 1.

Figura 1 – Solução da inequação $x_1 - x_2 \leq 2$.



Fonte: Pereira (2020).

1.2.2 Sistema de Inequações

Um PPL está relacionado as soluções de sistemas de desigualdades lineares que satisfazem as restrições $x_i \geq 0$ com $i = 1, 2, \dots, n$. Vejamos a representação geral de um sistema de

inequações envolvendo m equações e n incógnitas.

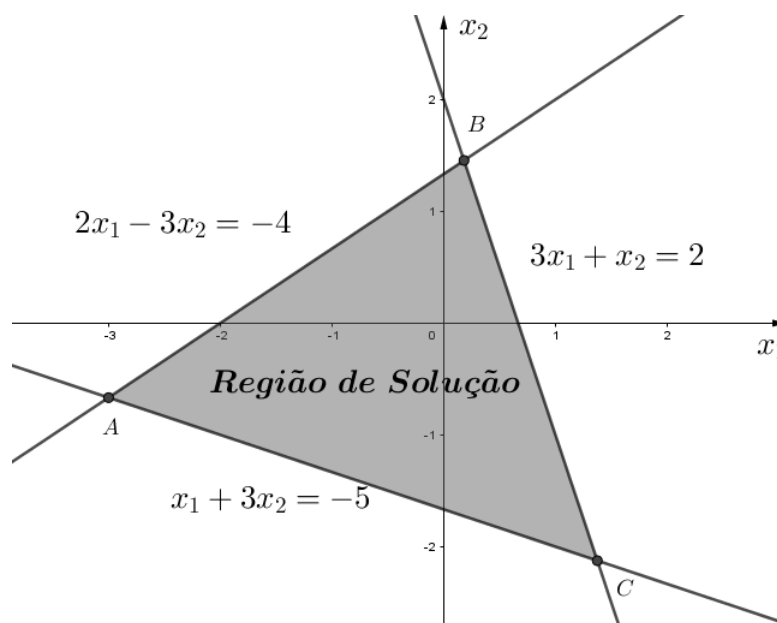
$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1.5)$$

No entanto, para os nossos estudos vamos utilizar apenas inequações envolvendo duas ou três variáveis. Em geral, para encontrarmos a solução de um sistema de inequação com duas variáveis, devemos encontrar os semiplanos que são as soluções de cada uma das inequações separadamente e, depois, achar a interseção desses semiplanos. Esta interseção pode ser vazia e, nesse caso, o sistema é dito incompatível. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 1.5. Resolva o sistema de inequação linear $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5 \geq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4 \geq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2 \leq 0 \end{cases}$ e faça sua representação gráfica.

Solução: veja que cada uma das desigualdades dadas determina um semiplano cuja fronteira é a reta correspondente. Assim, para resolver este sistema, devemos, inicialmente, traçar as retas associadas a cada uma das desigualdades dadas e, a seguir, sombrear o semiplano determinado pela respectiva desigualdade. A interseção das regiões sombreadas será a solução do sistema, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Solução do sistema de inequação.



Fonte: Pereira (2020).

Qualquer ponto que esteja dentro da região determinada pelo triângulo ABC faz parte da solução, enquanto que qualquer ponto que não pertença a região sombreada não é solução do sistema.

1.3 Espaços Vetoriais

O estudo dos espaços vetoriais não é abordado no ensino médio, no entanto, pode ser explorado de modo simples, pois vamos trabalhar apenas como espaços já conhecidos pelos alunos, que são: \mathbb{R}^2 que representa o plano e \mathbb{R}^3 que representa o espaço. Para um melhor embasamento sugerimos (HOWARD, 2001; LIMA, 2009; BARROS, 1991).

Um espaço vetorial E é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: *adição* que a cada par de vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ faz corresponder um novo vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in E$, chamado soma de \mathbf{u} e \mathbf{v} , e a *multiplicação por um número real*, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $\mathbf{v} \in E$ faz corresponder um novo vetor $\alpha\mathbf{v}$ chamado o produto de α por \mathbf{v} . Sendo, que estas operações devem satisfazer, para quaisquer números reais α, β e vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vetorial:

comutatividade: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$;

associatividade: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{w})$ e $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$;

vetor nulo: existe um vetor $\mathbf{0} \in E$, chamado de vetor nulo, ou vetor zero, tal que $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in E$;

inverso aditivo: para cada vetor $\mathbf{v} \in E$ existe um vetor $-\mathbf{v} \in E$ chamado inverso aditivo, ou simétrico de \mathbf{v} , tal que $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$;

distributividade: $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ e $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$;

multiplicação por 1: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$;

Neste trabalho vamos utilizar apenas os espaços \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , que serão suficiente para as necessidades. Sendo assim, dado dois vetores $\mathbf{v} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{u} = (y_1, y_2)$, no plano, temos que a adição de dois vetores será representada por:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2). \quad (1.6)$$

no caso de dois vetores dos espaço $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{u} = (y_1, y_2, y_3)$, temos:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3). \quad (1.7)$$

Exemplo 1.6. Determine a soma dos vetores $\mathbf{v} = (2, 3)$ e $\mathbf{u} = (-1, 2)$ do plano.

Solução:

$$\mathbf{v} + \mathbf{u} = (2, 3) + (-1, 2) = (2 - 1, 3 + 2) = (1, 5).$$

Exemplo 1.7. *Determine a multiplicação por escalar do vetor $\mathbf{v} = (2, 3, -3)$ pelo escalar $\alpha = 4$.*

Solução:

$$\alpha \cdot \mathbf{v} = 4 \cdot (2, 3, -3) = (8, 12, -12).$$

1.4 Base de um Espaço Vetorial

Antes de definirmos base, temos que saber quando um vetor é Linearmente Independente (LI) ou Linearmente Dependente (LD). Diz-se que um conjunto $X \subset E$ é linearmente independente quando nenhum vetor $\mathbf{v} \in X$ é combinação linear² de outros elementos de X . Para evitar ambiguidade, no caso em que $X = \{\mathbf{v}\}$ constar de um único elemento \mathbf{v} , diz-se que X é linearmente independente, por definição quando $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Quando o conjunto X é L.I. seus elementos são todos diferente do vetor nulo.

Um conjunto $X \subset E$ diz-se linearmente dependente quando algum dos vetores $\mathbf{v} \in X$ é combinação linear de outros elementos de X , ou então $X = \{\mathbf{0}\}$. A fim de que X seja L.D. é necessário e suficiente que exista uma combinação linear nula, isto é:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

de vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in X$ com algum coeficiente $\alpha_i \neq 0$.

Uma **base** de um espaço vetorial E é um conjunto $B \in E$ linearmente independente que gera E . Isto significa que todo vetor $\mathbf{v} \in E$ se exprime, de modo único, como combinação linear, isto é:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_m \cdot \mathbf{v}_m, \quad (1.9)$$

de elementos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ da base B . Se $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ é uma base de E e temos (1.9), então os números $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ chamam-se as coordenadas do vetor \mathbf{v} na base B .

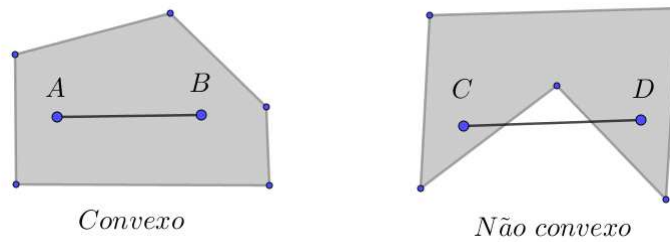
Exemplo 1.8. *Os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ constituem uma base canônica de \mathbb{R}^2 , assim como, os vetores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ é uma base canônica de \mathbb{R}^3 , que são os espaços que vamos utilizar nesse trabalho.*

1.5 Conjunto Convexo

Definição 1.1. *Um Conjunto X é convexo se, para quaisquer ponto x_1 e x_2 pertencentes ao conjunto, o segmento de reta ligando esses pontos também pertence ao conjunto.*

² Uma combinação linear é uma soma de múltiplos dos vetores v_1, v_2, \dots, v_n .

Figura 3 – Região convexa e não convexa.



Fonte: Pereira (2020).

O Exemplo 1.5 representa uma região convexa.

Definição 1.2. Dados $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O conjunto

$$H = \{v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid c_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \alpha\} \quad (1.10)$$

é dito hiperplano de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.9. Temos que a reta $3x + 3y = 4$ é um hiperplano do \mathbb{R}^2 e o plano $x + 2y - 4z = 5$ é um hiperplano do \mathbb{R}^3 .

Observe que se os coeficientes c_1, c_2, \dots, c_n não são todos iguais a zero, o hiperplano

$$H = \{v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid c_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0\}$$

é um subespaço de dimensão $n - 1$ em \mathbb{R}^n .

2 RESOLUÇÃO GRÁFICA DE PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Nessa seção, vamos apresentar a técnica de resolução de um PPL, chamada de método de resolução gráfica, usada somente, quando o problema envolve duas variáveis. Aqui será fundamental o conhecimento que temos sobre equação lineares e inequações assim como a construção e análise de gráficos no sistema cartesiano.

2.1 Método de Resolução Gráfica de um Problema de Programação Linear

Este método é utilizado quando o problema envolve apenas duas variáveis de decisão, a solução ótima de um PPL pode ser encontrada graficamente. Sendo assim, vamos seguir os procedimentos de (FÁVERO; BELFIORE, 2012, p.66).

1. Determinar a **região factível** em um eixo cartesiano. Uma solução viável ou factível é aquela que satisfaz todas as restrições do modelo, inclusive as de não negatividade. Se determinada solução viola pelo menos uma das restrições do modelo, a mesma é chamada solução inviável ou infactível.
2. Determinar a **solução ótima** do modelo, isto é, a solução factível que apresente o melhor valor da função objetivo. Para um problema de maximização, determinado o conjunto de soluções viáveis, a solução ótima é aquela que fornece o maior valor à função objetivo dentro desse conjunto. Já para um problema de minimização, a solução ótima é aquela que minimiza a função objetivo.

A seguir destacamos os teoremas fundamentais da programação linear cuja as demonstrações podem ser encontradas em (GOLDBARG, 2015).

Teorema 2.1. *O conjunto H , de todas as soluções factíveis do modelo de programação linear, é um conjunto convexo.*

Teorema 2.2. *Toda solução básica do sistema $AX = B$ é um ponto extremo do conjunto de soluções factíveis H .*

Teorema 2.3. *Se uma função objetivo possui um máximo (ou mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo H .*

Além disso, vamos utilizar o GeoGebra para construir os gráficos. Para maiores informações consulte (GEOGEBRA, 2020). Vejamos um exemplo envolvendo um PPL, que servirá como base para os demais métodos de resolução.

Exemplo 2.1. *Para a construção de um apartamento popular por mês a construtora WRC necessita de 2 pedreiros, 4 serventes e 1 carpinteiro. Para se construir uma casa no mesmo intervalo de tempo, a mesma construtora necessita de 3 pedreiros, 8 serventes e 3 carpinteiros. A construtora possui um efetivo total de 30 pedreiros, 70 serventes e 20 carpinteiros contratados. A construtora obtém um lucro de R\$ 30 000,00 na venda de cada apartamento popular e de R\$ 50. 000,00 na venda de cada casa e toda "produção" da construtora é vendida. Qual é a quantidade ótima de apartamentos populares e casas que a construtora deve construir para que esta obtenha lucro máximo.*

Solução: sejam x_1 o número de apartamentos populares e x_2 o número de casas construídas pela WRC, queremos maximizar a função objetivo abaixo que representa o lucro da construtora dada por:

$$\max z = 30x_1 + 50x_2,$$

sujeitos as seguintes condições (s.a.)

$$s. a. : \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 & \text{(inequação de restrição de pedreiros)} \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 70 & \text{(inequação de restrição de serventes)} \\ x_1 + 3x_2 \leq 20 & \text{(inequação de restrição de carpinteiros)} \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

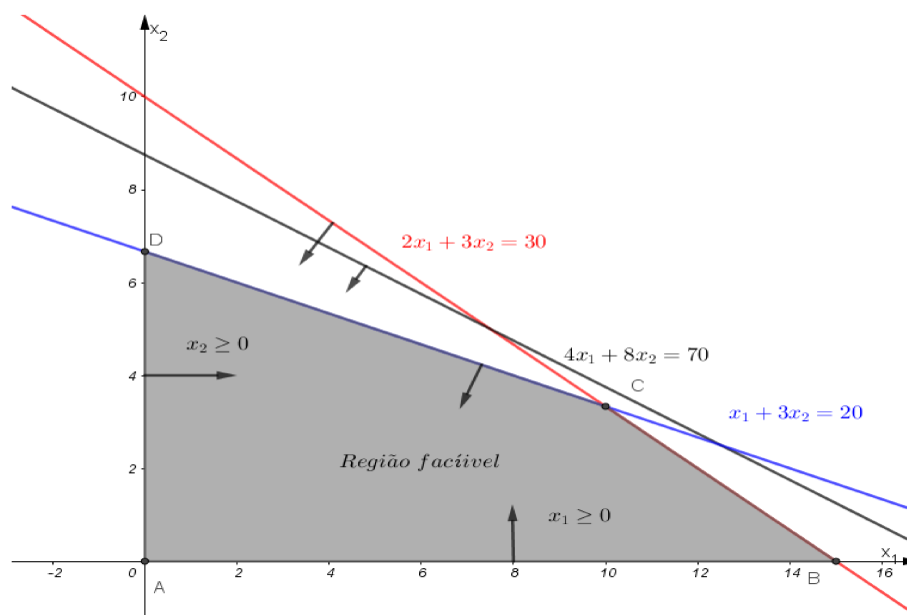
Inicialmente vamos determinar a **região factível**, nos eixos cartesianos x_1 e x_2 , determinando o espaço de soluções factíveis das restrições do modelo de maximização estudado. Para cada restrição, traça-se a reta que representa a equação de igualdade (sem considerar o sinal do tipo \leq ou \geq) e, a partir daí, determina-se a direção da região que satisfaça a desigualdade. Assim, para a primeira restrição, a reta que representa a equação $2x_1 + 3x_2 = 30$ pode ser traçada a partir de dois pontos. Se $x_1 = 0$, tem-se que $x_2 = 10$. Analogamente, se $x_2 = 0$, tem-se que $x_1 = 15$. Para determinar o espaço de soluções ou a direção da região que satisfaz a desigualdade $2x_1 + 3x_2 \leq 30$, podemos considerar qualquer ponto fora da reta. Usualmente, utiliza-se o ponto de origem $(x_1, x_2) = (0, 0)$, em função de sua simplicidade. Verifica-se que o ponto de origem satisfaz a primeira desigualdade, pois $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 30$. Portanto, podemos identificar a direção da região que apresenta soluções factíveis, conforme mostra a Figura 4.

Da mesma forma, para a segunda restrição, a reta que representa a equação de igualdade $4x_1 + 8x_2 = 70$ é traçada a partir de dois pontos. Se $x_1 = 0$, tem-se que $x_2 = 8,75$. Analogamente, se $x_2 = 0$, tem-se que $x_1 = 17,50$. Verifica-se também que o ponto de origem satisfaz a desigualdade $4x_1 + 8x_2 \leq 70$, pois $4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 \leq 70$, representando a direção da região que contém soluções factíveis. Analogamente, pode-se determinar o espaço de soluções factíveis para a equação

$x_1 + 3x_2 = 20$, determinando os pontos $x_1 = 0$, tem-se que $x_2 = 6,67$ e $x_2 = 0$, tem-se que $x_1 = 20$, além disso temos as seguintes restrições $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

A região factível é representada pelo polígono de quatro lados $ABCD$. Qualquer ponto na superfície do polígono ou no seu interior representa a região factível Figura 4.

Figura 4 – Região factível Exemplo 2.1



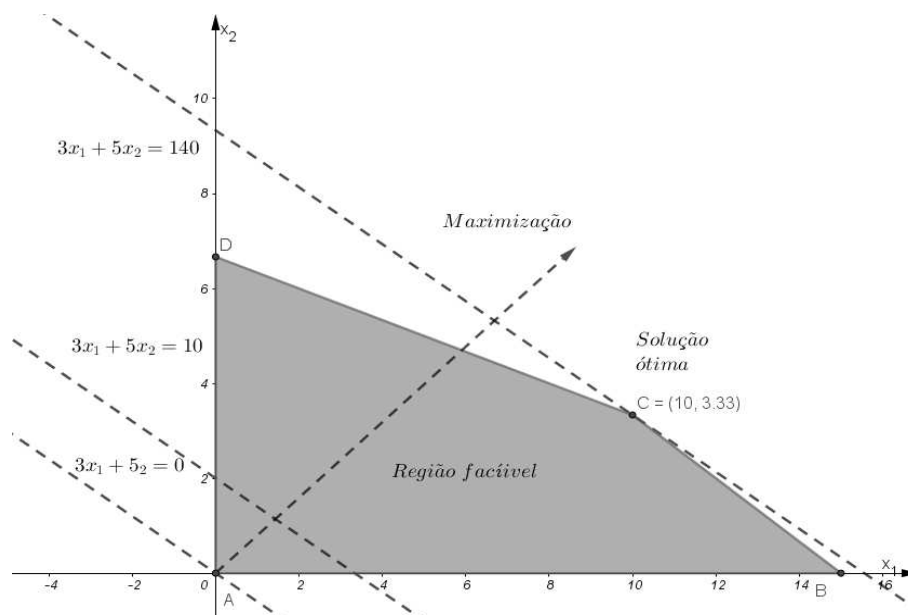
Fonte: Pereira (2020).

O passo seguinte busca determinar a **solução ótima** do modelo que maximize a função $z = 30x_1 + 50x_2$, dentro do espaço de soluções factíveis determinado na Figura 4. Como o espaço de soluções contém um número infinito de pontos, é necessário um procedimento formal para identificar a solução ótima.

De acordo com (TAHA, 2008). Primeiramente, precisamos identificar a direção correta em que a função cresce (função de maximização). Para isso, traçaremos diferentes retas com base na equação da função objetivo, atribuindo diferentes valores a z , por tentativa e erro. Identificada a direção em que a função objetivo aumenta, é possível identificar a solução ótima do modelo, dentro do espaço de soluções factíveis.

Atribuiu-se um valor arbitrário de $z = 0$, seguido por $z = 10$, obtendo-se as equações $30x_1 + 50x_2 = 0$ e $30x_1 + 50x_2 = 10$, respectivamente. A partir dessas duas equações, foi possível identificar a direção, dentro do espaço de soluções factíveis, que maximiza a função objetivo, concluindo que o ponto C é o ótimo. Como o vértice C é a interseção das retas $2x_1 + 3x_2 = 30$ e $x_1 + 3x_2 = 20$, os valores de x_1 e x_2 podem ser calculados algebricamente a partir dessas duas equações. Logo, tem-se que $x_1 = 10$ e $x_2 = 3,33$ (verifique). Daí, temos que $z = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 3,33 = 466,66$. O procedimento completo é apresentado na Figura 5. Lembrando que o valor acima tem que ser multiplicado por 1.000,00.

Figura 5 – Solução ótima Exemplo 2.1



Fonte: Pereira (2020).

Logo, a construtora deve construir 10 apartamentos populares e 3 casas para obter um lucro máximo de R\$ 466 666,67. A seguir vamos resolver mais alguns exemplos pelo método gráfico.

Exemplo 2.2. Considere o problema de minimização $\min z = 12x_1 + 7x_2$.

$$s. a : \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Solução: neste caso, queremos minimizar a função objetivo z .

Assim, vamos determinar a **região factível**, em que a primeira restrição é a reta de equação $2x_1 + x_2 = 4$, pode ser traçada a partir de dois pontos. Se $x_1 = 0$, tem-se que $x_2 = 4$. Analogamente, se $x_2 = 0$, tem-se que $x_1 = 2$. Para determinar o espaço de soluções ou a direção da região que satisfaz a desigualdade $2x_1 + x_2 \geq 4$, podemos considerar qualquer ponto fora da reta. Neste caso, observe que o ponto de origem $(x_1, x_2) = (0, 0)$, não está na região factível, então vamos utilizar o ponto $(x_1, x_2) = (2, 2)$ que faz parte da região factível. Verifica-se que o ponto satisfaz a primeira desigualdade, pois $2 \cdot 2 + 2 \geq 4$. Portanto, podemos identificar a direção da região que apresenta soluções factíveis, conforme mostra a Figura 6.

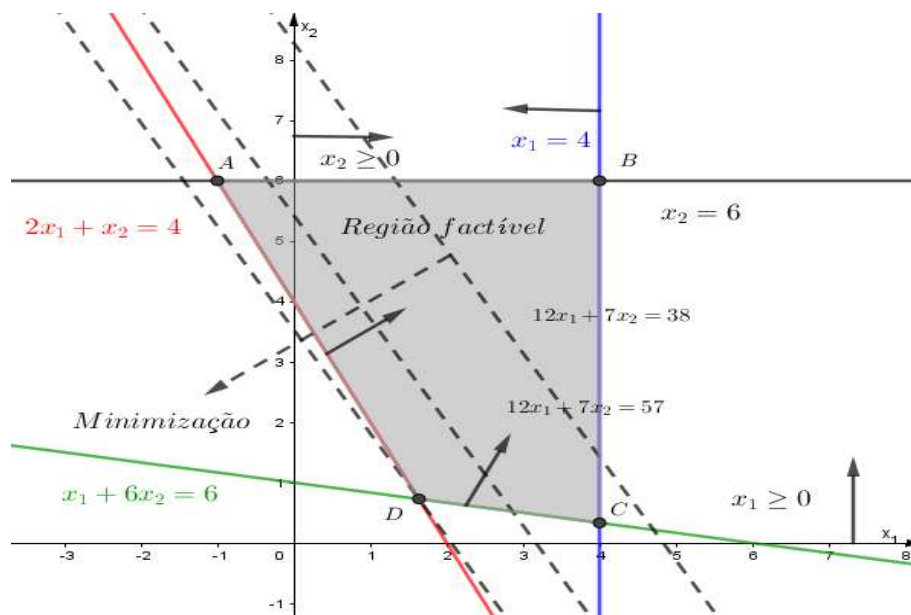
Da mesma forma, para a segunda restrição, a reta que representa a equação de igualdade $x_1 + 6x_2 = 6$ é traçada a partir de dois pontos. Se $x_1 = 0$, tem-se que $x_2 = 1$. Analogamente, se $x_2 = 0$, tem-se que $x_1 = 6$. Verifica-se também que o ponto $(x_1, x_2) = (2, 2)$ satisfaz a desigualdade $x_1 + 6x_2 \geq 6$, pois $2 + 6 \cdot 2 \geq 6$, representando a direção da região que contém soluções factíveis.

Analogamente, pode-se determinar o espaço de soluções factíveis para as demais restrições $x_1 \leq 4, x_2 \leq 6$, além disso, temos que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$.

A região factível é representada pelo polígono de quatro lados $ABCD$. Qualquer ponto na superfície do polígono ou no seu interior representa a região factível.

A **solução ótima** do modelo que minimize a função $z = 12x_1 + 7x_2$, dentro do espaço de soluções factíveis é determinada atribuindo-se diferentes valores a z , por tentativa e erro. Identificada a direção em que a função objetivo diminui, é possível identificar a solução ótima do modelo, dentro do espaço de soluções factíveis. Em seguida, atribuindo-se um valor arbitrário para $z = 38$, e seguido por $z = 57$, obtendo-se as equações $12x_1 + 7x_2 = 38$ e $12x_1 + 7x_2 = 57$, respectivamente. A partir dessas duas equações é possível identificar a direção, dentro do espaço de soluções factíveis, que minimiza a função objetivo, concluindo que o ponto D é o ótimo. Como o vértice D é a interseção das retas $2x_1 + x_2 = 4$ e $x_1 + 6x_2 = 6$, os valores de x_1 e x_2 podem ser calculados algebricamente a partir dessas duas equações. Logo, tem-se que $x_1 = 1,64$ e $x_2 = 0,73$ com $z = 12 \cdot 1,64 + 7 \cdot 0,73 = 24,79$. O procedimento completo é apresentado na Figura 6.

Figura 6 – Região factível e solução ótima Exemplo 2.2



Fonte: Pereira (2020).

2.2 Casos Especiais

Alguns PPL não apresentam uma única solução ótima não degenerada, podendo cair em um dos quatro casos:

- Múltiplas soluções ótimas;

- Função objetivo z ilimitada;
- Não existe solução ótima;
- Solução ótima degenerada.

2.2.1 Múltiplas Soluções Ótimas

Um PPL pode apresentar mais de uma solução ótima. Nesse caso, considerando um problema com duas variáveis de decisão, diferentes valores de x_1 e x_2 alcançam o mesmo valor ótimo na função objetivo. Esse caso é ilustrado, graficamente, por meio de um exemplo.

De acordo com (TAHA, 2008), quando a função objetivo é paralela a uma restrição ativa, tem-se um caso com múltiplas soluções ótimas. A restrição ativa é aquela responsável pela determinação da solução ótima do modelo.

Exemplo 2.3. *Determinar o conjunto de soluções factíveis e as soluções ótimas do modelo, para o seguinte PPL:*

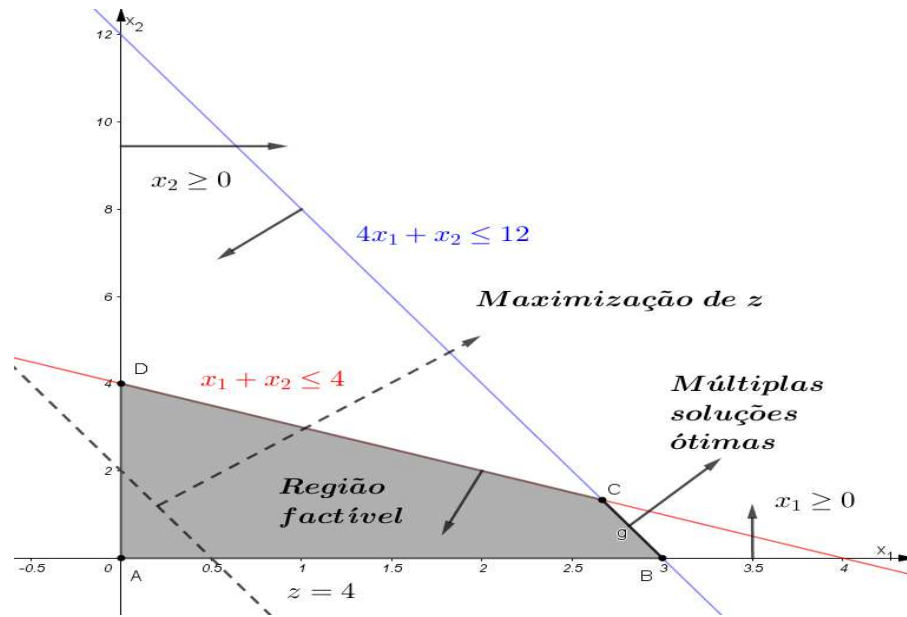
$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a : } &\begin{cases} 4x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinar a região factível e a solução ótima do modelo de programação linear.

Solução: faremos o mesmo procedimento utilizado nos exemplos anteriores para encontrar a solução ótima. A Figura 7 apresenta a região factível determinada a partir das restrições do modelo analisado. Nota-se que o espaço de soluções factíveis é representado pelo polígono de quatro lados $ABCD$.

Para a determinação da solução ótima do modelo, atribuiu-se primeiramente um valor de $z = 4$, obtendo-se a reta tracejada apresentada na Figura 7. Como a função objetivo é de maximização, quanto maiores os valores de x_1 e x_2 , maior o valor da função z , de modo que a direção em que a função cresce pode ser facilmente identificada. Nota-se que as retas representadas pelas equações $8x_1 + 2x_2 = 4$ e $4x_1 + x_2 = 12$ são paralelas (verifique). Assim, temos um caso com múltiplas soluções ótimas representadas pelo segmento BC . Por exemplo, para o ponto B , $x_1 = 3, x_2 = 0$, o valor de z é $8 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 24$. O ponto C é a interseção das retas $4x_1 + x_2 = 12$ e $x_1 + x_2 = 4$. Resolvendo-se o sistema formado pela duas equações, obtém-se $x_1 = \frac{8}{3}$ e $x_2 = \frac{4}{3}$ com $z = 8 \cdot \left(\frac{8}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) = 24$. Qualquer outro ponto desse segmento é uma solução ótima alternativa e também apresenta o valor de $z = 24$.

Figura 7 – Múltiplas solução ótimas



Fonte: Pereira (2020).

2.2.2 Função Objetiva z Ilimitada

Nesse caso, não existe limite para o crescimento do valor de pelo menos uma variável de decisão, resultando em uma região factível e uma função objetivo z ilimitada. Para um problema de maximização, o valor da função objetivo cresce ilimitadamente, enquanto para um problema de minimização, o valor decresce de forma ilimitada. O Exemplo 3.4 ilustra um caso, de forma gráfica, que apresenta um conjunto ilimitado de soluções, resultando em um valor ilimitado da função objetivo.

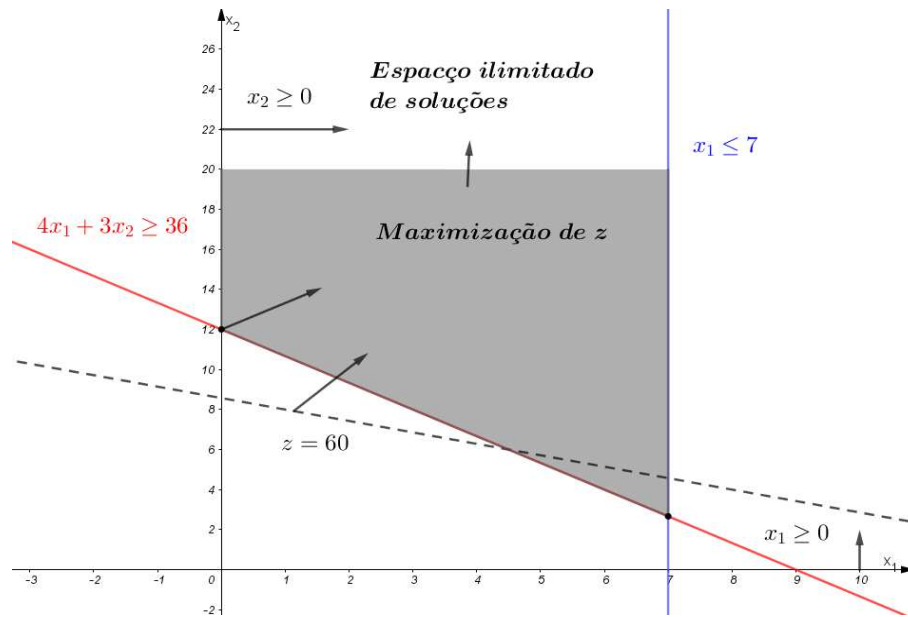
Exemplo 2.4. Determinar o espaço de soluções factíveis e a solução ótima do modelo para o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 7x_2 \\ \text{s. a : } &\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 &\leq 36 \\ x_1 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinar a região factível e a solução ótima do modelo de programação linear.

Solução: a partir das restrições construímos o espaço de solução factível, que neste caso é ilimitado, pois não existe limite para o crescimento de x_1 conforme mostra a Figura 8. Consequentemente, a função objetivo z também pode crescer de forma ilimitada.

Figura 8 – Função objetivo ilimitada.



Fonte: Pereira (2020).

2.2.3 Não Existe Solução Ótima

Nesse caso, não é possível encontrar uma solução factível para o problema estudado, ou seja, não existe solução ótima. O conjunto de soluções factíveis é vazio. O Exemplo 3.5 ilustra, em termos de solução gráfica, um caso em que não existe solução ótima.

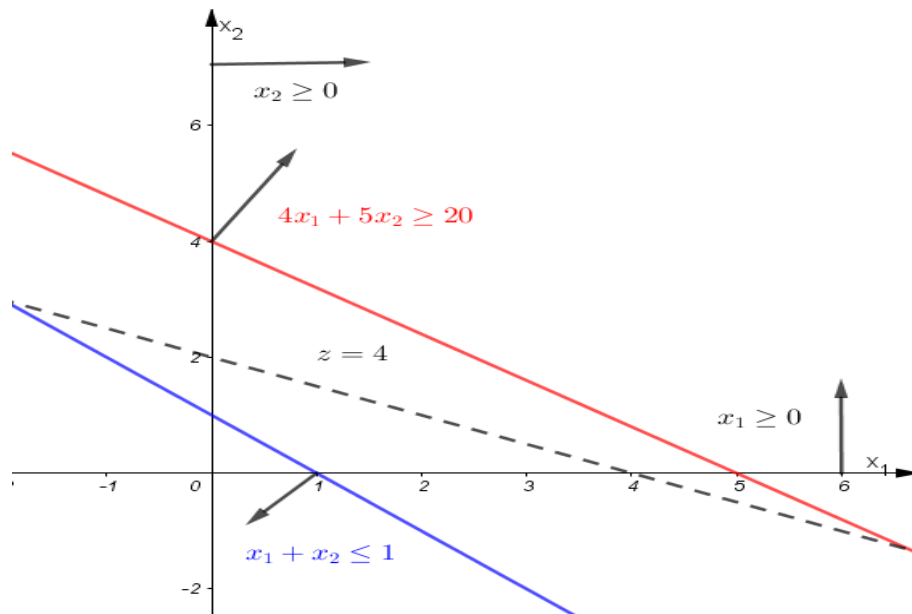
Exemplo 2.5. Considere o seguinte PPL:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a : } &\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 & \geq 20 \\ x_1 + x_2 & \leq 1 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinar a região factível e a solução ótima do modelo de programação linear.

Solução: ao construirmos cada uma das restrições do modelo, além da função objetivo com o valor arbitrário de $z = 4$. Conforme a Figura 9, pode-se identificar que nenhum ponto satisfaz todas as restrições do problema. Assim, o espaço solução viável é vazio.

Figura 9 – Não existe solução.



Fonte: Pereira (2020).

2.2.4 Solução Ótimas Degenerada

Pode-se identificar, graficamente, um caso especial de solução degenerada quando um dos vértices da região factível é obtido pela intersecção de mais de duas retas distintas. Tem-se, portanto, um vértice degenerado. Se a degeneração ocorrer na solução ótima, tem-se um caso conhecido como solução ótima degenerada. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.6. Considere o seguinte PPL.

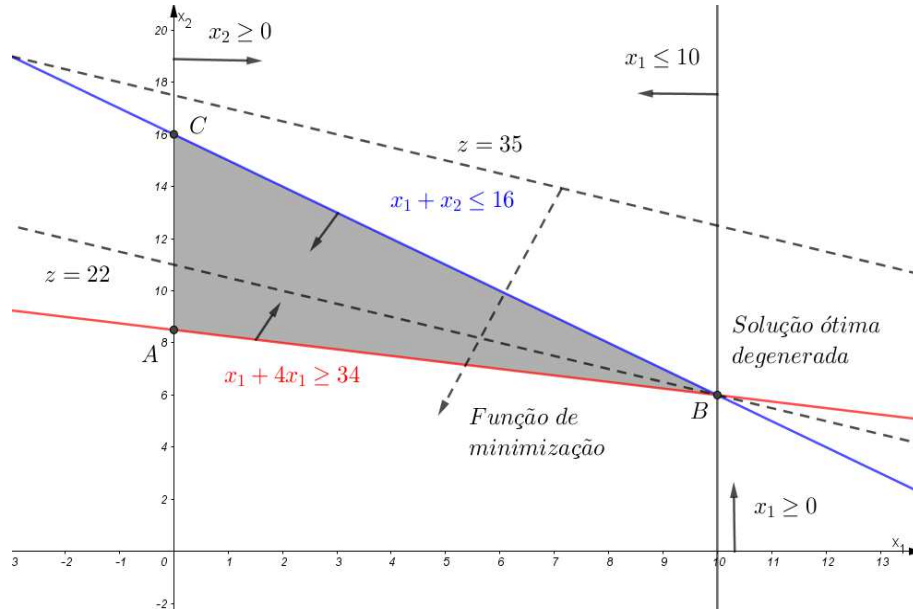
$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s. a. : } &\begin{cases} x_1 + 4x_2 &\geq 24 \\ x_1 + x_2 &\leq 16 \\ x_1 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Determinar a região factível e a solução ótima do modelo de programação linear.

Solução: o espaço solução factível é representado na Figura 10 pelo triângulo ABC. Note que a restrição $x \leq 10$ é redundante, isto é, não interfere na solução do problema, caso fosse retirada do problema. Como o vértice B é a intersecção de três retas, tem-se um vértice degenerado e a função objetivo é $z = x_1 + 2x_2$ que queremos minimizar satisfaz todas as restrições do modelo. Assim, a partir de um valor arbitrário $z = 35$ é possível identificar a direção da reta que minimiza a função objetivo. Dessa forma podemos notar que o ponto B é uma solução ótima degenerada. Como o ponto B é a intersecção das restas $x_1 + 4x_2 = 34$ e $x_1 + x_2 = 16$ as coordenadas x_1 e x_2 , podem ser calculadas algebricamente a partir dessas equações. Logo, temos $x_1 = 10$ e $x_2 = 6$

com $z = 10 + 2 \cdot 6 = 22$ uma solução degenerada do problema. Quando a solução é degenerada temos um processo de ciclagem ou retorno cíclico.

Figura 10 – Solução degenerada.



Fonte: Pereira (2020).

Com esses exemplos mostramos os casos em que a solução gráfica pode ser aplicada para resolução de PPL. Um conhecimento simples que pode ser utilizado para resolver PPL também simples, pois sabemos que os problemas da vida real geralmente envolve mais de duas variáveis. Porém, o Exemplo 3.1 ilustra um problema bastante interessante aplicado no dia a dia de uma construtora, em que o empresário tem que tomar uma decisão em relação a quantidade de apartamentos e casas a serem construídas.

3 O MÉTODO SIMPLEX

Nessa seção vamos utilizar o conhecimento adquirido pelos alunos para resolver sistemas de equações lineares envolvendo mais de duas variáveis. Aqui o método de Gauss-Jordan será fundamental para o desenvolvimento de uma solução de um PPL.

3.1 Um breve histórico de programação linear

A Pesquisa Operacional, ou simplesmente PO (Operational Research – Inglaterra; Operations Research – Estados Unidos; Investigação Operacional – Portugal), surgiu na Inglaterra durante a Segunda Guerra Mundial (1939-1945) para a solução de problemas de natureza logística, tática e de estratégia militar, quando um grupo de cientistas foi convocado para decidir sobre a utilização mais eficaz dos recursos militares limitados, marcando a primeira atividade formal desse campo de estudo. Dentre os problemas estudados, destacam-se: projeto, manutenção e inspeção de aviões; projeto de explosivos, tanques e motores; melhoria da utilização de radar, canhões antiaéreos e táticas de bombardeios a submarino; dimensionamento de frota, entre outros.

Os resultados positivos alcançados pelo grupo de cientistas ingleses fizeram com que a Pesquisa Operacional fosse disseminada nos Estados Unidos e, em 1947, a equipe liderada por George B. Dantzig deu origem ao Método Simplex para resolução de PPL. Desde então, esse conhecimento vem sendo aplicado, com sucesso, para a otimização de recursos em diversos segmentos industriais e comerciais de várias áreas de negócio (estratégia, marketing, finanças, microeconomia, operações e logística, recursos humanos, entre outras).

O avanço da Pesquisa Operacional tornou-se possível graças ao aumento da velocidade de processamento e à quantidade de memória de computadores nos últimos anos, tornando possível a solução de problemas complexos. Um profissional de PO deve ser capaz de identificar a técnica mais apropriada para a solução de determinado tipo de problema, os objetivos para a melhoria, as limitações físicas e computacionais do sistema, sendo o elemento humano fundamental nesse processo.

Em termos gerais, podemos dizer que a Pesquisa Operacional consiste na utilização de um método científico (modelos matemáticos, estatísticos e algoritmos computacionais) para a tomada de decisões. Dessa forma, a PO atua cada vez mais em um ramo multidisciplinar, envolvendo áreas de engenharia de produção, matemática aplicada, ciência da computação e gestão de negócios (FÁVERO; BELFIORE, 2012).

Existem atualmente diversas sociedades de PO no Brasil e no exterior, com o objetivo de promover, por meio de reuniões, seminários, congressos, conferências, cursos, prêmios

e publicações entre profissionais, estudantes e instituições, o desenvolvimento dos diversos campos de estudo que fazem uso de seus conceitos e aplicações. Entre as principais sociedades, destacam-se a SOBRAPO (Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional), INFORMS (Institute for Operations Research and Management Science), EURO (The Association of European Operational Research Societies), APDIO (Associação Portuguesa de Investigação Operacional), IFORS (International Federation of Operational Research Societies) e ALIO (Asociación Latino-Ibero-Americana de Investigación Operativa).

3.2 O Método Simplex Primal

O Método Simplex é um algoritmo que resolve PPL em um número finito de passos, ou dará uma indicação de que há solução ilimitada. Sendo que um algoritmo é um processo onde um procedimento sistemático é repetido seguidamente até que o resultado desejado seja obtido. Cada percurso do procedimento sistemático é chamado de interação. Consequentemente, um algoritmo substitui um problema difícil por uma série de outros “fáceis.” O interessante do Método Simplex é que ele caminha pelas soluções básicas de uma maneira inteligente, encontrando a solução sem precisar fazer uso das buscas exaustiva.

De acordo com (HARDLEY, 1993b). A Programação Linear (PL) usa um modelo matemático para descrever o problema. O termo linear significa que todas as funções matemáticas do modelo são obrigatoriamente, funções lineares. A palavra programação não se refere à programação de computadores e deve ser vista como sinônimo de planejamento. Assim, podemos definir a Programação Linear como sendo o planejamento de atividades para obter um ótimo resultado.

Segundo (CAIXETA, 2001, p. 10), a Programação Linear é o “aprimoramento de uma técnica de resolução de sistema de equações lineares via inversões sucessivas de matrizes, com a vantagem de incorporar uma equação linear adicional representativa de um dado comportamento que deva ser otimizado.”

A técnica de que fala Caixeta é o método de eliminação de Gauss-Jordam que foi apresentado na revisão de literatura a qual faremos uso no quadro simplex.

3.2.1 Conceitos Preliminares do Algoritmo Simplex

Como o algoritmo simplex utiliza uma série de definições e conceitos associados, é interessante desenvolver parte desses conceitos em separado para que o entendimento do algoritmo seja mais fácil (COLIN, 2007, p. 28). Apresentamos as principais definições associadas ao algoritmo.

Definição 3.1. *Uma solução básica para um PPL na forma padrão é obtida atribuindo-se o valor zero a $n - m$ variáveis e resolvendo-se o sistema de equações para as demais m variáveis (que é exatamente o número de equações, ou restrições, excluindo-se as de não-negatividade).*

Definição 3.2. *Variáveis não-básicas são as $n - m$ variáveis às quais foi atribuído o valor zero numa solução básica, ao passo que as variáveis básicas são as outras m variáveis.*

3.2.3 Transformação da função objetivo

A maximização da função objetivo do tipo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é equivalente à minimização do negativo da mesma função, ou seja:

$$\text{maximizar}\{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n\}, \quad (3.6)$$

é equivalente a

$$\text{minimizar}\{-f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n\}. \quad (3.7)$$

Exemplo 3.1. Deseja-se minimizar a função $\max z = 3x_1 + 4x_2$, então basta $\min z = -3x_1 - 4x_2$.

Essa transformação permite que para qualquer problema e formulação a função objetivo possa ser formatada como uma função a ser maximizada. Neste trabalho todos os problemas serão de maximização.

3.2.4 Transformação de lados direitos negativos

Se o lado direito da restrição for negativo ele pode ser multiplicado por (-1) , de modo que o parâmetro se torne positivo. Por exemplo, se

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq -b_k \quad (3.8)$$

então, a multiplicação de ambos os membros de (3.8) por (-1) gera

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \dots - a_{kn}x_n \geq b_k, \quad (3.9)$$

que atende ao nosso interesse de ser $b_k \geq 0$. O mesmo raciocínio é válido para restrições do tipo " \geq ".

Exemplo 3.2. Dada a inequação $3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq -4$, então basta multiplicarmos por (-1) que obtemos $-3x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 4$.

3.2.5 Transformação de restrições de desigualdade

As restrições de desigualdade são transformadas em restrições de igualdade ao custo do aumento do número de variáveis do problema. As novas variáveis são denominadas variáveis de folga x_{r+i} . Para restrições de desigualdade do tipo menor do que ou igual (\leq), acrescentamos uma variável de folga, ou seja, se

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \quad (3.10)$$

ao acrescentarmos a variável de folga, temos:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n + x_{n+1} = b_k \quad (3.11)$$

em que x_{n+1} é uma variável de folga. Assim como as variáveis originais do problema, as variáveis de folga devem ser não-negativas. De forma análoga para restrições do tipo maior do que ou igual (\geq), neste caso, chama-se variável de excesso.

Exemplo 3.3. Dada a inequação $3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 4$, então acrescentamos a variável de folga x_4 que obtemos $3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 4$.

3.2.6 Transformação de variáveis irrestritas

Embora na maioria dos casos reais as variáveis sejam “naturalmente” não-negativa, algumas vezes a formulação exige que algumas variáveis sejam negativas. Nestes casos, variáveis irrestritas (podem ser positivas, negativas ou zero) devem ser utilizadas. As variáveis irrestritas podem ser definidas como a diferença entre duas variáveis não-negativas. Suponha que x_j seja a variável irrestrita e que $x_j^p \geq 0$ e $x_j^n \geq 0$ sejam valores absolutos da variável quando ela assume valores positivos e negativos. Podemos dizer que $x_j = x_j^p - x_j^n$. Por exemplo, se $x_j = -5, x_j^p = 0$ e $x_j^n = 5$, então temos, $x_j = x_j^p - x_j^n = 0 - 5 = -5$.

3.3 Solução Analítica de um Problema de Programação Linear

Na seção 2, vimos os procedimentos gráficos para solução de um PPL. Nesta seção vamos apresentar o procedimento analítico para a solução de um PPL.

Seja o sistema (3.4) de m equações lineares e n variáveis, em que $m < n$. Segundo Taha (2008), se $m = n$ e as equações são coerentes o sistema tem uma solução. Em casos em que $m > n$, pelo menos $m - n$ equações dever ser redundantes. No entanto, se $m < n$ e as equações também forem coerentes, o sistema terá um número infinito de soluções.

Para determinar uma solução para o sistema (3.4), em que $m < n$, vamos escolher um conjunto de variáveis $n - m$ de \mathbf{X} o qual chamamos de Variáveis Não Básicas (VNB), as quais são atribuídas valores iguais a zero. As m variáveis restantes do sistema, chamadas de Variáveis Básicas (VB), são então determinadas. Essa solução é chamada de Solução Básica (SB). O conjunto de variáveis básicas é chamado de base.

Se a solução básica atende as restrições de não negatividade do problemas, as variáveis básicas são não negativas, a mesma é chamada de Solução Básica Factível (SBF).

Para o cálculo da solução ótima, basta calcular o valor da função objetivo de z de todas as possíveis soluções básicas e escolher a melhor alternativa. O número máximo de soluções básicas a serem calculadas é dado por:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (3.12)$$

Assim, todas as possíveis combinações de n variáveis escolhidas m a m , temos que uma delas é a melhor. Note-se que esse método torna-se muito trabalhoso quando os valores de m e n são elevados. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.4. Considere o seguinte sistema com três variáveis e duas equações abaixo:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Determine todas as soluções básicas para esse sistema.

Solução: como $m = 2$ e $n - m = 3 - 2 = 1$, temos duas variáveis básica é uma variável não básica, e o número de soluções do sistema é igual 3.

- De forma aleatória escolhemos para a primeira solução $VNB = \{x_1\}$ e $VB = \{x_2, x_3\}$, assim podemos atribuir o valor de $x_1 = 0$. Dessa forma, podemos calcular os valores de $x_2 = 4$ e $x_3 = 4$ no sistema acima. Logo, $\{0, 4, 4\}$.
- A segunda solução $VNB = \{x_2\}$ e $VB = \{x_1, x_3\}$, assim o valor de $x_2 = 0$. Dessa forma, os valores de $x_1 = 4$ e $x_3 = 0$, cuja solução é $\{4, 0, 0\}$.
- A terceira solução $VNB = \{x_3\}$ e $VB = \{x_1, x_2\}$, assim o valor de $x_3 = 0$. Dessa forma, os valores de $x_1 = 4$ e $x_2 = -2$ e sua solução é $\{4, -2, 0\}$ e como $x_2 < 0$ a solução é infactível. Isto é, não satisfaz a condição de não negatividade das variáveis x_i com $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 3.5. Vamos utilizar Exemplo 2.1 para a obter a solução analítica do PPL.

Solução: queremos maximizar a função objetivo dada por:

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 + 50x_2. \\ \text{s. a : } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 70 \\ x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para que o procedimento de solução analítico possa ser aplicado, o problema deve estar na forma padrão. Isto é, as restrições de desigualdade devem ser reescritas na forma de igualdade, sendo assim, temos que incluir as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5 . E, o problema original reescrito na forma padrão é dado por:

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5. \\ \text{s. a : } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 70 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 20 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

com $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Note que o sistema tem $m = 3$ equações e $n = 5$ variáveis. Para que uma solução básica seja encontrada, serão atribuídos valores iguais a zero a $n - m = 5 - 3 = 2$ variáveis não básicas, de forma que os valores das $m = 3$ variáveis básicas restantes possam ser determinados pelo sistema de equações (3.13). O total de soluções básicas nesse exemplo é:

$$C_3^5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Sendo assim, vamos determinar as dez soluções desse sistema e verificar quais são as soluções viáveis e sua solução ótima.

- Primeira solução $VNB = \{x_1, x_2\}$ e $VB = \{x_3, x_4, x_5\}$, assim temos a solução não básica: $x_1 = x_2 = 0$ e resolvendo o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + x_3 = 30 \\ 4 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + x_4 = 70 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + x_5 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_3 = 30, x_4 = 70$ e $x_5 = 20$ e como $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ a função objetivo vale: $z = 0$.

- Segunda solução: $VNB = \{x_1, x_3\}$ e $VB = \{x_2, x_4, x_5\}$, assim temos a solução não básica: $x_1 = x_3 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 3x_2 + 1 \cdot 0 = 30 \\ 4 \cdot 0 + 8x_2 + x_4 = 70 \\ 1 \cdot 0 + 3x_2 + x_5 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_2 = 10, x_4 = -10$ e $x_5 = -10$, como $x_4 < 0$ e $x_5 < 0$ a solução é infactível.

- Terceira solução: $VNB = \{x_1, x_4\}$ e $VB = \{x_2, x_3, x_5\}$, assim temos a solução não básica: $x_1 = x_4 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 4 \cdot 0 + 8x_2 + 0 = 70 \\ 1 \cdot 0 + 3x_2 + x_5 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_2 = 8,75, x_3 = 3,75$ e $x_5 = -6,25$ como $x_5 < 0$ a solução é infactível.

- Quarta solução: $VNB = \{x_1, x_5\}$ e $VB = \{x_2, x_3, x_4\}$, assim temos a solução não básica: $x_1 = x_5 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 3x_2 + x_3 = 30 \\ 4 \cdot 0 + 8x_2 + x_4 = 70 \\ 1 \cdot 0 + 3x_2 + 1 \cdot 0 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_2 = 6,67, x_3 = 10$ e $x_4 = 16,64$ e como $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$, a função objetivo vale: $z = 30 \cdot 0 + 50 \cdot 6,67 = 333,50$

- Quinta solução: $VNB = \{x_2, x_3\}$ e $VB = \{x_1, x_4, x_5\}$, assim temos a solução não básica: $x_2 = x_3 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 30 \\ 4x_1 + 8 \cdot 0 + x_4 = 70 \\ x_1 + 3 \cdot 0 + x_5 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_1 = 15, x_4 = 10$ e $x_5 = 5$ e como $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ a função objetivo vale: $z = 30 \cdot 15 + 50 \cdot 0 = 450,00$

- Sexta solução: $VNB = \{x_2, x_4\}$ e $VB = \{x_1, x_3, x_5\}$, assim temos a solução não básica: $x_2 = x_3 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3 \cdot 0 + x_3 = 30 \\ 4x_1 + 8 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 70 \\ x_1 + 3 \cdot 0 + x_5 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_1 = 17,50, x_3 = -5$ e $x_5 = 2,50$ e como $x_3 < 0$ a solução é infactível.

- Sétima solução: $VNB = \{x_2, x_5\}$ e $VB = \{x_1, x_3, x_4\}$, assim temos a solução não básica: $x_2 = x_5 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3 \cdot 0 + x_3 = 30 \\ 4x_1 + 8 \cdot 0 + x_4 = 70 \\ x_1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_1 = 20, x_3 = -10$ e $x_4 = -10$ e como $x_3 < 0$ e $x_4 < 0$ a solução é infactível.

- Oitava solução: $VNB = \{x_3, x_4\}$ e $VB = \{x_1, x_2, x_5\}$, assim temos a solução não básica: $x_3 = x_4 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 1 \cdot 0 = 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 1 \cdot 0 = 70 \\ x_1 + 3x_2 + x_5 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_1 = 7,50, x_2 = 5$ e $x_5 = -2,50$ e como $x_5 < 0$ a solução é infactível.

- Nona solução: $VNB = \{x_3, x_5\}$ e $VB = \{x_1, x_2, x_4\}$, assim temos a solução não básica: $x_3 = x_5 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 1 \cdot 0 = 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + x_4 = 70 \\ x_1 + 3x_2 + 1 \cdot 0 = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_1 = 10, x_2 = 3,33$ e $x_4 = 3,33$ e como $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$ a função objetivo vale: $z = 30 \cdot 10 + 50 \cdot 3,33 = 466,66$.

- Décima solução: $VNB = \{x_4, x_5\}$ e $VB = \{x_1, x_2, x_3\}$, assim temos a solução não básica: $x_4 = x_5 = 0$ e resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 1 \cdot 0 & = 70 \\ x_1 + 3x_2 + 1 \cdot 0 & = 20 \end{cases}$$

temos solução básica: $x_1 = 12,50, x_4 = 2,50$ e $x_5 = -2,5$ e como $x_5 < 0$ a solução é infactível.

Logo, a solução ótima do problema é $z = 466.666,67$ (lembre-se que multiplicamos por 1 000,00). Note-se que foram realizados muitos cálculos por esse método de resolução, tornando-o inviável quando o número de equações e incógnitas são muito grande, sendo assim, vamos apresentar outro método de resolução de programação linear que utiliza menos cálculos.

3.4 Algoritmo Simplex

O Algoritmo Simplex é um método iterativo que parte de uma solução básica factível inicial e busca, a cada iteração, uma nova solução básica factível, chamada Solução Básica Factível Adjacente (SBFA), com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido. O conceito de SBFA está descrito a seguir.

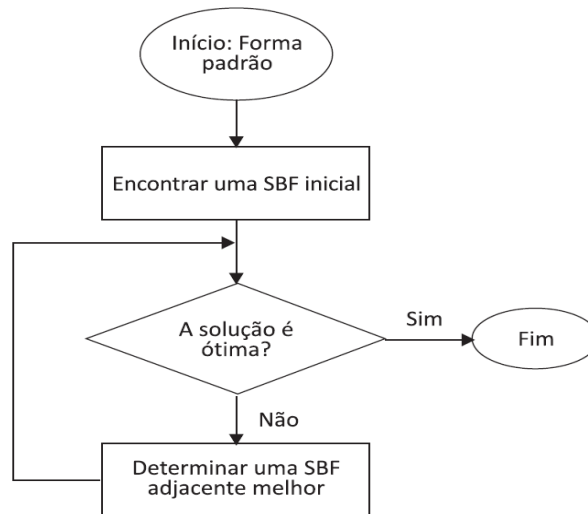
A partir de uma solução básica atual, uma variável não básica entra na base no lugar de outra variável básica que passa a ser não básica, gerando uma nova solução chamada solução básica adjacente. Para um problema com m variáveis básicas e $n - m$ variáveis não básicas, duas soluções básicas são adjacentes se elas tiverem em comum $m - 1$ variáveis básicas, podendo as mesmas apresentar valores numéricos diferentes. Isso implica também que $n - m - 1$ variáveis não básicas sejam comuns. Se a solução básica adjacente atende as restrições de não negatividade, ela é chamada solução básica factível adjacente .

A descrição geral do algoritmo Simplex é apresentada na Figura 11. Analogamente ao procedimento analítico, para que o Método Simplex seja aplicado, o problema deve estar na forma padrão.

Vamos apresentar segundo (FÁVERO; BELFIORE, 2012) os passos do algoritmo Simplex para a solução de problemas de maximização de PL.

Início: o problema deve estar na forma padrão. Daí temos que encontrar uma SBF inicial para o problema de PL. Sendo que uma SBF inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão. Para que essa solução seja factível, nenhuma das restrições do problema pode ser violada.

Figura 11 – Fluxograma da descrição geral do algoritmo Simplex.



Fonte: Lachettermarccher(2009).

Teste de Otimalidade: Dizemos que uma solução básica factível é ótima se não houver soluções básicas factíveis adjacentes melhores. Uma SBF adjacente é melhor do que a SBF atual se houver um incremento positivo no valor da função objetivo z . Analogamente, uma SBF adjacente é pior do que a SBF atual se o incremento em z for negativo. Enquanto pelo menos uma das variáveis não básicas da função objetivo z tiver coeficiente positivo, há uma SBF adjacente melhor.

Iteração: determinar uma SBF adjacente melhor.

A direção de maior incremento em z deve ser identificada, para que uma melhor solução básica factível seja determinada. Para isso, três passos devem ser tomados:

1. Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (base). Ela deve ser aquela que tem maior incremento em z , isto é, com maior coeficiente positivo em z .
2. Escolher a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas. A variável escolhida a sair da base deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior a entrar na base.
3. Resolver o sistema de equações recalculando os valores da nova solução básica adjacente. Antes disso, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma mais conveniente, por meio de operações algébricas elementares, utilizando o **método de eliminação de Gauss-Jordan**. A partir do novo sistema de equações, cada nova equação deve possuir apenas uma variável básica com coeficiente igual a 1, cada variável básica deve aparecer em apenas uma equação, e a função objetivo deve ser escrita em função das variáveis não

básicas, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo z podem ser obtidos diretamente, e o teste de otimalidade pode ser verificado facilmente.

3.4.1 Quadro do Simplex para Solução Manual do Problema de Programação Linear

A solução manual do algoritmo geralmente é feita utilizando o quadro, ou tableau, do Simplex. A sua finalidade é simplesmente nos auxiliar na realização dos cálculos e das iterações, buscando organizar a solução dos problemas.

Quadro 1 – Modelo geral de programação linear na forma tabular do simplex.

nº de equação	Coeficiente das variáveis					Constante
	z	x_1	x_2	...	x_n	
0	1	$-c_1$	$-c_2$...	$-c_n$	0
1	0	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
2	0	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	0	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m

Fonte: Fávero (2012).

Vamos destacar os passos detalhados do algoritmo geral para a solução de problemas de maximização de PL pela forma tabular do Método Simplex.

Passo de Inicialização: O problema deve estar na forma padrão.

Passo 1: Encontrar uma SBF inicial para o problema de PL.

Passo 2: Teste de otimalidade.

Passo de Interação: Determinar uma SBF adjacente melhor.

1. Determinar a variável não básica que entrará na base.
2. Determinar a variável básica que sairá da base.
 - a) Selecionar os coeficientes positivos da coluna pivô que representam os coeficientes da nova variável básica em cada restrição do modelo atual.
 - b) Para cada coeficiente positivo selecionado no passo anterior, dividir a constante da mesma linha por ele. Isto é, $\frac{b_i}{a_{ij}}$.
 - c) Identificar a linha com menor quociente $\min_i = \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\}$. Essa linha contém a variável que sairá da base. A linha que contém a variável básica escolhida a sair da base é chamada linha

pivô. O número pivô é o valor que corresponde à interseção da linha pivô com a coluna pivô.

3. Transformar a forma tabular atual utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalculando a solução básica.

a) Nova linha pivô = linha pivô atual \div número pivô;

b) Para as demais linhas, incluindo z , temos:

Nova linha = (linha atual) – (coeficiente da coluna pivô da linha atual) \times (nova linha pivô)

Passo da Regra de Parada Avalie se a função objetivo possui algum coeficiente negativo. Se todos os coeficientes são não negativos (≥ 0), pare pois a solução é ótima. Caso contrário, volte para o passo de iteração.

Sendo que o quadro é alterado a cada iteração do Método Simplex, e na última iteração a solução é representada pelos valores das variáveis básicas e da função-objetivo. O quadro do Simplex será explicado em sala de aula durante a resolução dos problemas.

Segundo (COLIN, 2007) o quando simplex funciona perfeitamente desde que se tenha uma solução básica inicial, que são adequados para restrições do tipo (\leq). No entanto, quando os problemas têm restrições dos tipos ($=$) e (\geq) temos que utilizar variáveis artificiais e neste caso aplicar o (método do grande M) os interessados nesse método podem consultar as bibliografias citadas neste trabalho.

Exemplo 3.6. *Vamos novamente utilizar Exemplo 2.1 para aplicar os passos do algoritmo simplex na forma tabular para obter sua solução.*

Solução: Vamos acrescentar as variáveis de folgas x_3, x_4 e x_5 . Daí, temos o problema na forma padrão:

$$\begin{aligned} \max z &= 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ \text{s. a : } &\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= 30 \\ 4x_1 + 8x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 &= 70 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 &= 20 \end{cases} \end{aligned}$$

com, $x_i \geq 0, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Esses valores são colocados no Quadro 2 abaixo:

Agora vamos aplicar os passos acima para resolver o problema.

Passo 1: encontrar uma SBF inicial.

Observando o Quadro 2, identificamos as variáveis básicas $VB = (x_3, x_4, x_5) = (30, 70, 20)$ e as variáveis não básicas $VNB = (x_1, x_2) = (0, 0)$ e portanto, o valor da função objetivo é $z = 0$. Logo, temos uma solução básica factível inicial é $SBF = (0, 0, 30, 70, 20)$.

Quadro 2 – Forma tabular inicial do Exemplo 3.6

nº de equação	Variáveis básicas	Coeficiente das variáveis						Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	z	1	-30	-50	0	0	0	0
1	x_3	0	2	3	1	0	0	30
2	x_4	0	4	8	0	1	0	70
3	x_5	0	1	3	0	0	1	20

Fonte: Pereira (2020).

Passo 2: Teste de otimalidade:

Como os coeficientes de x_1 e x_2 são negativos na linha 0, a SBF atual não é ótima. Logo, existe uma SBF adjacente melhor do que a SBF atual. Sendo assim, passamos para os passos de interações.

Iteração 1: Determinar uma SBF adjacente melhor.

1. Determinar a variável não básica que entrará na base.

Escolhe-se a variável com maior coeficiente negativo na equação 0 do Quadro 2. Neste caso, $x_2 = -50$ assim x_2 entra na base. Para o problema em questão, a variável com maior contribuição unitária para a função objetivo z é x_2 . Logo, a variável x_2 é selecionada para entrar na base, e a coluna dessa variável é a coluna pivô.

2. Determinar a variável básica que sairá da base.

Busca-se aqui selecionar a variável básica que sairá da base (e se tornará nula), que é aquela que limita o crescimento de x_2 . Assim temos que:

a) Os coeficientes positivos da coluna pivô (coluna da variável x_2) selecionados são 3, 8 e 3.

b) Determinar o mínimo de $\left(\frac{30}{3}, \frac{70}{8}, \frac{20}{3}\right)$.

c) A linha com menor quociente é equação 3, pois $(20/3 < 70/8 < 10)$ assim x_5 sai da base. A linha pivô e a coluna pivô estão destacadas no quadro 2. O número pivô (interseção da linha pivô com a coluna pivô) é o número 3.

3. Transformar a forma tabular atual utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalcular a solução básica. A nova forma tabular é obtida após as seguintes operações elementares:

a) Nova linha pivô = linha pivô atual \div número pivô

$$\text{Nova linha pivô} = \frac{1}{3}x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \frac{20}{3} \quad (3.14)$$

esta nova linha pivô que estará no próximo quadro.

b) Para as demais linhas, incluindo z , temos que efetuar os seguintes cálculos.

Nova linha = (linha atual) – (coeficiente da coluna pivô da linha atual) × (nova linha pivô). Fazendo os cálculos obtemos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
equação 1	2	3	1	0	0	30
(+3) × nova linha	1	3	0	0	1	20
subtração	1	0	1	0	-1	10

$$\text{Nova linha 1} = 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 = 10 \quad (3.15)$$

e

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
equação 2	4	8	0	1	0	70
(+8) × nova linha	8/3	8	0	0	8/3	80/3
subtração	4/3	0	0	1	-8/3	50/3

$$\text{Nova linha 2} = \frac{4}{3}x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 1x_4 - \frac{8}{3}x_5 = 50/3 \quad (3.16)$$

a nova função objetivo é:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
função objetivo	-30	-50	0	0	0	0
(-50) × nova linha	-50/3	-50	0	0	-50/3	-1000/3
subtração	-40/3	0	0	0	50/3	1000/3

$$z = -\frac{40}{3}x_1 + \frac{50}{3}x_5 + \frac{1000}{3} \quad (3.17)$$

Agora vamos construir o novo quadro com os valores acima.

Quadro 3 – Nova forma tabular após o método de eliminação de Gauss-Jordan (Iteração 1)

n° de equação	Variáveis básicas	Coeficiente das variáveis					Constante	
		z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
0	z	1	-40/3	0	0	0	50/3	1000/3
1	x_3	0	1	0	1	0	-1	10
2	x_4	0	4/3	0	0	1	-8/3	50/3
3	x_2	0	1/3	1	0	0	1/3	20/3

Fonte: Pereira (2020).

A partir do Quadro 3, é possível obter imediatamente os novos valores de x_2, x_3, x_4 e z . A nova solução básica factível é $x_2 = 20/3, x_3 = 10$ e $x_4 = 50/3$ com $z = 1000/3$. Assim, temos que SBF atual e $\{0, 20/3, 10, 50/3, 0\}$. Em seguida aplicamos o teste de otimalidade para esta solução básica factível atual.

Passo 2: Teste de otimalidade:

Note que o coeficiente x_1 é negativo na linha 0, sendo assim a SBF atual não é ótima, isto é, existe uma SBF adjacente melhor do que a SBF atual. Portanto, passamos para a segunda interação.

Iteração 2: Determinar uma SBF adjacente melhor.**1.** Determinar a variável não básica que entrará na base.

Como $x_1 = -40/3$, então x_1 entra na base. Escolhe-se a variável com maior coeficiente negativo na equação 0 do Quadro 3. Para o problema em questão, a variável com maior contribuição unitária para a função objetivo z é x_1 . Portanto, a variável x_1 é selecionada para entrar na base, e a coluna dessa variável é a coluna pivô.

2. Determinar a variável básica que sairá da base.

Busca-se aqui selecionar a variável básica que sairá da base (e se tornará nula), que é aquela que limita o crescimento de x_1 . Assim temos que:

a) Os coeficientes positivos da coluna pivô (coluna da variável x_1) selecionados são 1, $4/3$ e $1/3$.

b) Determinar o mínimo de $\left(\frac{10}{1}, \frac{50}{4}, \frac{20}{1}\right)$.

c) A linha com menor quociente é equação 1, pois $(10 < 12, 50 < 20)$ assim x_3 sai da base. A linha pivô e a coluna pivô estão destacadas no quadro 3, sendo o número pivô é o número 1.

3. Transformar a forma tabular atual utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalculando a solução básica. Vamos determinar a nova forma tabular.

a) Nova linha pivô = linha pivô atual \div número pivô

$$\text{Nova linha pivô} = 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4 - 1x_5 = 10 \quad (3.18)$$

b) Para as demais linhas, incluindo z , temos:

Nova linha = (linha atual) - (coeficiente da coluna pivô da linha atual) \times (nova linha pivô). Fazendo os cálculos obtemos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
equação 2	4/3	0	0	1	-8/3	50/3
(+4/3) \times nova linha	4/3	0	4/3	0	-4/3	40/3
subtração	0	0	-4/3	1	-4/3	10/3

$$\text{Nova linha 1} = 0x_1 + 0x_2 - 4/3x_3 + x_4 - 5/3x_5 = 10/3 \quad (3.19)$$

e

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
equação 3	1/3	1	0	0	1/3	20/3
(+1/3)×nova linha	1/3	0	1/3	0	-1/3	10/3
subtração	0	1	-1/3	0	2/3	10/3
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
função objetivo	-40/3	0	0	0	50/3	1000/3
(-40/3)×nova linha	-40/3	0	-40/3	0	40/3	-400/3
subtração	0	0	40/3	0	$\frac{10}{3}$	1400/3

$$\text{Nova linha 2} = 0x_1 + x_2 - 1/3x_3 + 0x_4 + 2/3x_5 = 10/3 \quad (3.20)$$

a nova função objetivo é:

$$z = \frac{40}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 + \frac{1400}{3} \quad (3.21)$$

A partir do Quadro 4 pode-se obter os valores de x_1, x_2, x_4 e z . Assim a nova solução básica factível é $x_1 = 10, x_2 = 10/3, x_4 = 10/3$ e o valor da função objetivo é $z = 1400/3 = 466,67$ e a nova solução factível atual é dada por: $\{10, 10/3, 0, 10/3, 0\}$.

Quadro 4 – Nova forma tabular após o método de eliminação de Gauss-Jordan (Iteração 2)

nº de equação	Variáveis básicas	Coeficiente das variáveis						Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	z	1	0	0	40/3	0	10/3	1400/3
1	x_1	0	1	0	1	0	-1	10
2	x_4	0	0	0	-4/3	1	-4/3	10/3
3	x_2	0	0	1	-1/3	0	2/3	10/3

Fonte: Pereira (2020).

Passo 2: Teste de otimalidade. A SBF atual é a ótima, pois os coeficientes da função objetivo na equação 0 do Quadro 4, são todos positivos e pela regra de parada, temos a solução ótima.

Logo, a WRC tem que construir 10 apartamentos e 3 casas para tem um lucro de R\$ 466,666,67.

Note que ao aplicarmos o algoritmo simplex não foi necessário calcularmos as dez soluções, isto, por que, o algoritmo utilizar uma solução básica inicial e a partir dela busca outras soluções básicas melhor do que a atual, caso exista, como esse processo é finito, temos que o Método Simplex é muito mais eficiente que a solução analítica utiliza no Exemplo 3.5. O que justifica a eficiência do Método Simplex.

4 APLICAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO LINEAR NO ENSINO MÉDIO

Nessa seção vamos apresentar algumas das aplicações que foram feitas em sala de aula para que os alunos entendam o processo de resolução de um PPL. Os problemas foram adaptados e retirado das referências deste trabalho. Também aproveitamos para descrever alguns relatos dos alunos sobre o conteúdo e a forma como ele foi trabalhado em sala de aula.

4.1 Programação Linear no Ensino Médio

É no Ensino Médio que os alunos tem o primeiro contato com o conceito de funções, matrizes, determinante, matriz inversa, sistemas de equações linear com um número maior de incógnitas e métodos de soluções de sistemas de equações lineares. Dessa forma, podemos introduzir o conceito de PL de uma forma mais elementar usando o método gráfico para obter soluções ótimas, assim como, o método analítico e computacional. Além disso, (LYRA, 2014) em seu trabalhos dissertativo apresentou uma proposta de programação linear para o ensino médio, que busca usar problemas do dia a dia dos alunos por meio de sistema de equações lineares, e nós vamos utilizar o Método Simplex para fazer uma conexão, entre os conteúdos que são ensinados no ensino médio e sua aplicação em problemas práticos do dia a dia, para que os alunos possam identificar os conteúdos citados durante os processos de resolução dos problemas apresentados.

Selecionamos uma turma com 34 alunos do terceiro ano do Curso Técnico em Administração na modalidade integrada do IFMA-Campus Avançado Rosário para aplicarmos a pesquisa deste trabalho.

4.2 Procedimentos Metodológicos

A metodologia que aplicamos foi a de Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP), ou do inglês *Problem Based Learning* (PBL). De acordo com (BERBEL, 2011) as metodologias ativas têm condições de proporcionar a aprendizagem desejada, utilizando meios diversificados, a exemplo da Tecnologias da Informação e da Comunicação (TDIC). Sendo assim, os aplicativos que vamos utilizar para a solução dos problemas de PL vão de encontro com o pensamento de Berbel. Além disso, Barbosa e Moura (2013, p. 58), de modo mais sucinto e direto, fundamentam a PBL como “o uso contextualizado de um problema para o aprendizado autodirigido”. Portanto, Os problemas da lista vão corroborar para aprendizagem dos alunos. Logo, diferentemente dos métodos convencionais cujo objetivo é a transmissão do conhecimento centrado no professor, na PBL o aluno é o centro do processo, deixando de ser um receptor passivo da informação para ser um agente ativo do seu próprio aprendizado (KLEIN; AHLERT, 2020, p. 4). Além disso, utilizamos

também a Sala de Aula invertida, onde os alunos pesquisavam e assistiam vídeos sobre o assunto em sites indicado pelo professor como <https://www.youtube.com/watch?v=7qOdbo-xPaA> e <https://www.youtube.com/watch?v=1Wq8w1zPsog>.

A sala de aula invertida é uma modalidade de *e-learning* na qual o conteúdo e as instruções são estudados on-line antes de o aluno frequentar a sala de aula, que agora passa a ser o local para trabalhar os conteúdos já estudados, realizando atividades práticas como resolução de problemas [...] (VALENTE, 2014).

Neste sentido, selecionamos dez Problemas de Programação Lineares sendo que, cinco já estão montados e prontos, isto é com as equações de restrições e a função objetivo na forma padrão, para aplicação de algum dos métodos de solução que vamos utilizar e as outras cinco são contextualizadas. No entanto, quando montadas irão representar as mesmas cinco questões anteriores. Os problemas são de mix de produção voltados para o Curso de Técnico em Administração.

Para esta pesquisa foram utilizadas 18 horas aulas para apresentação do conteúdo e resolução dos problemas selecionados, e além disso, aplicamos um questionários para verificação de aprendizagem. Veja o Quadro 2 abaixo:

Quadro 5 – Distribuição dos Conteúdos.

Conteúdos aplicados	
Horas aulas	Conteúdos
3	Conceitos básicos
3	Método gráfico
3	Método analítico
3	Método analítico
3	Aplicativo OR Simplex
3	Solve

Fonte: Pereira (2020).

4.3 Conceitos Básicos

Nas três primeiras horas aulas apresentamos aos alunos, através de slides, os conceitos e definições que constam nas seções (4.2.1) a (4.2.6) e (4.4.1) que utilizaremos para o entendimento do Método Simplex, aproveitamos para entregar as listas contendo dez questões que servirão como norte para o aprendizado do Método Simplex. Além disso, falamos da importância do Método Simplex, e de como pode ser utilizado por um tomador de decisão. Nesta aula dividimos os alunos em cinco grupos e também instalamos nos celulares dos alunos todos os aplicativos que vamos utilizar nesse processo de resolução de PL. Como GeoGebra para a construção das regiões de restrições e OR Simplex para solução dos PPL.

4.4 Método Gráfico

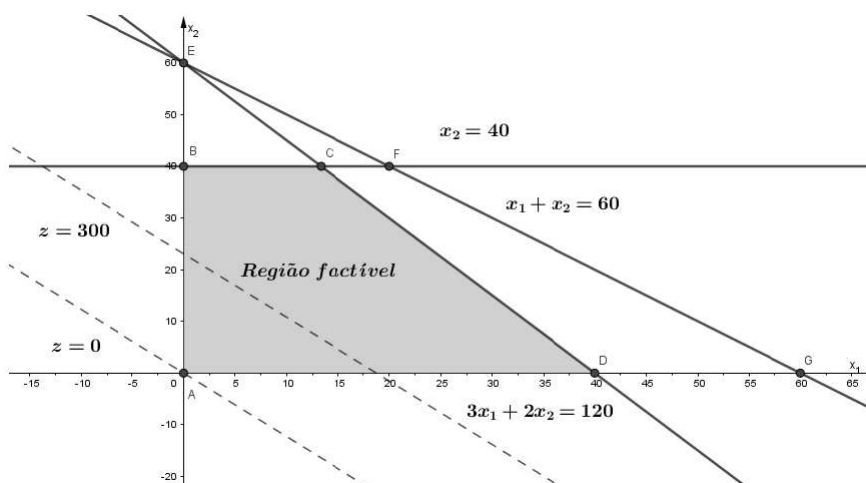
A primeira forma de resolução de um problema de programação linear que apresentamos para a turma foi o método de resolução gráfica, que vai exigir dos alunos o conhecimento de construção e análise de gráficos de funções lineares, estudado no primeiro ano do ensino médio. Escolhemos um dos problema com duas variáveis de decisão que constam na lista que foi entregue no primeiro dia de exposição do conteúdo.

Problema 4.1. Resolva o seguinte problema de programação linear.

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 13x_2 \\ \text{s.a. : } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Solução: para agilizar na solução dos problemas envolvendo duas variáveis de decisão utilizamos o GeoGebra para a construção da região factível. Em seguida construímos os gráficos das retas $x_1 + x_2 = 60$, $3x_1 + 2x_2 = 120$ e $x_2 = 40$ e determinamos o trapézio ABCD que representa a região factível do problema. Veja a Figura 12.

Figura 12 – Região factível Problema 5.1



Fonte: Pereira (2020).

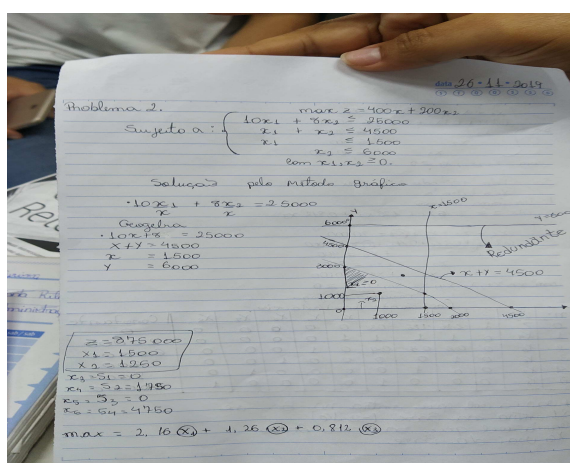
Daí pedimos para os alunos calcular os valores da função objetivo $z = 16x_1 + 13x_2$ nos vértices do trapézio ABCD, para que eles identifica-se o ponto de máximo. Depois de algum tempo eles falaram que o ponto $C(13,33;40)$ é o ponto de máximo da função z , e seu valor máximo é $z = 16 \cdot 13,33 + 13 \cdot 40 = 733,28$. Depois disso, fizemos as seguintes perguntas aos grupos. Porque o ponto E, F e G não fazem parte da solução do problema? E porque a região do triângulo AEG não é a região factível? Passado alguns minutos..., não obtivemos nenhuma respostas.

Sendo assim, pedimos para que eles pesquisassem sobre as perguntas e respondessem na próxima aula. Aproveitamos para falar dos casos especiais de alguns PPL envolvendo duas variáveis que constam nas seções (3.2.1) a (3.2.4) que comentamos durante a apresentação dos slides.

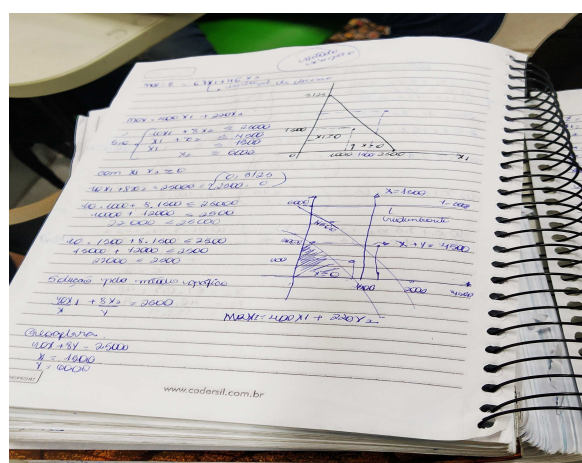
Em seguida, pedimos para que os grupos resolvessem os outros problemas com duas variáveis utilizando os procedimentos acima e apenas um grupo não conseguiu resolver um dos problemas. Vejamos algumas fotos dos alunos resolvendo os problemas.

Figura 13 – Resolução utilizando o método gráfico.

(a) Gráfico



(b) Gráfico



Fonte: Pereira (2020).

De acordo com os relatos dos alunos, “a utilização do GeoGebra no celular para construção dos gráficos facilita bastante a determinação da região factível do problema.” No entanto, alguns alunos fizeram os gráfico pelo método tradicional veja Figura 13. Neste momento, sorteamos as cinco questões contextualizadas da lista entre os grupos para que eles lessem e tentassem montar o problema na forma padrão, resolvendo por algum dos métodos apresentados até o momento e apresente na última aula.

4.5 Método Simplex

A segunda forma que utilizamos para resolver um PPL foi o Método Simplex Primal no formato tableau, utilizamos as tabelas para organizar os cálculos, onde trabalhamos com problemas com mais de duas variáveis. Antes disso, voltamos as perguntas feitas na aula passada, e três grupos responderam que os valores dos pontos E, F e G não satisfaziam uma das equações de restrições e o mesmo acontecia com a região do triângulo AEG. Ficamos satisfeito com as respostas e cobramos um pouco mais das outras equipes. Pois é importante que todos participem. Veja abaixo o exemplo que resolvemos em sala de aula junto com os alunos.

Problema 4.2. Resolva o seguinte problema de programação linear.

$$\max z = 80x_1 + 60x_2 + 50x_3$$

$$s. a : \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Solução: inicialmente, acrescentamos as variáveis de folgas x_4 e x_5 . E assim, obtemos o problema na forma padrão:

$$\max z = 80x_1 + 60x_2 + 50x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$s. a : \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 60 \end{cases}$$

com, $x_i \geq 0, (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Esses valores são colocados no Quadro 6 abaixo:

Quadro 6 – Forma tabular inicial do Exemplo 5.2.

nº de equação	Variáveis básicas	Coeficiente das variáveis						Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	z	1	-80	-60	-50	0	0	0
1	x_4	0	8	6	4	1	0	100
2	x_5	0	5	4	4	0	1	60

Fonte: Pereira (2020).

No entanto, antes de começarmos a solução propriamente dita, perguntamos aos alunos como esse quadro pode ser representado matematicamente? A resposta foi imediata, “matriz professor”. E então pedimos para eles identificarem uma matriz especial e após alguns minutos eles disseram que tinha uma matriz identidade 2×2 . Agora vamos aplicar os passos da secção 4.4.1 que foram explicados na primeira aula e reforçados durante a resolução do problema.

Passo 1: encontrar uma SBF inicial.

Observando o Quadro 6, identificamos as variáveis básicas $VB = (x_4, x_5) = (100, 60)$ e as variáveis não básica $VNB = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ e portanto, o valor da função objetivo é $z = 0$. Logo, temos uma solução básica factível inicial é $SBF = (0, 0, 0, 100, 60)$.

Passo 2: teste de otimalidade.

Como os coeficientes de x_1, x_2 e x_3 são negativos na equação 0, a SBF atual não é ótima, portanto, existe uma SBF adjacente melhor do que a SBF atual, e para essa solução o valor de $z = 0$. Sendo assim, passamos para os passos de interações.

Iteração 1: Determinar uma SBF adjacente melhor.

1. Determinar a variável não básica que entrará na base.

Escolhe-se a variável com maior coeficiente negativo na equação 0 do Quadro 6. Neste caso, $x_1 = -80$, assim x_1 entra na base.

2. Determinar a variável básica que sairá da base.

a) Os coeficientes positivos da coluna pivô são 8 e 5.

b) Determinar o mínimo de $\left(\frac{100}{8}, \frac{60}{5}\right)$.

c) A linha com menor quociente é equação 2, assim x_5 sai da base. A linha pivô e a coluna pivô estão destacadas no quadro 6. O número pivô (interseção da linha pivô com a coluna pivô) é o número 5.

3. Transformar a forma tabular atual utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalculando a solução básica. Neste momento, lembramos dos métodos que utilizamos para solução de um sistema de equações lineares já estudados. A nova forma tabular é obtida após as seguintes operações elementares:

a) Nova Linha Pivô (NLP) = linha pivô atual \div número pivô, assim temos,

$$\text{NLP} : 1x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{4}{5}x_3 + 0x_4 + \frac{1}{5}x_5 = 12 \quad (4.1)$$

esta nova linha pivô estará no próximo quadro.

b) Para as demais linhas, incluindo z , temos que efetuar os seguintes cálculos.

Nova Linha (NL) = (linha atual) - (coeficiente da coluna pivô da linha atual) \times (nova linha pivô). Fazendo os cálculos obtemos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
equação 1	8	6	4	1	0	100
$(+8) \times \text{NLP}$	8	$\frac{32}{5}$	$\frac{32}{5}$	0	$\frac{8}{5}$	96
<hr/>						
subtração	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{12}{5}$	1	$-\frac{8}{5}$	4
<hr/>						
NL 1 : $0x_1 - \frac{2}{5}x_2 - \frac{12}{5}x_3 + 1x_4 - \frac{8}{5}x_5 = 4$						

(4.2)

a nova função objetivo é:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	constante
função objetivo	-80	-60	-50	0	0	0
$(-80) \times \text{NLP}$	-80	-64	-64	0	-16	-960
<hr/>						
subtração	0	4	14	0	16	960

$$z = 0x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 0x_4 + 16x_5 + 960 \quad (4.3)$$

Agora vamos construir o novo quadro com os valores determinados.

Quadro 7 – Nova forma tabular após o método de eliminação de Gauss-Jordan (Iteração 1).

nº de equação	Variáveis básicas	Coeficiente das variáveis						Constante
		z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	z	1	0	4	14	0	16	960
1	x_4	0	0	$-2/5$	$-12/5$	0	$-8/5$	4
2	x_1	0	1	$4/5$	$4/5$	0	$1/5$	12

Fonte: Pereira (2020).

A partir do Quadro 7 pode-se obter os valores de x_1, x_4 e z . Assim a nova solução básica factível é $x_1 = 12, x_4 = 4$ e o valor da função objetivo é $z = 960$ e a nova solução factível atual é dada por: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (12, 0, 0, 4, 0)$

Passo 2: Teste de otimalidade. A SBF atual é a ótima, pois os coeficientes da função objetivo na equação 0 do Quadro 7, são todos positivos. Logo, pelo critério de parada o valor máximo é $z = 960$.

Após a solução fizemos a seguinte pergunta. Se o problema envolvesse algum tipo de produtos quais seriam as variáveis que representariam os produtos e quantos de tais produtos teriam de ser produzidos para obter um lucro máximo? O silêncio permaneceu por vários minutos... Então, explicamos de maneira simples que o produto poderia ser por exemplo, picolé com o seguintes sabores $x_1 = \text{coco}$, $x_2 = \text{morango}$ e $x_3 = \text{abacaxi}$ com o lucro máximo de R\$ 960. Deixamos claro que foi apenas uma maneira de pensar e que esse não seria o produto do exemplo.

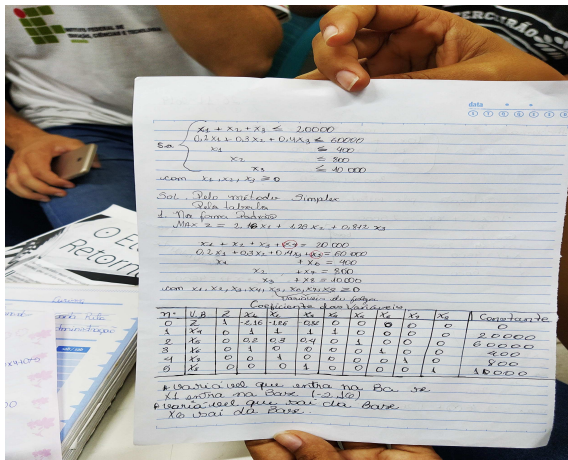
Também perguntamos o que eles acharam desse Método de solução? A resposta foi que “esse método é muito trabalhoso devido os cálculos, mas disseram, que entenderam o processo de resolução.”

Sendo assim, pedimos para que eles resolvessem os outros problemas que constavam na listas. No entanto, alguns grupos tiveram bastante dificuldade para fazer a soluções de problemas que tinham mais de uma iteração. Na Figura 14, temos foto dos grupos resolvendo os problemas pedidos.

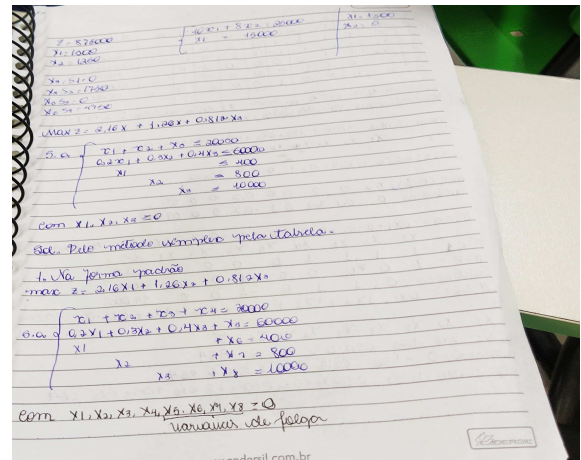
Novamente, perguntamos como estava o processo de montagem dos problemas contextualizado. E os alunos disseram “que não estavam conseguindo montar os problemas”, então insistimos para que eles lessem com atenção e continuassem tentando e caso não consigam me procurem para algumas orientações.

Figura 14 – Utilizando o método simplex.

(a) Tabela



(b) Forma padrão



Fonte: Pereira (2020).

4.6 Utilizando o OR Simplex para Resolver Problemas de Programação Linear

Após a resolução pelo Método Simplex, pedimos aos alunos para abrir o aplicativo de celular OR Simplex, que havíamos baixado do Play Store, específicos para a resolução de problemas de otimização, esse aplicativo será utilizado para a verificação do problema resolvido pelo método gráfico e analítico (Método Simplex).

Voltamos ao mesmo problema que fora resolvido no método gráfico e instruímos os alunos, como entrar com os dados do problema abaixo no OR Simplex.

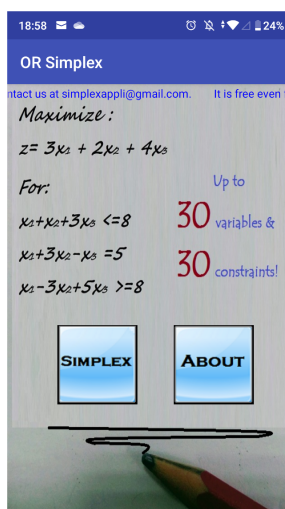
Problema 4.3. Resolva o seguinte problema de programação linear.

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 13x_2 \\ \text{s.a. : } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_2 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Solução: inicialmente, abrimos o OR simplex que aparece na Figura 15. Depois disso, selecionamos a opção SIMPLEX.

Na Figura 16, em (a) entramos com o número de variáveis que no caso é 2, e o número de equações do problema que é 3 e marcamos a opção max. E clicamos em CONTINUE, em (b) digitamos os valores da equação que queremos maximizar e os valores das restrições do problema e clicamos em CALCULATE. conforme a Figura 16.

Figura 15 – OR simplex.



Fonte: Pereira (2020).

Figura 16 – OR Simplex.

(a) Definindo o número de variáveis

12:28

OR Simplex

Number of variables:

2

Number of constraints:

3

Min or Max:

Min

Max

CONTINUE

(b) Entrada das variáveis

12:29

To use fraction (/): [CLICK HERE](#)

Maximize:

Z = 16 *x1 + 13 *x2

Subject to:

1 *x1 + 1 *x2 <= 60

3 *x1 + 2 *x2 <= 120

0 *x1 + 1 *x2 <= 40

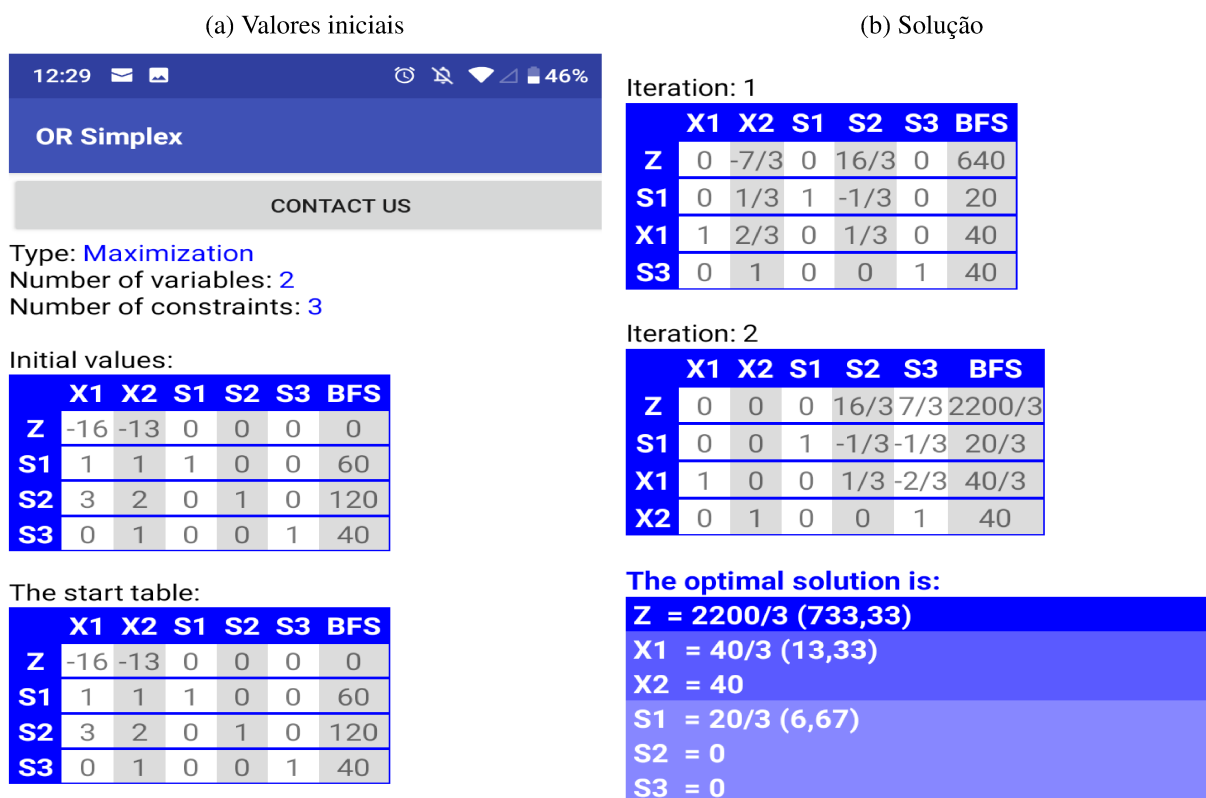
Note that $x_i \geq 0$ for all i

CALCULATE

Fonte: Pereira (2020).

Na Figura 17, temos em (a) a tabela inicial e as variáveis de folgas S_1, S_2 e S_3 . Já em (b) temos as interações 1 e 2 com resultado do problema igual ao que encontramos na resolução gráfica. Mais uma vez pedimos para os alunos resolver os problemas utilizando o aplicativo e todos os alunos conseguiram resolver todos os problemas.

Figura 17 – OR Simplex.



Fonte: Pereira (2020).

Essa foi a parte que eles mais gostaram, pois o resultado foi exatamente igual ao que fizemos pelo método gráfico e analítico com a facilidade de que não foram feitos muitos esforços para determinarem as soluções pedidas. Novamente pedimos para que os grupos resolvessem os problemas já montados para que fossem comparados com um dos métodos já aplicados. Percebi o quanto os alunos ficaram empolgados com a utilização do aplicativo. Eles falaram que “com o aplicativo os problema eram mais fáceis de resolver.”

4.7 Utilizando o Solver para Resolver Problema de Programação Linear

Ao iniciarmos a última aula, perguntamos para os grupos quais conseguiram montar os problemas contextualizados. E apenas o grupos dois e o grupo cinco responderam que haviam conseguido resolver os problemas, os demais grupos não conseguiram e nem procuram o professor para as orientações de como proceder para a montagem dos problemas. No entanto, mesmo os grupos que resolveram os problemas pedido não encontraram uma relação entre os problemas já resolvidos e os problemas montados por eles. Somente, após algumas indagações feitas pelo professor foi que eles conseguiram ver que havia uma relação. Dizendo que “eram igual a um dos problema já montados da lista”. Sendo assim, pedimos para que os outros

grupos tentasse ver qual dos problemas que ainda faltavam representava a sua situação-problema. Depois de alguns minutos e muita discussão entre os grupos foi que eles conseguiram identificar a situação-problema referente ao suas questões.

Finalmente, utilizamos o Solver que é uma ferramenta da Planilha Calc para resolver PL, escolhemos um dos problemas contextualizado que o grupo dois resolveu, com o intuito, de comprovar os resultados obtidos anteriormente.

Sendo assim, levamos todos os alunos para o laboratório de informática, para ensiná-los como utilizar o Solver e construir uma planilha de acordo com o problema a ser resolvido.

Situação-problema 4.1. (*Problema do mix de produção-adaptado.*) A Toy S.A. fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e carros. Um soldado é vendido por R\$ 35,00 e usa R\$ 9,00 de matéria-prima. Cada soldado fabricado aumenta os custos diretos de mão-de-obra e custos indiretos em R\$ 10,00. Um carro é vendido por R\$ 40,00 e utiliza R\$ 12,00 de matéria-prima. Cada carro aumenta os custos de mão-de-obra e indiretos em R\$ 15,00. A fabricação requer dois tipos de mão-de-obra: carpinteiro e pintor. A fabricação de um soldado requer 1 hora de um pintor e 3 horas de um carpinteiro. Um carro 1 hora de pintor e 2 horas de carpintaria. Para cada semana a Toy pode conseguir toda a matéria-prima necessária, mas apenas 60 horas de pintura e 120 horas de carpintaria. A demanda para os soldados é ilimitada, mas a de carros é de no máximo de 40 por semana. Quantos carros e soldados a Toy deve produzir para maximizar seus lucros semanal?

Solução: vejamos como o grupo montou o problema. Eles definiram x_1 como soldado e x_2 como carro. Além disso, usaram seu conhecimento das aulas de Gestão de Negócio para determinar o preço de venda do soldado e do carro, montando o problema de forma correta.

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 13x_2 \\ \text{s.a. : } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 & (\text{pintura}) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 & (\text{carpintaria}) \\ x_2 \leq 40 & (\text{carros}) \end{cases} \end{aligned}$$

com $x_1, x_2 \geq 0$.

Inclusive, resolveram o problema utilizando o método gráfico e OR Simplex. Entretanto, vamos detalha todo os passos para que o problema seja resolvido no Solver.

Primeiro pedimos para os alunos construírem uma tabela conforme a Figura 18. Neste momento, descobrimos que os alunos tinha pouca ou nenhuma habilidade com o Calc, então fizemos uma breve apresentação das ferramentas principais do menu que iríamos utilizar e juntos construímos a tabela. Em seguida entramos com os dados do problema na Planilha do Calc como a seguir.

Na célula D15 entramos com a fórmula $= (B6 * B16) + (C6 * C16)$ que determina o valor da função objetivo do problema. E na célula D9 digitamos a fórmula

Figura 18 – Introdução dos dados na planilha.

Toy Brinquedos					
	x1	x2			
	Soldados	Carros			
Lucro Unitário	16	13			
			Horas	Sinal	Horas
Pintura	1	1	0	≤	60
Carpintaria	3	2	0	≤	120
Demanda de carros	0	1	0	≤	40
Solução	x1	x2	z		
	Soldados	Carros	Lucro total		
Quantidade Produzidas	0	0	R\$ -		

Fonte: Pereira (2020).

$= (B9 * \$B\$15) + (C9 * \$C\$15)$ que representa a restrição de capacidade de pintura. Em seguida copiamos a fórmula até a célula D11. Veja a Figura 19.

Figura 19 – Inserindo as fórmulas na planilha.

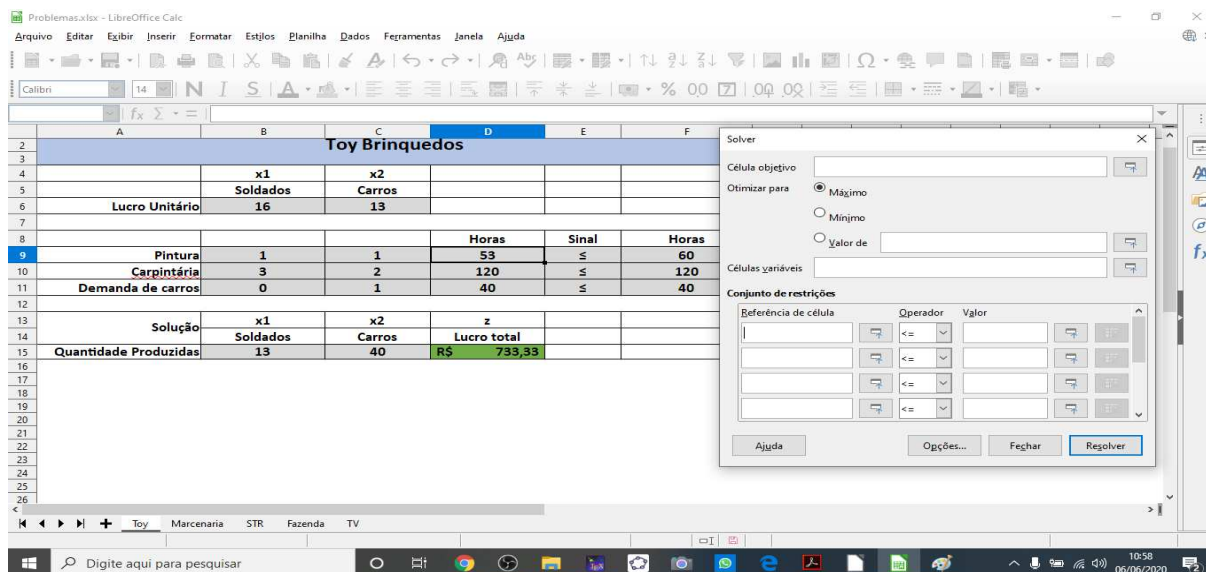
Toy Brinquedos					
	x1	x2			
	Soldados	Carros			
Lucro Unitário	16	13			
			Horas	Sinal	Horas
Pintura	1	1	$=B9 * \$B\$15 + C9 * \$C\15	≤	60
Carpintaria	3	2	0	≤	120
Demanda de carros	0	1	0	≤	40
Solução	x1	x2	z		
	Soldados	Carros	Lucro total		
Quantidade Produzidas	0	0	R\$ -		

Fonte: Pereira (2020).

Após, os passos acima, clicamos em Ferramentas e selecionamos a opção solver e aparece a seguinte janela da Figura 20.

Em Célula objetivo entramos com nossa função objetivo que está na célula D15 e também selecionamos a opção máximo, pois queremos maximizar os lucros de nossa função objetivo. Em Células Variáveis clicamos nas células B15 e C15. A seguir vamos adicionar o Conjunto de restrições utilizando a célula de referência D9 : D11. Além disso, temos que adicionar as

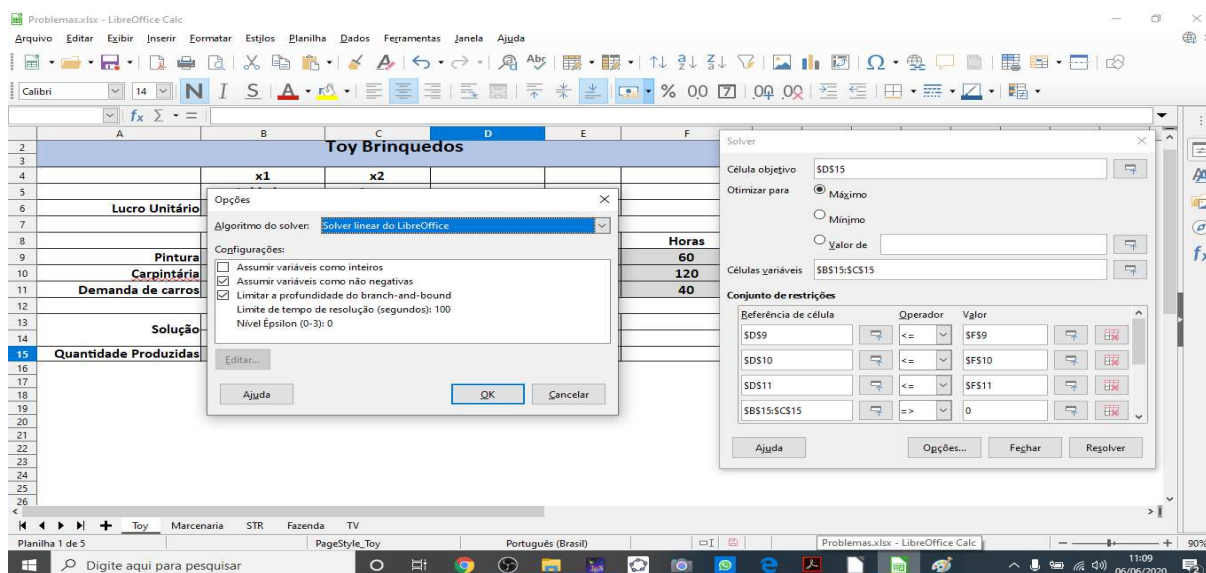
Figura 20 – Abrindo o Solver.



Fonte: Pereira (2020).

restrições de não-negatividade, isto é, B15 e C15 tem que ser maior ou igual a zero. Em seguida, clicamos em opções e selecionamos o Solver linear do LibreOffice e também marcamos as duas últimas caixas e clicamos em Ok, veja Figura 21.

Figura 21 – Inserindo os dados no Parâmetro do Solver.



Fonte: Pereira (2020).

Agora o solver irá apresentar a solução do problema conforme a Figura 22. Sendo o lucro total igual a R\$ 733,33. Então fizemos a seguinte observação de que para esse problema o número de soldados produzidos é igual a 13 e o número de carros é igual a 40. Sendo que foram utilizados 53 horas disponíveis para pintura e as 120 horas de carpintaria e apenas 13 soldados foram produzidos.

Figura 22 – Solução final dada pelo Solver.

Toy Brinquedos					
	x1	x2			
	Soldados	Carros			
Lucro Unitário	16	13			
			Horas	Sinal	Horas
Pintura	1	1	53	≤	60
Carpintaria	3	2	120	≤	120
Demanda de carros	0	1	40	≤	40
Solução	x1	x2	z		
	Soldados	Carros	Lucro total		
Quantidade Produzidas	13	40	R\$ 733,33		

Fonte: Pereira (2020).

Em seguida, pedimos para os alunos construírem a tabela da Figura 23 e aplicassem os passos acima para resolver outro problema. No entanto, nosso tempo havia acabado restando apenas o tempo para que os alunos responderem o questionário que distribuímos nesse momento.

Figura 23 – Introdução dos dados na planilha.

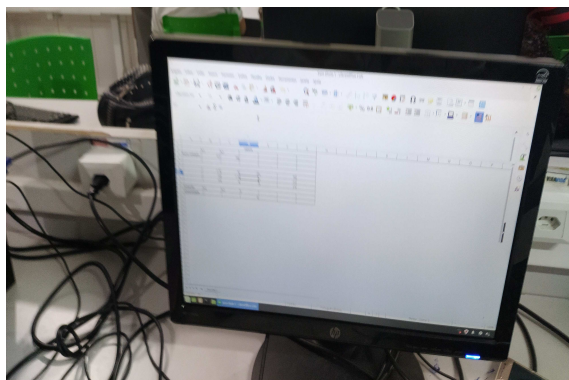
Fabricante de TV					
	x1	x2			
	tv 42"	tv 32"			
Lucro Unitário	400	220			
			horas	Sinal	Material disponíveis
Força de trabalho	10	8	0	≤	25000
Capacidade de produção	1	1	0	≤	4500
Demanda de tv 42"	1	0	0	≤	1500
Demanda de tv 32"	0	1	0	≤	6000
Solução	x1	x2	z		
	tv 42	tv 32	Lucro total		
Quantidade Produzidas					

Fonte: Pereira (2020).

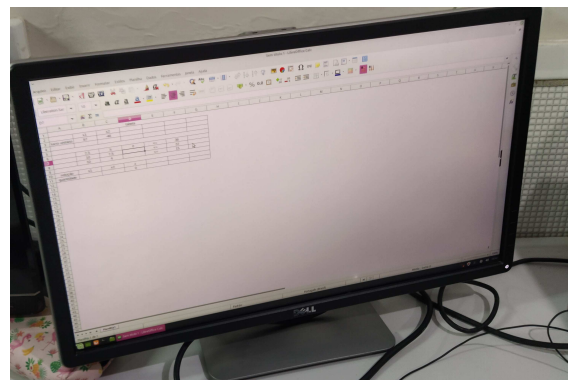
Na Figura 24 mostramos algumas fotos dos alunos construindo as tabelas na Planilha do Calc os alunos disseram que: “é muito bom utilizar o laboratório para fazer essas atividades professor queríamos vim mais vezes.” Pois para muitos é a primeira vez que eles tiveram contato com a Planilha do Calc. Podemos também utilizar o Excel na resolução de PL, no entanto, temos que habilitar o Solver que não está instalado, aos interessados veja (FÁVERO; BELFIORE, 2012, p. 123).

Figura 24 – Construção da tabela no Excel.

(a) Planilha do Calc



(b) Planilha do Calc



Fonte: Pereira (2020).

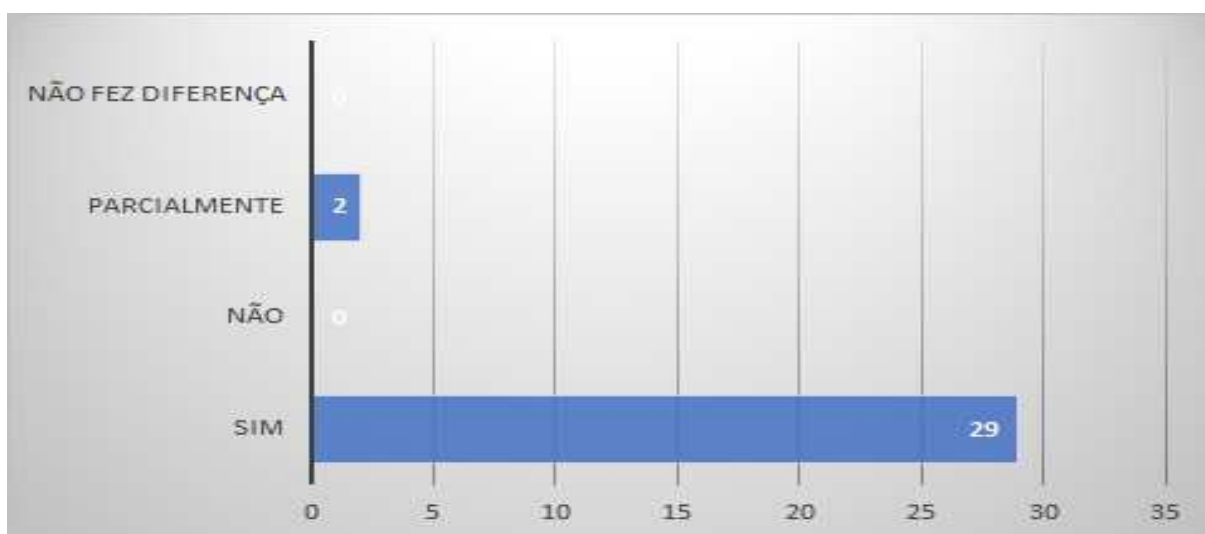
4.8 Resultados e discussões

Neste trabalho desenvolvemos um conteúdo que não constava na grade curricular do curso e aplicamos uma metodologia diferente da tradicional isto requer do professor um maior preparo.

Inovar representa dedicação extra, tanto do professor quanto dos alunos. Sendo assim, é preciso que os participantes do processo acreditem no potencial pedagógico e deem valor à iniciativa (BARBOSA; MOURA, 2013).

A seguir, mostraremos todos os gráficos que foram construídos na Planilha do Calc para analisar os dados do questionário aplicado ao termino desta pesquisa com o objetivo de fazermos uma análise da aprendizagem utilizando o Método Simplex.

Figura 25 – A adoção do Método Simplex contribuiu para o desenvolvimento de sua aprendizagem?

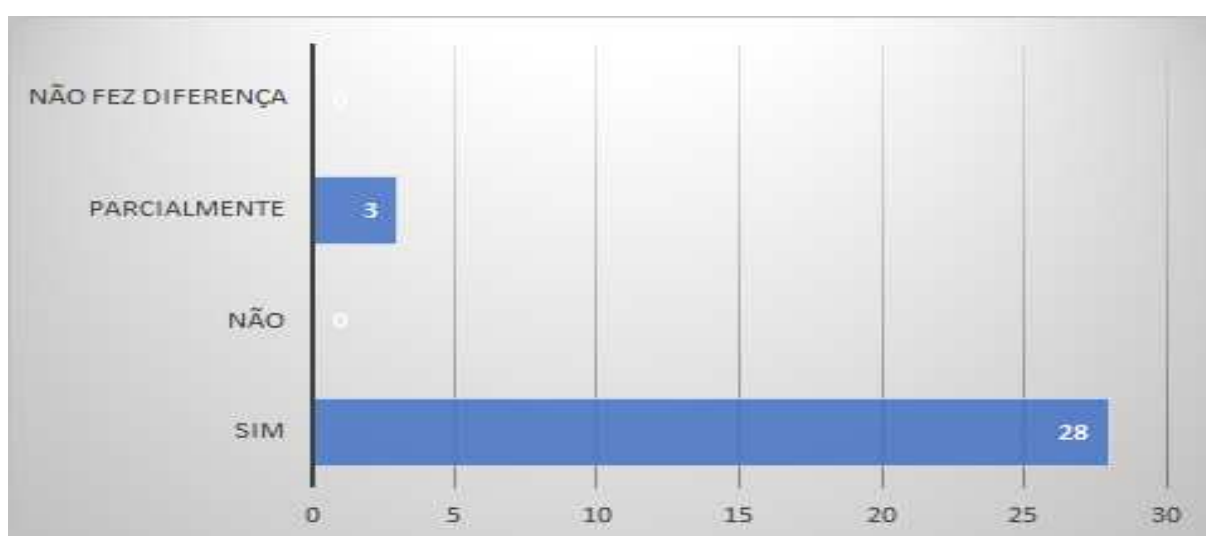


Fonte: Pereira (2020).

Na Figura 25, dos 31 alunos que responderam o questionários, 29 (94%) disseram que o Método Simplex contribuiu para sua aprendizagem e apenas 2 (6%) afirmaram que houve contribuição parcial para a aprendizagem. Uma importante observação é que nenhum dos alunos disseram que o método não contribuiu para a sua aprendizagem.

Estes resultados vão de encontro ao que Barbosa e Moura (2013, p. 65) falam sobre o processo de aprendizagem dos alunos da Educação Profissional que foram expostos à metodologia PBL. Para eles, as experiências de aprendizagem vivenciadas são “[...] muito positivas e o conhecimento adquirido por essa via é de um valor inquestionável em seu processo formativo”.

Figura 26 – As atividades e discussões em grupo motivaram seus estudos e contribuíram para um melhor desempenho na resolução de PPL já montados?



Fonte: Pereira (2020).

Na Figura 26, temos que 28 (90%) dos alunos responderam que as atividade em grupo melhoram o desempenho na resolução de PPL já montados e apenas 3 (10%) disseram que essa contribuição se deu de forma parcial. Novamente nenhum dos alunos disseram que o estudos em grupos não melhorou o seu desempenho.

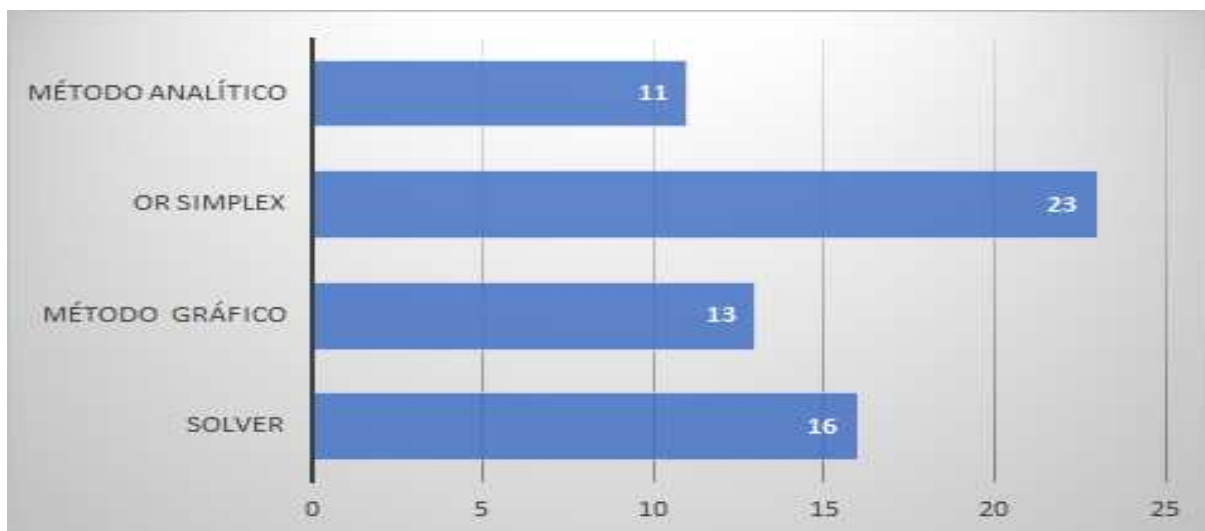
E de acordo com Lourenço e Palma (2005, p. 157) os trabalhos em grupo, também podem ser compreendidos como:

[...] situações perturbadoras, na medida em que as diferentes soluções encontradas podem se tornar fontes de desequilíbrio cognitivo para os alunos. Enfim, cabe ao docente, oferecer situações perturbadoras aos alunos, as quais tenham a possibilidade de se tornarem conflitos cognitivos e, assim, mobilizar os alunos no sentido de ampliar os seus conhecimentos

Portanto, preparar os alunos para trabalhar em equipes é importante não só para a sua aprendizagem como também para a vida profissional.

Na Figura 27, temos que 16 alunos disseram ter se identificado com o Solver, 13 com o método gráfico, 23 com o OR Simplex e 14 com o método analítico (Método Simplex).

Figura 27 – Dos métodos apresentados para resolução de PPL quais foram o que você mais se identificou?(Pode ser mais de uma alternativa)

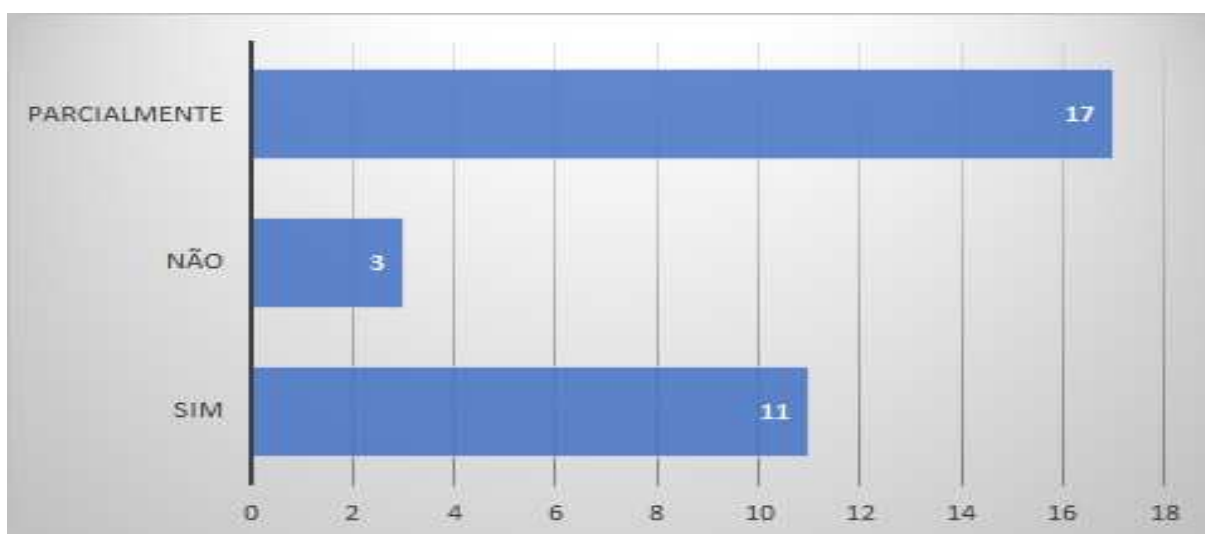


Fonte: Pereira (2020).

O uso de recurso tecnológico em sala de aula tem por finalidade ampliar a visão do aluno sobre determinado conteúdo, visto que, a utilização dessas ferramentas deve atentar para um objetivo pedagógico com planos e metas definidos almejando resultados esperados (BRASIL.MEC, 2006).

O que confirma o gosto dos alunos pela utilização do aplicativo de celular e pelos Solve que de acordo com os alunos: “sabendo como o entrar como os dados do problema o programa faz todos os cálculos sem precisarmos fazer contas.” Enquanto que o método analítico é muito trabalhoso, principalmente, quando o processo envolve mais de duas interações.

Figura 28 – Você teve dificuldades para interpretar os PPL apresentados?



Fonte: Pereira (2020).

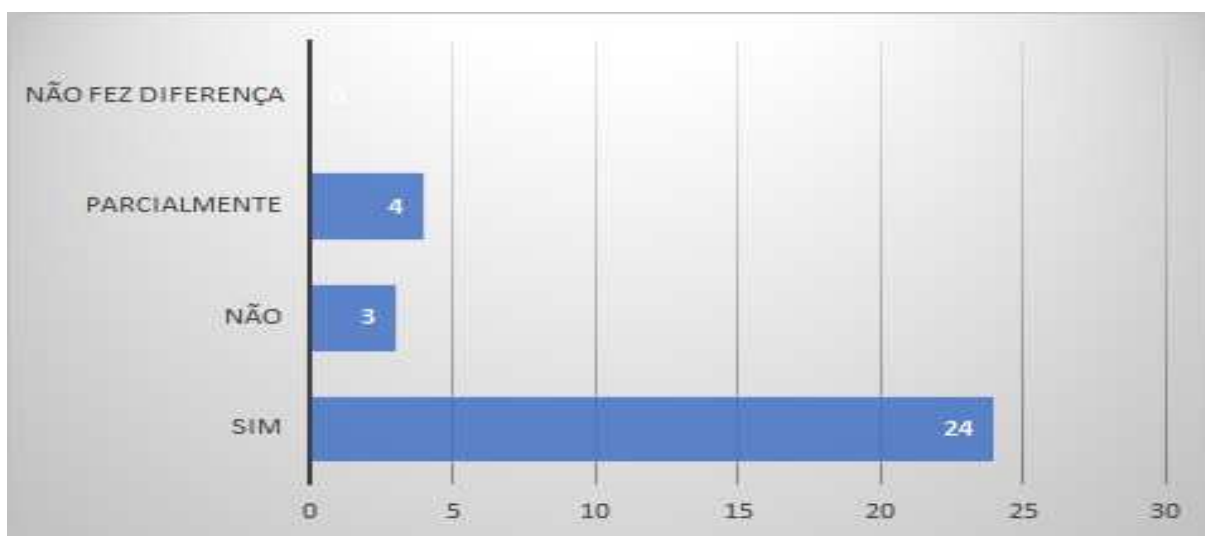
Na Figura 28, temos que 17 (55%) dos alunos afirmaram que tiveram dificuldades parcial para interpretar os PPL, 3 (10%) falaram que não tiveram dificuldades, enquanto que 11 (35%)

encontraram muitas dificuldades na interpretação dos PPL. De acordo com Freitas (2016).

O ensino por meio de problemas tem sido caracterizado, no Brasil, como proposta inovadora, geralmente aparecendo em duas abordagens: aprendizagem baseada em problemas e metodologia da problematização. Tais abordagens apresentam-se como metodologias que superam o ensino tradicional, com a clara intenção de propiciar a aprendizagem ativa do aluno. Ambas contribuem, de fato, para tornar o aluno mais ativo na aprendizagem, mas também apresentam algumas insuficiências.

Essas insuficiências de que fala Freitas se devem a falta de leitura que os alunos têm ao logo dos seus estudos e a pouca ou nenhuma forma de se trabalhar a matemática de maneira contextualizada tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Os resultados desta pesquisa mostram que de fato, os alunos têm muitas dificuldades em resolverem problemas contextualizados. Pois, eles não conseguem interpretar os problemas de forma correta e tirar os dados para sua solução. Portanto, é importante que os professores utilizem as metodologias ativas no ensino básico com mais frequência para que nossos alunos tenham uma aprendizagem significativa e ativa.

Figura 29 – O conhecimento do Método Simplex pode contribuir de alguma forma para sua profissão?

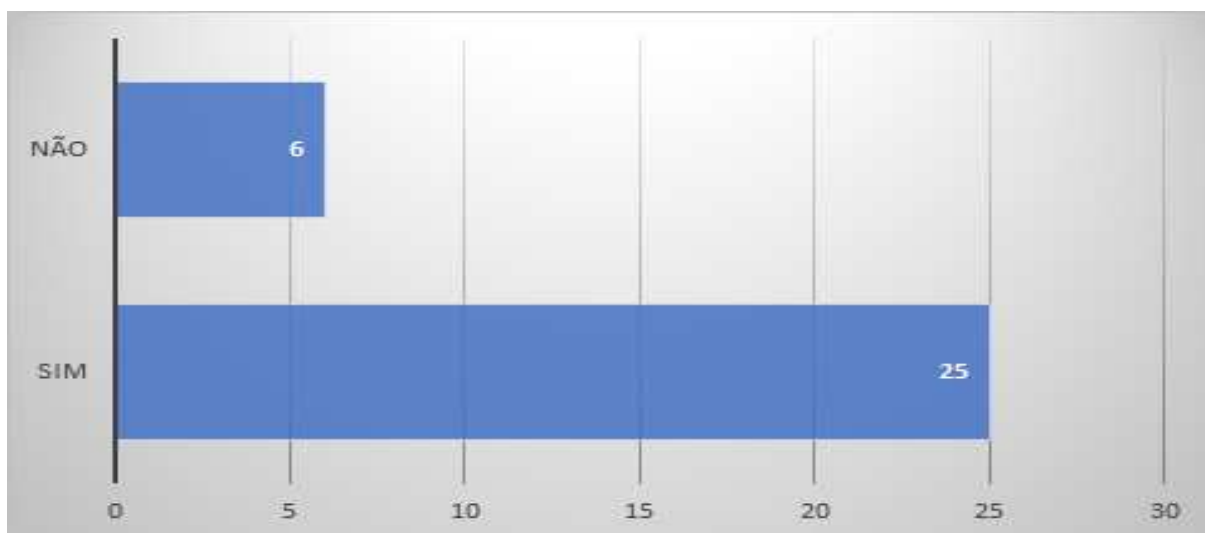


Fonte: Pereira (2020).

Na Figura 29, temos que 4 (13%) dos alunos responderam que o conhecimento sobre o Método Simplex contribuirá parcialmente para sua profissão, 3 (10%) afirmaram que não vai contribuir em quanto que 24 (77%) afirmam que irá contribuir.

Sabe-se que as empresas estão sempre buscando novas maneiras de aumentar seus lucros ou diminuir os seus custos, pensando nisso, apresentamos o Método Simplex que é uma ferramenta matemática que pode ser utilizada para esse propósito. E um técnico em administração que possui esse conhecimento a mais vai ter um diferencial em relação a outros que não conhecem nenhuma técnica de resolução de problemas de otimização.

Figura 30 – O tempo foi suficiente para resolver os problemas apresentados?



Fonte: Pereira (2020).

Na Figura 30, temos que 6 (19%) dos alunos afirmam que o tempo não foi suficiente para a resolução dos problemas e 25 (81%) afirmam que o tempo foi suficiente. As atividades tiveram duração de algumas semanas com exposição de conceitos, definições e resoluções de exercícios sobre o conteúdo desta pesquisa. Expor um assunto que não consta na grade curricular do ensino médio não é fácil, e por esse motivo, enfrentamos algumas dificuldades. No entanto, no decorrer do tempo os alunos foram percebendo que alguns assuntos envolvidos no Método Simplex já eram de seus conhecimentos o que facilitou a compreensão do conteúdo no tempo.

5 CONCLUSÃO

A matemática é uma excelente ferramenta que nos ajuda a organizar o pensamento e a resolver problemas do nosso dia a dia. No entanto, sabemos que os alunos que adentram hoje no ensino médio, traz consigo uma enorme dificuldade na compreensão dos conceitos básicos em Matemática, e os motivos para a falta de embasamentos no conhecimento matemático são vários.

Tudo começa pela base, no ensino fundamental, falta de professores qualificados, alunos desmotivados, escolas desestruturadas e assim por diante. Não é raro ouvir no ensino médio relatos de alunos que não viram nem o básico no Ensino de Matemática. E essas dificuldades se mostram principalmente na resolução dos problemas contextualizados. Portanto, as metodologias ativas devem ser trabalhadas em conjunto com os métodos tradicionais de ensino buscando melhorar a aprendizagem de nossos alunos.

Neste trabalho, utilizou-se o Método Simplex, para verificar a aprendizagem dos alunos do curso técnico em administração através de problemas específicos voltados para o curso. Notou-se que o uso das tecnologias ajuda e muito os alunos a se interessar pelos conteúdos sejam eles de matemática ou não. Além disso, o uso da sala de aula invertida proporcionou a busca de conhecimento ativo dos alunos, pois eles pesquisam e estudam os conteúdos antes, e levam para a sala de aula suas dúvidas e respostas para as perguntas feitas pelo professor.

E a partir das análises do questionário aplicado conclui-se que ao utilizarmos o Método Simplex, os alunos conseguiram utilizar os conhecimentos que eles tinham de assuntos como construção e interpretação de gráficos, resolução de sistemas de equações lineares, matrizes e suas aplicações. Aprenderam também como utilizar ferramentas matemáticas como OR Simplex e o Solve para resolver PPL, além disso, o trabalho em equipe também ajudou a desenvolver o conhecimento crítico promovendo discussões sobre o assunto. Isto é primordial em futuros técnicos em administração que adentrarão no mercado de trabalho.

Constatou-se também que eles tiveram muitas dificuldades em montar os problemas contextualizados e fazerem a relação com os problemas já montados na forma padrão. No entanto, com a orientação do professor vão buscando formas ativas de entender o problema e resolvê-lo isto mostra o quão é importante a participação do professor orientador no processo de ensino.

REFERÊNCIAS

- BARBOSA, E. F.; MOURA, D. G. de. *Metodologia ativas de aprendizagem na educação profissional e tecnológica*. [S.l.]: Boletim Técnico do Senac, 2013. Citado na página 49.
- BARROS, R. L. *Curso básico de Vetores*. 3. ed. São Paulo: Sistema de Ensino Integrado S/C LTDA, 1991. Citado na página 20.
- BERBEL, N. A. N. As metodologias ativas e a promoção da autonomia de estudantes. *Semina: Ciência Sociais e Humanas*, v. 32, n. 1, p. 25 – 40, 2011. Citado na página 49.
- BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1993. Citado na página 13.
- BRASIL.MEC. *PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 65.
- CAIXETA, J. V. F. . *Presquisa Operacional*. São Paulo: Atlas, 2001. Citado na página 34.
- COLIN, E. C. *Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finança, logística, produção, marketing e vendas*. Rio de Janeiro: LTC, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 44.
- DANTZIG, G.; THAPA, M. *Linear programming: Introduction*. New York: Springer, 1997. Vol. 1. Citado na página 35.
- FREITAS, R. Ensino por problemas: uma abordagem para o desenvolvimento do aluno. *Educação e Pesquisa*, São Paulo, v. 38, n. 2, p. 403–418, 2016. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=29823285009>>. Citado na página 66.
- FÁVERO, L. P.; BELFIORE, P. *Pesquisa operacional Para Cursos De Administração*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 23, 33, 41 e 62.
- GEOGEBRA. *Manual do Usuário*. [S.l.], 2020. Disponível em: <<http://www.geogebra.at>>. Citado na página 24.
- GOLDBARG, E. *Programação Linear e Fluxos em Redes*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015. Citado na página 23.
- HARDLEY, G. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Florence-Universitária, 1993. Citado na página 13.
- HARDLEY, G. *Programação Linear*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois S.A, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- HOWARD, C. R. A. *Algebra Linear com Aplicação*. Porto Alegre: Bookman, 2001. Citado na página 20.
- KLEIN, N. A.; AHLERT, E. M. Aprendizagem baseada em problemas como metodologia ativa na educação profissional. *Revista Destaque Acadêmico*, Univates.br, p. 4, 2020. Citado na página 49.
- LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 13, 16 e 20.

- LOURENÇO, R. de S.; PALMA Ângela P. T. V. O conflito cognitivo como princípio pedagógico no processo ensino-aprendizagem nas aulas de educação física. *Revista de Educação do Cogeime*, ano 14, n. 27, p. 157, 2005. Citado na página 64.
- LYRA, M. S. de. *Uma proposta do ensino de programação linear no ensino médio*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Goiás, 2014. Citado na página 49.
- PEREIRA, A. dos S. *Método Simplex e sua aplicação na resolução de problemas de programação linear em um curso técnico de administração*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual do Maranhão, 2020. Citado na página 64.
- TAHA, H. A. *Pesquisa Operacional*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 25, 28 e 37.
- VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em revista*, Paraná, n. 4, p. 79–97, 2014. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/pdf/1550/155037796006>>. Citado na página 50.
- YANASSE, M. A. V. A. R. M. H. *Pesquisa Operacional*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007. Citado na página 35.

Anexos

LISTA DE PROBLEMAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT
NOME: _____

Problemas de Programação Linear (PPL) aplicada em uma turma do Curso de Administração IFMA/Campus Avançado Rosário.

Problema .1. Resolva o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 67x_1 + 46x_2 \\ \text{s.a. : } &\begin{cases} 2,5x_1 + 5x_2 \leq 36 \\ 10x_1 + 7,5x_2 \leq 22 \\ 10x_1 + 4x_2 \leq 15 \end{cases} \end{aligned}$$

com $x_1, x_2 \geq 0$.

Problema .2. Resolva o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 400x_1 + 220x_2 \\ \text{Sujeito a : } &\begin{cases} 10x_1 + 8x_2 \leq 25000 \\ x_1 + x_2 \leq 4500 \\ x_1 \leq 1500 \\ x_2 \leq 6000 \end{cases} \end{aligned}$$

com $x_1, x_2 \geq 0$.

Problema .3. Resolva o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 2,16x_1 + 1,26x_2 + 0,812x_3 \\ \text{s.a. : } &\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 20000 \\ 0,2x_1 + 0,3x_2 + 0,4x_3 \leq 60000 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 800 \\ x_3 \leq 10000 \end{cases} \end{aligned}$$

com $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Problema .4. Resolva o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 16x_1 + 13x_2 \\ \text{s.a. : } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 60 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

com $x_1, x_2, \geq 0$.

Problema .5. Resolva o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \max z &= 80x + 60x_2 + 50x_3 \\ \text{Sujeito a : } &\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 100 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 \leq 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

com $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Problema .6. (Problema do mix de produção-adaptado.) A Toy S.A. fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e carros. Um soldado é vendido por R\$ 35,00 e usa R\$ 9,00 de matéria-prima. Cada soldado fabricado aumenta os custos diretos de mão-de-obra e custos indiretos em R\$ 10,00. Um carro é vendido por R\$ 40,00 e utiliza R\$ 12,00 de matéria-prima. Cada carro aumenta os custos de mão-de-obra e indiretos em R\$ 15,00. A fabricação requer dois tipos de mão-de-obra: carpinteiro e pintor. A fabricação de um soldado requer 1 hora de um pintor e 3 horas de um carpinteiro. Um carro 1 hora de pintor e 2 horas de carpintaria. Para cada semana a Toy pode conseguir toda a matéria-prima necessária, mas apenas 60 horas de pintura e 120 horas de carpintaria. A demanda para os soldados é ilimitada, mas a de carros é de no máximo de 40 por semana. Quantos carros e soldados a Toy deve produzir para maximizar seus lucros semanal?

Problema .7. (O Problema da Pequena Marcenaria.) Uma marcenaria produz mobiliário de escritório. Fabrica mesas, escrivaninhas e cadeiras. A produção de uma mesa requer 8Kg de madeira e 5Kg de metal, e é vendida por R\$ 80. Uma escrivaninha gasta 6Kg de madeira e 4Kg de metal, e é vendida por R\$ 60. Uma cadeira requer 4Kg de cada um dos insumos (metal e madeira), e é vendida por R\$ 50. Determinar a estratégia de maximização de receitas para a empresa, uma vez que seus recursos são limitados a 100Kg de madeira e 60Kg de metal.

Problema .8. (O Problema do Mix de Produção adaptado.) A empresa STR brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R\$67,00 e R\$46,00, respectivamente. As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 150

minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 300 minutos por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 600 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 450 minutos por unidade de triciclo produzida. Já o processo de montagem necessita de 600 minutos e 240 minutos para uma unidade de carrinho e triciclo produzido, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal. Formular o problema de programação linear que maximiza o lucro líquido da empresa STR.

Problema .9. Um fazendeiro está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. Por experiência, sabe que a produtividade de sua terra para as culturas desejadas é a constante na Tabela 1.

Tabela 1 – Restrições do problema do plantio

Cultura	Produtividade em Kg por m^2	Lucro por Kg de produção
Trigo	0,2	10,8
Arroz	0,3	4,2
Milho	0,4	2,03

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima em toneladas está limitada a 60. A área cultivável do sítio é de 200 000 m^2 . Para atender às demandas de seu próprio sítio é imperativo que se plante 400 m^2 de trigo, 800 m^2 de arroz e 10.000 m^2 de milho. Pede-se formular o problema de otimizar a produção.

Problema .10. Um fabricante de TV precisa decidir quais modelos deve produzir em uma nova fábrica recentemente instalada. O departamento de marketing e venda realizou uma pesquisa de mercado que indicou que, no máximo, 1 500 unidade do modelos 42 polegadas e 6 000 unidade do modelos de 32 polegadas podem ser vendidas no próximo mês. A empresa já contratou um certo número de empregados e, com isso, dispõe de uma força de trabalho de 25 000 homens-horas por mês. Cada modelo de 42 polegadas requer dez homens-horas e cada modelo de 32 polegadas requer oito homens-horas para ser montado. Além disso, uma mesma linha de montagem é compartilhada pelos dois modelos e considere que a capacidade de produção desta linha seja de 4 500 TV por mês. O lucro unitário do modelo de 42 polegadas é de R\$ 400,00 e a de 32 polegadas é de R\$ 220,00. Deseja-se determinar quanto produzir de cada modelo de modo a maximizar o lucro da empresa.

QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT
NOME: _____

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

- 1. A adoção do Método Simplex contribuiu para o desenvolvimento de sua aprendizagem?**
 - Sim*
 - Não*
 - Parcialmente*
 - Não fez diferença*
- 2. As atividades e discussões em grupo motivaram seus estudos e contribuíram para um melhor desempenho na resolução de Problemas de Programação Linear (PPL) já montados?**
 - Sim*
 - Não*
 - Parcialmente*
 - Não fez diferença*
- 3. Dos métodos apresentados para a resolução de PPL quais foram o que você mais se identificou? (Pode ser mais de uma alternativa)**
 - Método analítico*
 - Aplicativo de celular*
 - Método gráfico*
 - Solver*
- 4. Você teve alguma dificuldade para interpretar os PPL apresentado?.**
 - Sim*
 - Não*
 - Parcialmente*
- 5. O conhecimento do Método Simplex pode contribuir de alguma forma para sua profissão?**
 - Sim*
 - Não*
 - Parcialmente*
 - Não fez diferença*

6. *O tempo foi suficiente para resolver os problemas apresentados?*

Sim

Não