Sérgio Rodrigo Pereira

Uma proposta de atividade gamificada para o ensino de matrizes

São Luís - MA

2022

Sérgio Rodrigo Pereira

Uma proposta de atividade gamificada para o ensino de matrizes

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Universidade Estadual do Maranhão - UEMA
Pró-Reitoria de Pós-Graduação - PPG
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

São Luís - MA
2022

Pereira, S¶rgio Rodrigo.
Uma proposta de atividade gamificada para o ensino de matrizes / S¶rgio Rodrigo Pereira. ¯ S² o Lu°s, 2022.
... f

Disserta´² o (Mestrado Profissional) ¯ Programa de PÆs-Gradua´² o em Matem®tica em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranh² o, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa.

1.Gamifica´² o. 2.Matrizes. 3.Jogos. 4.Engajamento. 5.Ensino. I.T°tulo.

CDU: 51-8:37

Elaborado por Giselle Fraz² o Tavares - CRB 13/665

Sérgio Rodrigo Pereira

Uma proposta de atividade gamificada para o ensino de matrizes

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Felix Silva Costa

Prof. Dr. Felix Silva Costa-UEMA
Orientador

Junior Cesar Alves Soares

Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares-UNEMAT
Examinador Externo

Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão-UEMA
Examinador Interno

São Luís - MA
2022

Agradecimentos

A Deus, por me guiar até este momento.

A meus filhos, Raymundo Rodrigo e Nikolas Luís pois é por causa deles que continuo a tentar melhorar cada vez mais.

A minha família, amigos e colegas de trabalho pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Felix Silva Costa, pela disponibilidade, competência, suas contribuições na realização deste trabalho e principalmente pela paciência.

Aos professores do Programa PROFMAT, por seus ensinamentos e contribuições.

A Universidade Estadual do Maranhão, por ter proporcionado o curso de mestrado.

Aos meus colegas de curso pela força, união e companheirismo.

A CAPES pelo apoio financeiro

Resumo

Este trabalho mostra como é possível utilizar gamificação para se ensinar matrizes através de uma situação fictícia pelo qual o estudante se sinta imerso na história. Para isso inicialmente apresenta-se brevemente os conceitos de matriz, de operações matriciais, assim como transposição de matrizes, calculo da matriz inversa, e dos determinantes de segunda e terceira ordens. em seguida explica-se o conceito de gamificação sua origem e seus usos na resolução de problemas, para estimular os indivíduos e motivá-los, dentro de cenários lúdicos de modo a desenvolver o foco e a capacidade de reter um grande volume de informações, se utilizando o de elementos existentes dentro dos jogos, não se tratando do jogo em si, mas somente o uso das suas mecânicas, dinâmicas e estéticas e inserindo-os no processo ensino aprendizagem. e por fim apresentando atividade gamificada e seu uso contextualizado passo a passo ao fim de engajar os estudantes do início ao fim se utilizando da ideia por trás da criptografia.

Palavras-chave: Gamificação. Matrizes. Jogos. Engajamento. Ensino.

Abstract

This paper shows how it is possible to use the gamification to teach matrices through a fictitious situation in which the student feels immersed in history. For this, initially and briefly, the concepts of matrix, matrix operations, as well as matrix transposition, inverse matrix calculation, and second and third order determinants are briefly presented. Next, the concept of gamification, its origin and its uses in problem solving is explained, stimulating individuals, and motivating them, within playful scenarios to develop focus and the ability to retain a large volume of information, if using existing elements within the games, not the game itself, but only the use of its mechanics, dynamics and aesthetics and inserting them in the teaching-learning process. and finally presenting gamified activity. And its contextualized use step by step to engage students from beginning to end using the idea behind cryptography.

Keywords: Gamification. Matrices. Games. Engagement. Teaching.

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Com o advento da internet e o surgimento de novas tecnologias a forma como aprendemos ou socializamos com as outras pessoas vêm mudando drasticamente, hoje em dia só precisamos de um smartphone E de uma conexão com a internet. E essas mudanças acabam refletindo dentro do ambiente educacional com os nossos estudantes cada vez mais imersos no mundo digital acabando por perder o interesse em aulas expositivas de forma que ele seja apenas agente passivo no processo ensino aprendizagem, criando uma crise motivacional. Segundo Carmargo, Fausto (2018):

> “De fato, o modelo tradicional serviu a um propósito e foi efetivo até certo ponto. No entanto, o acesso universal à informação, proporcionado pelo advento da internet e das mídias digitais, transformou radicalmente a sociedade e, com ela, a forma de se relacionar, consumir, trabalhar, aprender e, até mesmo, viver.”

A aquisição de conhecimento, e busca de novas metodologias que criem oportunidades para o professor assegurar uma aprendizagem mais significante para o estudante, pode ser conseguido colocando o mesmo em um papel mais ativo tornando-o protagonista na construção do seu próprio conhecimento.

Então respondendo ao questionamento “Como aumentar o interesse dos estudantes durante o processo de ensino de matrizes?”. Com o intuito de fazer o estudante participar de forma efetiva no seu processo de aquisição de conhecimento, a gamificação aparece como metodologia ativa visando colocar o estudante no meio do processo ensino aprendizagem, realizando uma prática pedagógica prática pedagógica que constrói um saber crítico, contextualizando de forma dinâmica temas considerados difíceis de serem aprendidos. Objetivando Inserir uma atividade gamificada como auxilio no processo de ensino de matrizes, em específico aplicar uma atividade gamificada afim de se verificar o interesse e o engajamento dos estudantes durante a atividade e analisar os fatores positivos e negativos na atividade que possam influenciar na sua aprendizagem este trabalho é dividido em duas partes. A primeira parte deste trabalho é voltado para explicar o que são matrizes, sua lei de formação, sua classificação, apresentando alguns tipos de matrizes especiais, operações com matrizes e suas propriedades, em seguida explicando o conceito de determinantes e a forma de calcular determinantes de matrizes de ordem 2 e 3, e um breve resumo sobre sistemas lineares. A segunda parte desse trabalho é voltado a explicar o que é gamificação seu significado e origens apontando os principais autores na área, assim como a dificuldade de se conceber um ambiente significados e suas características, em seguida explicando o porquê da sua inserção no ambiente de ensino aprendizagem e por que utilizar gamificação para ensinar matrizes seguido de uma proposta de atividade gamificada detalhada com um passo a passo de aplicação. Quanto ao método de pesquisa utilizado neste trabalho foi feita uma pesquisa explicativa de natureza qualitativa, no qual foram realizadas pesquisas bibliográficas, fazendo uma análise de conteúdo para a produção da proposta de atividade gamificada.

2 Matrizes e Determinantes

Neste capítulo fazemos uma abordagem sobre matrizes e determinates, onde consideramos no caso dos determinates apenas as ordens $1, 2$ e 3, mostrando suas propriedades e alguns exemplos.

2.1 Matriz

Uma matriz $m \times n$ é uma tabela de $m \times n$ elementos, distribuídos em m linhas e n colunas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde o elemnto da linha i e coluna j é denotado por a_{ij}. De forma compacta podemos escrever $A = [a_{ij}]$ para $i = 1, \dots, m$ e para $j = 1, \dots, n$ ou ainda a notação $A = (a_{ij})_{m \times n}$. No caso de $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n e os elementos $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam a diagonal principal de A, ou seja, todo elemento a_{ij} com $i = j$.

Apresentamos, a seguir, alguns exemplos de matrizes importantes utilizadas no desenvolvimento do trabalho.:

1 . Matriz linha : Uma matriz que só possui uma linha;

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

2 . Matriz coluna: formada por uma única coluna;

$$C = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -9 \end{bmatrix},$$

3 . Matriz nula:matriz em que todos os elementos são nulos;

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

4 . Matriz quadrada: formada pelo mesmo número de linhas e colunas, comentada anteriormente;

$$E = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -1 & 9 \end{bmatrix},$$

5 . Matriz triangular: quando os elementos que estão acima da diagonal principal ou os elementos que estão abaixo da diagonal principal são todos nulos;

$$F = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

6 . Matriz triangular inferior: ocorre quando todos os termos que estão acima da diagonal principal são iguais a zero;

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

7 . Matriz triangular superior: ocorre quando todos os termos que estão abaixo da diagonal principal são iguais a zero;

$$H = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

Dizemos que duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{p\times q}$ são iguais se, e somente se, $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

2.2 Operações com Matrizes

Apresentamos algumas propriedades elementares para o estudo e aplicações de matrizes.

2.2.1 Adição

A adição de duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$

$$C = A + B$$

obtida obtida através da soma dos elementos correspondentes de A e B, onde $C = (c_{ij})_{m\times n}$, é definido da forma

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 1. *Sejam as matrizes A e B dadas por*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 9 & 7 & -4 \end{bmatrix}.$$

a soma de $A + B$ *é obtida da seguinte modo*

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2+4 & (-3)+(-2) & 5+1 \\ 3+9 & 0+7 & (-1)+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 6 \\ 12 & 7 & -5 \end{bmatrix}.$$

2.2.2 Propriedades da adição de matrizes

1 . Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$, para todas A, B e $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

2 . Elemento neutro: Existe $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $A + O = A$, para todo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

3 . Elemento símetrico: Para cada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, existe $-A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que $A+(-A) = 0$, onde $-A = [-a_{ij}]$.

4 . Comutativa: $A + B = B + A$, para todas $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2.2.3 Multiplicação de uma matriz por um número

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é definida pela matriz de ordem $m \times n$ e seja λ um número real ou complexo, então definimos a multiplicação de A por λ notação λA, multiplicando o número λ por cada elemento da matriz A, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo 2. *Sendo* $\lambda = 3$ *e a matriz* A *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -7 \\ 5 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

então λA *é obtida da seguinte forma:*

$$3A = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 & 3\,(-3) & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 1 & 3\,(-7) \\ 3\cdot 5 & 3\,(-3) & 3\cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -9 & 3 \\ 6 & 3 & -21 \\ 15 & -9 & 24 \end{bmatrix}$$

2.2.4 Propriedades da multiplicação por um escalar

1 . Associativa: $a(bA) = (ab)A$, para todos $a, b, \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2 . Distributiva em relação aos números: $(a + b)A = aA + bA$, para todos $a, b, \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

3 . Distributiva em relação as matrizes: $a(A+B) = aA + aB$, para todas $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $a \in \mathbb{R}$

4 . Elemento neutro: $1A = A$ para toda $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2.2.5 Multiplicação entre duas matrizes

O produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$ é definido pela matriz de ordem $m \times n$

$$C = AB,$$

cujos elemento são obtidos da seguinte maneira:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \tag{2.1}$$

para $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. Escrevemos também $[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$.

A Equação (2.1) significa que o elemento c_{ij} do produto é igual à soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha da matriz A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna da matriz B.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & {\color{red}c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & \ldots & c_{mn} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip} \\ \hline \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \ldots & b_{1j} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & b_{2j} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & b_{pj} & \ldots & b_{pm} \end{array}\right]$$

Podemos representar a Equação (2.1) usando a notação de somatório

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj},$$

Exemplo 3. *Sejam as matrizes:*

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -4 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, verificamos se o múmero de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Em seguidas efetuamos as contas.

$$C = AB =$$

$C_{11} = 11 \cdot 3 + (-4) \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 14$
$C_{12} = 11 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -26$

$C_{13} = 11 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) + 1 \cdot (-5) = 51$
$C_{21} = 6 \cdot 3 + (-5) \cdot 6 + 1 \cdot 5 = 7$
$C_{22} = 6 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -71$
$C_{23} = 6 \cdot 4 + (-5) \cdot (-3) + 1 \cdot (-5) = 34$
Uma vez efetuada as contas montamos a matriz C

$$C = \begin{bmatrix} 14 & -26 & 51 \\ -7 & -71 & 34 \end{bmatrix}.$$

2.2.6 Propriedades de multiplicação entre matrizes

Seja $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$. O produto de matrizes possui as seguintes propriedades:

1 Associativa: $A(BC) = A(BC)$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2 Distributiva a esqueça: $(A + B)C = AC + BC$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

3 Distributiva a direita: $A(B + C) = AB + AC$, para todas $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$

4 Elemento nulo: Seja O uma matriz nula, então $AO = O$ e $OB = O$, para todas $A, O \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B, O \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Exemplo 4. *(CECIERJ-*2013*) Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com a seguinte especificação:*

Componente/Modelo	*A*	*B*	*C*
Eixos	*2*	*3*	*4*
Rodas	*4*	*6*	*8*

Para os primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Modelo/ Meses	*Janeiro*	*Fevereiro*
A	*30*	*30*
B	*25*	*18*
C	*20*	*15*

Nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada?

Solução:
Utilizando o produto entre duas matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ 25 & 18 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} .$$

Como a primeira matriz é 2×3 *e a segunda é* 3×2 *o resultado da multiplicação entre as matrizes será uma matriz* 2×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 & 30 \\ 25 & 18 \\ 20 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215 & 154 \\ 430 & 308 \end{bmatrix}$$

Sendo assim em janeiro serão 215 *eixos e* 430 *rodas em fevereiro serão* 154 *eixos e* 308 *rodas.*

2.3 Matriz Transposta

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ é definida pela matriz de ordem $n \times m$

$$B = A^t$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja, se $B = (b_{ij})_{n \times m}$, então

$$b_{ij} = a_{ji}$$

para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$. Podemos também escrever $[A^t]_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 5. *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Então, a matriz transposta é

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$$

2.4 Propriedades

- **a**. $(A^t)^t = A$;

- **b**. $(A + B)^t = A^t + B^t$;

- **c**. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$

- **d**. $(AB)^t = B^t A^t$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

denominada matriz identidade é tal que

$$AI_n = I_n A = A,$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$.

2.5 Matriz Identidade

Denomina-se matriz identidade, toda matriz quadrada de ordem $n \times n$, em que $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$, ou seja, se I_n é uma matriz identidade de ordem $n \times n$, então

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 6. *Sejam*

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ e \ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As matrizes I_2, I_3 e I_4 são matrizes identidades de ordem 2, 3 e 4.

2.6 Matriz Inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível, se existe uma matriz B, também de ordem n, tal que

$$AB = BA = I_n$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz B é denominada matriz inversa de A.

Se uma matriz não possui inversa, dizemos que ela é não invertível. Se considerarmos o conjunto dos números reais, sabemos que todo número real não nulo possui um inverso. Porém, nem toda matriz possui inversa. Uma das condições para que uma matriz possua a sua inversa é que ela seja uma matriz quadrada. Além disso, se B é a matriz inversa de A, então $AB = BA = I_n$. O fato de uma matriz ser quadrada não garante que ela possua inversa.

2.6.1 Procedimento para Determinar a Inversa de Uma Matriz de ordem 2

Utilizando como exemplo, a partir de uma matriz quadrada de ordem 2, iremos mostrar uma forma de descobrir a matriz inversa.

Exemplo 7. *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Se a matriz A for invertível, então a sua inversa é uma matriz do tipo $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot X = I_2$, ou seja:

$$A \cdot X = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+5c & -b+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando a igualdade de matrizes, obtemos os seguintes sistemas:

$$\begin{cases} a+2c & = & 1 \\ -a+5c & = & 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} b+2d & = & 0 \\ -b+5d & = & 1 \end{cases}.$$

Resolvendo os sistemas, obtemos: $a = \frac{5}{7}$, $b = -\frac{2}{7}$, $c = \frac{1}{7}$ e $d = \frac{1}{7}$.
Agora, basta verificarmos se $X \cdot A = I_2$. De fato,

$$X \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} + (-\frac{2}{7}) \cdot (-1) & \frac{5}{7} \cdot 2 + (-\frac{2}{7}) \cdot 5 \\ \frac{1}{7} + (-\frac{1}{7}) & \frac{2}{7} + \frac{1}{7} \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Logo,

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

2.7 Determinante

Para o desenvolvimento desta seção, iremos utilizar como referência (IEZZI, 2013).

O determinante de uma matriz quadrada é uma função que associa a essa matriz um número real. Indicamos o determinante de uma matriz A por $det(A)$.

Como o objetivo desse trabalho não é fazer um estudo detalhado de determinante, iremos nos limitar em calcular somente os determinantes de matrizes de ordem 1, 2 e 3.

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 1:

Por definição, o determinante de uma matriz quadrada de ordem 1 (possui um único elemento) é o próprio elemento, ou seja, se $A = [a_{ij}]$, então $det(A) = a_{ij}$.

Exemplo 8. *Dada a matriz* $A = [-3]$, *temos:*

$$det(A) = -3$$

Determinante de uma matriz quadrada de ordem 2:

O determinante de uma matriz de ordem 2 é obtido através da diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal os elementos da diagonal secundária, ou seja, sendo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

então o $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Exemplo 9. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, *então,* $det(A) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = 15 - 12 = 3$.

Determinante de uma matriz de ordem 3:

Para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3, utilizamos um dispositivo denominado **regra de Sarrus**. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Pela regra de *Sarrus*, devemos repetir as duas primeiras colunas à direita da matriz dada. Em seguida, multiplicamos os elementos de acordo com as indicações, mantendo os sinais das multiplicações no sentido da diagonal principal e mudando os sinais no sentido da diagonal secundária, como segue no diagrama

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \, . \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Assim, temos: $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$.

Exemplo 10. *Dada a matriz A de ordem 3, aplicaremos a regra de Sarrus para obter o seu determinante.*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{array}{ccccc} -3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 7 & 1 & -2 & 7 & 1 \\ -4 & 2 & 7 & -4 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow det(A) = -3 \cdot 1 \cdot 7 + (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) + 5 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot (-4) - (-3) \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot 7 \cdot 7 = 98.$

2.8 Sistemas lineares

Uma equação linear com n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais.

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares, ou seja, é um conjunto de equações da forma

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Um sistema linear pode ser representado na forma de uma equação matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Uma matriz

$$S = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

será solução do sistema linear se todas as equações do sistema são satisfeitas quando substituímos $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \cdots, x_n = \alpha_n$. Alguns sistemas lineares não possuem soluções e outros, embora sejam possíveis de serem resolvidos, as soluções são indeterminadas. Para o presente trabalho iremos utilizar apenas aqueles sistemas que possuem soluções determinadas.

Exemplo 11. *O sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 2y & = & 1 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right.$$

pode ser escrito na forma

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução é $x = 1/7$ e $y = -1/7$, ou seja, a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1/7 \\ -1/7 \end{bmatrix}$$

é solução do sistema.

3 GAMIFICAÇÃO

3.1 O que é?

A palavra "gamificação" foi gravada por Nick Pelling, (nascido no Reino Unido, programador de computadores e escritor investigativo) em 2002, porém só se tornou popular oito anos depois, por Jane McGonigal, famosa game designer norte-americana durante a realização de uma apresentação de TED (Technology, Entertainment and Design - Tecnologia, Entretenimento e Design), sendo a autora do livro A realidade em jogo: Porque os games nos tornam melhores e como eles podem mudar o mundo, que até hoje pode ser considerado a bíblia da gamificação.

Traduzido do inglês "Gamification", a princípio a gamificação mostra-se como um método para resolver situações problema, favorecendo o crescimento motivacional e empenho de um grupo específico de pessoas, no geral é usar as mecânicas e os sistemas de jogos fora do contexto deles, funcionando como uma espécie de dínamo que faz com que as pessoas se empenhem mais nas tarefas a elas designadas, dedicando bastante tempo e atenção para isso. Despertando assim sentimentos positivos e explorando capacidades, conectadas a recompensas por concluir uma tarefa especifica, podendo ser utilizada em atividades no qual é necessário modificar a forma como o indivíduo reage a situações que o incentivem a criar e/ou se adaptar a um produto, serviço ou método, agilizando o processo de aprendizagem ou de treinamento e deixando mais agradáveis atividades até então entediantes ou recorrentes. Atualmente, os produtores de jogos de várias partes do mundo vêm se dedicando a aplicar o conceito de gamificação nos mais variados campos: saúde, educação, políticas públicas, esportes ou aumentando a produtividade.

Apontando que, Vianna et al. (2013) entendem que gamificação aborda o uso dos mecanismos existentes nos jogos para resolver problemas e motivar e o entusiasmar um público específico. Eles apontam que isso não necessariamente seja estar participando de um jogo, porém somente utilizando dos elementos mais hábeis – mecânicas, dinâmicas e estética – e copiando os mesmos resultados atingidos durante o jogo. Para Zichermann e Cunningham (2011), gamificar usa os graus de entusiasmo da pessoa para encontrar a resposta para uma determinada situação. Vendo o lado emocional, Hamari, Koivisto, Sarsa (2014) entendem a gamificação como uma etapa para melhorar serviços, objetos ou ambientes utilizando os conhecimentos de elementos de jogos e do desempenho das pessoas neles.

Já Zichermann e Cunningham (2011) destacam quatro motivos que servem como impulso para que as pessoas recorram ao jogo: dominar um tema específico; como alívio para o stress; como passatempo; como forma de socializar com amigos. Eles indicam quatro formas de diversão no momento do jogo: competir e buscar a vitória; se imergir e explorar dentro de um universo; na mudança de forma em como o jogador se sente causada pelo jogo; e interação com outros jogadores.

Para, Zichermann e Cunningham (2011), os ambientes interagindo diretamente com as emoções e desejos do jogador são eficazes para engajar o mesmo. Destacando que por meio das mecânicas utilizadas na gamificação adequado unir os interesses dos criadores dos artefatos e objetos às motivações dos usuários. Existem dois elementos contribuindo diretamente para a motivar o indivíduo, as intrínsecas e as extrínsecas (ZICHERMANN; CUNNINGHAM, 2011).

As motivações intrínsecas surgem de dentro do indivíduo e não estão basicamente fundamentadas no mundo externo. Com isso ele se deixa envolver com a situação por anseio próprio, porque ela é interessante, desafiadora, envolvente, prazerosa.

Vianna et al. (2013) destacam que indivíduos motivados desta forma irão buscar novidades e entretenimento, para satisfazer sua curiosidade, oportunamente executando novas habilidades e aprendendo a respeito de algo novo. Para Muntean (2011) essa motivação aparece quando o indivíduo determina se deve fazer ou não uma ação quanto o altruísmo, a cooperação, o sentimento de pertencer, de amor ou de agressão.

já, as motivações extrínsecas se alicerçam no mundo que cerca o indivíduo, de origem externas (ZICHERMANN; CUNNINGHAM, 2011). Segundo Vianna et al. (2013) ela parte do desejo do indivíduo de ser recompensado seja ser reconhecido socialmente, ou prêmios físicos ou não. Para Muntean (2011) ela surge quando é atribuído ao indivíduo o objetivo a ser alcançado: pontos, prêmios, missões, classificações etc.

A principal dificuldade ao conceber ambientes e artifícios gamificados é de descobrir a forma certa de como induzir de forma efetiva essas duas motivações, tanto em conjunto quanto individualmente. No ambiente gamificado unir as motivações intrínseca e extrínseca podem fazer o indivíduo engajar-se por completo na atividade. Porém, Zichermann e Cunningham (2011) denotam que alguns tipos de recompensas extrínsecas acabam por minar as motivações intrínsecas, modificando a perspectiva que motiva o indivíduo. Em caso de falha do indivíduo em atingir determinada meta em um ambiente, gamificado, é de importância elevada que as motivações intrínsecas permaneçam basicamente inalteradas, para evitar que ele abandone esse ambiente.

Assim para Busarello (2016, p. 18) "gamification é um sistema utilizado para a resolução de problemas através da elevação e manutenção dos níveis de engajamento por meio de estímulos à motivação intrínseca do indivíduo. Utiliza cenários lúdicos para simulação e exploração de fenômenos com objetivos extrínsecos, apoiados em elementos utilizados e criados em jogos."

Onde para Busarello (2016, p. 19): Sistema - é um conjunto organizado de elementos. Todas as configurações possíveis que fazem parte do conceito de gamificação: práticas, ferramentas, regras etc.

Resolução de problemas – métodos sistematizados utilizados para achar a solução de uma ou várias questões. Sendo as questões ou problemas uma manifestação que precise de um trabalho cognitivo para direção de ações.

Estímulos - causadores da ideia inicial, desencadeando um estopim afetando todo o sistema.

Motivação intrínseca - é a vontade interna ao indivíduo, o que o motiva a participar, sua motivação.

Cenários lúdicos – sendo este o local no qual ocorre a interação do indivíduo com o ambiente/objeto gamificado não podendo ser retirado da experiência. O cenário sendo a parte da irrealidade nas práticas gamificadas viabiliza uma experimentação sem medo.

Fenômenos – refere-se a tudo que pode ser delineado e analisado cientificamente, e que é acessível ao ser humano: objetos, ideias, sentimentos, relações, conhecimento etc.

Objetivos extrínsecos - a gamificação utiliza uma série de estruturas em ambientes controlados, para que os indivíduos possam descobrir as soluções para problemas específicos. Assim, ela emprega cenários lúdico e controlados na resolução de problemas que estão fora destes, ou seja, um objetivo externo ao próprio ambiente/objeto gamificado.

Elementos – são as partes do todo, de algo maior.

Não é possível desenvolver novos sistemas e invenções sem levar em conta a sociedade atual e requisito tecnológico, visto que as pessoas estão cada vez mais interessadas em jogos, com que faz, que a interação com os mais variados tipos de grupos sejam alicerçados em bases de recompensa, reforço e feedbacks, junta a mecanismos e sistemas que favoreçam a participação do sujeito, assim a simples ação de jogar, proporciona prazer, ao passo em que melhoram as habilidades cognitivas ao estimular o foco e a capacidade de reter um grande volume informações.

Em se tratando de jogos, eles têm a capacidade situações lúdicas e de ficção na forma de narrativas, imagens e sons. As formas narrativas dentro dos jogos fazem a pessoas experimentarem situações de ficção controladas que podem ser explanados tendo como base os jogos do nosso dia a dia, como o futebol, xadrez, baralhos, brincadeiras de se esconder, pique-pega, jogos eletrônicos no geral etc. Nesses exemplos sempre há a presença regras e objetivos bem definidos nos quais cada jogador pode fundamentar suas ações. Assim o ato de jogar pode ser medido e os resultados determinados, como perder, ganhar, empatar, superar etc. para a mente humana essas experiências, estimulam a produção de dopamina que é o neurotransmissor que afeta diretamente nossas emoções, aprendizado, humor e atenção, atuando no chamado sistema de recompensa, e também causando a sensação de prazer. nos jogos os participantes podem vencer desafios e perder, porém, esta última situação é temporária, sempre existe a possibilidade para que a tarefa seja refeita, buscando a vitória. Servindo como fonte de motivação contínua para melhorar e descobrir formas novas de soluções para o mesmo problema.

E a Gamificação desses elementos dos jogos para utilizar em situações que não essencialmente ligados aos jogos, promovendo e estimulando a forma de agir do indivíduo, causando um maior interesse e o aprendizado. Busarello (2016, p. 26) afirma que:

> "Gamification parte do princípio de se pensar e agir como em um jogo, entretanto em um contexto fora do jogo. É formada por quatro princípios que têm base nos jogos, nas mecânicas, nas estéticas e no pensamento como em jogos. Porém, com o foco no engajamento de pessoas, na motivação de ações, na promoção do aprendizado e na solução de problemas"

Temos então os quatro princípios:

1. Nos jogos: Criar ambientes/sistemas no qual o indivíduo queira usar sua cognição, tempo e energia buscando o engajamento com desafios abstratos, que possuem regras, que sejam interativos e no qual existam*feedbacks* gerando respostas quantitativas, construindo assim reações de caráter emotivo;

2. nas mecânicas: Conjunto de regras essenciais para o ensino gamificado. Elas não são o suficiente para engajar o indivíduo, mas influenciam nesse objetivo;

3. nas estéticas: a impressão que causada ao participar, sendo a forma de ver e sentir de como a gamificação é entendida pelo indivíduo;

4. o pensamento como em um jogo: esta é a parte mais importante do processo gamificado. é o ato de transformar algo entediante ou monótono em algo que venha motivar, aplicando elementos relacionados a competição, exploração, cooperação e narrativa. Sendo um gerenciador de situações fictícias criando uma compreensão utilizável mundo físico.

Gamificar não se trata apenas de usar os mecanismos dos jogos, e sim de usar para resolver problemas, motivar e engajar o indivíduo. Não é basicamente participar de um jogo, é utilizar seus elementos, (mecânicas, dinâmicas e estética), reproduzindo seus benefícios. vale destacar, que dentre os jogos, existem aqueles que são chamados de jogos sérios, enquanto a gamificação utiliza elementos dos jogos forma prevenida, com o intuito de encontrar soluções para determinadas situações enfatizando o aprendizado. Os jogos sérios são criados utilizando se todos os elementos dos jogos com o objetivo de educar o indivíduo em um assunto específico usando pontuação e prêmios.

3.2 INSERÇÃO DA GAMIFICAÇÃO O PROCESSO ENSINO APRENDIZAGEM

Crianças e adolescentes desta geração já nasceram inseridos na cultura de uso contínuo de tecnologias digitais, redes sociais, jogos*online* , coisas que puxam sua atenção constantemente, tendo isso em mente delegar atenção em aulas que duram pelo menos 50 minutos, e que podem durar horas pode ser uma situação entediante. É necessário produzir mudanças na maneira que os estudantes enxergam o processo de ensino e se tornem "engajados, ativamente envolvidos e cientes de como o conteúdo aprendido se encaixa em suas necessidades diárias" (KAPP, 2012). A ideia de se usar a gamificação aparece como estratégia didática e pedagógica, para induzir ao engajamento dos estudantes *fazendo*com que as disciplinas ministradas, assim como o aprendizado, tornem-se interessantes e apreciáveis.

Desenvolver o intelecto só é possível se o estudante utiliza, da forma como o pensamento é construído durante a sua interação com o ambiente que o cerca, Segundo Piaget (1999) citado por Gláuber Guilherme Signori e Julio Cesar Ferro de Guimarães:

> "aprendizagem pode ser caracterizada como um processo de desenvolvimento intelectual, que ocorre por meio das estruturas de pensamento do sujeito e a sua interação com determinado meio."

Tendo esse ponto de partida identifica-se três formas de aprendizagem, segundo Moreira (1999) citado por Gláuber Guilherme Signori e Julio Cesar Ferro de Guimarães:

> "à cognitiva, que resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende; a afetiva, resultado de sinais internos ao indivíduo e é identificada com experiências de dualidade como satisfação ou descontentamento, alegria ou ansiedade; e a psicomotora, que envolve respostas musculares adquiridas por meio de treino e prática."

De acordo com Ruben (1999) citado por Gláuber Guilherme Signori e Julio Cesar Ferro de Guimarães:

> “as simulações, os jogos e outras formas de aprendizagem baseada em experiências representavam uma alternativa atraente e inovadora para ministrar aulas tradicionais, devido a estas razões causam entusiasmos e euforia em professores e estudantes. Baseado na experiência, ou experimental, métodos de ensino tem potencial para tratar muitas das limitações do paradigma tradicional. Estes métodos de ensino baseados em experiências contemplam abordagens mais complexas e diversificadas para os processos e os resultados da aprendizagem; permitindo a interatividade; promovendo a colaboração e a aprendizagem entre estudantes; permitindo abordar questões cognitivas, bem como questões de aprendizagem afetivas; e, talvez o mais importante, promover a aprendizagem ativa (RUBEN, 1999).”

Em um contexto de aprendizagem é possível utilizar a *gamification*favorece que indivíduos possam apreender e realizar tarefas, antes tediosas, de uma forma nova e motivadora. tem um grande potencial em processos educacionais onde encontram-se, com frequência, alunos desmotivados nas atividades de aprendizagem. neste sentido, pode induzir a motivação nessas rotinas.

Para (SOUZA; LOPES; SILVA, 2013) ao unir as propriedades da gamificação “inserção dinâmicas, desafios, recompensas, competição e interatividade” acaba se tornando como opção atraente para comunicar um produto ou serviço.

A gamificação como proposta de método de ensino abre um leque grande de rotas para a aprendizagem, focado em começar com objetivos pequenos até que o maior seja atingido mantendo sempre o foco primário em mente, tudo embasado em habilidades, atitudes e demais caracteristicas do estudante.

Fazendo um comparativo entre a *gamificação e* a teoria construtivista, temos que para a teoria construtivista o processo ensino aprendizagem várias de pessoa para pessoa, visto que o conhecimento se cria durante o processo. Enquanto para a gamificação, esse processo está em dois objetos diferentes:

o primeiro parte do ponto de vista de cada indivíduo para entender os avanços enquanto propõe uma melhor rota para adquirir o conhecimento alicerçada no que é necessário e nos atributos do estudante;

o segundo classifica os *feedbacks* e as atuações das ações do indivíduo baseada na comunidade, estabelecendo uma norma única com soluções gerais, simples e esquemáticos atendendo a diferentes indivíduos no grupo. Possuindo grande responsabilidade no aumento da motivação e do engajamento na etapa de produção de conhecimento.

Para a *gamificação* o conhecimento é exterior e parcialmente comum aos indivíduos, e estes, são os causadores de maior importância durante o processo de aprendizagem, visto que o caminho escolhido para adquirir o conhecimento surge deles. Assim a criação de ambientes interativos necessita serem embasados nas características dos indivíduos prevendo suas ações, desta forma amentando os níveis de engajamento durante o processo de ensino, e modificando motivação do indivíduo no ambiente.

Vale destacar que a *gamificação* utilizada em programas para computador e aplicativos em smartphone e/ou possíveis novas tecnologias, pode ser utilizada em uma infinidade de situações e ambientes partindo de meios de comunicação social. Porem seu cerne não está na tecnologia e sim nos mais diversificados ambientes que promovam uma infinidade de rotas de aprendizagem e sistemáticas que se baseiam em decisão e recompensa para com os indivíduos, com o intuito de elevar fatores motivacionais e que possam causar um aumento no engajamento no processo de ensino. Visto que a *gamificação já* está introduzida com êxito no meio comercial de forma digital, faz com que, fazendo com que seu uso no meio *online* seja reproduzido no meio educacional.

3.3 PORQUE GAMIFICAR O ENSINO DE MATRIZES?

Segundo o PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), quando se trata de ensinar matemática “há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno.”. Ao passo que a utilização de “Recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão. . . . . . ”

A gamificação como método ensino de matemática objetiva modificar métodos mecânicos, desprovidos de significado a traves de uma participação ativa dos estudantes, utilizando elementos narrativos proporcionando circunstâncias para uma análise e reflexão. Segundo o PCN:

> “No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.”

Os PCN apontam como recursos importantes as ferramentas didáticas para o ensino de matemática: a resolução de problemas, a história da matemática, as tecnologias da informação e os jogos. A gamificação tem a capacidade de unir esses elementos. Percebe-se que no recurso "os jogos" pode estar inserida o conceito de gamificação, no qual as tecnologias da informação comumente aparecem nessas atividades. Deve-se notar que a gamificação pode ser inserida sem recursos tecnológicos digitais, porém o uso delas tem um poder de capturar maior da atenção dos estudantes. Portanto a medida que essas tecnologias são inseridas no ambiente da sala de aula, acabam despertando nos estudantes uma motivação intrínseca, junto com a curiosidade, surpresa e alegria decorrentes da participação de uma aula que foge ao modelo tradicional modelo tradicional, se tornando o início indispensável a introdução de uma atividade gamificada que trará o engajamento na atividade por meio da narrativa que envolva o aluno fazendo ele avançar dentro jogo. Por fim a resolução de problemas como método para o ensino aprendizagem pode propiciar aos estudantes uma maior autonomia, estimulando o espirito cooperativo e o debate. Resolver os desafios propostos em um jogo ou em uma gamificação, os estudantes aprendem fazendo com liberdade para errar, promovendo espontaneamente o processo investigativo e a descoberta, criando uma aula cheia de significado.

3.4 Gamificação no ensino de Matrizes

Historicamente as matrizes remontam períodos antigos da humanidade. No século II a.C. o texto "Nove Capítulos sobre a arte Matemática", durante Dinastia Han na china, continham o primeiro exemplo do método de matriz. E desde então durante seu desenvolvimento histórico, ela tem sido usada como instrumento matemático para resolução sistemas lineares, para delinear a estrutura atômica na mecânica quântica, para a produção de modelos matemáticos utilizando computadores etc. Afirma Sanches (2002, p.7) que:

> "A álgebra das matrizes tem importância significativa para várias ciências e encontra, cada vez mais, aplicações em diversos setores como a Economia, a Engenharia e Tecnologia, etc. Se não ocorrer uma aprendizagem significativa e relevante dos conceitos de matrizes, os estudantes poderão apresentar dificuldades, em níveis mais avançados, para compreender e aplicar outros conceitos relacionados, tais como conceitos de programação, computação gráfica, custos de produção, teoria dos grafos, circuitos elétricos, modelos econômicos lineares, entre centenas de outros".

Porém no processo ensino aprendizagem ela é abordada muitas vezes de forma genérica, utilizando-se unicamente a linguagem da matemática, sendo muito raro encontrar situações contextualizadas ao se ensinar matrizes, deixando a cargo de exercícios que se repetem várias vezes e contribuindo para que nossos estudantes apresentem dificuldade em entender e assimilar esse conteúdo na Matemática, tornando-se necessário a utilização de uma metodologia de ensino que abrange situações autênticas de forma investigativa.

Tendo isto em mente, esta proposta de atividade gamificada tem como objetivo contextualizar de forma lúdica o ato de se ensinar matrizes desde o seu princípio de pela lei de formação até o cálculo de determinantes e aplicações na área de criptografia.

Atualmente vivemos na era da informação digital, e tudo que fazemos de alguma forma necessita de proteção para que não haja roubo de dados no caminho entre quem envia e quem recebe a mensagem: podendo ser e-mails, informações bancárias, compras online, conversas em aplicativos de mensagens etc., por isso o conceito de criptografia está tão presente no nosso dia a dia. De origem grega sendo a reunião das palavras“Kryptós”(oculto) e “Gráphein”(escrever), a criptografia nada mais é que uma forma de esconder algum tipo de informação, semanticamente ela se refere a uma sequência de ações e regras que Visam ocultar uma informação, exceto a quem recebe, ela não impede que a mensagem chegue as mãos de outras pessoas, mas evita que elas consigam entender seu conteúdo, assim através de um código que somente o emissor e o receptor possuem é possível enviar uma mensagem codificada e entendê-la através de uma sequência de operações específicas.

Assim é possível ensinar um pouco de criptografia básica utilizando os conceitos de matrizes, determinantes e um pouco de sistemas lineares. Porém a proposta é gamificar o ensino de matrizes e determinantes de forma a engajar o estudante na atividade.

3.5 Atividade Gamificada: Decodificando o Sistema

A atividade consiste em dividir a turma em 6 grupos e entregar mensagens criptografadas nos quais só será possível descobrir o que está escrito quando chegar na última missão. A atividade consiste em passar por 9 missões construídas de forma que só será possível ir para a missão seguinte depois de resolver e conseguir os dados necessários na missão anterior, cujo nível de dificuldade vai aumentando, contemplando desde o conhecimento mais básico de matrizes até a utilização do conceito de determinantes e um pouco de sistemas lineares de modo a elevar o nível cognitivo do estudante a cada etapa. O sistema de pontuação é baseado em tempo, quanto mais rápido maior pontuação do grupo, em caso de dúvida o grupo pode recorrer a dicas em troca de adicionar alguns segundos na sua pontuação, ao final a equipe vencedora é aquela que passar por todos os desafios no menor tempo possível. Essa atividade pode durar o tempo que for necessário para que a turma atinja o objetivo. Será dado o feedback individual na participação das atividades e o feedback de grupo na forma de pontos na disciplina. O estudante é livre para cometer erros, só é possível avançar ao encontrar a resposta correta em cada etapa.

O Prólogo

Será o momento de ambientação dos estudantes no roteiro para que possam entender e imergir dentro do cenário.

Cenário lúdico: os estudantes se tornarão agentes do serviço de inteligência Brasileiro, que atualmente não possuem acesso à tecnologia de ponta e deverão tentar decodificar uma mensagem à moda antiga (papel, calculadora e caneta)

Missão 1: dados iniciais

"Reescrever uma tabela através de seu código fonte."

$$A = (a_{\text{ij}})_{2x2} \quad \text{em que} \quad a_{\text{ij}} = \begin{cases} i^2 - 5, \; se \; i = j \\ i - j^2, \; se \; i \neq j \end{cases} \tag{3.1}$$

Utilizar o conhecimento básico da construção de para construir a matriz A tendo somente sua lei de formação.

Solução:

$$a_{11} = 1^2 - 5 = -4$$

$$a_{12} = 1 - 2^2 = -3$$

$$a_{21} = 2 - 1^2 = 1$$

$$a_{22} = 2^2 - 5 = -1$$

Gerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

"Os agentes de campo conseguiram informações que levam a existência de outras duas matrizes essenciais para decodificar"

Missão 2: Isso é uma igualdade?

$$B = \begin{bmatrix} x + y & x^3 \\ 2w & ;5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 8 \\ w + 2 & y \end{bmatrix}$$

Aplicar do conceito de igualdade de matrizes

Solução:

$$5 = y$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$x + y = z \Rightarrow 2 + 5 = z \Rightarrow \ 7 = z$$

$$2w = w + 2 \Rightarrow w = 2$$

Portanto:

$$B = \begin{bmatrix} 7 & ;8 \\ 4 & ;5 \end{bmatrix}$$

Missão 3: Isso é muito fácil!

"Esse veio com o seguinte texto: não há muito o que dizer, porém devemos transpor nossas ideias no final"

$$C^t = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Aplicar operações com matrizes e matriz transposta

Solução:

$$C^t = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

"Nossos agentes interceptaram três mensagens sem nexo"

Missão 4: Mensagem subliminar!?

"Mensagem 1: Descrever é Ampliar conhecimento adicionando Beleza e subtraindo Conflitos!"

Os estudantes devem chegar à relação: D = A + B – C

Utilizar operações com matrizes

Solução:

$$D = A + B - C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+7-4 & -3+8-3 \\ 1+4-6 & -1+5-3 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Missão 5: subliminar novamente?

Mensagem 2: É determinante?

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

Calcular o determinante.

Solução:

$$\det(E) = (1*1*2+3*3*2+1*1*1) - (1*1*2+3*1*2+1*3*1) \Longrightarrow$$

$$\det(E) = (2+18+1) - (2+6+3) \Longrightarrow$$

$$\det(E) = 21 - 11 = 10$$

Missão 6: uma simples função...

“Mensagem 3: F = D*det(E)/5”

Multiplicar matriz por número

Solução:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * \frac{10}{5} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} * 2$$

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

“Em um último esforço conjunto nossos agentes de campo capturaram a matriz “chave para criptografar” e a tabela de “correspondência simbólica (pedra de roseta)”

correspondência simbólica:

“Segundo nossos agentes só é possível criptografar textos com 2 linhas”

Missão 7: pedra de roseta 1

“chave para criptografar: um produto G = F*H com

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Multiplicar matriz por matriz

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	0	

Solução:

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)*(-1)+4*1 & (-2)*4+4*3 \\ (-2)*(-1)+2*1 & (-2)*4+2*3 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2+4 & -8+12 \\ 2+2 & -8+6 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

$$G = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Missão 8: pedra de roseta 2

“Agora cabe ao serviço de inteligência encontrar a chave para remover a criptografia”

Encontrar a matriz inversa de G

G*J = I em que J é a chave para remover a criptografia e I é uma matriz identidade de mesma ordem que G

Utilizar sistemas lineares resolução pelo método da adição.

Solução:

$$G * J = I_2 \Longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 6a+4c & 6b+4d \\ 4a-2c & 4b-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} 6a+4c &= 1 \\ 4a-2c &= 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Multiplicando a segunda equação por 2

$$\begin{aligned} 6a+4c &= 1 \\ 8a-4c &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

somando a primeira com a segunda

$14a + 0 = 1 \implies a = \frac{1}{14}$ substituindo na segunda

$$4a - 2c = 0 \implies 4 * \frac{1}{14} - 2c = 0 \implies \frac{2}{7} - 2c = 0 \implies -2c = -\frac{2}{7} \implies c = \frac{1}{7}$$

Analogamente temos:

$$\begin{cases} 6b + 4d = 0 \\ 4b - 2d = 1 \end{cases} \implies b = \frac{1}{7} \ e \ d = -\frac{3}{14}$$

Portanto a chave para remover a criptografia será:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$$

Missão 9: Remover a criptografia da mensagem

Multiplicar a chave J pela matriz criptografada

Solução:

Grupo 1

Codificada

42	19 6	13 8	17 2	90	20	20 2	15 8
28	28	78	26	60	-10	46	12

Decodificada

7	1 8	2 1	1 6	1 5	0	2 1	1 3
0	2 2	3	1 9	0	5	1 9	2 0

Mensagem

G	R	U	P	O	-	U	M
-	V	C	S	-	E	S	T

Codificada

78	94	8	44	86	76	96	6
-3 2	58	-4	6	-8	-3 8	64	4

Decodificada

1	1 5	0	4	5	0	1 6	1
1 8	1	2	5	1 4	1 9	0	0

Mensagem

A	O	-	D	E	-	P	A
R	A	B	E	N	S	-	-

Mensagem: GRUPO-UM-VCS-ESTAO-DE-PARABENS--

Grupo 2

Codificada

78	18 4	12 6	13 2	16 6	80	84	90
10	34	84	46	22	-40	-14	60

Decodificada

7	1 8	2 1	1 6	1 5	0	4	1 5
9	1 9	0	9	1 9	2 0	1 5	0

Mensagem

G	R	U	P	O	-	D	O
I	S	-	I	S	T	O	-

Codificada

34	24	16 2	13 8	0	84	74	114
18	-12	66	22	0	-14	-2	76

Decodificada

5	0	2 1	1 3	0	4	5	1 9
1	6	9	1 5	0	1 5	11	0

Mensagem

E	-	U	M	-	D	E	S
A	F	I	O	-	O	K	-

Mensagem: GRUPO-DOIS-ISTO-E-UM-DESAFIO-OK-

Grupo 3

Codificada

62	18 4	12 6	10 8	16 2	36	18 4	18 8
18	34	84	58	24	-18	48	32

Decodificada

7	1 8	2 1	1 6	1 5	0	2 0	1 8
5	1 9	0	3	1 8	9	1 6	2 0

Mensagem

G	R	U	P	O	-	T	R
E	S	-	C	R	I	P	T

Codificada

110	42	12 4	26	14 0	54	6	0
50	28	64	-6	-28	36	4	0

Decodificada

1 5	7	1 8	1	6	9	1	0
5	0	4	5	2 6	0	0	0

Mensagem

O	G	R	A	F	I	A	-
E	-	D	E	Z	-	-	-

Mensagem: GRUPO-TRES-CRIPTOGRAFIA-E-DEZ---

Grupo 4

Codificada	Decodificada	Mensagem
46 188 198 156 90 52 106 206 26 32 48 34 60 -26 66 44	7 18 21 16 15 0 17 21 1 20 18 15 0 13 1 20	G R U P O - Q U A T R O - M A T
78 138 34 156 66 22 6 0 -4 22 -10 62 30 10 4 0	5 13 1 20 9 3 1 0 12 15 7 9 3 1 0 0	E M A T I C A - L O G I C A - -

Mensagem: GRUPO-QUATRO-MATEMATICA-LOGICA--

Grupo 5

Codificada	Decodificada	Mensagem
98 120 186 96 118 4 90 126 0 66 54 64 46 -2 -24 0	7 18 21 16 15 0 3 9 14 3 15 0 7 1 18 18	G R U P O - C I N C O - G A R R
78 52 66 56 28 42 124 90 -32 -26 2 -28 14 14 78 -10	1 0 5 0 4 5 20 5 18 13 9 14 1 3 1 15	A - E - D E T E R M I N A C A O

Mensagem: GRUPO-CINCO-GARRA-E-DETERMINACAO

Grupo 6

Codificada	Decodificada	Mensagem
78 184 126 184 126 80 174 102 10 34 84 20 42 -40 46 -16	7 18 21 16 15 0 19 5 9 19 0 22 9 20 15 18	G R U P O - S E I S - V I T O R
58 6 52 34 36 160 6 24 34 4 -26 18 -18 18 4 16	9 1 0 5 0 14 1 4 1 0 13 1 9 19 0 0	I A - E - N A D A - M A I S - -

Mensagem: GRUPO-SEIS-VITORIA-E-NADA-MAIS--

4 Considerações finais

Ao Utilizar uma nova metodologia de ensino o professor tem por objetivo colocar os estudantes em uma função mais atuante durante o processo ensino aprendizagem, a atividade gamificada serve como direcionamento para engajar os estudantes, visto que os mesmos já tem os games inseridos na suas vidas desde cedo, e usar esses elementos que estão nos jogos na sala de aula faz com que o professor dinamize suas aulas trazendo situações desafiadoras e fazendo com que os estudantes da nova geração se interessem mais pelo conteúdo.

A atividade pode ocorrer com auxílio somente de materiais básicos como caderno, lápis, borracha e calculadora como através do uso de plataformas gamificadas como o kahoot entre outros. o objetivo da atividade é fazer com que o aluno se sinta ambientado na narrativa de fazer parte de uma equipe de inteligência do governo de forma fictícia e que ele se sinta livre para cometer erros sem que haja algum tipo de punição.

O professor ao interagir com o aluno entra no papel de Narrador do fato e também como agente externo que entrega novas informações a cada etapa, explicando o ocorrido e também como fonte de ajuda em caso de dúvida, o importante é fazer com que o estudante não perca o foco durante a atividade gamificada.

Ao final do processo o professor pode perceber se os estudantes dominaram os conteúdos propostos: matrizes, determinantes, um pouco de sistemas lineares e criptografia. portanto a gamificação desponta como metodologia que pode proporcionar um ambiente dinâmico de alta criatividade possibilitando trabalhar determinado conteúdo das mais diferentes formas possíveis, objetivando o engajamento dos estudantes na participação das atividades, sendo que esta pode ser usada com as mais diferentes abordagens narrativas.

Referencias

BUSARELLO, Raul Inácio, FADEL, Luciane Maria, ULBRICHT, Vania Ribas, BIEGING, Patricia. Construction Parameters for Hypermedia Comics to Learning Based on the Gamification Concept In: *International Conference on Design and Emotion* (9th : 2014 : Colombia), 2014, Bogotá. The colors of care : 9th International Conference on Design & Emotion. Bogotá - Colômbia: Ediciones Uniandes, 2014. v.1. p.616 – 622.

BUSARELLO, Raul Inácio. **Gamification: princípios e estratégias** . [*S. l.* : *s. n.*], 2016.

CAMARGO, Fausto. A sala de aula inovadora [recurso eletrônico]: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. *In* : CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. **A sala de aula inovadora [recurso eletrônico]: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo** . [*S. l.* : *s. n.*], 2018.

CRIPTOGRAFIA: Origem e História. [*S. l.*], 16 abr. 2020. Acesso em: 9 maio 2022.

HAMARI, J., KOIVISTO, J., & SARSA, H. (2014). Does Gamification Work? – A Literature Review of Empirical Studies on Gamification. **In proceedings of the 47th Hawaii International Conference on System Sciences** , Hawaii, USA, January 6-9, 2014.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.. Fundamentos de matemática elementar, 4 : sequências, matrizes, determinantes e sistemas. [S. l.:s. n.], 2013.

KAPP, Karl. **The Gamification of Learning and Instruction** : Game-based Methods and Strategies for Training and Education. Pfeiffer, 2012.

MCGONIGAL, Jane. **Reality Is Broken** : Why Games Make Us Better and How They Can Change the World. Nova York, Penguin Press, Ed. 1. 2011.

MUNTEAN, Cristina Ioana. Raising engagement in e-learning through gamification. **The 6th International Conference on Virtual Learning ICVL** . 2011

NICK Pelling. [*S. l.*], 15 fev. 2022. Acesso em: 9 maio 2022.

PARÂMETROS curriculares nacionais : matemática. [*S. l.* : *s. n.*], 1997. Acesso em: 9 maio 2022.

SANCHES, M. H. F. Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes . UNICAMP: Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 2002.

SANTOS, Helivania Sardinha dos. **DOPAMINA** . [*S. l.*], Acesso: 9 maio 2022.

SIGNORI, Gláuber; GUIMARÃES, Julio Cesar Ferro de. **GAMIFICAÇÃO COMO MÉTODO DE ENSINO INOVADOR** . [*S. l.*], 2016. Acesso em: 9 maio 2022.

SOUZA, M. V. L. de; LOPES, E. S; DA SILVA, L. L. Aprendizagem significativa na relação professor- -aluno. **Revista de Ciências Humanas** , Viçosa, v. 13, n. 2, p. 407-420, jul./dez. 2013.

VIANNA, Ysmar; VIANNA, Maurício; MEDINA, Bruno; TANAKA, Samara.**Gamification** , Inc.: como reinventar empresas a partir de jogos.**MJV Press** : Rio de Janeiro, 2013.

ZICHERMANN, Gabe; CUNNINGHAM, Christopher. **Gamification by Design** : Implementing Game Mechanics in Web and Mobile Apps. Sebastopol, CA: O'Reilly Media, Inc. 2011.