



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG



PROFMAT

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

**CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁREA E
VOLUME NO ENSINO BÁSICO: VÍDEOS DO
COTIDIANO, DEDUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES**

NATANAEL CARVALHO SOUSA

São Luís - MA
2019

NATANAEL CARVALHO SOUSA

CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁREA E
VOLUME NO ENSINO BÁSICO: VÍDEOS DO
COTIDIANO, DEDUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao departamento de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

Orientador: Prof. Dr. João Coelho Silva Filho.

São Luís - MA
2019

Sousa, Natanael Carvalho.

Contribuições para o ensino de área e volume no ensino básico:
Vídeo do cotidiano, deduções e demonstrações / Natanael
Carvalho Sousa. São Luís, 2019.

127 p.

Dissertação (Mestrado) - Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, Universidade Estadual do Maranhão,
2019.

Orientador: Prof. Dr. João Coelho Silva Filho.

1. Estudo de área e volume. 2. Produção de vídeos.
3. Cotidiano e matemática. 4. Sequência. I. Título.

CDU 51:37.02

NATANAEL CARVALHO SOUSA

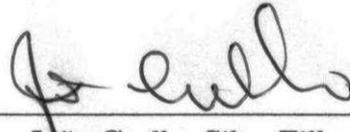
CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DE ÁREA E VOLUME NO ENSINO BÁSICO: VÍDEOS DO COTIDIANO, DEDUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao departamento de Matemática como requisito parcial para obtenção do título de mestre.

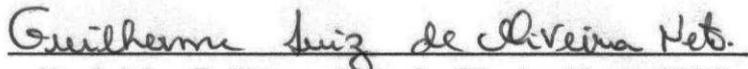
Orientador: Prof. Dr. João Coelho Silva Filho.

Aprovada em: 05 de abril de 2019.

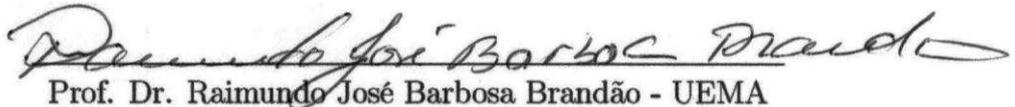
Banca Examinadora:



Prof. Dr. João Coelho Silva Filho - UEMA
Orientador



Prof. Me. Guilherme Luiz de Oliveira Neto - IFPI



Prof. Dr. Raimundo José Barbosa Brandão - UEMA

São Luís - MA
2019

Dedico este trabalho à minha querida esposa Alceane, e às minhas filhas Nicole, Noemi, Náthaly e Yane, que são minhas maiores fontes de motivação e inspiração em todos os meus desafios e decisões.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela vida e oportunidades que tem me proporcionado.

À minha esposa Alceane Carvalho, a minha filha Nicole, pelo apoio e compreensão mesmo quando tive que ficar longe.

À minha mãe D. Carmelita, meu pai Sr. João, às minhas irmãs Audileia e Rosângela, a meus tios Elizeu e Luiz e a minha prima Gardênia, por sempre se fazerem presente em minha vida.

Ao meu orientador, professor João Coelho, pelo forma que se dedicou e me ajudou orientando-me nesse trabalho.

Aos amigos de Profmat, que dividiram comigo os momentos de tristeza e de alegria, em especial, Adriano, Waldyr, Wesley, Izanilson, José Hilton e José Haito.

Ao professor Jorge, gestor da minha escola que apoiou-me em tudo para execução do meu projeto na escola.

Aos meus alunos que foram agentes neste trabalho e contribuíram grandemente pra que tivéssemos bons resultados.

À CAPES, que tem acreditado nesse projeto e tem ajudado financeiramente a muitos professores nessa empreitada no Mestrado PROFMAT.

Enfim, a todos que de alguma forma são responsáveis e colaboradores no melhoramento da educação no Estado e no Brasil.

RESUMO

O presente trabalho consiste na aplicação de uma sequência didática que aborda área e volume dos principais polígonos e poliedros. É apresentada uma abordagem alternativa que integra cotidiano e a temática criando uma sequência didática que envolve os alunos na produção de vídeos em situações do cotidiano, em deduções e demonstrações de proposições que modelam situações e resolvem problemas de geometria aplicada. O trabalho foi realizado em uma turma de segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual no município de Brejo, Maranhão, destacando o interesse dos alunos e assimilação dos conteúdos.

Palavras Chave: Estudo de Área e Volume. Produção de Vídeos. Cotidiano e Matemática. Sequência Didática.

ABSTRACT

The present work consists in the application of a didactic sequence that addresses the area and volume of the main polygons and polyhedra. It is an alternative approach that integrates the daily life and thematic, creating a didactic sequence that involves students in the production of videos in everyday situations, in deductions and in demonstration of propositions that model the situations and solve applied geometry problems. The work was carried out in a second year class of high school, in Brejo county, Maranhão, highlighting the students' interest in the assimilation of contents.

Keywords: Area and Volume Study. Production of videos. Daily life and Mathematics. Teaching Sequence.

Lista de Figuras

1	Quadrado de Lado n	30
2	Retângulo de Lados m, n Particionado	31
3	Quadrado de Lado $a + b$	33
4	Paralelogramo de Base b e Altura h	34
5	Triângulo ABC de Base \overline{AB} e Altura \overline{CH}	35
6	Paralelogramo Construído a Partir do Triângulo ABC de Base \overline{AB} e Altura \overline{CH}	35
7	Triângulo Equilátero de Lado l	36
8	Triângulo ABC	38
9	Triângulo ABC e Altura $\overline{AH} = h$	38
10	Triângulo Genérico	39
11	Trapézio $ABCD$	42
12	Trapézio $ABCD$ com a Diagonal	42
13	Losango $ABCD$ com as Diagonais	43
14	Polígonos Regulares	44
15	Polígonos Regulares	45
16	Cubo Unitário	48
17	Cubos	48
18	Prisma Reto Retângulo	49
19	Prismas	50
20	Prisma e Cilindro	50
21	Pirâmides com Mesma Base e Mesma Altura	51
22	Prisma Triangular $ABCDEF$	52
23	Decomposição do Prisma $ABCDEF$ em Três Pirâmides	52
24	Cone e Pirâmide	53
25	Determinação de Tronco de Pirâmide	54
26	Determinação de Tronco de Cone	57
27	Tronco de Cone	57
28	Triângulo Formado por uma Secção Vertical no Cone	58
29	Determinação do Volume da Esfera	59
30	Vidro, Pinceis e Folha Quadriculada	66
31	Quadro Quadrado de $1m$ de Lado	67
32	Piscina de $1,65m$ por $3,00m$	67
33	Muro Medindo $7.0m$ por $2.25m$	68
34	Sala das Crianças	68
35	Deduzindo a Área de Quadrado	69

36	Deduzindo a Área de Retângulo	70
37	Terreno em Formato de um Paralelogramo	71
38	Terreno em Formato de um Triângulo	72
39	Material Usado para Dedução	73
40	Deduzindo a Área de um Paralelogramo I	73
41	Deduzindo a Área de um Paralelogramo II	74
42	Deduzindo a Área de um Triângulo de Base b e Altura h I	74
43	Deduzindo a Área de um Triângulo de Base b e Altura h II	75
44	Banheiro da Escola	76
45	Bandeira do Brasil	76
46	Materiais para Dedução	77
47	Deduzindo a Fórmula de Área do Trapézio I	78
48	Deduzindo a Fórmula de Área do Trapézio II	78
49	Deduzindo a Fórmula de Área do Losango I	79
50	Deduzindo a Fórmula de Área do Losango II	80
51	Deduzindo a Fórmula de Área do Losango III	80
52	Deduzindo a Fórmula de Área do Losango IV	81
53	Deduzindo a Fórmula de Área do Losango V	81
54	Deduzindo a Fórmula de Área do Losango VI	82
55	Guarda-Sol	83
56	Forno de Farinha	83
57	Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular I	84
58	Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular II	85
59	Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular III	86
60	Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular IV	86
61	Comparação entre Apótema e Raio	87
62	Possíveis Objetos que os Alunos Podem Encontrar	90
63	Material Dourado	90
64	Material para Deduzir Volume da Pirâmide e Cone	91
65	Material para Deduzir Volume da Esfera	92
66	Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Produção de Vídeo	93
67	Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Demonstrações	94
68	Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Metodologia de Ensino	95

Lista de Tabelas

1	Diagnóstico do Conhecimento dos Alunos sobre Polígonos	62
2	Alunos que Relacionaram Pelo Menos uma Coisa a um Polígono	62
3	Número de Alunos com Nota Máxima ou Nota Inferior a 6 por Turma	95

Sumário

INTRODUÇÃO	14
2 ASPECTOS HISTÓRICOS: Geometria e o Cotidiano	17
3 ESTRATÉGIAS PARA A CONTEXTUALIZAÇÃO, DEDUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES	22
3.1 Estratégia de Contextualização	22
3.2 Produção de Vídeos como Recurso para Modelagem em Sala de Aula . . .	23
3.3 Deduções e Demonstrações	25
4 GEOMETRIA PLANA: Área	29
4.1 Área de Quadrado	29
4.2 Área de Retângulo	31
4.3 Área de Paralelogramo não Retângulo	33
4.4 Área de Triângulo Quando são Conhecidas Base e Altura	34
4.5 Área de Triângulo Equilátero.	36
4.6 Área de Triângulo, Quando são Conhecidos Dois Lados e o Ângulo entre Eles	37
4.7 Área de Triângulo Quando são Conhecidas as Medidas dos Três Lados. . .	39
4.8 Área do Trapézio	42
4.9 Área do Losango	43
4.10 Área de Polígono Regular	44
4.11 Área do Círculo	45
5 GEOMETRIA ESPACIAL: Volume	47
5.1 Volume do Cubo	47
5.2 Volume de Prisma	48
5.3 Volume de Cilindro	50
5.4 Volume de Pirâmide	51
5.5 Volume de Cone	53
5.6 Volume do Tronco de Pirâmide	54
5.7 Volume do Tronco de Cone	56
5.8 Volume da Esfera	59
6 ABORDAGEM DA SEQUÊNCIA NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO	61
6.1 Procedimentos Metodológicos e Análise dos Resultados	61

6.2	A Concepção da Sequência Didática	63
6.3	Descrição das Atividades	64
6.3.1	Atividade I: Os Principais Polígonos.	64
6.3.2	Atividade II: Unidade de Área, Área de Quadrados e Retângulos.	65
6.3.3	Atividade III: Área de Paralelogramo não Retângulo e Triângulo.	71
6.3.4	Atividade IV: Área de Trapézio e de Losango.	75
6.3.5	Atividade V: Área de Polígonos Regulares e do Círculo.	82
7	PROPOSTA PARA A CONCEPÇÃO DA SEGUNDA ETAPA DA SEQUÊN- CIA E CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
7.1	Proposta para a Abordagem de Volume	89
7.2	Considerações Finais	92
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICES	101
	APÊNDICE A - CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA	102
	APÊNDICE B -TERMO DE CONSENTIMENTO DOS ALUNOS	103
	APÊNDICE C - QUESTIONÁRIO DE DIAGNÓSTICO	104
	APÊNDICE D - REGISTRO FOTOGRÁFICO DOS PRINCIPAIS POLÍGO- NOS	106
	APÊNDICE E - LISTA DE ATIVIDADES I	107
	APÊNDICE F - LISTA DE ATIVIDADES II	109
	APÊNDICE G - LISTA DE ATIVIDADES III	110
	APÊNDICE H - LISTA DE ATIVIDADES IV	111
	APÊNDICE I - AVALIAÇÃO I - ÁREA DO PRINCIPAIS POLÍGONOS	113
	APÊNDICE J - QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA	120
	ANEXOS	122
	ANEXO A - FOTOS DE MOMENTOS DO TRABALHO	123

INTRODUÇÃO

O Boletim de Desempenho e Metas da Secretaria de Estado da Educação do Maranhão de 2018, que traz resultados referentes ao IDEB de 2017 e resultados dos Simulados Mais Ideb 2018, mostra que resolver problemas envolvendo área de figuras planas e resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera) estão entre aqueles que os alunos apresentaram menores rendimentos (MARANHÃO, 2019), o que demanda ações de intervenção didática por parte do professor para o enfrentamento e melhoramento desta situação.

No Ensino Médio, o conteúdo programático de Geometria Plana e Espacial, temas que o Boletim apresentou como de baixo rendimentos entre alunos maranhenses, geralmente é trabalhado na segunda série do Ensino Médio, sem muita preocupação em demonstrar ou deduzir fórmulas e resultados, semelhantemente dando pouca atenção à discussão de sua aplicabilidade no cotidiano dos alunos.

É comum que os alunos aprendam a usar as fórmulas mecanicamente e resolvam muitos exercícios para fixação, mas não conseguem relacionar o conteúdo estudado a situações da sua realidade, neste contexto, veem a matemática como algo distante e alheio à sua vida prática. Por outro lado, também é comum que as fórmulas sejam dadas prontas e o único trabalho dos alunos é aplicá-las na resolução dos problemas e exercícios sugeridos, assim a matemática parece ser mais uma receita pronta do que ciência bem definida e fundamentada.

É absolutamente comum ocorrer entre os alunos que o ensino de matemática, certamente o de geometria, ainda é um tema que assusta. Muitos estudantes apresentam dificuldades em compreender o conteúdo e transformar o conhecimento adquirido em ferramenta para solução de problemas cotidianos.

Nos cursos de graduação em Matemática é exigida uma grande quantidade de demonstrações de teoremas e proposições, tais demonstrações, por vezes, são vistas pela primeira vez pelo aluno nessa etapa da vida escolar e, por isso, torna-se muito difícil de compreender o processo e reconhecer a necessidade de fazê-las, logo vê-se a importância de que essas demonstrações sejam feitas desde o Ensino Médio.

Nesse contexto, para o educando alcançar sua proficiência na Matemática, é preciso que ele aprenda, de fato, o processo do desenvolvimento do conhecimento, por que ele é válido e onde está sua aplicação no cotidiano. Assim sendo, é importante que as fórmulas matemáticas aplicadas, em especial na Geometria, sejam devidamente demonstradas ou deduzidas durante o processo de ensino e igualmente importante é a sua contextualização.

A contextualização é outro desafio, no entanto, o desenvolvimento de novas tecnologias têm facilitado o trabalho do professor. Uma ferramenta que pode ser usada e

vem sendo usada, é a produção de vídeos. Essa ferramenta traz, de forma muito eficiente, situações do cotidiano para a sala de aula de modo que a dinâmica da contextualização pode ser transformada e mais evidente durante o processo de ensino.

Segundo a BNCC, os alunos devem

utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (BRASIL, 2018, p. 10).

Com este intuito que este trabalho propõe uma forma alternativa de estudo de área e volume para alunos da segunda série do Ensino Médio visando superar os desafios da contextualização e além disso se propõe a modelar as situações por meio de proposições devidamente deduzidas e/ou demonstradas ao longo da sequência.

A proposta é fazer vídeos com os alunos mostrando situações reais e problemas reais, levá-los para sala de aula e a partir desses vídeos, construir o conhecimento matemático capaz de resolver tais problemas do cotidiano, deduzindo e/ou demonstrando fórmulas de área e volume dos principais polígonos e poliedros respectivamente, evidenciando no processo histórico de criação do conhecimento geométrico a influência do cotidiano das pessoas.

Assim, o objetivo principal deste trabalho de pesquisa é mostrar aos alunos um método de aprendizagem que priorize a construção do conhecimento por meio das deduções e demonstrações com produção de vídeos do cotidiano como recurso didático.

Essa proposta segue o que nos recomendam os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio nas orientações complementares referente a disciplina de Matemática, nas quais defende que nessa etapa final da escolaridade básica, a Matemática deve ser entendida como uma parte importante do conhecimento humano, que faz do jovem um ser capaz de contribuir, ler e interpretar a realidade, e lhe dê ferramentas para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional (BRASIL, 1997, p. 111).

No primeiro Capítulo, mostra-se que a Geometria e o Cotidiano estão intimamente ligados e as evidências sugerem que o conhecimento de área e volume surge das necessidades inerentes ao dia a dia das pessoas, o que os torna indissociáveis.

No segundo Capítulo, mostra-se que a prática docente está permeada de dificuldade e os professores têm adquirido instrumentos aliados para uma boa prática docente, no entanto essa prática docente não pode estar separada da realidade dos alunos, que a produção de vídeos pode ser uma ferramenta importante para ajudar o professor em sua

didática inclusive pra evidenciar os contextos em que se pode e deve usar o conteúdo em discussão na sala de aula e mostra-se que as demonstrações das fórmulas matemáticas são tão relevantes quanto a sua aplicação para modelagem de uma problemática, que é fundamental na construção e formação do indivíduo crítico e que pode mudar bastante a visão que tem da Matemática e do próprio contexto em que está inserido.

No terceiro Capítulo, é feita a exposição dos postulados e proposições com suas devidas demonstrações, envolvendo o estudo de área que compreendem uma etapa da sequência didática.

No quarto Capítulo, é apresentado o estudo de volumes dos principais sólidos geométricos, incluindo os postulados e proposições acompanhadas com suas respectivas deduções e/ou demonstrações, que fazem parte da outra etapa da sequência didática e que neste trabalho aparece como sugestão ao leitor.

No quinto Capítulo, que está dividido em três tópicos. No primeiro, *Procedimentos Metodológicos e Análise dos Resultados* é desenvolvida uma Sequência Didática, na qual foram concebidos, os primeiros passos para sua aplicação, os procedimentos metodológicos e a forma como se procedeu a análise dos resultados. No segundo: *A Concepção da Sequência Didática*, está uma breve definição de Sequência e a maneira como foi aplicada. No terceiro tópico é feita a descrição detalhadas das atividades, dos objetivos e resultados alcançados em cada atividade.

O sexto Capítulo, foi dividido em dois tópicos. No primeiro é descrita a etapa que envolve o Estudo de Volumes dos Principais Sólidos Geométricos de forma a incentivar o leitor a pensar e desenvolver esse trabalho e no segundo estão as considerações finais sobre o desenvolvimento da pesquisa.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS: Geometria e o Cotidiano

Neste capítulo é mostrada a ligação entre a Geometria e o Cotidiano das pessoas, suas necessidades e surgimento além do estudo de área e volume. As obras utilizadas para o desenvolvimento deste capítulo foram, A Garbi (2007); Pinho et al. (2007) e Baldissera (1987).

É difícil separar a Matemática do meio, pois o mundo no qual vivemos é extremamente dependente dela. Ela está presente em tudo a nossa volta, portanto pode-se entender esse meio como tudo em nosso universo. No campo da filosofia poderíamos citar a seguinte pergunta reflexiva: "a Matemática existe por si mesma no universo e nós a desvendamos ou ela é a mais nobre criação da mente humana?" (GARBI, 2007, p. 2), tal reflexão evidencia a íntima ligação entre ela e tudo que está a nossa volta. Tudo nos leva a crer que a Matemática surge de maneira natural para suprir alguma necessidade durante o desenvolvimento das civilizações, segundo (GARBI, 2007), "[...]foram os arquitetos e construtores primitivos os primeiros na solução das questões básicas da Geometria", logo a Geometria (do grego, medir a terra) surge das necessidades do dia a dia. Medir ou demarcar algo ou alguma coisa levaram os humanos ao desenvolvimento da geometria atual. Medição de terras férteis, construção de moradia, medição de capacidades de alguns objetos, são exemplos de ações do homem que pressupõem uso de algum conhecimento intuitivo ou técnico de operações geométricas ao longo de sua história. Baldissera (1987) diz que a princípio, a geometria era uma ciência baseada na experimentação, uma coleção de regras para uso prático que fornecia resultados aproximados.

A Geometria está tão intimamente ligada à vida e ao cotidiano que sua história não pode ser contada sem referir-se às grandes realizações da humanidade, como as construções das pirâmides do Egito, a Muralha da China, grandes templos e outras obras do homem ao longo de séculos, mas principalmente o surgimento da agricultura. Tudo isso são fatos com os quais se conclui que o cotidiano e Geometria estão estreitamente ligados desde sempre.

A História sugere que a Agricultura começa a ser praticada na Mesopotâmia, lugar onde hoje é o Iraque, há cerca de 11 mil anos, por volta do ano 9.000 a.C.. Este é um ponto importante da história da humanidade, pois se trata da primeira grande revolução que mudou a sua forma de viver, fazendo-o mais ligado à terra onde produzia, também o obrigou a organiza-se em grupos sociais mais complexos de modo a dividir tarefas ligadas ao convívio e ao trabalho na agricultura. Essa convivência em sociedade contribuiu para o aumento exponencial da população e esse aumento demandou mais conhecimentos que garantissem a sobrevivência dos grupos, inclusive para melhor distribuição das terras férteis, conhecimento dos ciclos das estações do ano e a contagem do tempo por meio de

calendário. Data desta época o surgimento de algumas cidades e da indústria de cerâmica; posteriormente, cerca de 6.000 a.C. a tecelagem e fabricação de cordas; a irrigação cerca de 5.000 a.C. e em 3.500 a.C. surgem as carroças pelos sumérios e barcos no Nilo, pelos egípcios, prosseguindo nessa cronologia, é então por volta de 2.700 a.C. que surgem os grandes monumentos de pedra no Egito, caso das Pirâmides, fatos que indicam ser os egípcios detentores de conhecimentos empíricos de Geometria, o que nos leva a crer que estes conhecimentos evoluíram, nesta cronologia, da prática para a formulação dos conceitos (GARBI, 2007).

Vários textos referentes à origem da Geometria corroboram a narrativa de que tudo que se conhece de Geometria surge da necessidade humana e de sua capacidade de fazer adaptações e encontrar padrões,

A Geometria primitiva era uma coleção de princípios empiricamente descobertos em matéria de comprimentos, ângulos, áreas e volumes, que foram desenvolvidos para satisfazer alguma necessidade prática em agrimensura, construção, astronomia e vários ofícios (Domínio Público).

Segundo Pinho et al. (2007), a História deixa evidências suficientes que mostram o surgimento do cálculo de área como fruto da necessidade de medir terrenos produtivos, demarcar terras e também para avaliar a produtividade de determinado terreno. Conseqüentemente surge o cálculo de volume, visto que a produção, cada vez maior, necessitava de lugar adequado para armazenamento. O que sugere a arquitetura como uma das principais fontes de inspiração para estudo de cálculo geométricos inclusive o volume.

Paralelamente aos avanços de cálculos de área e volume surge a necessidade de registros e descrição de acontecimentos, daí por volta do quarto milênio a.C., quando se deu a grande revolução da escrita, conhecimento restrito basicamente aos escribas, houve também um grande avanço na Matemática visto que aos escribas eram levados problemas matemáticos que certamente as pessoas comuns não detinham conhecimento para resolver. Percebe-se que as primeiras resoluções de problemas aritméticos e geométricos aconteceram de forma empírica e sem considerar detalhes ou formalidades teóricas. As primeiras fórmulas matemáticas e conceitos foram surgindo por deduções feitas com experimentações, verificadas por meio de tentativas e erro, o chamado aprendizado indutivo, que consistia em observar padrões que se repetiam, e portanto levavam a crer que se tratava de verdades gerais. Alguns documentos mostram que, no início do segundo milênio a.C., os egípcios já detinham conhecimento elevado em Aritmética e Geometria. Um destes documentos é o *Papiro de Ahmes* (ou Rhind), escrito por volta de 1.650 a.C. pelo escriba Ahmes e descoberto no século XIX por A. Henry Rhind da Escócia. Esse documento reúne 85 problemas de Aritmética e Geometria, mostrando, sem fazer

qualquer demonstração ou justificativa, como resolvê-los. Outro documento ainda mais antigo e deixado pelo egípcios é o *Papiro de Moscou*, hoje guardado e exibido no Museu de Moscou de Finas Artes, datado de 1.859 a.C., apresenta 25 problemas resolvidos envolvendo Aritmética e Geometria, como, por exemplo, o volume de tronco de pirâmide de altura 6 e bases quadradas com lados medindo 2 e 4 respectivamente, fato que surpreendeu os historiadores pela correção da resposta. Claro que os cálculos de Aritmética e de Geometria demandaram inúmeras experimentações, até chegar nas fórmulas matemáticas atuais, mas foi assim, por experimentação, indução ligados ao cotidiano e algum raciocínio, que tudo começou (GARBI, 2007).

A intuição e a experimentação, no entanto, foi dando lugar a uma estrutura de conhecimentos lógicos mais elaborada, com regras claras que serviam perfeitamente para modelar a realidade dos indivíduos.

Neste ponto da cronologia histórica, podemos afirmar que os geômetras gregos, primeiramente Thales de Mileto (624-547 a.C.), que talvez tenha se interessado por Geometria em suas viagens ao Egito, inclusive protagoniza um dos acontecimentos máximos da história da Geometria quando na companhia do faraó Amasis, medindo as sombras de um bastão, que plantara verticalmente na areia, e da pirâmide de Quéops, calcula a altura daquele monumento através de triângulos semelhantes e embora pouco se saiba sobre este que é considerado o primeiro filósofo e o primeiro matemático, os documentos gregos posteriores atribuem a ele a demonstração de alguns resultados geométricos, como por exemplo, que o ângulo inscrito em um semicírculo é reto (PINHO et al., 2007); depois a Escola Pitagórica, que percebiam a Matemática em toda parte, inclusive consideravam Deus como o Grande Geômetra do Universo, diziam que o mundo era feito de números e, além disso, foram os primeiros a enxergar a Matemática além da realidade física. Estes fizeram da Geometria uma ciência para o cotidiano de pessoas comuns como também de pessoas estudiosas da natureza e astronomia e também a revelaram como uma teoria dedutiva e sistematizada (GARBI, 2007).

Seguindo a mesma linha, Hipócrates, da ilha Jônia de Quios, cerca de 460 a.C., considerado pré-platônico, foi professor de Geometria e escreveu um livro de modo lógico e organizado que acredita-se ter sido fonte para várias proposições do Livro III e precursor de Elementos, também foi o primeiro geômetra a calcular área de figura delimitadas por linhas curvas, as chamadas Lúnulas (GARBI, 2007) e Platão (427 a.C. a 347 a.C.), Grego de Atenas, cujo verdadeiro nome era Aristocles, "interessa-se muito pela matemática, em especial pela geometria, evidenciando, ao longo do ensino, a necessidade de demonstrações rigorosas dedutivas, e não pela verificação experimental"(BALDISSERA, 2008, p. 4). Teve que sair de Atenas depois da morte de seu mentor Sócrates e por considerá-la

asfixiante para as pessoas que desejavam adquirir sabedoria, fica 12 anos viajando pelo Mediterrâneo, conhecendo o mundo e aprendendo com filósofos e geômetras. Nessas viagens conhece os ensinamentos pitagóricos na Itália e, finalmente, quando julga Atenas apta a recebê-lo retorna em 386 a.C. e funda a Academia de Platão, onde escrevera a seguinte advertência: "Não são admitidos ignorantes em Geometria". Essa escola permitiu que a Geometria e a matemática em geral se desenvolvessem para além da aplicação prática e vários discípulos de Platão contribuíram extraordinariamente para isso. Eudóxio, por exemplo, foi o responsável pela demonstração da conjectura de Briso/Ântifon, que dizia que inscrevendo-se um polígono em um círculo, ficaria caracterizada uma diferença entre as áreas das figuras e que tal diferença poderia ser diminuída, à medida que se aumentasse o número de lados do polígono regular inscrito (O chamado método de Exaustão), o que contribuiu bastante no estudo de perímetro e área do círculo e de volume de cilindro, obtidos pela exaustão de prismas de mesma altura, de cone pela volume de pirâmides de mesma altura e base poligonal regular, o que retorna a geometria aplicada, mas também percebe-se contribuições nos fundamentos da Teoria do Limites (GARBI, 2007). Posteriormente Euclides de Alexandria (360 a.C. a 295 a.C.), discípulo da escola platônica desenvolve exemplarmente esta concepção baseada no rigor das demonstrações e, a posteriori, faz essa estrutura ganhar notoriedade e avançar consideravelmente ao escrever a obra Os Elementos de Euclides, que consiste em uma coletânea de treze livros que contém uma sistematização dos resultados geométricos mais importantes desenvolvidos até sua época, com o rigor nas demonstrações que se tornou padrão para toda matemática e prevalece até hoje como base do pensamento dedutivo, e que datam de 300 a.C. (PINHO et al., 2007).

Os Elementos de Euclides inaugura uma nova era na matemática incorporando o pensamento lógico dedutivo e as demonstrações que norteiam até a atualidade o desenvolvimento da ciência como um todo. Em contribuições para a Geometria destacam-se, o Livro I, que faz 23 definições como ponto, reta, superfície, plano, ângulo, perpendicularismo, círculo, centro, diâmetro e paralelismo; o Livro III dedicado ao círculo e seus correlatos; o Livro IV que trata das construções com régua e compasso; o Livro XI no qual Euclides define, pela primeira vez, as figuras sólidas como pirâmides, prismas, paralelepípedo, cone e esfera; o Livro XII que dedica ao estudo de área e volume de figuras como círculo, cone, pirâmide e esfera, com proporcionalidades por falta de método rigoroso para cálculo do número π e o Livro XIII dedicado aos poliedros regulares: tetraedros, cubo, dodecaedro e icosaedro (GARBI, 2007).

Os Elementos de Euclides é tão importante, que é considerado o livro mais bem sucedido no meio acadêmico e em número de edições é o segundo, perdendo apenas para

a Bíblia.

Pode-se afirmar que nesse momento histórico a matemática ganha uma característica mais formal, abrangendo não somente problemas práticos e do cotidiano das pessoas comuns, mas também problemas ligados à sua própria estrutura que faz parte do cotidiano de pessoas voltadas ao estudo desta ciência.

Nesta cronologia, também é justo citar Arquimedes, de Siracusa, nascido em 287 a.C. que é considerado um dos maiores gênios da antiguidade. Em *A medida de um Círculo* e usando a chamada técnica de dupla redução ao absurdo, prova que a área do círculo é igual a de um triângulo que tem base igual ao comprimento da circunferência e cuja altura é igual ao raio. Com método de exaustão determinou o valor de π usando aproximação do perímetro dos polígonos regulares inscritos e circunscritos a um círculo de raio 1 e aumentando o número de lados desses círculos. Sobre a esfera e o cilindro, contribuiu para cálculo de área de superfície e também provou que o volume da esfera é 4 vezes o volume de um cone que tem como altura o raio da mesma e como base seu círculo máximo. Ainda no grupo de gênios no campo da Geometria, tem-se Apolônio, de Perga nascido em 262 a.C., considerado o Grande Geômetra que contribuiu significativamente no desenvolvimento da Geometria e é mais conhecido pela sua obra *Cônicas* que contém mais 480 proposições rigorosamente demonstradas sobre a elipse, a hipérbole e a parábola (2007).

Também de relevância comprovada para a geometria é o matemático Francesco Bonaventura Cavalieri, italiano nascido em 1598 na cidade de Milão. Deve-se a ele o método dos indivisíveis e o princípio de Cavalieri que auxiliam no cálculo de volume de sólidos e impulsionaram uma nova era na Geometria aplicada. Foi professor na Universidade de Bologna e foi responsável pela introdução dos estudos de logaritmos de funções trigonométricas para cálculos em astronomia e escreveu sobre seções cônicas, ótica, trigonometria, astronomia e astrologia (SÓMATEMÁTICA, 1998, p. 1).

É fato que a Geometria inicia timidamente com as necessidades da vida em sociedade, para solucionar problemas inerentes ao cotidiano, depois se transforma em ferramenta para melhorar as relações entre os indivíduos, transforma-se em algo formal ligado ao cotidiano de estudiosos e finalmente ganha o formato como a conhecemos, num ciclo contínuo de busca de resposta para questões do cotidiano de pessoas comuns ou de quem se dedica a conhecer ainda mais esta ciência. É bom lembrar que todo desenvolvimento tecnológico que proporciona o funcionamento do mundo moderno que conhecemos hoje, é devido à essa relação cíclica existente entre a Matemática e as necessidades ou ambições humanas.

3 ESTRATÉGIAS PARA A CONTEXTUALIZAÇÃO, DEDUÇÕES E DEMONSTRAÇÕES

Neste Capítulo trata-se das dificuldades, dos problemas ligados à prática do ensino e da necessidades de aproximar o conteúdo da vivência, da proposta de uso de vídeos como recurso didático, da importância de se fazer deduções e/ou demonstrações em sala de aula e da necessidade do aluno em compreender, desde cedo, como se constrói o saber matemático e como ele é tratado no campo científico.

3.1 Estratégia de Contextualização

O ensino de Matemática é um desafio para os professores, por vários fatores, falta de motivação dos alunos, pouco recurso, infraestrutura da escola, ambiente violento, dentre outros. É importante que o professor encontre soluções criativas e que possam motivar os alunos e fazê-los agentes de sua própria aprendizagem, pois,

Um dos motivos do fracasso do ensino de Matemática, está tradicionalmente pautado em manipulações mecânicas de técnicas operatórias, resolução de exercícios, que são rapidamente esquecidos, assim como a memorização de fórmulas, tabuada, regras e propriedades (FRINHANI, 2013, p. 44).

Assim, quando o aluno é colocado diante de um problema do seu cotidiano e quando o objeto matemático está presente em sua realidade, o aprendizado se torna significativo, ganha propriedades intrínsecas a aquilo que é palpável, compreensivo, importante para si, e deste ambiente cheio de conhecimentos prévios pode-se extrair motivação para, em um segundo momento, acrescentar mais informação que a posteriori observa-se que, na verdade, está se construindo um conjunto de ferramentas e linguagens que modelam a realidade do indivíduo e portanto cheio de significados difíceis de esquecer. Segundo José Silva, "O professor deve pensar sua prática a partir do ambiente do aluno para que o conhecimento seja significativo"(informação verbal) ¹ Disso trata o Plano Mais Ided,

[...], como disciplina escolar, acreditamos em uma matemática que se aproxima da realidade do aluno, para que através da aprendizagem significativa a torne mais humanizadora e menos abstrata possível. Isso não quer dizer que o caráter abstrato da Matemática deva ser desconsiderado no processo de ensino. Mas, é necessário ressaltar que esse caráter abstrato deve ser o fim e não o início do processo, ou seja, a prática da Matemática deve partir da concretude para a abstração dos conteúdos escolares (MARANHÃO, 2017, p. 14)

¹Citação do Professor Dr. Antonio José Silva no II Simpósio Profmat/UEMA, em São Luis, em dezembro de 2018.

Isso leva a crer que quanto mais próximo da realidade é o conteúdo abordado mais chance o aluno tem de assimilar, ou, quanto mais o professor relaciona os temas abordados com o cotidiano dos alunos, mais eles se familiarizam com o tema e mais fácil se torna o processo ensinar e aprender. Por isso, uma boa estratégia para motivação dos alunos no ensino de Geometria Plana ou Espacial, é mostrar nos espaços frequentados pelos sujeitos os objetos de estudo, assim o que antes era incompreensível torna-se palpável, bem real e, além disso, a matemática se transforma em algo necessário para compreensão do mundo em sua volta.

Neste trabalho foi dado ênfase a três elementos para o ensino de Matemática, que se acredita ter grande valia:

1. O uso de vídeos como recurso didático na sala de aula.
2. As demonstrações e/ou deduções de fórmulas.
3. A aplicação no cotidiano dos alunos.

Estes três elementos podem fazer uma diferença impressionante na formação dos alunos, visto que interferem na motivação e no pensar matematicamente

3.2 Produção de Vídeos como Recurso para Modelagem em Sala de Aula

Um desafio para o professor é, de que forma fazer, de maneira satisfatória, o elo entre o cotidiano dos alunos e os temas abordados em sala.

O professor, porém, ganha um importante aliado nesse desafio, com o advento da Televisão, que foi inaugurada no Brasil em 1950 por Assis Chateaubriand, e que, inicialmente, tinha toda programação ao vivo, até surgir o videoteipe, que permitia gravação prévia da programação a ser exibida (PEREIRA et al., 2005).

Essa tecnologia de gravação, vem se desenvolvendo, passa pelos carretéis, depois as fitas cassetes, CDs, DVDs e hoje já tem pendrive, cartões de memórias e HDs, que permitem armazenamento destes arquivos, além das câmeras que cada dia ficam menores, melhores e mais populares, chegando aos atuais smartphones que gravam e editam vídeos com facilidade.

Neste contexto de uso de produção de vídeos e transmissão para fins educacionais, destaca-se o Telecurso 2000 da Tv Globo, criado em 1995, em parceria com a Fundação Roberto Marinho, a Fundação padre Anchieta e a TV Cultura de São Paulo, em que o aluno pode assistir de casa ou nas telessalas instaladas pelo Brasil em empresas, escolas e

sindicatos, toda a programação, e posteriormente, ao final do curso, pode receber certificação por meio das Secretarias Estaduais ou Municipais de Educação que fazem avaliação do aprendizado dos alunos (TELECURSO, 2018).

Também, a TV Escola que é um canal de televisão ligado ao Ministério da Educação que tem como objetivo capacitar, aperfeiçoar e atualizar educadores da rede pública e que na sua programação exibe, séries e documentários voltados para esse fim (BRASIL, 2018).

A TV Escola está vinculada à Secretaria de Educação a Distância do Ministério da Educação (SEED/MEC) (PEREIRA et., al, 2005) e faz excelente uso deste recurso para fins educacionais, o que mostra perfeitamente a importância desta ferramenta neste contexto.

Visando melhorar a transposição didática, uma importante e eficiente ferramenta utilizada para ajudar o professor na contextualização dos conteúdos em especial o conteúdo de geometria, é a produção de vídeo. Este recurso auxilia o professor a relacionar o conteúdo a situações reais da vida dos alunos, inclusive, é disso que, Silva (2011, p. 34), em sua Dissertação de Mestrado trata quando diz que "ao fazer uso do vídeo na sala de aula, o professor tem várias possibilidades para explorar o conteúdo", e:

[...]aliado a outros recursos didáticos e às exigências educacionais da contemporaneidade como, por exemplo, interdisciplinaridade e transversalidade, o vídeo didático pode mostrar-se uma útil ferramenta para o enfrentamento desses desafios pedagógicos (ROCATO, 2009, p. 8).

Se usado de maneira adequada, a produção de vídeos e sua exibição na sala de aula, contribui significativamente para a contextualização, inclusive relacionando conteúdos de outras áreas, como Física, Química e Geografia com a Matemática deixando a interdisciplinaridade mais evidente e a contribuição da Matemática nessas áreas mais clara. Também,

A produção de vídeo enquanto recurso metodológico de ensino possibilita a compreensão de conteúdos considerados pelos alunos complexos e que são indispensáveis na formação deles, visto que, quando empregada de forma adequada, é uma importante ferramenta de ensino aprendizagem que contempla a construção, a assimilação e a socialização de conhecimentos (BARBOZA et al., 2016, p. 9).

Os vídeos produzidos e expostos em sala contribuem substancialmente para a modelagem de situações do cotidiano no ensino de Matemática em especial da Geometria que trata dos temas de área e volume que dispõem de variadas situações que podem ser usadas e modeladas em sala.

A produção de vídeos não é defendida como atividade fim ou como único recurso didático, não se trata de produzir videoaulas, mas de ter os vídeos como ferramenta para evidenciar no cotidiano as variadas situações em que a Matemática se faz necessária.

Além disso, o uso de vídeos como recurso didático é defendido por vários autores, e em vários trabalhos de pesquisas, o mesmo ocorre com as demonstrações. A produção e exibição de vídeos são tidas como eficientes recursos para ligar o ensino à sua aplicação, e para promover uma aprendizagem significativa. É o que nos sugere Silva:

[...]vídeo é um recurso que, se aplicado como material pedagógico, por meio de um planejamento criterioso, pode auxiliar na transposição didática dos conteúdos curriculares de maneira adequada e proporcionar resultados significativos (SILVA, 2011, p. 41).

Claro que, mesmo com todo esforço que se pode fazer no ensino de Matemática através da modelagem, não se pode excluir o caráter formal, que predominantemente permeia o conhecimento matemático. É necessário que o aluno saiba que a matemática não é apenas um conjunto de fórmulas e regras, é uma ciência com fundamentos, Postulados, Axiomas, Proposições e Teoremas que determinam a característica científica de cada resultado, ou seja, as demonstrações e deduções, portanto é por isso que são eficazes para a modelagem do ambiente que permeia nosso cotidiano.

3.3 Deduções e Demonstrações

DEFINIÇÃO 3.1. *"A Dedução é um tipo de raciocínio que parte de uma proposição geral (referente a todos os elementos de um conjunto) e conclui com uma proposição particular (referente a parte dos elementos de um conjunto)"(PEDAGOGIA E COMUNICAÇÃO, 2018, p. 1).*

DEFINIÇÃO 3.2. *Segundo Lalange (1999, p. 239) "Uma Demonstração é uma dedução destinada a provar a verdade de sua conclusão apoiando-se sobre premissas conhecidas ou admitidas como verdades".*

A modelagem, as demonstrações e as deduções das fórmulas que constituem a Geometria Plana e Espacial, são importantes para o processo de ensino-aprendizagem, um complementa o outro ou, um dar sentido ao outro.

A ausência de demonstrações no Ensino Médio provoca sérios problemas para alunos do Ensino Superior, nos cursos de Matemática, devido a grande quantidade de Axiomas, Proposições, Teoremas e Lemas que se faz necessário demonstrar. E "[...] um dos motivos que se pode ressaltar é que o Ensino Fundamental e o Ensino Médio não preparam adequadamente os estudantes, inclusive em Geometria"(ALMEIDA, 2016, p. 16).

Novamente fica evidente a necessidade de o aluno entender a Matemática, desde cedo, como uma ciência, que é estruturada em fundamentos, (proposições e teoremas), para os quais há sempre razões que devem ser esclarecidas, é o que diz Fossa , "Conhecer, então, é saber o porquê dos acontecimentos. E o porquê de um teorema matemático é a sua demonstração"(FOSSA, 2009, p. 46).

A demonstração é importante nas diversas áreas da Matemática, pois ela é uma forma de atestar veracidade aos conhecimentos matemáticos, ou seja, é um processo argumentativo que permite concluir que propriedades matemáticas são verdadeiras. A demonstração na Matemática evidencia o poder de princípios e propriedades, assim como suas limitações (ALMEIDA, 2016, p. 15).

É fundamental, para o ensino de Matemática, inclusive no ensino de Geometria que trata de área e volume, que o professor faça com seus alunos as demonstrações ou deduções das fórmulas que serão usadas para resolver os problemas sugeridos, pois,

a matemática é uma ciência dedutiva: partindo de certas premissas, chega, por um estrito processo de dedução, aos vários teoremas que a constituem. É verdade que, no passado, as deduções matemáticas eram com frequência muito destituídas de rigor; é também verdade que o rigor é um ideal dificilmente alcançável. Não obstante, se faltar rigor em uma prova matemática, ela será, sob esse aspecto, defeituosa; não constitui defesa a alegação de que o senso comum mostra ser o resultado correto, portanto, se tivéssemos de confiar nisso, melhor seria abandonar completamente o argumento do que trazer a falácia em socorro do senso comum. Nenhum apelo ao senso comum ou "intuição"ou qualquer outra coisa se não a estrita lógica dedutiva, deve ser necessário à Matemática após estabelecidas as premissas (RUSSEL, 1976, p. 139).

Essa atitude prepara os alunos para uma possível escolha pelo curso de Licenciatura em Matemática no qual, necessariamente, tem de entender e fazer as demonstrações de teoremas e proposições, além disso, "[...] a matemática não é meramente uma atividade interessante com algumas aplicações práticas, mas faz parte daquela busca da verdade que é o grande empreendimento do homem"(FOSSA, 2009, p. 46) e é uma recomendação no Guia de Escolha do Livro didático que diz que

"[...], com vista a assegurar a articulação das dimensões ciência,[...]. Organizando conteúdos e metodologias de forma que, ao final do Ensino Médio, o estudante demonstre [...] o domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna; e o conhecimento das formas contemporâneas de linguagens"(BRASIL. 2018, p. 9).

Significa que, ao escolher um livro didático o professor tenha em mente a formação do aluno nas diversas linguagens, inclusive a linguagem matemática, que inclui as demonstrações dos teoremas e proposições que são vistas ao longo do Ensino Médio, preparando-o para as etapas posteriores da vida escolar ou profissional, ao criar no sujeito um pensamento lógico-dedutivo.

Destacamos que ao fazer deduções e demonstrações em sala de aula, evidenciando que verdades podem ser comprovadas quando se faz uso de métodos eficientes, desde que as premissas sejam verdadeiras, "Se não conhecemos que as premissas são verdadeiras, então elas não podem servir de razões para o teorema"(FOSSA, 2009, p. 47), o professor cria no aluno um pensamento crítico que vai além do conhecimento matemático, é um saber metódico para a vida, pois em qualquer que seja o campo de atuação do indivíduo sempre se faz necessário ter boas e verdadeira premissas que fundamentam boas escolhas e certamente melhores tomadas de decisão.

Fossa diz que "[...] precisamos de um ponto de partida, um lugar firme a partir de que podemos começar nossas deduções"(FOSSA, 2009, p. 47), essa é outra importante característica de um ensino voltado para as demonstrações e deduções, a dependência e ligação de um saber com outro já demonstrado, formando uma corrente clara que transforma um teorema já demonstrado, e portanto verdadeiro, em base sólida para demonstrações de um outro teorema. Essa característica é um pilar do conhecimento interdisciplinar, inclusive permeia a ética do indivíduo que jamais deve considerar um conhecimento como válido se estiver sustentado em premissas consideradas falsas e com certeza essa é uma contribuição extremamente importante da Matemática para a formação do cidadão.

Por outro lado, se o ensino de matemática não proporciona ao aluno a experiência de entrar em contato com as demonstrações, pode-se questionar se de fato esse ensino contempla tudo que é realmente essencial para o aluno na sua experiência escolar. Segundo Pietropaolo,

[...] uma vez que um dos objetivos fundamentais do ensino de Matemática na Educação Básica, segundo nosso entender, é proporcionar aos alunos situações que lhes permitam adquirir uma compreensão viva do que é Matemática. Assim, a importância da prova nesse processo está, a priori, estabelecida. Ou seja, se pretendemos que os estudantes experimentem e interiorizem uma característica da Matemática, não podemos supor um ensino sem prova, pois eles estão intrinsecamente relacionados (PIETROPAOLO, 2005, p. 206).

Ficam claras as vantagens em fazer um ensino de Matemática que inclua as demonstrações e/ou deduções. No tocante ao nosso trabalho, que se propôs aplicar um

sequência didática para o ensino de Área e Volume, partindo das premissas aqui chamadas postulados, e de teoremas ou proposições já demonstradas, pois essa é a postura que é defendida para um aprendizado significativo e bem mais amplo.

4 GEOMETRIA PLANA: Área

Nesse capítulo aborda-se o estudo de área das principais figuras planas, Quadrado, Retângulo, Paralelogramo, Triângulo, Trapézio, Losango, Polígonos Regulares em Geral e finalmente o Círculo. Para fundamentar utiliza-se as obras: Pinho (2007); Muniz Neto (2013); Dante (2016); Tutor Brasil e Matemática.TV Ensino Médio.

Área é um número real não negativo que indica uma comparação entre uma região de uma superfície plana e uma unidade de área pré-definida, essa comparação indica quantas vezes essa unidade cabe dentro dessa região. Essa unidade de medida de área é um quadrado de lado 1, assim se em uma superfície cabem 10 quadrados de área 1 dizemos que a área dessa superfície é 10. Considera-se que o ponto, a reta e linhas curvas são objetos geométricos que têm área nula.

Para que a definição de área tenha utilidade é necessário considerar os seguintes postulados (intuitivamente) como válidos:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é a união de um número finito de outros polígonos convexos, então a área do polígono maior é igual à soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono (maior) contém outro polígono (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. A área de um quadrado de lado 1 é igual a 1.

Com os quatro Postulados é possível deduzir e demonstrar as proposições relacionadas ao conceito de área.

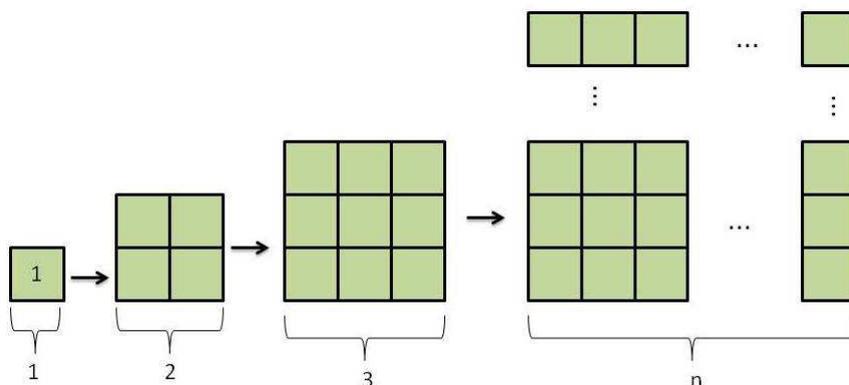
4.1 Área de Quadrado

PROPOSIÇÃO 4.1. *Um quadrado de lado l tem área igual a l^2 .*

DEMONSTRAÇÃO: Tomando o quadrado de lado $l \in \mathbb{N}$ e particionando l em n partes com $n \in \mathbb{N}$, (\mathbb{N} representa números Naturais) tal que cada parte tenha 1 unidade de comprimento, tem-se que $n = l$, logo o quadrado maior fica dividido em n^2 quadrados de lado 1 cada, ver Figura 1. Denotando a área do quadrado maior de A_l , devemos ter A_l igual à soma das áreas desses n^2 quadrados de lado 1, de maneira que pelos Postulados 1, 2 e 4

$$A_l = n^2 = l^2.$$

Figura 1: Quadrado de Lado n



Fonte: Próprio autor

Considere um quadrado de lado $l = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, (\mathbb{Q} representa números Racionais), com $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ e área A_l . Arranje n^2 cópias do mesmo, empilhando n quadrados de $\frac{m}{n}$ por fila, em n filas, formando assim um quadrado de lado $\frac{m}{n} \times n = m$. Tal quadrado maior terá área igual a m^2 ; por outro lado, ele está particionado em n^2 quadrados, cada um dos quais de lado $\frac{m}{n}$, sua área é igual à soma das áreas destes n^2 quadrados, ou seja,

$$m^2 = n^2 \times A_l,$$

logo,

$$A_l = \frac{m^2}{n^2},$$

portanto

$$A_l = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

A discussão anterior mostra que a área de um quadrado de lado l deve ser igual a l^2 para número Natural e Racional. É necessário confirmar que vale para $l \in \mathbb{R}$, (\mathbb{R} representa os números Reais),

Fazendo $k \in \mathbb{N}$ e os números Racionais x_k e y_k , tais que

$$x_k < l < y_k \text{ e } y_k - x_k < \frac{l}{k}.$$

Construindo quadrados de lados x_k e y_k , o primeiro contido no quadrado dado e o segundo o contendo. Porém já sabe-se calcular áreas de quadrados de lado racional, e o Postulado 3 garante que a área A_l do quadrado de lado l deve satisfazer as desigualdades

$$x_k^2 < A_l < y_k^2.$$

Mas, como $x_k^2 < l^2 < y_k^2$, conclui-se que ambos os números A_l e l^2 devem pertencer ao intervalo (x_k^2, y_k^2) , de maneira que

$$\begin{aligned} |A_l - l^2| &< y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k + x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k} + 2l\right). \end{aligned}$$

Tendo que satisfazer a desigualdade acima para todo $k \in \mathbb{N}$, é imediato que $|A_l - l^2| = 0$ e assim

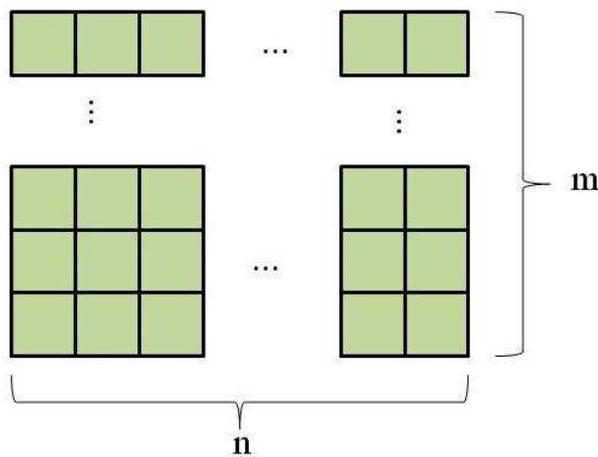
$$A_l = l^2.$$

4.2 Área de Retângulo

PROPOSIÇÃO 4.2. *Um retângulo de lados a, b tem área ab .*

DEMONSTRAÇÃO: Tomando um retângulo de lados $m, n \in \mathbb{N}$, particione-o em mn quadrados de lado 1, conforme Figura 2, e pelos Postulados 1 e 2 tem-se que sua área é mn , e se tivermos $m = a$ e $n = b$, sua área é ab

Figura 2: Retângulo de Lados m, n Particionado



Fonte: Próprio autor

Tomando retângulo $ABCD$ de lados $a = \frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$, $b = \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$, e área $A(ABCD)$ com $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}$, n_1 e $n_2 \neq 0$ e com $n_1 n_2$ cópias do mesmo, montamos um retângulo de lados m_1 e m_2 .

$$n_1 n_2 \times A(ABCD) = m_1 m_2.$$

Somando áreas iguais, concluímos que a área do retângulo dado originalmente é igual a

$$A(ABCD) = \frac{m_1 m_2}{n_1 n_2},$$

portanto

$$A(ABCD) = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_2}{n_2} = ab.$$

Por fim, tomando um retângulo de lado a, b reais positivos, e, $k \in \mathbb{N}$, racionais x_k, y_k, u_k, v_k , tais que $x_k < a < y_k, u_k < b < v_k$ e $y_k - x_k, v_k - u_k < \frac{1}{k}$. Sendo $A(ABCD)$ a área do retângulo de lados a e b , um argumento análogo ao feito para quadrados garante que $A(ABCD)$ e ab pertencem ambos ao intervalo $(y_k - x_k, v_k - u_k)$ e daí, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |A(ABCD) - ab| &< v_k y_k - u_k x_k = (v_k - u_k)y_k + u_k(y_k - x_k) \\ &< \frac{1}{k}(y_k + u_k) \\ &< \frac{1}{k}((y_k - x_k) + 2x_k + (v_k - u_k) + 2u_k) \\ &< \frac{1}{k}\left(\frac{2}{k} + 2a + 2b\right). \end{aligned}$$

Tendo que satisfazer a desigualdade acima para todo $k \in \mathbb{N}$, é imediato que

$$|A(ABCD) - ab| = 0$$

e portanto,

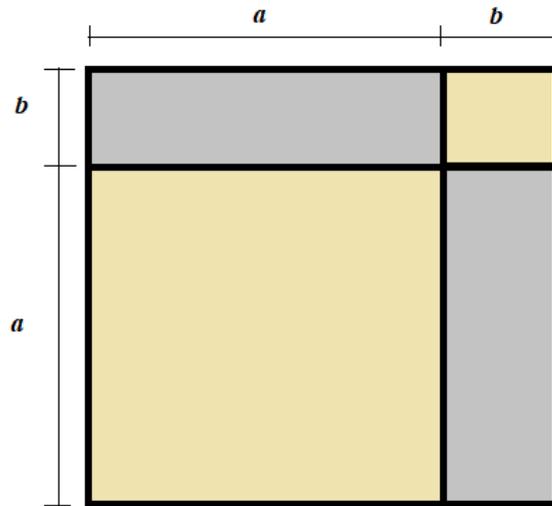
$$A(ABCD) = ab.$$

DEMONSTRAÇÃO ALTERNATIVA: Considere o quadrado de lado $a + b$, como $a, b \in \mathbb{R}$, conforme a Figura 3.

Observe que, o quadrado maior contém quatro polígonos, dois são quadrados e dois são retângulos. Assim, fazendo uso dos postulados 1 e 2.

A área total do quadrado maior é igual à soma das áreas do quadrado de lado a , do quadrado de lado b e duas vezes a área do retângulo de lados a e b , que denotaremos por $A_{(a,b)}$. Assim, temos:

Figura 3: Quadrado de Lado $a + b$



Fonte: Próprio autor

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2A_{(a,b)}. \quad (1)$$

Por outro lado

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab. \quad (2)$$

Comparando as equações (1) e (2), tem-se

$$2A_{(a,b)} = 2ab,$$

e daí

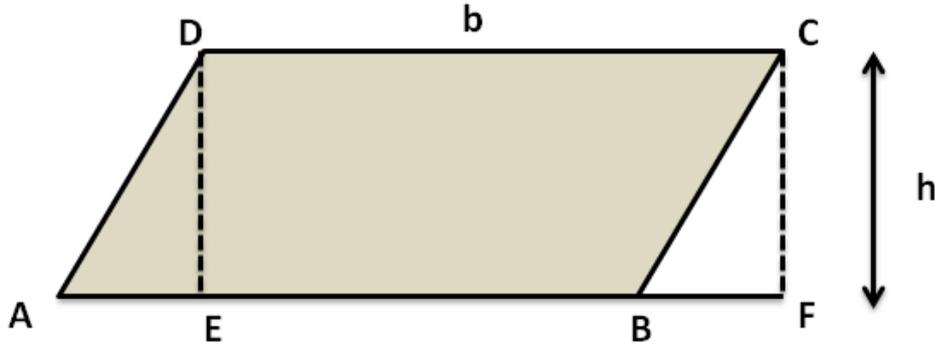
$$A_{(a,b)} = ab.$$

4.3 Área de Paralelogramo não Retângulo

PROPOSIÇÃO 4.3. *A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a bh .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $ABCD$ um paralelogramo de diagonais AC e BD , conforme Figura 4, e E e F respectivamente os pés das perpendiculares baixadas de D e C à semirreta AB . Ademais, suponha, sem perda de generalidade, que $E \in \overline{AB}$. É imediato verificar que os triângulos ADE e BCF congruentes pelo caso CH (Cateto, Hipotenusa), de modo que $\overline{AE} = \overline{BF}$, (pelo postulado 1) $A(ADE) = A(BCF)$. Então,

Figura 4: Paralelogramo de Base b e Altura h



Fonte: Próprio autor

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ADE) + A(EBCD) \\ &= A(BCF) + A(EBCD) \\ &= A(CDEF). \end{aligned}$$

Por outro lado, $CDEF$ é um retângulo de altura h e base

$$\overline{EF} = \overline{EB} + \overline{BF} = \overline{EB} + \overline{AE} = b,$$

pela proposição 4.2,

$$A(ACBD) = A(CDEF) = bh.$$

4.4 Área de Triângulo Quando são Conhecidas Base e Altura

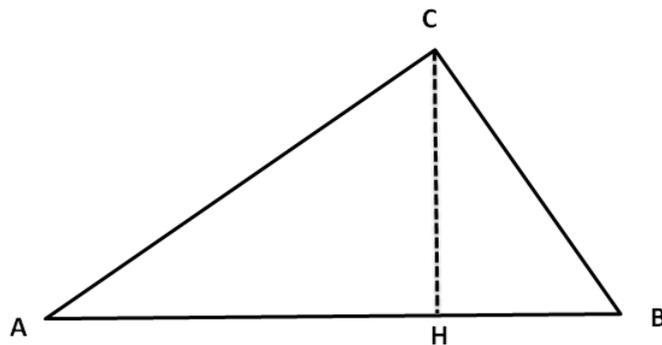
PROPOSIÇÃO 4.4. *A área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura.*

Antes de fazer a demonstração de área para triângulo é preciso definir base e altura em triângulo.

DEFINIÇÃO 4.1. *BASE* é um dos lados escolhido ao acaso.

DEFINIÇÃO 4.2. *ALTURA* é um segmento perpendicular à base e que liga o vértice oposto à reta que contém o lado base, conforme Figura 5.

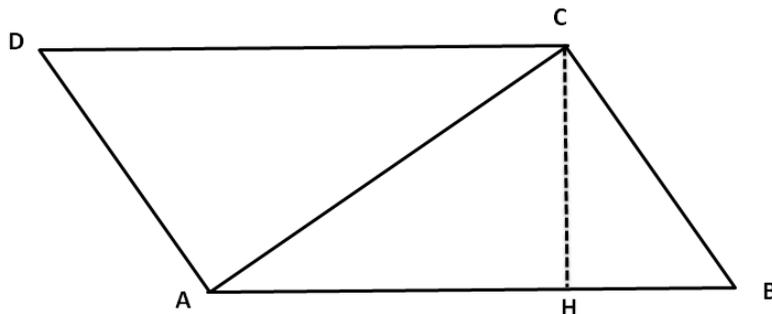
Figura 5: Triângulo ABC de Base \overline{AB} e Altura \overline{CH}



Fonte: Próprio autor

DEMONSTRAÇÃO: Seja o triângulo ABC de base $b = AB$ e altura $h = CH$. Seja o segmento $\overline{DC} // \overline{AB}$, tal que $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, conforme indicado na Figura 6.

Figura 6: Paralelogramo Construído a Partir do Triângulo ABC de Base \overline{AB} e Altura \overline{CH}



Fonte: Próprio autor

Temos que $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$, por construção, $\overline{CA} \equiv \overline{AC}$, por definição e $\widehat{DCA} \equiv \widehat{BAC}$, pois são alternos internos entre duas retas paralelas. Logo, pelo caso LAL, temos que os triângulos DCA e BAC são congruentes e, portanto, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo de base e altura iguais a $\overline{AB} = b$ e $\overline{CH} = h$ respectivamente. Logo

$$2A(ABC) = A(ABCD),$$

e assim

$$2A(ABC) = bh,$$

portanto

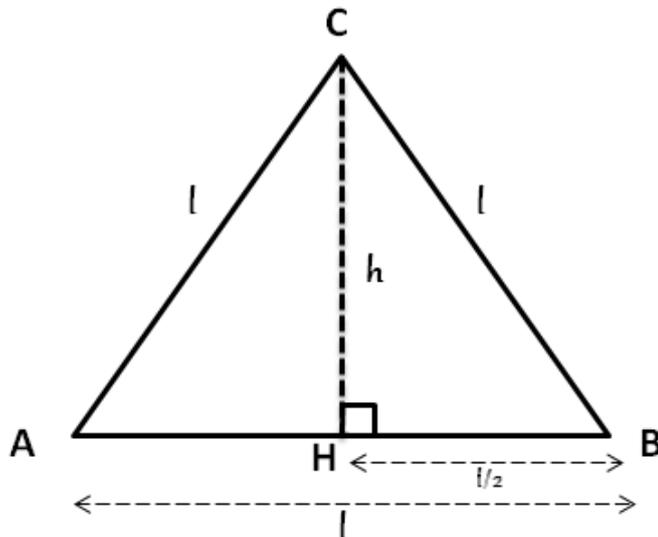
$$A(ABC) = \frac{bh}{2}.$$

4.5 Área de Triângulo Equilátero.

PROPOSIÇÃO 4.5. *A área de um triângulo equilátero de lado l é igual a $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.*

DEMONSTRAÇÃO: No triângulo equilátero todos os lados são congruentes (l, l e l), todos os ângulos internos são congruentes ($60^\circ, 60^\circ$ e 60°), e toda altura é também mediana e bissetriz, conforme Figura 7.

Figura 7: Triângulo Equilátero de Lado l



Fonte: Próprio autor

O triângulo CHB é retângulo em H e, logo, aplica-se o Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

assim

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

daí

$$h^2 = \frac{4l^2 - l^2}{4},$$

segue que

$$h^2 = \frac{3l^2}{4},$$

e assim

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{4}.$$

Aplicando a proposição 4.4 no triângulo equilátero de lado l e altura $h = \frac{l\sqrt{3}}{4}$, temos

$$A(ABC) = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2},$$

portanto,

$$A(ABC) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

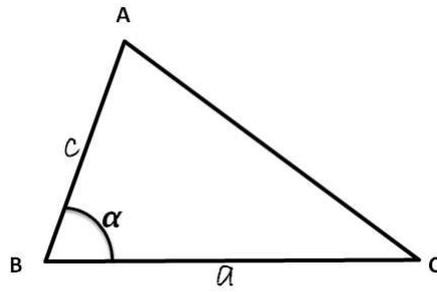
4.6 Área de Triângulo, Quando são Conhecidos Dois Lados e o Ângulo entre Eles

PROPOSIÇÃO 4.6. *A área de um triângulo ABC quando são conhecidos dois lados e o ângulo entre eles é igual à metade do produto entre os dois lados e o seno do ângulo entre eles.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja ABC um triângulo. Suponhamos que sejam conhecidos dois de seus lados e o ângulo α entre eles, conforme a Figura 8.

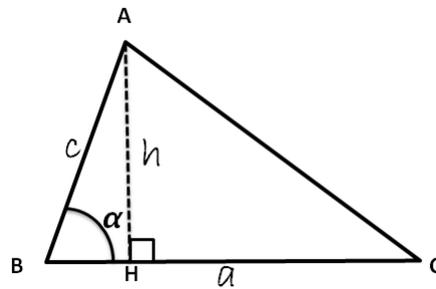
Podemos supor, sem perda de generalidade que os lados conhecidos são $\overline{AB} = c$ e $\overline{BC} = a$ e h a altura do triângulo ABC em relação ao lado $\overline{BC} = a$, como mostra a Figura 9. Sabemos, pela proposição 4.4 que

Figura 8: Triângulo ABC



Fonte: Próprio autor

Figura 9: Triângulo ABC e Altura $\overline{AH} = h$



Fonte: Próprio autor

$$A(ABC) = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2}, \quad (3)$$

logo para calcular a área do triângulo ABC , deve-se encontrar a medida de h .

Como o triângulo ABH é retângulo em H , pois \overline{AH} é altura, temos a seguinte relação trigonométrica:

$$\sin \alpha = \frac{h}{c}.$$

Logo,

$$h = c \cdot \sin \alpha. \quad (4)$$

Substituindo o valor de h da equação (4) na equação (3), como $\overline{BC} = a$, tem-se

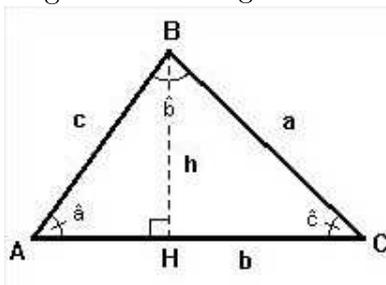
$$A(ABC) = \frac{a \cdot c \cdot \sin \alpha}{2}.$$

4.7 Área de Triângulo Quando são Conhecidas as Medidas dos Três Lados.

PROPOSIÇÃO 4.7. A área de um triângulo ABC quando são conhecidos os três lados, a , b e c , é igual a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro).

DEMONSTRAÇÃO: Iniciando com a observar a Figura 10 do triângulo genérico a ser utilizado na demonstração. Em seguida encontra-se o valor de $\cos \hat{a}$. Para isso, aplica-se

Figura 10: Triângulo Genérico



Fonte: Próprio autor

o teorema de Pitágoras no triângulo AHB para encontrar o comprimento de \overline{AH} .

$$c^2 = \overline{AH}^2 + h^2,$$

logo,

$$\overline{AH}^2 = c^2 - h^2.$$

Assim

$$\overline{AH} = \sqrt{c^2 - h^2},$$

portanto

$$\cos \hat{a} = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c}.$$

Em seguida, utiliza-se o triângulo ABC , aplica-se a lei dos cossenos relativa ao ângulo \hat{a} .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{a}.$$

Substitui-se o valor de $\cos \hat{a}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c},$$

logo,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b\sqrt{c^2 - h^2}.$$

Portanto,

$$2b\sqrt{c^2 - h^2} = b^2 + c^2 - a^2.$$

Isolando o valor de h^2 , encontra-se:

$$\sqrt{c^2 - h^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b},$$

assim,

$$c^2 - h^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2.$$

Portanto,

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}\right)^2. \quad (5)$$

Utiliza-se esta equação na área do triângulo:

$$A(ABC) = \frac{bh}{2}.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado:

$$A(ABC)^2 = \frac{b^2 h^2}{4}. \quad (6)$$

Substituindo o valor de h^2 da equação (5) na equação (6) tem-se:

$$A(ABC)^2 = \frac{b^2 \left[c^2 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b} \right)^2 \right]}{4},$$

assim,

$$A(ABC)^2 = \frac{b^2 \left[c^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2} \right]}{4},$$

logo,

$$A(ABC)^2 = \frac{b^2c^2 - b^2 \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2}}{4}.$$

Continuando

$$A(ABC)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16},$$

que equivale a

$$A(ABC)^2 = \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{16}.$$

Aplicando a diferença de dois quadrados,

$$A(ABC)^2 = \frac{[(2bc) - (b^2 + c^2 - a^2)] \cdot [(2bc) + (b^2 + c^2 - a^2)]}{16},$$

ou

$$A(ABC)^2 = \frac{[-(b^2 - 2bc + c^2) + a^2] \cdot [(b^2 + 2bc + c^2) - a^2]}{16},$$

que equivale a

$$A(ABC)^2 = \frac{[a^2 - (b - c)^2] \cdot [(b + c)^2 - a^2]}{16}.$$

Novamente a diferença entre quadrados tem-se que

$$A(ABC)^2 = \frac{(a - b + c) \cdot (a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (b + c + a)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2},$$

ou ainda,

$$A(ABC)^2 = \frac{(a - b + c)}{2} \cdot \frac{(a + b - c)}{2} \cdot \frac{(b + c - a)}{2} \cdot \frac{(b + c + a)}{2}.$$

Fazendo o semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$, tem-se

$$A(ABC)^2 = \frac{(a + b + c - 2b)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - 2c)}{2} \cdot \frac{(b + c + a - 2a)}{2} \cdot \frac{(b + c + a)}{2},$$

que é

$$A(ABC)^2 = (p - b) \cdot (p - c) \cdot (p - a) \cdot p.$$

Aplicando raiz quadrada em ambos os membros da equação e reorganizando os fatores conclui-se a demonstração

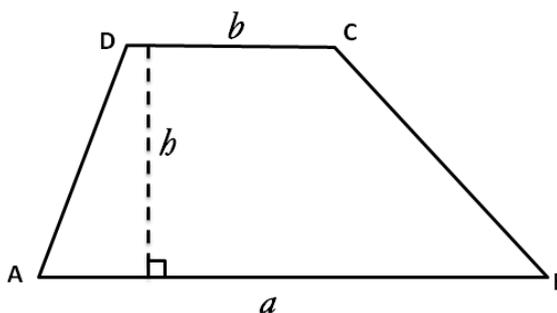
$$A(ABC) = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}.$$

4.8 Área do Trapézio

PROPOSIÇÃO 4.8. Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e altura h , então $A(ABCD) = \frac{(a+b)h}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO: O trapézio $ABCD$ é um quadrilátero que tem apenas dois de seus lados opostos paralelos. Pode-se supor, sem perda de generalidade que, no trapézio $ABCD$, $a > b$ e h é a distância entre os lados paralelos, conforme Figura 11.

Figura 11: Trapézio $ABCD$

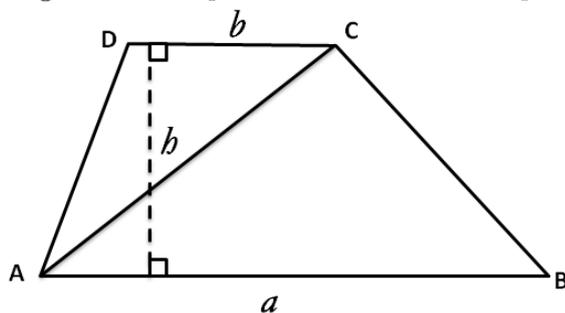


Fonte: Próprio autor

Traçando a diagonal AC , o trapézio $ABCD$ é decomposto em dois triângulos, ABC e ACD , logo $A(ABCD) = A(ABC) + A(ACD)$.

Fazendo CD base do triângulo ACD e AB base do triângulo ABC , e observando que h é altura de ambos os triângulos, conforme Figura 12, tem-se que,

Figura 12: Trapézio $ABCD$ com a Diagonal



Fonte: Próprio autor

$$A(ABCD) = A(ABC) + A(ACD),$$

logo,

$$A(ABCD) = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2},$$

e daí,

$$A(ABCD) = \frac{(ah + bh)}{2}.$$

Colocando h em evidência tem-se

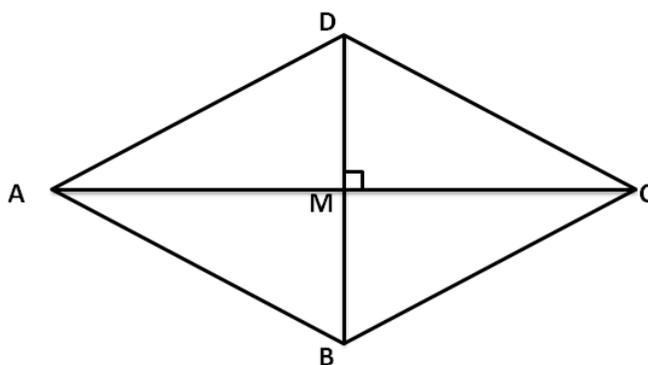
$$A(ABCD) = \frac{(a + b)h}{2}.$$

4.9 Área do Losango

PROPOSIÇÃO 4.9. *A área de um losango $ABCD$ é igual à metade do produto das suas diagonais.*

DEMONSTRAÇÃO: Considerando que, o losango $ABCD$ é um quadrilátero que tem todos os seus lados congruente e suas diagonais AC e BD perpendiculares, conforme a Figura 13, a área do losango pode ser decomposta em duas áreas conhecidas, $A(ABC)$ e $A(ACD)$.

Figura 13: Losango $ABCD$ com as Diagonais



Fonte: Próprio autor

Logo,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(ABC) + A(ACD) \\ &= \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{DM}}{2} \\ &= \frac{\overline{AC}(\overline{BM} + \overline{DM})}{2} \\ &= \frac{\overline{AC}(\overline{BD})}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(ABCD) = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}.$$

POLÍGONOS REGULARES

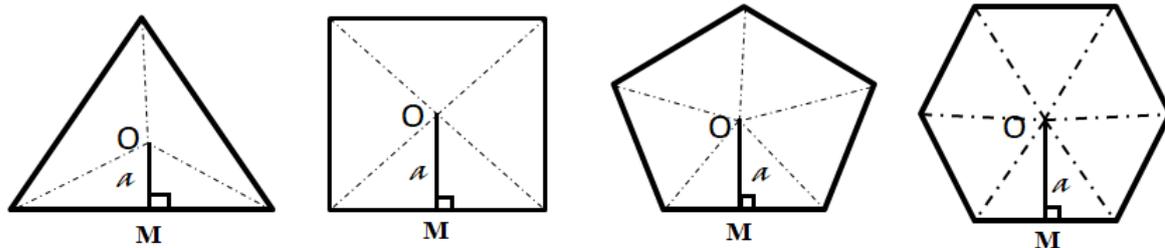
DEFINIÇÃO 4.3. *Polígonos Regulares são aqueles que têm todos os lados e todos os ângulos internos congruentes, logo quadrado e triângulo equilátero, dos quais já sabemos calcular área, são polígonos regulares.*

4.10 Área de Polígono Regular

PROPOSIÇÃO 4.10. *Seja P um polígono Regular com n lados, então sua área $A(P)$ é igual à metade do produto entre seu apótema a e seu perímetro p , onde apótema a é a distância entre o centro do polígono regular e qualquer um de seus lados.*

DEMONSTRAÇÃO: Todo polígono regular de n lados pode ser decomposto em n triângulos congruentes, conforme Figura 14, de tal forma que a base desses triângulos é um lado l do polígono e a altura é o apótema a .

Figura 14: Polígonos Regulares



Fonte: Próprio autor

A área de cada um dos n triângulos é igual a

$$\frac{la}{2}$$

portanto,

$$A_{(P)} = n \cdot \frac{la}{2} = \frac{nla}{2} = \frac{pa}{2},$$

logo,

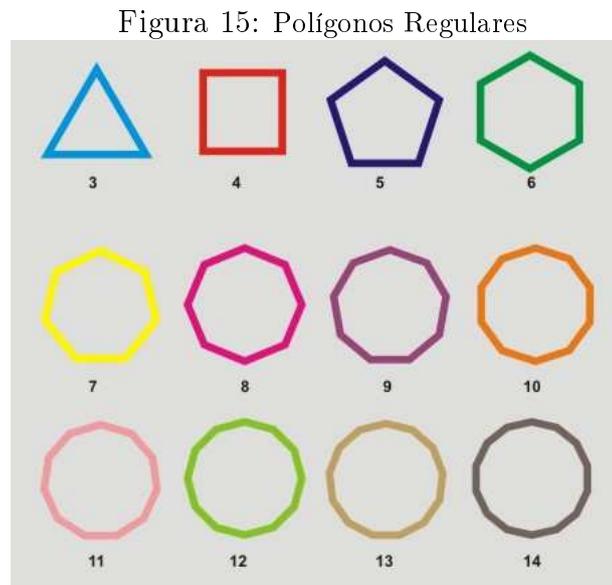
$$A_{(P)} = \frac{pa}{2}.$$

4.11 Área do Círculo

PROPOSIÇÃO 4.11. *A área de um círculo (A_c) de raio r é igual πr^2 .*

DEFINIÇÃO 4.4. *O Perímetro do círculo C de raio R é dado por: $C = 2\pi R$, de modo que π é uma constante real.*

DEMONSTRAÇÃO: Tem-se que a área de um polígono regular é dada por $A_{(P)} = \frac{pa}{2}$, em que a é a medida do apótema e p é o perímetro. Aumentando suficientemente o número de lados do polígono regular, a tendência é chegar ao círculo, no qual o apótema passa a ser o raio r e o perímetro passa a ser o comprimento do círculo $2\pi r$, conforme Figura 15.



Fonte: Os Fantástico Números Primos

Assim, a área do círculo pode ser representada por:

$$A_{(c)} = \frac{pa}{2},$$

ou,

$$A_{(c)} = \frac{2\pi r \cdot r}{2},$$

portanto,

$$A_{(c)} = \pi r^2.$$

5 GEOMETRIA ESPACIAL: Volume

Neste Capítulo apresenta-se os principais sólidos, (Prisma, Cilindro, Pirâmide, Tronco de Pirâmide, Cone, Tronco de Cone e Esfera) e aborda-se o cálculo de seus volumes. Para isso utiliza-se as seguintes obras: Muniz Neto (2013); Doria (2006); Dante (2016); Kilhian (2009) e Kuadro.

DEFINIÇÃO 5.1. *O Volume de um sólido é uma medida do espaço que ele ocupa.*

Calcular o volume de um sólido significa comparar o espaço ocupado por ele, com o espaço ocupado por outro sólido tomado como referencial.

A cada sólido mensurável S é possível associar um número real $V_{(S)}$, denominado o **volume** de S , de tal maneira que as seguintes condições (postulados) sejam satisfeitas:

1. Se S é um cubo de aresta 1, então $V_{(S)} = 1$.
2. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $Int(S_1) \cap Int(S_2) = \emptyset$ e $S_1 \cup S_2$ é mensurável, então $V_{(S_1+S_2)} = V_{(S_1)} + V_{(S_2)}$.
3. Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis, tais que $S_1 \subset S_2$, então $V_{(S_1)} \leq V_{(S_2)}$.
4. (**Princípio de Cavalieri II**). Se S_1 e S_2 são sólidos mensuráveis e α é um plano tal que, para todo plano $\alpha' // \alpha$, tenhamos $A_{(S_1 \cap \alpha')} = A_{(S_2 \cap \alpha')}$, então $V_{(S_1)} = V_{(S_2)}$.
5. Se S_1 é um sólido mensurável, e S_2 puder ser obtido de S_1 por meio de uma translação ao longo de um vetor, uma rotação ao longo de um eixo ou uma reflexão ao longo de um plano, então S_2 também é mensurável e $V_{(S_1)} = V_{(S_2)}$.

Com esses cinco postulados é possível demonstrar e/ou deduzir os volumes dos principais sólidos geométricos.

5.1 Volume do Cubo

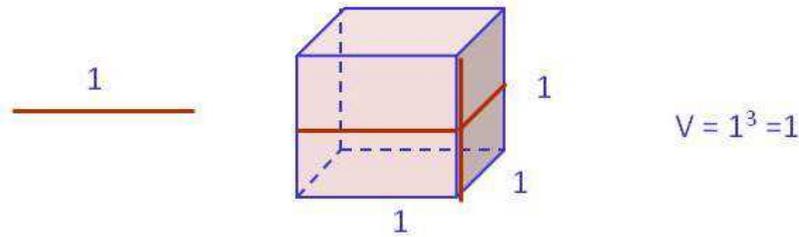
PROPOSIÇÃO 5.1. *Seja C um cubo de aresta l , então seu volume $V_{(C)}$ é igual a l^3 .*

DEDUÇÃO: Pelo postula I, o volume de um cubo de aresta 1 é igual 1, Figura 16.

Tomando-se oito cubos unitários pode-se formar um cubo de aresta 2, logo um cubo de arestas iguais a 2 tem volume igual a $8 = 2^3$, semelhantemente, tomando 27 cubos unitários pode-se formar um cubo de arestas iguais a 3 o que mostra que o volume de um cubo de arestas iguais a 3 é igual a $27 = 3^3$, Figura 17.

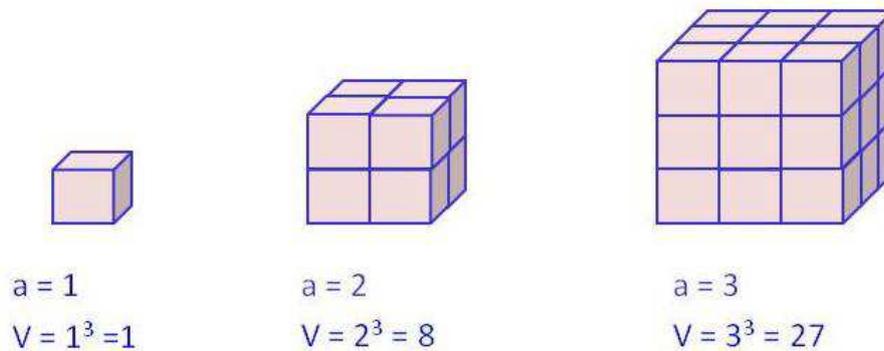
Seguindo esse raciocínio, se os cubos $C_{(4)}$, $C_{(5)}$, $C_{(6)}$, ..., $C_{(l)}$ tem arestas iguais a 4, 5, 6, ..., l então, por recorrência, podemos deduzir que $V_{(C_{(4)})} = 4^3$, $V_{(C_{(5)})} = 5^3$,

Figura 16: Cubo Unitário



Fonte: Matemática e suas Tecnologias

Figura 17: Cubos



Fonte: Matemática e suas Tecnologias

$V_{(C_{(6)})} = 6^3, \dots, V_{(C_{(l)})} = l^3$, respectivamente. Disso se deduz que o volume de um cubo de arestas l é dado por:

$$V_{(C_{(l)})} = l^3.$$

5.2 Volume de Prisma

DEFINIÇÃO 5.2. *O Prisma é um sólido geométrico cujas bases são polígonos congruentes que estão em planos paralelos e suas faces laterais são paralelogramos.*

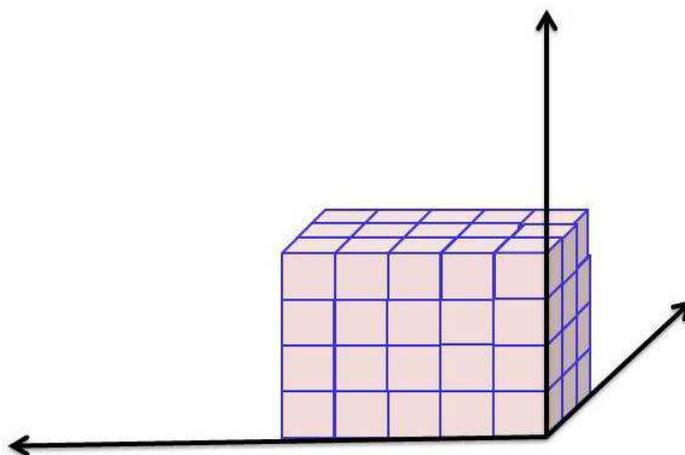
O Prisma pode ser **reto**, quando suas arestas são perpendiculares às suas bases ou **oblíquo**, caso contrário. A distância entre um plano que contém uma base e o plano que contém a outra base é a altura (h) do prisma.

PROPOSIÇÃO 5.2. *Seja P um prisma cuja área da base B é $A_{(B)}$ e altura é h , Então, $V_{(P)} = A_{(B)}h$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja P um prisma reto retângulo, cujas arestas têm comprimentos a , b e $c \in \mathbb{N}$, particionando P em abc cubos de arestas 1, segue dos postulados 1 e 2 que o volume do prisma é abc .

Podemos perceber, conforme a Figura 18, que mantidas duas arestas o volume do prisma é diretamente proporcional à outra aresta e que essa aresta é exatamente a altura h do prisma, além disso, o produto das duas arestas é a área da base, logo:

Figura 18: Prisma Reto Retângulo



Fonte: Próprio autor

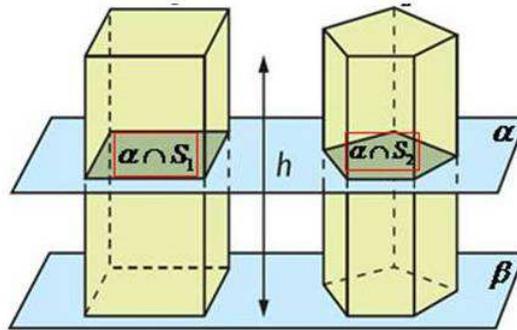
$$V_{(P)} = abc = A_{(B)}h.$$

Essa demonstração estabelece a fórmula para o volume de prisma reto retângulo, para validar sua aplicação no cálculo de volumes de outros prismas, suponhamos um prisma P qualquer (Reto ou Oblíquo) de base B poligonal qualquer e seja P' um prisma reto retângulo de base B' , tais que, $A_{(B)} = A_{(B')}$ e, B e B' estejam contidos num mesmo plano β , com P e P' contido num mesmo semiespaço, dos que β determina, conforme Figura 19.

Se α é um plano paralelo a β , a igualdade das alturas dos prismas garante que $P \cap \alpha \neq \emptyset$ se, e só se, $P' \cap \alpha \neq \emptyset$. Ademais, quando tal ocorre, as interseções são respectivamente congruentes a B e B' , logo, pelo Postulado IV (Princípio de Cavalieri II) e proposição 4.2

$$V_{(P)} = V_{(P')} = A_{(B)}h.$$

Figura 19: Prismas



Fonte: Próprio autor

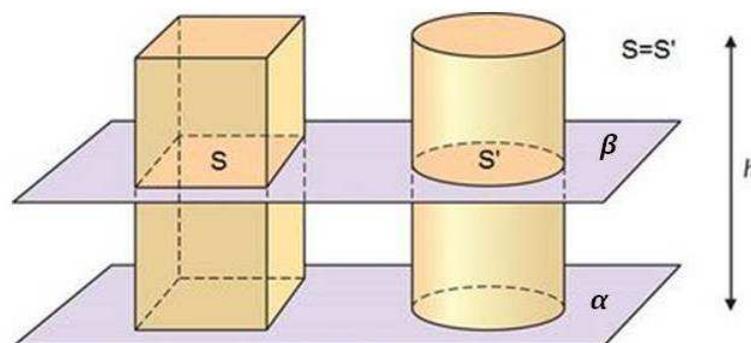
5.3 Volume de Cilindro

PROPOSIÇÃO 5.3. *Seja C um cilindro sólido de revolução, de raio R e altura h , então o volume de C é igual a $\pi R^2 h$.*

DEMONSTRAÇÃO: Tomando um cilindro C qualquer (Reto ou Oblíquo) de base S' e seja P um prisma reto retângulo de base S , tais que, $A_{(S')} = A_{(S)}$ e C e P estejam contidos num mesmo plano α , com C e P contido num mesmo semiespaço, dos que α determina.

Se β é um plano paralelo a α , a igualdade das alturas do prismas e cilindro garante que $P \cap \beta \neq \emptyset$ se, e só se, $C \cap \beta \neq \emptyset$. Ademais, quando tal ocorre, as interseções são respectivamente congruentes a S e S' conforme a Figura 20.

Figura 20: Prisma e Cilindro



Fonte: Próprio autor

Logo, pelo Postulado IV (Princípio de Cavalieri II) e proposição 4.2

$$V_{(C)} = V_{(P)} = A_{(B)}h.$$

Como a base do cilindro C é um círculo cuja área é dada por πR^2 , tem-se que

$$V_{(C)} = \pi R^2 h.$$

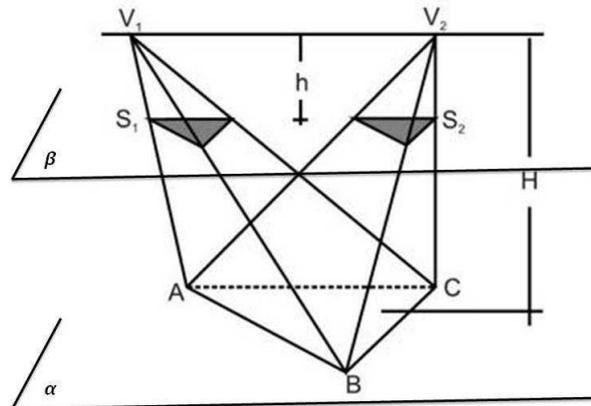
5.4 Volume de Pirâmide

Para obter o volume da pirâmide aborda-se, primeiro o lema que relaciona volume de pirâmides.

LEMA 5.1. *Duas pirâmides de mesma base triangular e mesma altura têm mesmo volume.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja ΔABC o triângulo base e H a altura das pirâmides. Conforme Figura 21, sejam P_1 e P_2 pirâmides com base o triângulo ΔABC contido no plano α e vértices V_1 e V_2 , respectivamente. Sejam S_1 e S_2 secções transversais obtidas na inter-

Figura 21: Pirâmides com Mesma Base e Mesma Altura



Fonte: Próprio autor

secção com o plano β distando $H - h$ de α . A seção transversal de P_1 e a seção transversal de P_2 são ambas triângulos semelhantes ao triângulo ΔABC com razão de semelhança igual a $\frac{h}{H}$. Desta forma, se a área de ΔABC é A , a área de S_1 é A_1 e a área de S_2 é A_2 , temos

$$\frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Consequentemente, $A_1 = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, (Postulado IV), os volumes da pirâmides P_1 e P_2 são iguais.

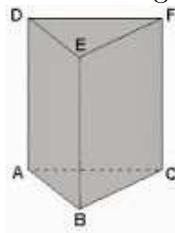
Para obter uma expressão para o Volume de uma pirâmide, a ideia é mostrar que podemos decompor um prisma em três pirâmides de volumes iguais.

PROPOSIÇÃO 5.4. *O volume de uma pirâmide com base triangular B e altura h é dado por*

$$V_{(P)} = \frac{1}{3}A_{(B)}h.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $ABCDEF$ o prisma P triangular como indicado da Figura 22.

Figura 22: Prisma Triangular $ABCDEF$



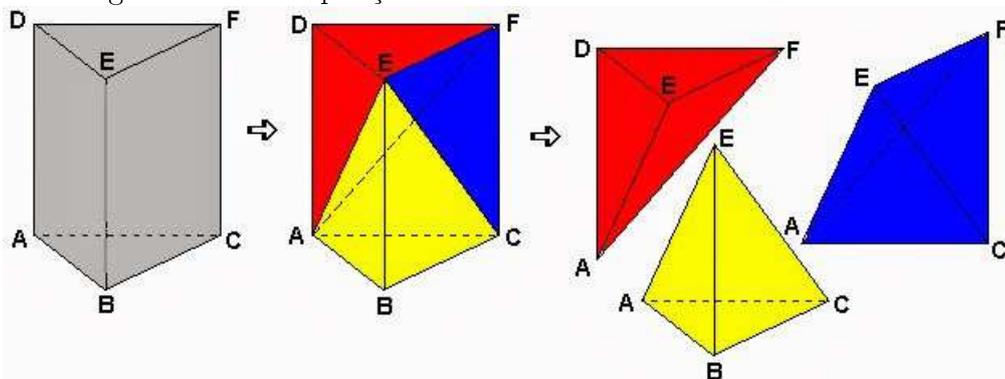
Fonte: Matemática em Ação

Traçando as diagonais das faces laterais AE , EC e AF , decompõe-se o prisma em três pirâmides triangulares, $P_1 = ADEF$, $P_2 = EABC$ e $P_3 = EACF$, onde a primeira letra corresponde ao vértice e as outras três aos vértices da base. Assim,

$$P = P_1 \cup P_2 \cup P_3,$$

conforme se observa da Figura 23.

Figura 23: Decomposição do Prisma $ABCDEF$ em Três Pirâmides



Fonte: Matemática em Ação

Uma vez que as pirâmides $ADEF$ e $EABC$ têm a mesma altura e as suas bases são congruentes, pelo Lema 6.1, elas têm mesmo volume, ou seja $V_1=V_2$. Por outro lado a pirâmide $ADEF$ é a mesma $EADF$ que tem mesma altura da pirâmide $EACF$ e base congruente, logo, pelo Lema 4.1 têm mesmo volume, conseqüentemente $V_3=V_2=V_1$.

Sendo B a base do prisma e A_B a sua área, vimos que o volume do prisma é dado por $A_{(B)}h$, portanto o volume da pirâmide V_P é

$$V_P = \frac{1}{3}V_{prisma} = \frac{1}{3}A_{(B)}h.$$

Ao considerar P uma pirâmide qualquer, pode-se decompô-la em pirâmides de base triangulares e assim, pelo princípio de Cavalieri,

$$V_P = \frac{1}{3}A_{(B)}h.$$

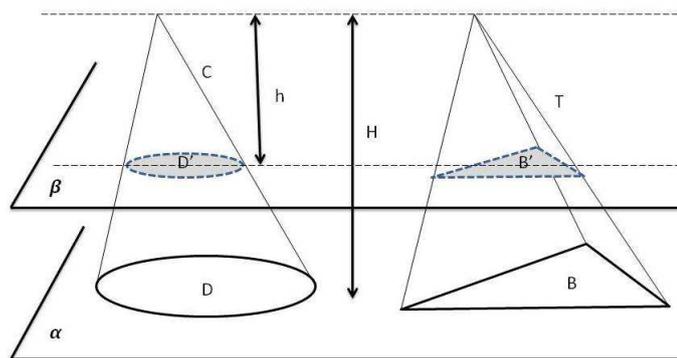
5.5 Volume de Cone

PROPOSIÇÃO 5.5. *Se C é um Cone de raio R e altura h , então*

$$V_{(C)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja T um tetraedro de mesma altura h que o cone C , cuja base B é um triângulo de área igual à área do disco D , base do cone, e tal que B e D estejam em um mesmo plano α , com C e T em um mesmo semiespaço, dos que α determina, Figura 24.

Figura 24: Cone e Pirâmide



Fonte: Próprio autor

Se β é um plano paralelo a α , a igualdade das alturas do cone e do tetraedro garante que $T \cap \beta \neq \emptyset$ se, e somente se, $C \cap \beta \neq \emptyset$. Neste caso, seja h distância do vértice do cone (ou do tetraedro, tanto faz) a β , $C \cap \beta = D'$ e $C \cap \beta = B'$, segue que

$$\frac{A_{(B')}}{A_{(B)}} = \frac{A_{(B')}}{B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = \frac{A_{(D')}}{A_{(D)}},$$

onde R' é o raio de D' . Mas, como $A_{(B)} = A_{(D)}$, segue daí que $A_{(B')} = A_{(D')}$. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, temos

$$V_{(C)} = V_{(T)} = \frac{1}{3}A_{(B)}H = \frac{1}{3}A_{(D)}H = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

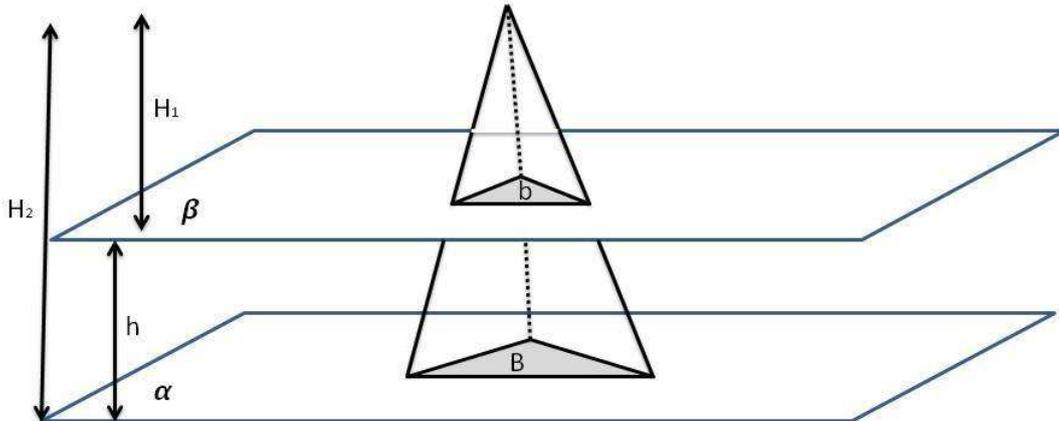
5.6 Volume do Tronco de Pirâmide

PROPOSIÇÃO 5.6. *Se T é um Tronco de Pirâmide, sua área da base maior é $A_{(B)}$, sua área da base menor é $A_{(b)}$ e altura h , então*

$$V_{(T)} = \frac{h}{3}(A_{(B)} + \sqrt{A_{(B)}A_{(b)}} + A_{(b)}).$$

DEMONSTRAÇÃO: Tomando uma pirâmide P , de altura H_2 e de base B , tal que B esteja contida no plano α . Considerando também um plano β paralelo a α , que secciona P a uma distância h de α , tal que entre α e β fica determinado um sólido, que é o **Tronco de Pirâmide (T)** de altura h , base maior B e base menor b conforme a Figura 25.

Figura 25: Determinação de Tronco de Pirâmide



Fonte: Próprio autor

Percebe-se, que o plano β determina uma pirâmide semelhante P' à pirâmide P , de altura H_1 e base b . Portanto, o Volume do tronco de pirâmide, $V_{(T)}$, pode ser dado por

$$V_{(T)} = V_1 - V_2,$$

onde V_1 é o volume de P e V_2 é o volume de P' . Logo, pela proposição 5.4 tem-se

$$V_{(T)} = \frac{1}{3}A_{(B)}H_2 - \frac{1}{3}A_{(b)}H_1.$$

Como $H_2 = H_1 + h$ tem-se

$$V_{(T)} = \frac{1}{3}A_{(B)}(H_1 + h) - \frac{1}{3}A_{(b)}H_1$$

$$V_{(T)} = \frac{1}{3}(A_{(B)}(H_1 + h) - A_{(b)}H_1)$$

$$V_{(T)} = \frac{1}{3}(A_{(B)}H_1 + A_{(B)}h - A_{(b)}H_1),$$

$$V_{(T)} = \frac{1}{3}[A_{(B)}h + (A_{(B)} - A_{(b)})H_1]. \quad (7)$$

Por outro lado,

$$\frac{A_{(B)}}{A_{(b)}} = k^2 \text{ e } \frac{H_2}{H_1} = k,$$

como

$$\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 = k^2,$$

tem-se

$$\frac{A_{(B)}}{A_{(b)}} = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2.$$

Logo

$$\frac{\sqrt{A_{(B)}}}{\sqrt{A_{(b)}}} = \frac{H_2}{H_1}.$$

Como $H_2 = H_1 + h$, tem-se

$$\frac{\sqrt{A_{(B)}}}{\sqrt{A_{(b)}}} = \frac{H_1 + h}{H_1},$$

e assim

$$\sqrt{A_{(B)}}H_1 = \sqrt{A_{(b)}}(H_1 + h),$$

logo

$$(\sqrt{A_{(B)}} - \sqrt{A_{(b)}})H_1 = A_{(b)}h.$$

Portanto

$$H_1 = \frac{A_{(b)}h}{\sqrt{A_{(B)}} - \sqrt{A_{(b)}}}. \quad (8)$$

Observe que,

$$A_{(B)} - A_{(b)} = (\sqrt{A_{(B)}})^2 - (\sqrt{A_{(b)}})^2 = (A_{(B)} - A_{(b)})(A_{(B)} + A_{(b)}).$$

Substituindo o valor de H_1 da equação (8) na equação (7) tem-se

$$V_{(T)} = \frac{1}{3} \left[A_{(B)}h + (\sqrt{A_{(B)}}^2 - \sqrt{A_{(b)}}^2) \frac{\sqrt{A_{(b)}}h}{\sqrt{A_{(B)}} - \sqrt{A_{(b)}}} \right],$$

que equivale a

$$V_{(T)} = \frac{h}{3} \left[A_{(B)} + (\sqrt{A_{(B)}} - \sqrt{A_{(b)}})(\sqrt{A_{(B)}} + \sqrt{A_{(b)}}) \frac{\sqrt{A_{(b)}}}{\sqrt{A_{(B)}} - \sqrt{A_{(b)}}} \right],$$

assim

$$V_{(T)} = \frac{h}{3} [A_{(B)} + (\sqrt{A_{(B)}} + \sqrt{A_{(b)}})\sqrt{A_{(b)}}].$$

Portanto,

$$V_{(T)} = \frac{h}{3}(A_{(B)} + \sqrt{A_{(B)}A_{(b)}} + A_{(b)}).$$

5.7 Volume do Tronco de Cone

PROPOSIÇÃO 5.7. *Se T é um Tronco de Cone, sendo o raio da base maior é R , o raio da base menor é r e altura H , então*

$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3}H(R^2 + Rr + r^2).$$

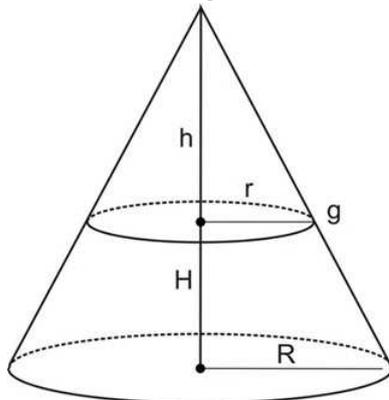
DEMONSTRAÇÃO: Dado um cone reto C seccionado a uma altura H de sua base B , conforme Figura 26.

O sólido formado entre a secção e a base é o Tronco de Cone T , de altura H , raio da base maior R e raio da base menor r , conforme Figura 27.

Assim

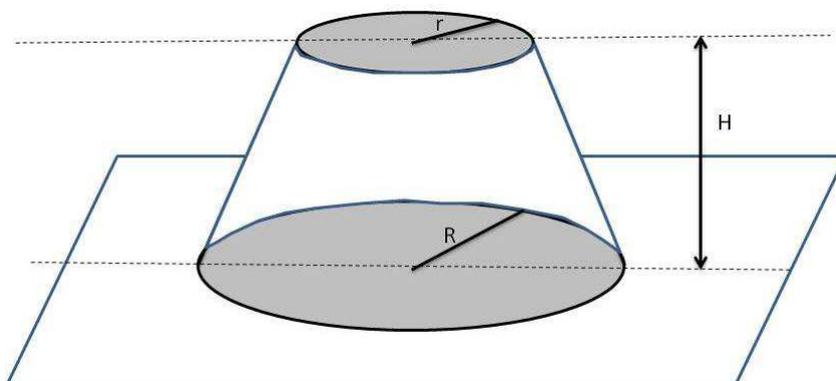
$$V_{(T)} = V_{(C)} - V_{(C')}.$$

Figura 26: Determinação de Tronco de Cone



Fonte: O Baricentro da Mente

Figura 27: Tronco de Cone



Fonte: Próprio autor

Como $V_{(C')}$ é o volume do cone formado acima da secção, e assim, pela proposição 5.5

$$V_{(T)} = \frac{1}{3}\pi R^2(H + h) - \frac{1}{3}\pi r^2h$$

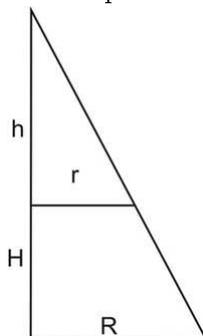
$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3}(R^2H + R^2h - r^2h)$$

$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3}[R^2H + h(R^2 - r^2)] \quad (9)$$

Destacando o triângulo retângulo da Figura 28, formado por um secção vertical do cone da Figura 26. Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{H + h}{h} = \frac{R}{r}.$$

Figura 28: Triângulo Formado por uma Secção Vertical no Cone



Fonte: O Baricentro da Mente

Assim,

$$(H + h)r = Rh$$

$$Hr + hr = Rh$$

$$Hr = Rh - hr$$

$$Hr = (R - r)h,$$

logo,

$$h = \frac{Hr}{R - r}. \quad (10)$$

Substituindo o valor de h da equação (10) na equação (9) tem-se

$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3} \left[R^2 H + \left(\frac{Hr}{R - r} \right) (R^2 - r^2) \right]$$

$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3} \left[R^2 H + \left(\frac{Hr}{R - r} \right) (R - r)(R + r) \right]$$

$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3} [R^2 H + Hr(R + r)].$$

Portanto,

$$V_{(T)} = \frac{\pi}{3} H (R^2 + Rr + r^2).$$

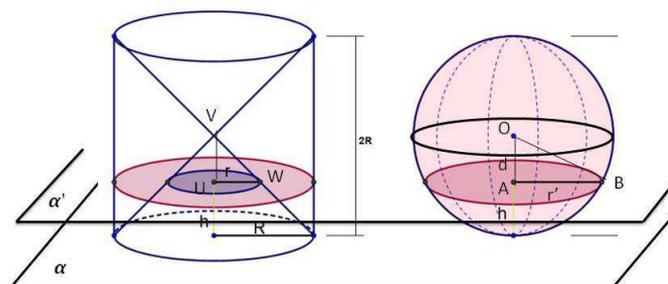
5.8 Volume da Esfera

PROPOSIÇÃO 5.8. *Se E é uma Esfera de raio R , então o seu volume é dado por*

$$V_{(E)} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja C um cilindro sólido de altura $2R$, tendo por base dois círculos de raio R , conforme Figura 29.

Figura 29: Determinação do Volume da Esfera



Fonte: UDESC

Construindo em C dois cones sólidos, ambos com altura R e tendo por bases as bases do cilindro; então, o vértice dos cones coincide com o centro do quadrado. Por fim, seja S o sólido formado pela porção do cilindro exterior à união dos cones, que é denominada **anticlepsidra**.

Sejam α o plano de uma das bases do cilindro e E uma esfera de centro O e raio R , tangente a α e situada, em relação a α , no mesmo semiespaço que C , conforme a Figura 29.

Seja α' um plano paralelo a α , contido no mesmo semiespaço, em relação a α , que S e E , e situado à distância d do ponto O , com $d < R$. Como C tem altura igual ao diâmetro de E , segue que α' intersecta S se, e só se intersecta E . Sendo esse o caso, tem-se que α' secciona S segundo uma coroa circular C' de raios d e R , enquanto secciona E em um disco D de centro A e raio $\sqrt{R^2 - d^2}$, portanto

$$A_{(C')} = \pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2) = A_{(D)}.$$

Logo, pelo princípio de Cavalieri, pode-se afirmar que o volume da esfera E é igual ao volume da anticlepsidra. Assim, sendo P um cone, temos

$$V_{(E)} = V_{(C)} - 2V_{(P)}$$

$$= \pi R^2 \cdot 2R - 2\left(\frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\right)$$

$$= 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{6\pi R^3}{3} - \frac{2\pi R^3}{3},$$

conclui-se a demonstração

$$V_{(E)} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

6 ABORDAGEM DA SEQUÊNCIA NA SEGUNDA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Nesse capítulo apresenta-se a sequência didática, a maneira como foi concebida, todos os procedimentos metodológicos utilizados para sua aplicação na Segunda Série do Ensino Médio e também a maneira como foi feita a análise da sua aplicação para aferição dos resultados.

6.1 Procedimentos Metodológicos e Análise dos Resultados

A sequência Didática proposta é composta de duas Etapas, a primeira trabalha o cálculo de área dos principais polígonos e a segunda trabalha volumes dos principais sólidos, esta etapa da Sequência é apresentada neste trabalho como sugestão para aplicação imediatamente à primeira, mas todos os resultados estão ligados à primeira etapa da sequência objeto de nossa pesquisa.

A primeira etapa desta Sequência Didática foi aplicada na Escola Estadual Centro de Ensino Cândido Mendes Anexo II, que fica localizada na comunidade Palestina, Distrito do Município de Brejo, Estado do Maranhão, a cerca de trinta quilômetros da sede.

Em um contexto basicamente rural, e longe de centros urbanos foi fundamental, antes de qualquer coisa, um levantamento dos espaços, verificando na comunidade os potenciais para exploração.

Feito o levantamento dos espaços, o professor pesquisador escolheu a turma da Segunda Série X onde é professor titular, para a aplicação desta sequência e para efeito de comparação de resultados, a Segunda Série Y, onde também é professor titular.

A turma X, foi escolhida por ser uma turma diversificada, por apresentar resultados menos satisfatórios e pouca motivação ao estudo relacionado à disciplina, em comparação com a Turma Y.

Foi encaminhado ao Gestor da Escola um termo de consentimento, (APÊNDICE A) para que as turmas fossem liberadas a participarem da pesquisa, além disso, as turmas foram informadas sobre todos os procedimentos, as atividades que seriam submetidas e como seriam avaliadas durante a aplicação da Sequência Didática e cada aluno participante, menor de idade, levou o termo de consentimento (APÊNDICE B) para que os pais ou responsáveis assinassem e fossem devolvidos ao professor pesquisador para que anexasse aos demais documentos.

Para efeito de comparação e análise de resultados, inicialmente fez-se um questionário (APÊNDICE C), para diagnosticar o conhecimento dos alunos antes de aplicar a

sequência didática. Neste questionário verificou-se, nas duas turmas, a capacidade dos alunos de identificar os principais polígonos e calcular a sua área, além de verificar se são capazes de relacionar coisas do cotidiano a esses polígonos. Os resultados da avaliação diagnóstica são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Diagnóstico do Conhecimento dos Alunos sobre Polígonos

Análise preliminar do conhecimento dos alunos sobre os principais polígonos						
	Turma X	Turma Y	Totais	Percentuais	Percentuais Turma X	Percentuais Turma Y
Quant. Alunos	30	35	65	100%	100%	100%
Quadrado	12	20	32	49%	40%	57%
Retângulo	8	17	25	38%	27%	49%
Paralelogramo	5	11	16	25%	17%	31%
Triângulo	25	35	60	92%	83%	100%
Trapézio	0	2	2	3%	0%	6%
Losango	0	1	1	2%	0%	3%
Polígono Regular	0	2	2	3%	0%	6%
Círculo	30	35	65	100%	100%	100%

Fonte: Próprio autor

Vê-se claramente o déficit em relação ao tema, e a necessidade de enfrentamento, pois num universo de 65 alunos, excetuando o triângulo e o círculo, menos 50% dos alunos mostraram conhecimento mínimo das figuras.

Tabela 2: Alunos que Relacionaram Pelo Menos uma Coisa a um Polígono

Quantidade de Alunos que relacionaram pelo menos uma coisa a um polígono						
	Turma X	Turma Y	Totais	Percentuais	Percentuais Turma X	Percentuais Turma Y
Quant. Alunos	30	35	65	100%	100%	100%
Quadrado	5	10	15	23%	17%	29%
Retângulo	8	12	25	38%	27%	34%
Paralelogramo	0	0	0	0%	0%	0%
Triângulo	0	2	2	3%	0%	6%
Trapézio	0	0	0	0%	0%	0%
Losango	0	0	0	0%	0%	0%
Polígono Regular	0	0	0	0%	0%	0%
Círculo	21	32	53	82%	70%	91%

Fonte: Próprio autor

Solicitando aos alunos a relacionarem um polígono a um objeto ou coisa do seu cotidiano percebe-se ainda mais o déficit em relação ao tema, como mostra a Tabela 2 onde os percentuais são baixíssimos.

Observou-se também que os alunos não sabiam calcular área de nenhum dos polígonos, reforçando ainda mais a certeza de necessidade se enfrentar a problemática.

Feito o diagnóstico das turmas X e Y, deu-se início a intervenção didática na sala X com a Metodologia de Modelagem Matemática, que Segundo (SADOVSKY, 2010,

p. 26), "um processo de modelagem implica, em primeiro lugar, recortar determinada problemática em uma realidade em geral complexa", e

[...] a modelagem faz sempre apelo à realidade na qual está inserido o sistema que deu origem ao modelo trabalhado, [...] uma estratégia de ensino de matemática, buscando relacionar a realidade aos temas escolas (FLORES, 2008, p. 55).

A modelagem deve incorporar, tudo que envolve o objeto de estudo, não devendo excluir qualquer procedimento ou meios pelos quais o sujeito tome posse do saber matemático.

De fato, a matemática não funciona "separando" problemas, técnicas, representações, demonstrações; todas essas "zonas" convergem, de diferentes maneiras, na tarefa de modelagem (SADOVSKY, 2010, p. 29).

Para análise dos resultados adotamos a metodologia de Abordagem Qualitativa, que de acordo com Fontenelle

[...] tem, pois, caráter subjetivo, tendo em vista que o critério para a identificação dos resultados não é numérico, exato, mas valorativo.

Ainda que eventualmente se utilize alguns números, normalmente ela é aplicada a populações pequenas, que não viabilizam uma análise estatística (FONTENELLE, 2017, p. 1).

Essa metodologia se adequou perfeitamente a este trabalho que, de fato faz estudo de caso, e busca contribuir para melhorar a participação do aluno no processo de construção de seu aprendizado e na compreensão do seu cotidiano pelo saber matemático.

Para complementar, Gerhardt e Silveira afirmam que "Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quantificam os valores"(GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 32).

O "recorte", tal qual nos fala Sadovsky, que nos fornece a dinâmica da problemática a ser discutida e por meio da qual se fará toda a modelagem, foi objeto de pesquisa dos alunos que consiste na primeira atividade descrita na próxima seção.

6.2 A Concepção da Sequência Didática

Para Koloski "Uma sequência didática é um conjunto de atividades planejadas para ensinar um conteúdo, organizada de acordo com os objetivos do professor para a aprendizagem dos alunos"(KOLOSKI, 2018, p. 44).

Durante o planejamento das atividades da sequência deve-se priorizar aquelas que sejam mais gerais, ou que englobam vários conteúdos, pois segundo Meireles "Faz-se necessário criar situações didáticas variadas, em que seja possível retomar os conteúdos abordados em diversas oportunidades"(MEIRELES, 2014, p.1). Significa que o professor deve criar situações que proporcione aprendizagem de tal forma que o aluno consiga vivenciar um mesmo objeto de estudo em vários estágios do processo e em variados momentos.

Assim, depois de feito o diagnóstico das turmas X e Y, deu-se início à intervenção didática, com a atividade de pesquisa em campo. Nela os alunos foram divididos em grupos e cada grupo ficou encarregado de identificar e registrar em foto o máximo de formas geométricas no seu ambiente cotidiano.

Desse registro fotográfico, foram selecionados em sala, pelo professor e os alunos, algumas figuras, comparadas com os polígonos e definiu-se quais delas seriam objetos de estudo e portando usadas na produção de vídeos que forneceriam a problemática a ser modelada durante a aplicação da sequência didática.

Posteriormente foram produzidos os vídeos com as imagens filmadas pelos alunos dos objetos e lugares encontrados durante a pesquisa, sob orientação do professor para que as questões fossem direcionadas ao que se propõe a sequência e ao que se pretendia modelar em cada aula.

Após a apresentação dos vídeos para a turma, deu-se início a atividade de modelagem em sala e as demonstrações das fórmulas com uso de material concreto manipulativo, como sugeriu Leite, "A didática deve formar um conhecimento visível e melhorar o engajamento do aluno. [...] professor e alunos têm que interagir, [...] a prática deve ser contextual"(Informação Verbal) ², nessa sequência didática a participação do aluno foi fundamental, a interação entre professor e aluno indispensável e de grande importância para a observação e compreensão do cotidiano dos sujeitos para fins de aplicação nas atividades.

6.3 Descrição das Atividades

Nesta seção descreveremos as atividades realizadas, os objetivos de cada uma delas e os resultados alcançados.

6.3.1 Atividade I: Os Principais Polígonos.

Feito o diagnóstico foi observado um déficit muito grande em relação ao conteúdo, como já era previsto, por esse motivo esta atividade tem como objetivo sanar esses défi-

²Comentário da Professora Dra. Lusitânia da Silva Leite no II Simpósio Profmat/UEMA, em São Luis, em dezembro de 2018.

cits, ao final dela os alunos deveriam conhecer os nomes de todos os principais polígonos estudados nessa sequência e compreender de forma prática a ideia de área, lado e perímetro, além de produzir vídeos com roteiro ligado ao cotidiano e temática ligada ao cálculo de área.

A atividade exploratória consiste em uma pesquisa fotográfica baseada em uma lista de figuras entregue pelo professor aos grupos de seis alunos, (APÊNDICE D), dentro das comunidades principalmente nos ambientes de convivência dos alunos.

Após o registro fotográfico, foram selecionados os objetos ou locais fotografados, para que fossem produzidos os vídeos com as problemáticas para cada figura da sequência.

Para cada objeto ou local foi elaborada uma situação problema que foi retratada nos vídeos produzidos e repassadas em sala para, a partir daí, serem realizadas as próximas atividades.

Para essa primeira atividade, que consiste na pesquisa, seleção das imagens, gravação e produção do vídeo foram necessárias cinco aulas, na primeira foi entregue a lista além de explicar como os alunos deveriam proceder. Na segunda e na terceira foram selecionadas e identificadas as imagens que seriam exploradas na produção dos vídeos e o roteiro de cada filmagem. Na quarta aula os alunos entregaram os vídeos para a edição e na quinta aula o professor apresentou em sala a versão final do vídeo com toda a problemática a ser modelada durante as próximas atividades.

Após a primeira atividade, os alunos foram instigados a resolver uma lista de problemas (APÊNDICE E). Após essa atividade verificou-se que os alunos detinham conhecimento de todas as figuras a serem estudadas na sequência e compreendiam a ideia de área e de perímetro.

6.3.2 Atividade II: Unidade de Área, Área de Quadrados e Retângulos.

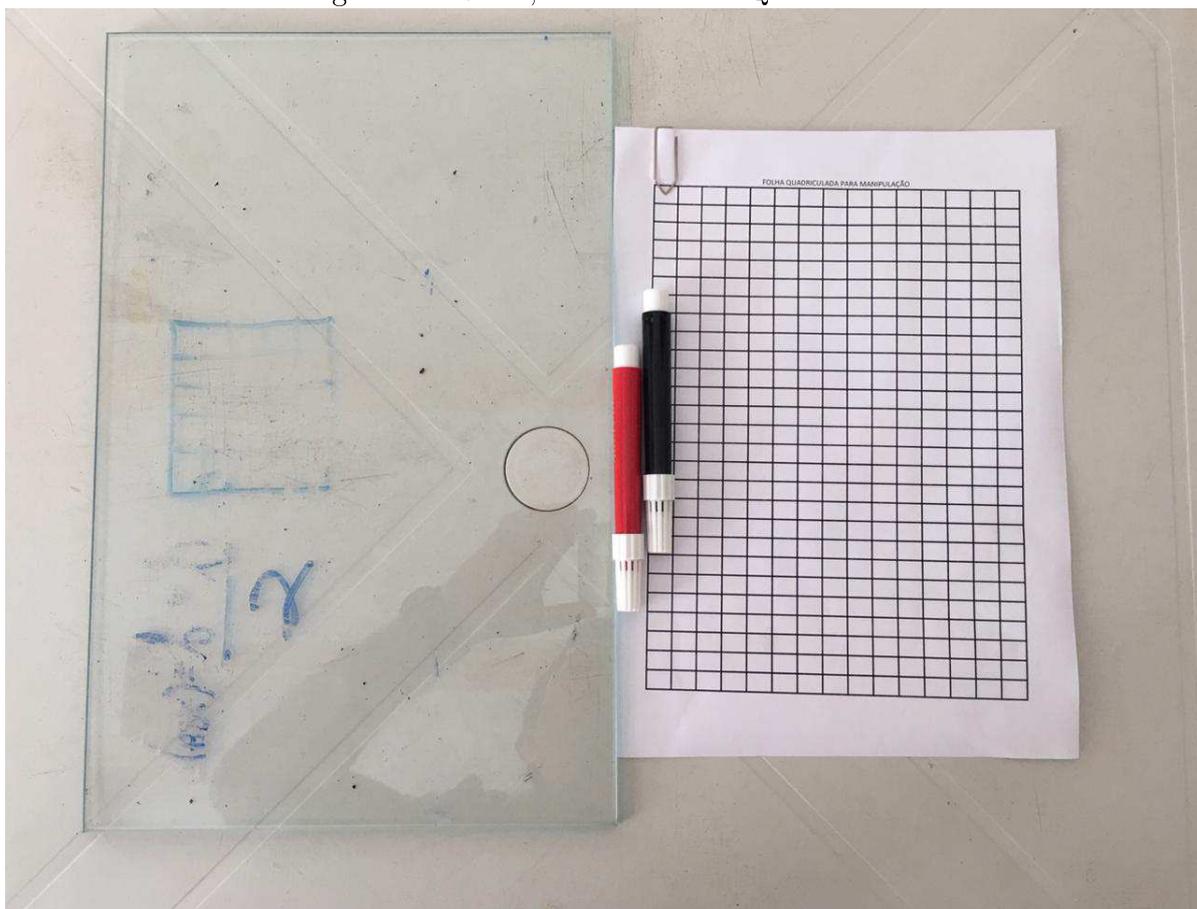
Após essa atividade espera-se que os alunos possam identificar as proposições que modelam a problemática do vídeo produzido em campo e reproduzido em sala; Deduzir com manipulações algébricas e material concreto as fórmulas de cálculo de área de quadrado e retângulo e encontrar soluções para os problemas apresentados em vídeo.

Essa atividade começa com a exibição do vídeo que apresenta uma problemática feita pelos alunos sob supervisão do professor, envolvendo quadrados e retângulos.

Depois da exibição o professor apresenta os quatro postulados de área (ver página 28), e são identificadas as proposições 4.1 e 4.2 que modelam a problemática, depois se deu início às deduções com materiais manipulativos, Figura 30.

Lembrando que depois de feita a análise, foram escolhidas para problematização, quatro fotografias: de um quadro (Figura 31), de uma piscina, (Figura 32), de um muro,

Figura 30: Vidro, Pinceis e Folha Quadriculada



Fonte: Próprio autor

(Figura 33) e uma sala de crianças, (Figura 34).

Para cada figura foram feitos vídeos com a problemática repassada pelo professor. A criatividade ficou a critério dos alunos, aqui descreveremos apenas o que foi exigido pelo professor ao gravar os vídeos.

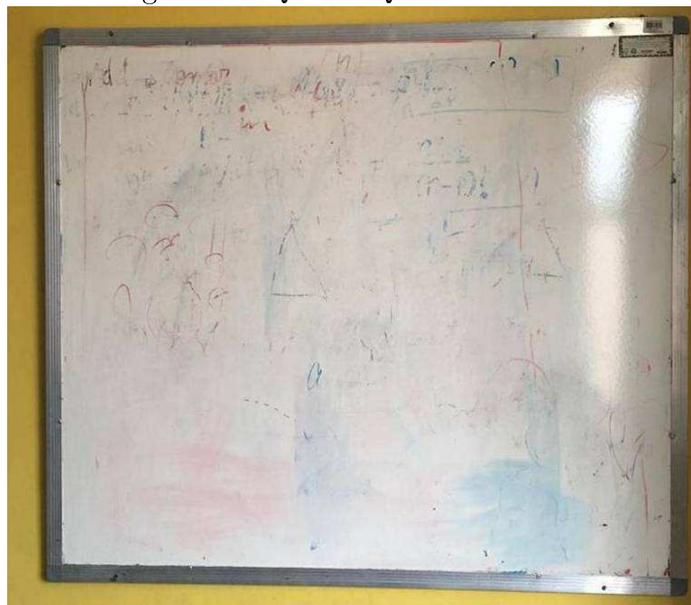
Para o quadro, foi criada a seguinte situação:

Supondo que esse quadro quadrado de 1m de lado tenha sido comprado por R\$ 80,00, e que o preço de um quadro semelhante a esse dependa apenas da área ocupada pela parte onde se escreve. Quanto custaria um quadro desse com 10cm de lado?

Para a piscina a problemática a seguinte:

O Sr. Pedro, dono desta piscina, se incomoda com a quantidade de folhas que caem dentro dela, o que faz ser praticamente impossível mantê-la limpa, por isso resolveu comprar uma lona para cobri-la. Se o m^2 da lona custa R\$ 25,00, quanto o Sr. Pedro deve gastar para cobrir toda piscina?

Figura 31: Quadro Quadrado de 1m de Lado



Fonte: Próprio autor

Figura 32: Piscina de 1,65m por 3,00m



Fonte: Próprio autor

Para o muro a situação foi a seguinte:

Esse muro pertence à senhora Daniele, ela tem interesse em rebocar e pintar. O pedreiro preferido de Daniele, que também é pintor, cobra R\$ 5,00 por m^2 para rebocar e R\$3,50 por m^2 para pintar. Quanto Daniele vai gastar com mão de obra para ter seu

Figura 33: Muro Medindo 7.0m por 2.25m



Fonte: Próprio autor

muro pintado?

Figura 34: Sala das Crianças



Fonte: Próprio autor

E para a sala das crianças a situação foi a seguinte:

Este espaço é destinado para funcionamento de aulas para crianças, como se ver, ainda não foi colocada porta e nem janelas. Observou-se que a porta é um quadrado de lado 2,50m e as janelas são quadrados de lado 1,75m. O sr. Antonio Carlos que é administrador do local pretende colocar portas e janelas de vidro. A vidraçaria ofereceu dois tipos de vidros, fumê e translúcido. Pelo fumê cobra R\$ 480,00 pelo m² instalado

e pelo translúcido R\$ 320,00 pelo m^2 . Quanto o Sr. Antonio pagará se fizer a porta de vidro translúcido e as janelas de vidro fumê?

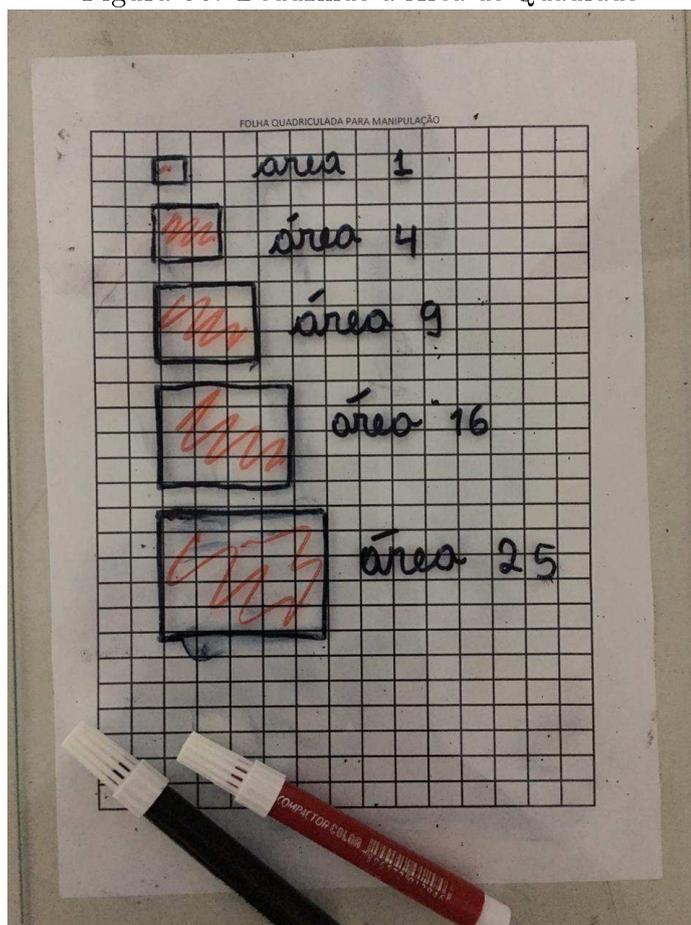
Finalmente professor e alunos fazem as deduções das proposições 4.1 e 4.2 conforme descrito a seguir:

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.1: Um quadrado de lado l tem área igual a l^2 .

Todos os grupos de alunos receberam o material para manipulação mostrado na Figura 30, uma lista indicando o que era pra ser feito e o que se pretendia, (APÊNDICE F).

Nesta lista com três atividades fez-se a dedução por recorrência da proposição 4.1, começando pela área do quadrado de lado 1, depois de lado 2, e assim sucessivamente, até que o aluno conseguisse deduzir como se calcula a área de um quadrado seja qual for a medida de seu lado, conforme Figura 35.

Figura 35: Deduzindo a Área de Quadrado



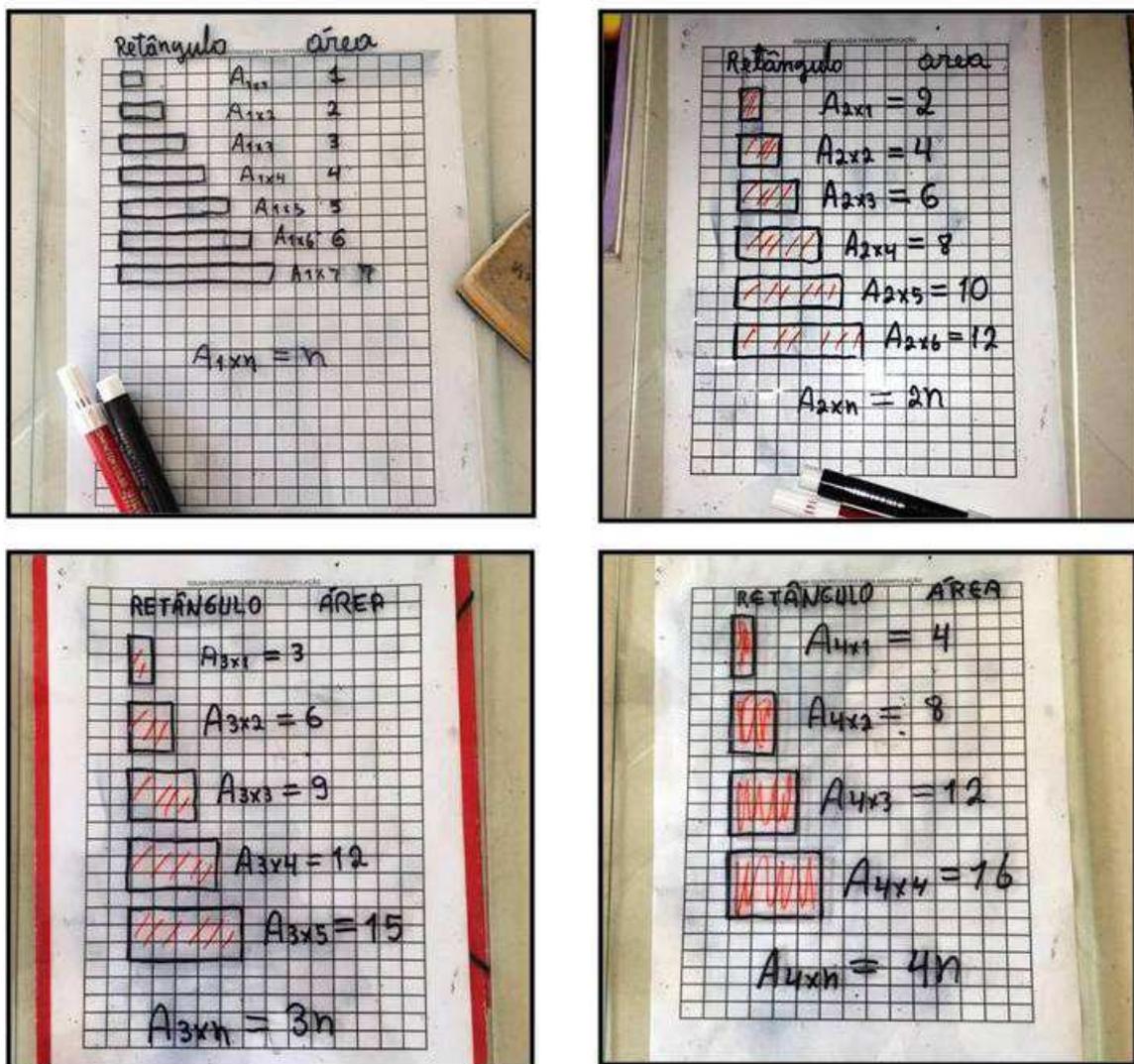
Fonte: Próprio autor

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.2: Um retângulo de lados a , b tem área ab .

Assim como na dedução da proposição 4.1, foram usados os materiais concretos da figura 30, para fazer o que se pede na lista (APÊNDICE G).

Nessa atividade o aluno construiu retângulos usando o material de manipulação até deduzir que a área do retângulo é dada conforme proposição 4.1, veja Figura 36.

Figura 36: Deduzindo a Área de Retângulo



Fonte: Próprio autor

Após as deduções por recorrências e com uso do material concreto, o professor fez em sala as demonstrações das proposições conforme descritas nas páginas 28 a 30 e 31 a 32.

Prosseguindo os alunos responderam as quatro questões dos vídeos.

Para essa atividade foram necessárias três aulas, na primeira foi exibido o vídeo, apresentados os quatro postulados, identificados os objetos de estudo e as proposições, além disso foram distribuídos os materiais para manipulação e as listas de atividades para os grupos; na segunda aula foram feitas as deduções das fórmulas; Na terceira o professor fez as demonstrações e os alunos responderam as quatro questões dos vídeos.

Ao final desta atividade observou-se que os alunos tinham facilidade em usar as fórmulas para cálculo de área, embora alguns ainda apresentassem dificuldade em interpretação. Mas superadas essas dificuldades as questões foram respondidas com facilidade.

6.3.3 Atividade III: Área de Paralelogramo não Retângulo e Triângulo.

Após essa atividade espera-se que os alunos tenham deduzido as proposições 4.3 e 4.4, compreendido as demonstrações da proposições 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 feitas pelo professor em sala, além de responder as questões apresentadas pelo vídeo, descritas a seguir e referentes as imagens das figuras citadas.

Para produção de vídeos o professor selecionou as seguintes imagens: Um terreno com formato de um paralelogramo, conforme Figura 37 e um terreno com formato triangular da Figura 38.

Figura 37: Terreno em Formato de um Paralelogramo



Fonte: Próprio autor

Situação problema envolvendo o terreno:

O mercado imobiliário vem se desenvolvendo na região e por isso os terrenos ficaram cada vez mais caros, em 2002 esse terreno foi comprado pela Sra. Andreia por R\$ 280,00, agora em 2018 o mesmo terreno foi negociado por R\$ 25.000,00. Qual a diferença entre o m^2 negociado em 2002 e o negociado em 2018?

Figura 38: Terreno em Formato de um Triângulo



Fonte: Próprio autor

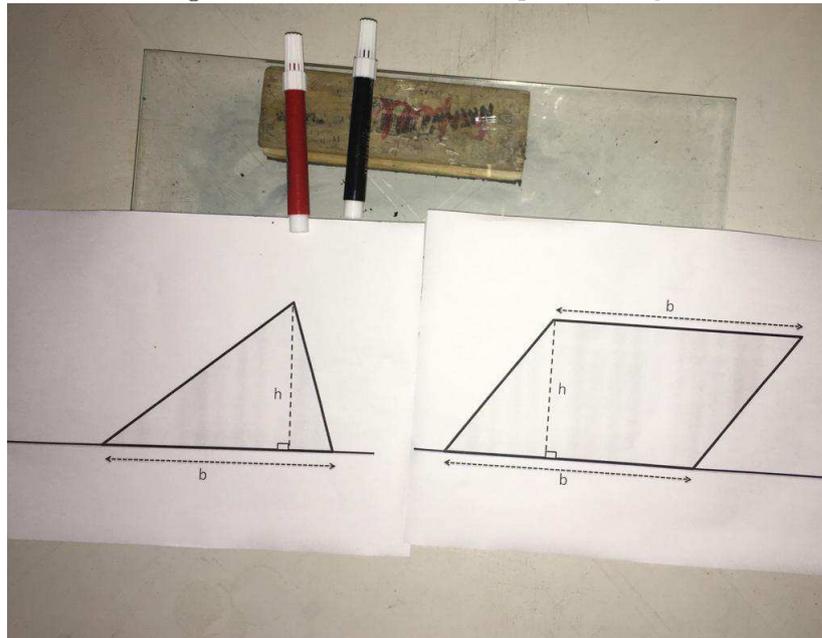
Situação problema envolvendo a área triangular:

Pela falta de emprego formal muitas pessoas recorrem ao trabalho autônomo e informal. Este espaço é usado por duas pessoas para venda de alimentos, pela manhã um senhor vende café e a noite uma senhora vende vários tipos de comidas, inclusive a famosa panelada. Como a prefeitura não faz melhorias no local a anos, os dois comerciantes resolveram fazer eles mesmo. Neste mês eles irão colocar o piso. Sabendo que o m^2 do piso custa R\$ 28,00, e que a mão de obra sai por R\$ 25,00 o m^2 . Quanto cada um pagará, se a despesa for dividida igualmente?

Assim como a atividade anterior, esta se iniciou com a exibição do vídeo que apresenta a problemática a ser modelada em sala, prosseguindo com as deduções das proposições 4.3 e 4.4 com uso do material concreto.

Enquanto o professor faz as demonstrações, os alunos fazem em grupo as manipulações com material mostrado na Figura 39.

Figura 39: Material Usado para Dedução

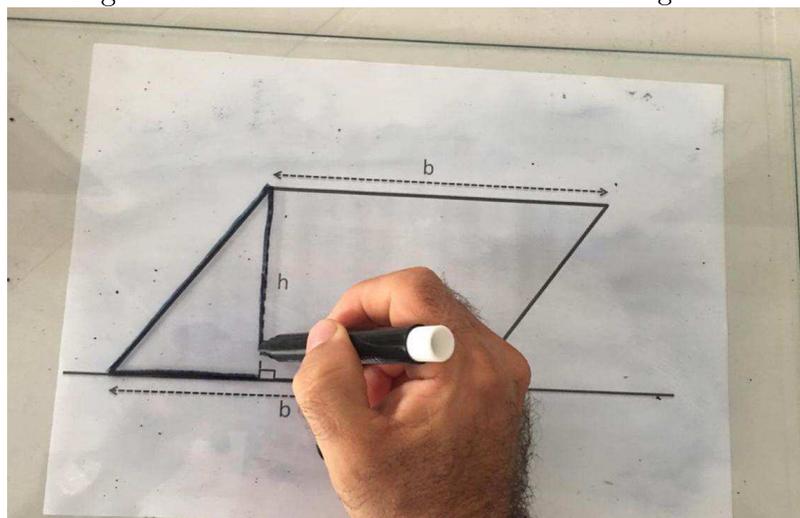


Fonte: Próprio autor

A seguir a descrição do que os alunos fizeram acompanhada de fotos ilustrativas nas Figuras 40 e 41.

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.3: A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a bh .

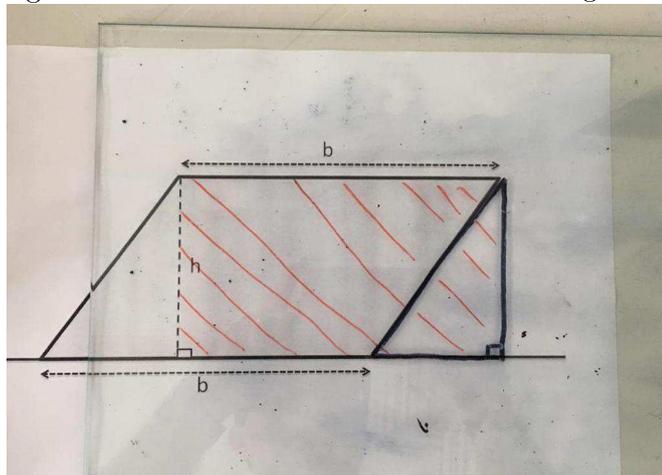
Figura 40: Deduzindo a Área de um Paralelogramo I



Fonte: Próprio autor

No vidro, que está sobre a folha com um paralelogramo, o aluno faz o traçado construindo um triângulo congruente ao triângulo delimitado pela altura do paralelogramo.

Figura 41: Deduzindo a Área de um Paralelogramo II



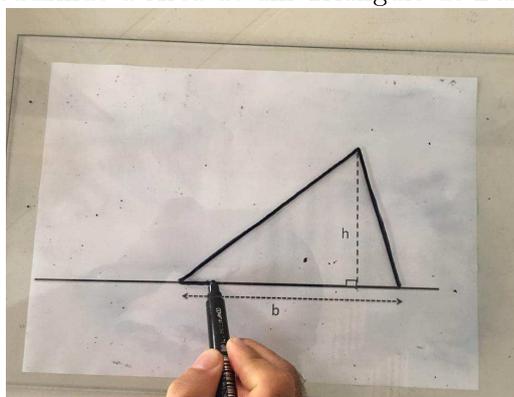
Fonte: Próprio autor

O aluno desloca o triângulo feito no vidro de modo a formar um paralelogramo retângulo, provando que a área do paralelogramo é a mesma do retângulo que tem mesma base e mesma altura.

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.4: A área de um triângulo de base b e altura h é igual a $\frac{bh}{2}$.

Enquanto o professor faz a demonstração da proposição 4.4 os alunos acompanham fazendo manipulação com o material concreto, conforme as Figuras 42 e 43.

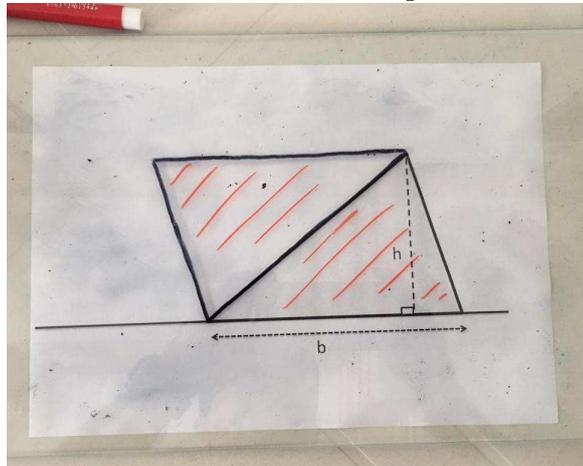
Figura 42: Deduzindo a Área de um Triângulo de Base b e Altura h I



Fonte: Próprio autor

Traçando sobre o vidro constrói-se um triângulo congruente ao triângulo do papel.

Figura 43: Deduzindo a Área de um Triângulo de Base b e Altura h II



Fonte: Próprio autor

Fazendo dois movimentos com o vidro, forma-se um paralelogramo, cuja área já sabemos calcular, como os triângulos são congruentes, deduz-se que a área do triângulo original é igual a metade da área do paralelogramo.

Depois de feitas as deduções e demonstrações das proposições 4.3 e 4.4, o professor fez as demonstrações das proposições 4.5, 4.6 e 4.7 Conforme páginas 35 a 40, que também dizem respeito ao cálculo de área do triângulo.

A seguir os alunos responderam as questões propostas pelo professor na produção do vídeo.

Para essa atividade foram necessárias três aulas. Na primeira foi exibido o vídeo e dedução das proposições. Na segunda e na terceira foram feitas as demonstrações das proposições 4.5, 4.6 e 4.7 encerrando os alunos responderam os problemas do vídeo.

Ao final desta atividade observou-se nos alunos um interesse maior em resolver os problemas propostos, a maioria conseguiu resolver facilmente, outros apresentaram certa dificuldade mas também resolveram as atividades e problemas propostos.

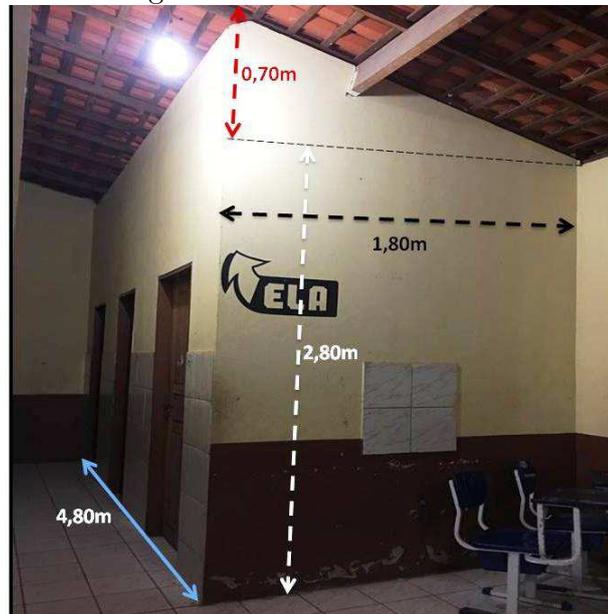
6.3.4 Atividade IV: Área de Trapézio e de Losango.

Após essa atividade é esperado dos alunos que tenham capacidade de deduzir com material concreto as proposições 4.8 e 4.9, calcular área de trapézio, losango e resolver a problemática apresentada em vídeo.

Seguindo o mesmo roteiro das atividades anteriores, primeiro se fez a exibição do vídeo com a problemática a ser modelada conforme as imagens das Figuras 44 e 45 e

descrição a seguir:

Figura 44: Banheiro da Escola



Fonte: Próprio autor

Situação envolvendo os banheiros:

O diretor da Escola pretende pintar as paredes da lateral direita e da frente dos banheiros femininos. Segundo o pintor, um galão de tinta à base d'água de 3,6l é suficiente para pintar $10m^2$ de área. Quantos galões o diretor deve comprar?

Figura 45: Bandeira do Brasil



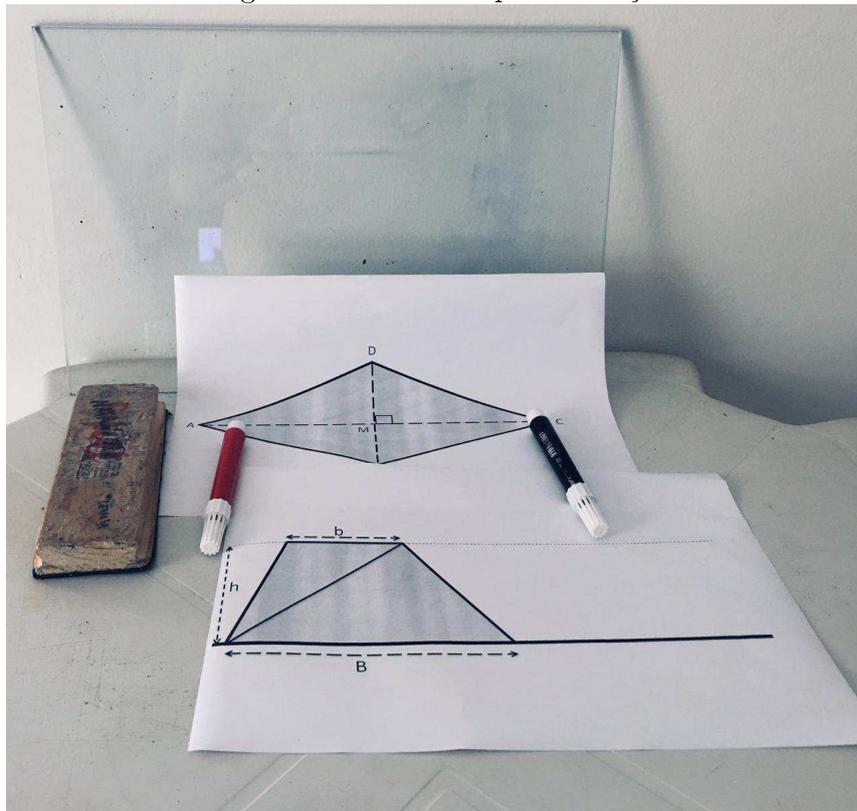
Fonte: Próprio autor

Situação envolvendo a Bandeira do Brasil:

A bandeira brasileira tem três formas geométricas que estudamos em nossa sequência, o Retângulo, Losango e o Círculo. Considerando que o retângulo mede 0,95m por 0,72m e o losango tem diagonais medindo 0,80m e 0,55m, Calcule a área verde da bandeira.

Seguindo relacionamos as proposições aos problemas e fazemos as demonstrações e deduções com os materiais da Figura 46.

Figura 46: Materiais para Dedução



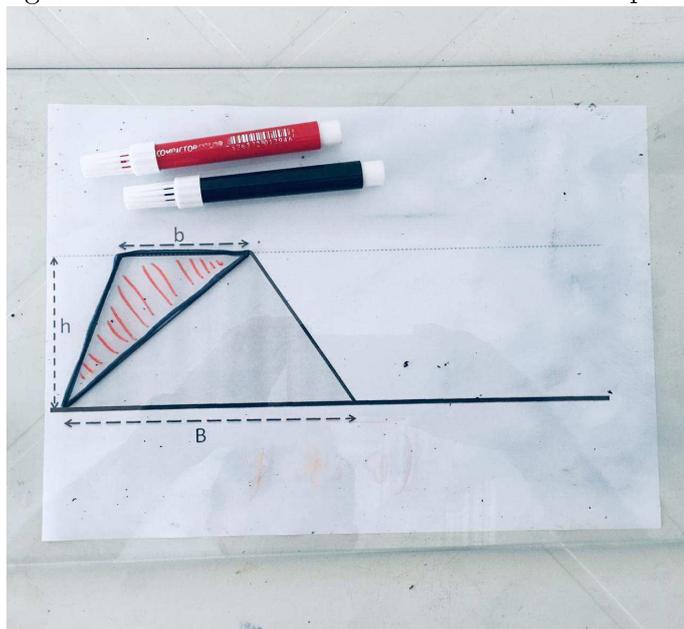
Fonte: Próprio autor

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.8: Se $ABCD$ é um trapézio de bases $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ e altura h , então

$$A(ABCD) = \frac{(a + b)h}{2}.$$

O grupo de alunos faz o tracejado sobre o vidro construindo um triângulo congruente ao triângulo que tem base b e um lado é a *diagonal*, conforme imagem da Figura 47.

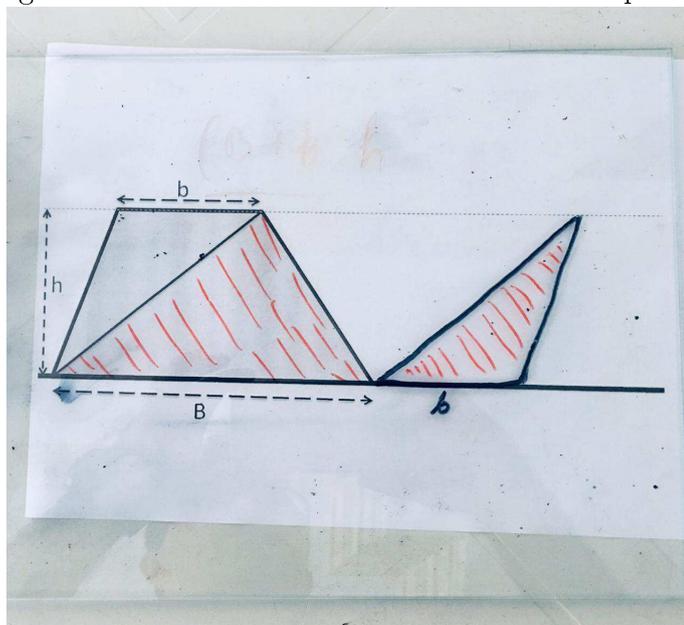
Figura 47: Deduzindo a Fórmula de Área do Trapézio I



Fonte: Próprio autor

Após, com o movimento de rotação no vidro, coloca-se o triângulo construído na mesma reta que contém a base B , conforme Figura 48.

Figura 48: Deduzindo a Fórmula de Área do Trapézio II



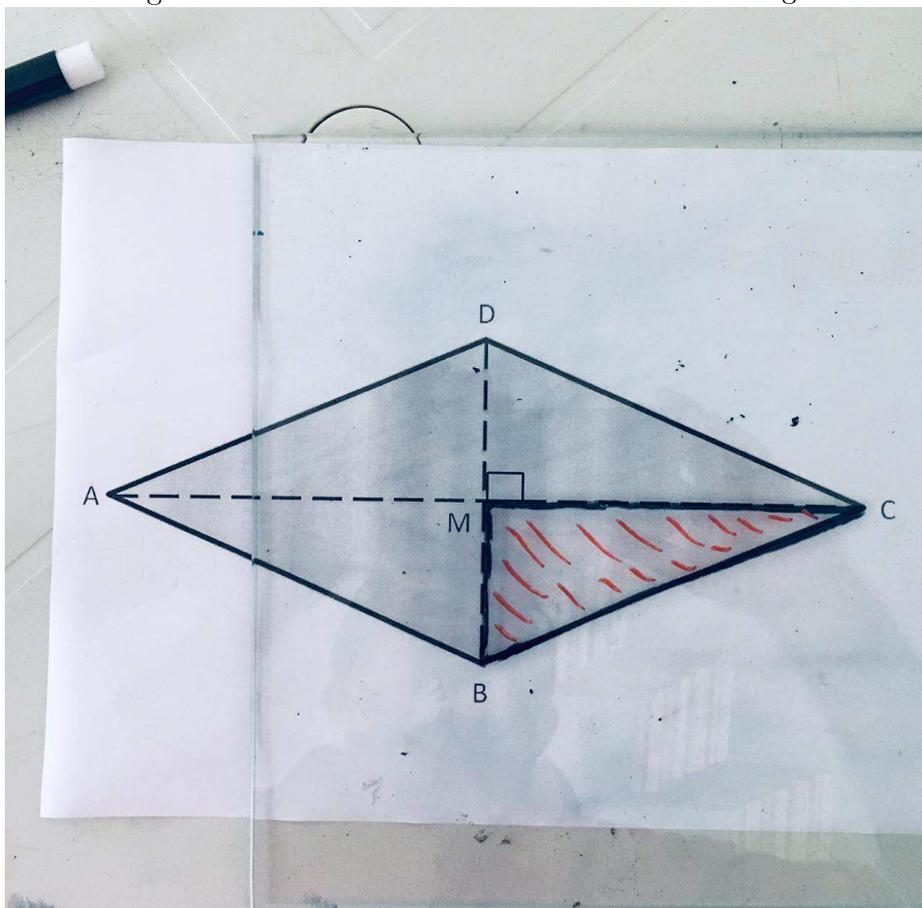
Fonte: Próprio autor

Com isso os alunos percebem que a área do trapézio é igual à soma das áreas dos dois triângulos que têm mesma altura h , bases B , b e daí com algumas manipulações algébricas se chega na fórmula para cálculo de área do trapézio conforme proposição 4.8.

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.9: A área de um losango $ABCD$ é igual à metade do produto das suas diagonais.

Usando o pincel preto constrói-se sobre o vidro um triângulo congruente ao triângulo BMC e destaca-se sua área na cor vermelha, como mostra a Figura 49.

Figura 49: Deduzindo a Fórmula de Área do Losango I

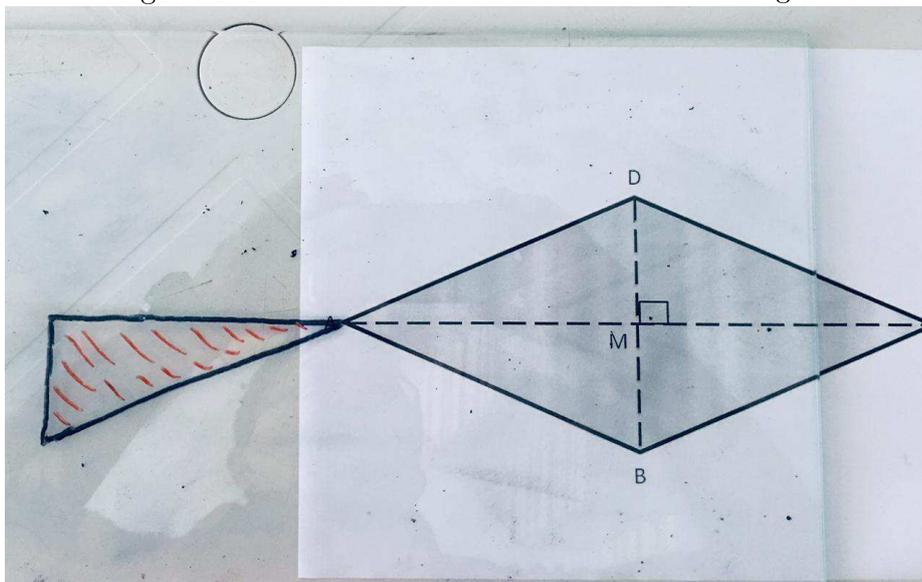


Fonte: Próprio autor

Deslocando o vidro para a esquerda até que o vértice C do triângulo coincida com o vértice A conforme Figura 50.

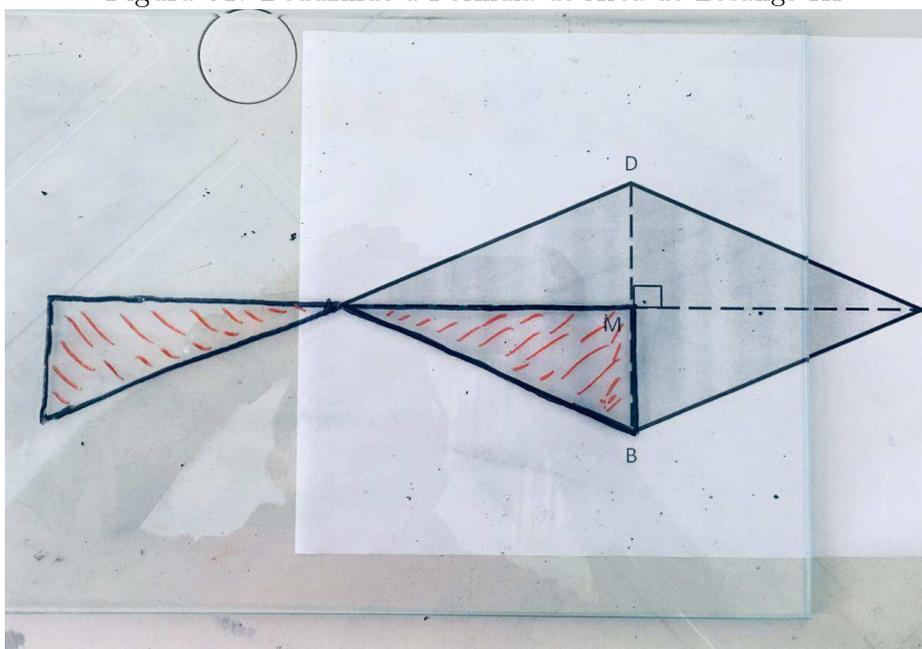
Constrói-se um triângulo congruente ao triângulo ABM e destaca-se sua área também na cor vermelha, conforme Figura 51.

Figura 50: Deduzindo a Fórmula de Área do Losango II



Fonte: Próprio autor

Figura 51: Deduzindo a Fórmula de Área do Losango III

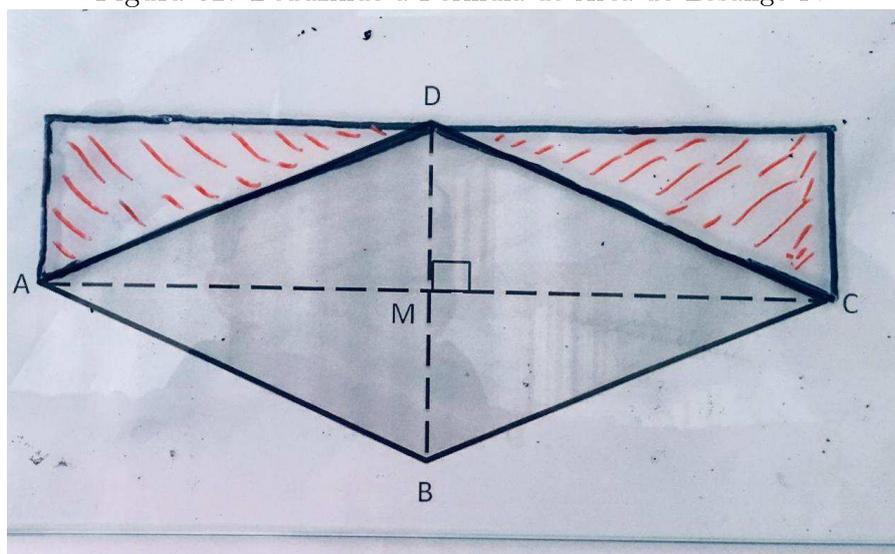


Fonte: Próprio autor

Fazendo um movimento com o vidro colocam-se os triângulos construídos sobre o losango formando um retângulo, como mostra a Figura 52.

Destacando também a outra parte do retângulo e identificando os vértices E e F ,

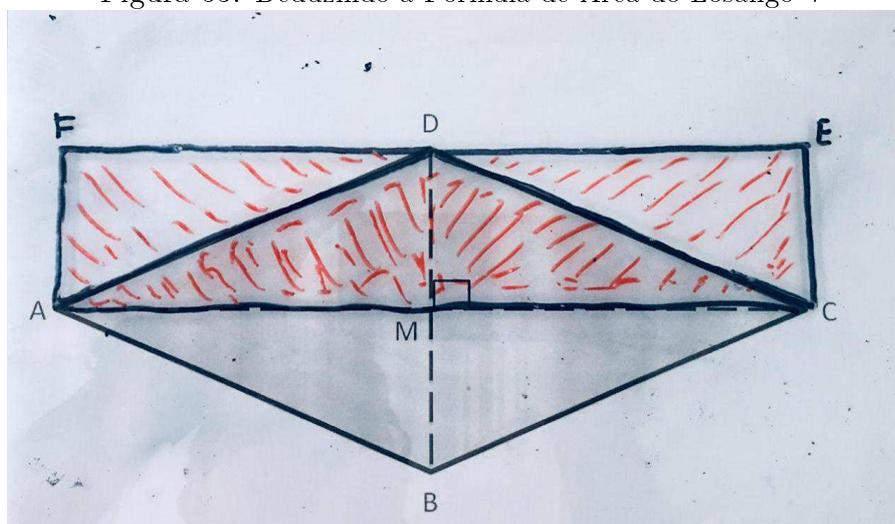
Figura 52: Deduzindo a Fórmula de Área do Losango IV



Fonte: Próprio autor

como apresentado na Figura 53.

Figura 53: Deduzindo a Fórmula de Área do Losango V

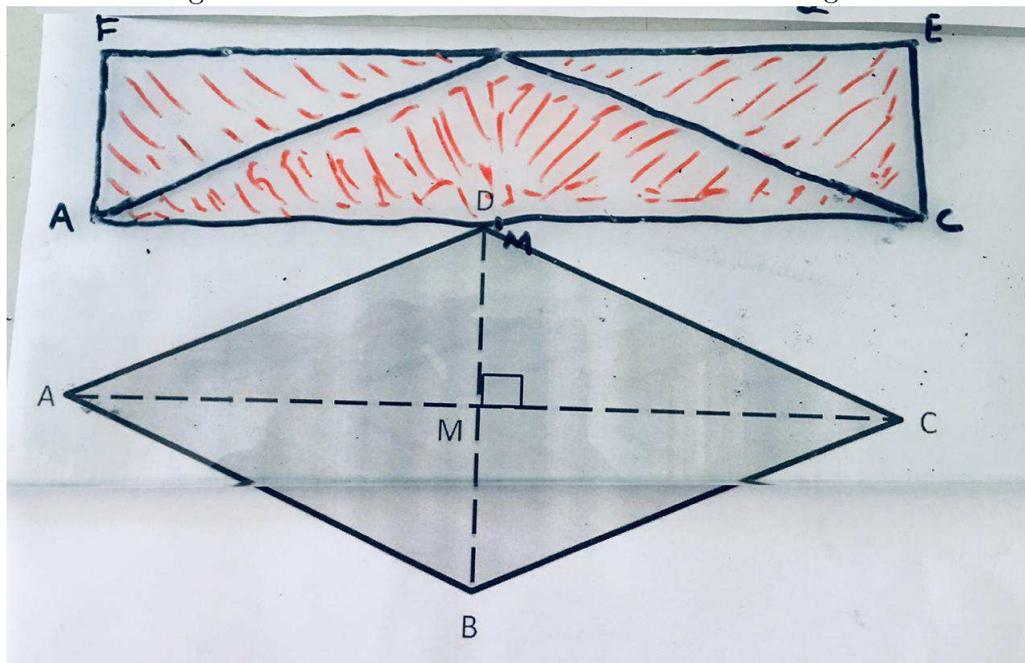


Fonte: Próprio autor

Ao deslocar o vértice para cima, destaca-se o retângulo $ACEF$, conforme a Figura 54.

Como a área do retângulo já é conhecida e mostrou-se que a área do losango é igual à do retângulo $ACEF$, pode-se afirmar que a área do losango é dado pela metade produto das suas diagonais.

Figura 54: Deduzindo a Fórmula de Área do Losango VI



Fonte: Próprio autor

Prosseguindo com a atividade, os alunos resolveram as questões propostas nos vídeos.

Ao final desta atividade os alunos já estavam bem familiarizados com as atividades e já tomavam iniciativa em responder a problemática do vídeo, todos resolveram os problemas sem a necessidade de intervenção do professor.

Para essa atividade foram necessárias três aulas, na primeira fez-se a exibição do vídeo, demonstração e dedução da proposição 4.8. Na segunda a demonstração e dedução da proposição 4.9. E na terceira a resolução dos problemas do vídeo.

6.3.5 Atividade V: Área de Polígonos Regulares e do Círculo.

Ao final desta atividade é esperado que os alunos, saibam calcular a área de polígonos regulares, calcular área de círculos, resolva os problemas propostos e deduzam por recorrência as proposições 4.10 e 4.11.

Como nas atividade anteriores apresentou-se o vídeo com a problemática envolvendo polígonos e círculo, depois os grupos receberam o material para deduções das proposições.

A seguir as descrições da problemática gravada no vídeo e relacionada aos objetos das fotografias das Figuras 55 e 56:

Figura 55: Guarda-Sol



Fonte: Próprio autor

Problemática envolvendo o Guarda-sol:

O sr. Paulo da chácara Monte do Camelo, construiu uma grande área de lazer, que compõem as sete áreas de piscinas naturais. Em cada área foram colocados vinte e dois guarda-sóis em formato hexagonal. Segundo sr. Paulo, o pano que cobre o guarda-sol deve ser trocado a cada dois anos por desgastes naturais, ligados à exposição ao Sol e Chuvas. Explique com suas palavras os procedimentos para fazer o cálculo da quantidade de tecido em cada guarda-sol. Observou-se que as arestas do guarda-sol medem 1,06m e o apótema mede 0,94m. Quantos m^2 de tecido ele deve comprar no período de 10 anos para manutenção dos guarda-sóis?

Figura 56: Forno de Farinha



Fonte: Próprio autor

Problemática envolvendo o Forno de Farinha:

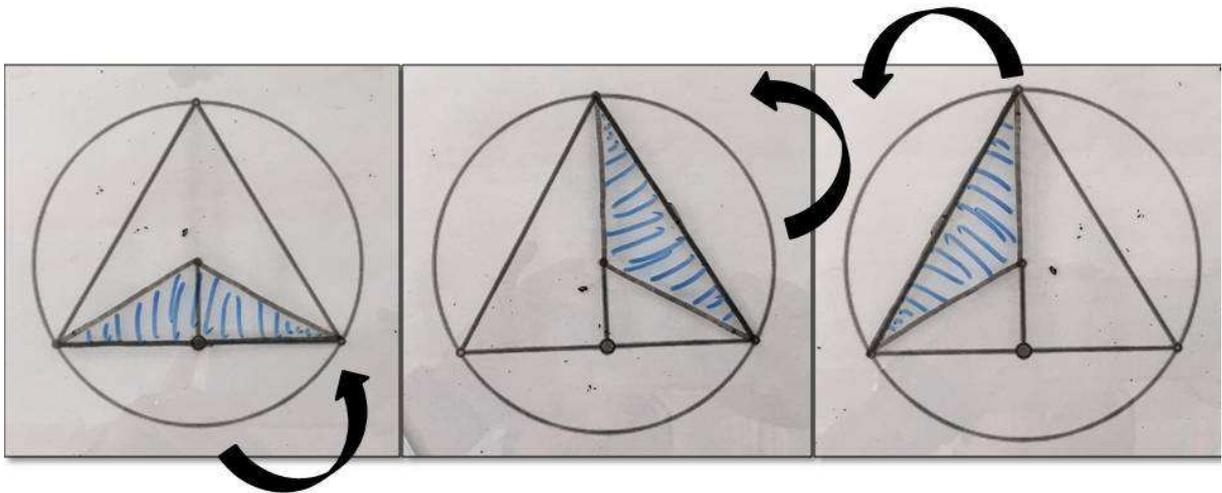
Esse forno de farinha foi comprado pelo Sr. Manoel em 1999, segundo ele a parte de metal, onde se torra a massa de fazer farinha, veio dentro de uma caixa de papelão quadrada. Considerando que essa parte metálica tem $4,5316\text{m}^2$ de área e que $\pi = 3,14$, é correto afirmar que a caixa tinha as arestas que compõem a parte quadrada medindo menos que $1,2\text{m}$?

Depois de entregue o material e as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos, prosseguiu-se com os trabalhos em sala.

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.10: Seja P um polígono Regular com n lados, então sua área $A_{(P)}$ é igual à metade do produto entre seu apótema a e seu perímetro p , onde apótema a é a distância entre o centro do polígono regular e qualquer um de seus lados.

De posse do material os alunos resolveram a lista IV, (APÊNDICE H), conforme as imagens a seguir da Figura 57 e descrição.

Figura 57: Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular I



Fonte: Próprio autor

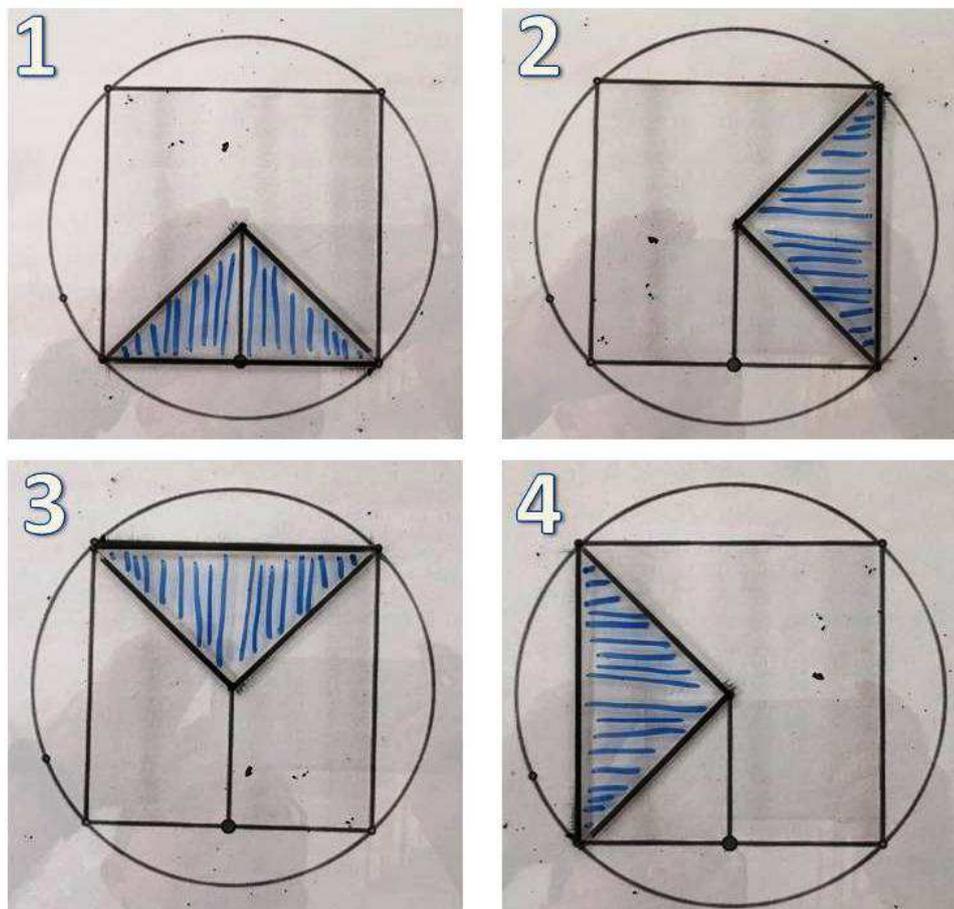
Constroem sobre o vidro o triângulo que tem base um lado do triângulo equilátero e altura o apótema.

Rotacionando o vidro percebe-se que no triângulo maior cabem exatamente três desse triângulo, portanto a área do triângulo equilátero é três vezes a área do triângulo

cuja base é um lado do triângulo equilátero e altura é o apótema.

Seguindo o que se pede na lista de exercício, os alunos fizeram o mesmo com o quadrado.

Figura 58: Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular II



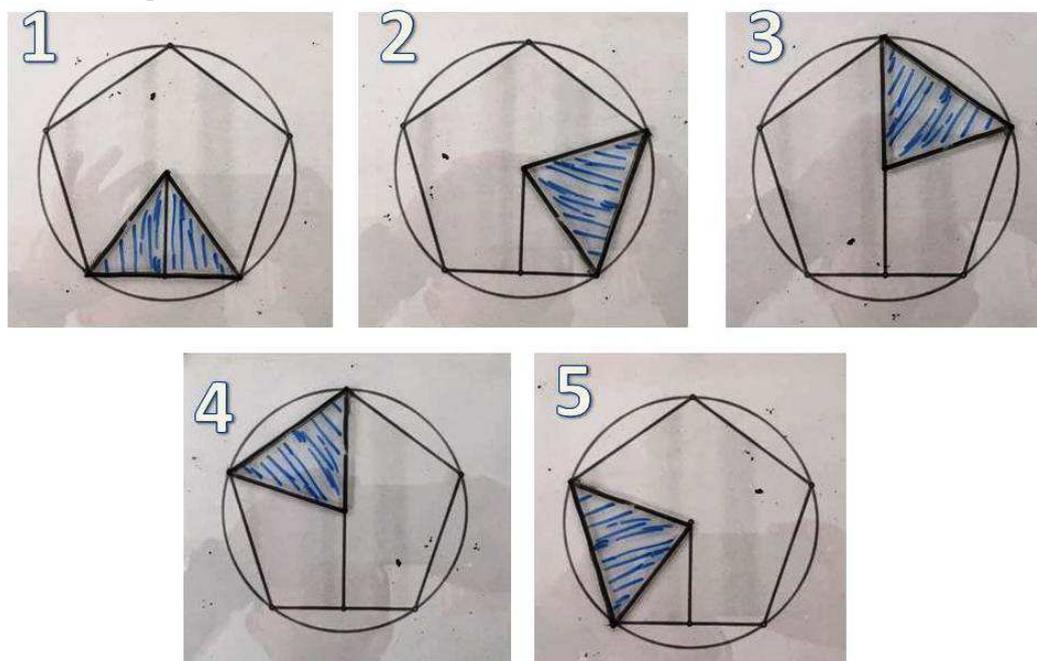
Fonte: Próprio autor

Construíram o triângulo sobre o vidro, com base igual ao lado do quadrado e altura o apótema, depois rotacionando o vidro mostraram que o quadrado tem área igual a quatro vezes a área desse triângulo, conforme a Figura 58 que ilustra o procedimento.

Em continuação à lista, fizeram o mesmo com o pentágono. Construíram o triângulo de base sendo um lado do pentágono e altura o apótema, rotacionando o vidro mostraram que a área do pentágono regular é exatamente igual a cinco vezes a área do triângulo construído, como ilustrado da Figura 59.

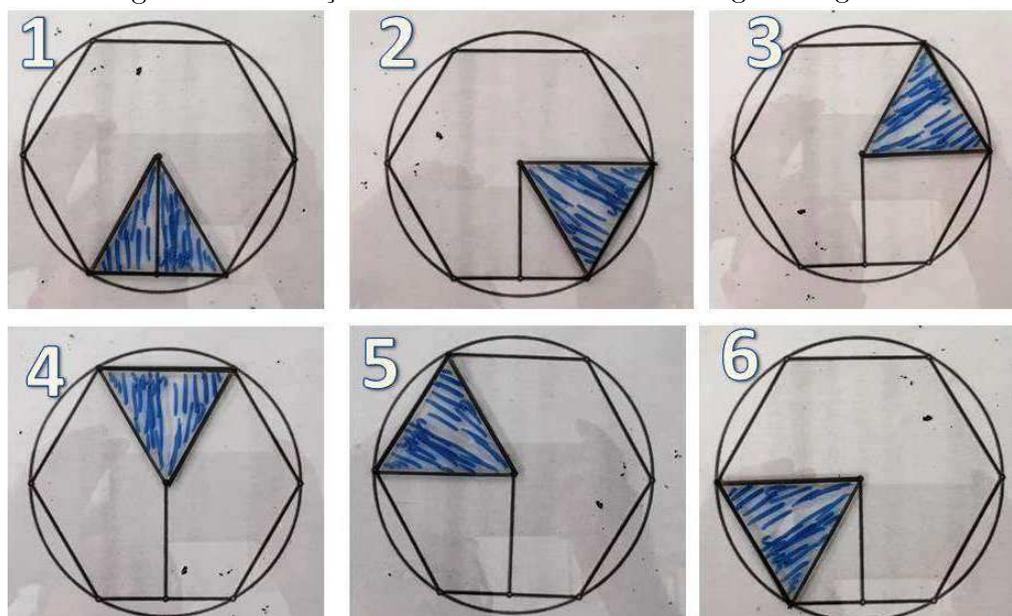
E finalmente repetiram o procedimento para o hexágono, construíram o triângulo de base sendo um dos lados do hexágono e altura sendo o apótema, rotacionando o vidro mostraram que a área do hexágono é exatamente seis vezes a área do triângulo construído,

Figura 59: Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular III



Fonte: Próprio autor

Figura 60: Dedução da Fórmula de Área de Polígono Regular IV



Fonte: Próprio autor

conforme mostra a Figura 60.

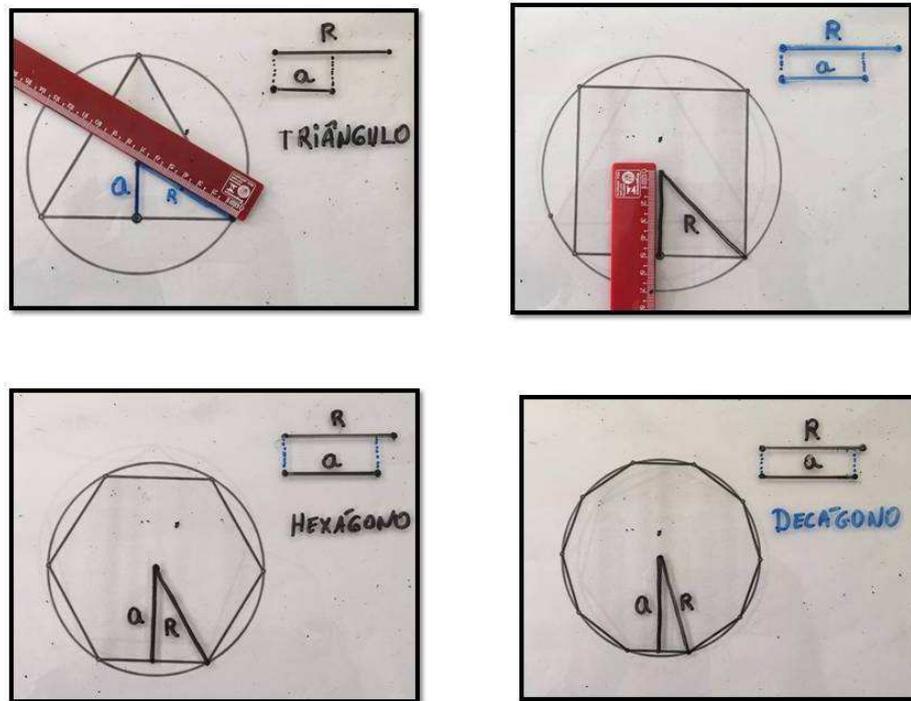
Continuando com os exercícios, os alunos responderam a questão 2 conforme o que

se pede e deduziram a fórmula para n lados de tamanho l e assim conseguiram deduzir a proposição 4.10, entendendo que na questão 3, $nl = p$ onde p é o perímetro do polígono.

DEDUÇÃO DA PROPOSIÇÃO 4.11: A área de um círculo (A_c) de raio r é igual a πR^2 .

Para deduzir a proposição 4.11 os alunos fizeram a atividade 4, que consiste em mostrar que aumentando o número de lados de um polígono regular a medida de seu apótema a se aproxima da medida do raio R , conforme ilustrado na Figura 61.

Figura 61: Comparação entre Apótema e Raio



Fonte: Próprio autor

Neste exercício os alunos perceberam que o apótema fica cada vez mais próximo do raio, e a tendência é que raio e apótema seja o mesmo segmento.

A partir dessa informação e com a intervenção do professor os alunos responderam o problema 5 da lista e deduziram a proposição 4.11 conforme descrito na página 44.

Em prosseguimento os alunos resolveram os problemas apresentados em vídeo de forma satisfatória, sem apresentar dificuldades de compreensão do que lhes foi proposto.

Para essa atividade foram necessárias três aulas. Na primeira foi apresentada a problemática a ser modelada por meio da exibição do vídeo, foram entregues os materiais para os grupos para dedução das fórmulas. Na segunda aula foram feitas as deduções

e demonstrações. E na terceira os alunos resolveram os problemas propostos usando o conhecimento adquirido nas atividades.

Após conclusão dessa sequência de atividades, os alunos foram submetidos a uma avaliação (APÊNDICE I), para aferição do desenvolvimento de suas habilidades quanto ao cálculo de área dos principais polígonos e responderam questionários expressando opinião sobre a abordagem do tema (APÊNDICE J).

7 PROPOSTA PARA A CONCEPÇÃO DA SEGUNDA ETAPA DA SEQUÊNCIA E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresentaremos uma proposta para a segunda etapa da sequência que envolve o ensino de volumes dos principais sólidos geométricos, também faremos nossas considerações finais a respeito da primeira etapa da sequência didática relacionada ao estudo de área dos principais polígonos, apresentaremos os resultados obtidos e algumas opiniões de alunos sobre o trabalho realizado.

7.1 Proposta para a Abordagem de Volume

Para a proposta da aplicação Segunda Etapa da Sequência, que compreende o estudo de Volume dos Principais Sólidos Geométricos, sugerimos o mesmo roteiro da Primeira Etapa que consiste em fazer uma pesquisa de campo, fotografar, gravar vídeos com problemática, deduzir e demonstrar as proposições e finalmente resolver a problemática. Sugerimos também que o professor faça inicialmente um diagnóstico da turma referente ao conhecimento sobre os objetos de estudo.

Feito o Diagnóstico da turma, aplica-se a primeira Atividade que consiste em uma pesquisa de campo em que, diferente da Primeira Etapa que os alunos recebem uma lista com as figuras, nesta consta-se uma lista com nomes de sólidos geométricos e deve-se encontrar e fotografar, no seu ambiente, objetos que sejam parecidos com esses sólidos. A ideia é que os alunos façam a pesquisa de que sólidos são esses e só a partir daí façam as fotografias.

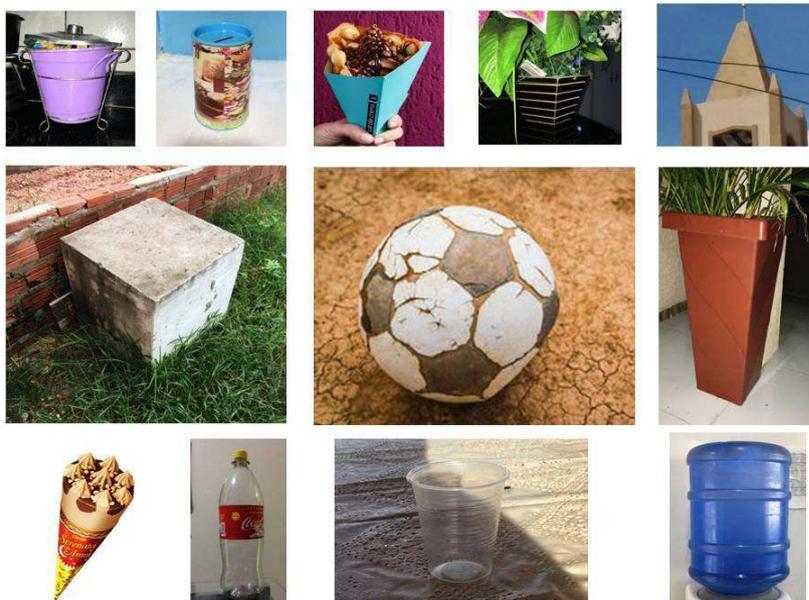
Sabemos que os ambientes rurais, urbanos e caseiro, estão cheios de objetos semelhantes a cones, pirâmides, cilindros, tronco de cone e de pirâmides e prismas, cubos, prismas em geral e até de esfera, como mostra a Figura 62.

A expectativa é que os alunos explorem os objetos caseiros, coisas da própria escola, ou algum objeto da rua.

Prosseguindo, o professor seleciona as fotografias e juntamente com os grupos discute a produção dos vídeos, dando liberdade para que os alunos criem problemáticas e discutem o roteiro dos vídeos.

Após a discussão os alunos fazem os vídeos com as problemáticas já discutidas em sala e intermediadas pelo professor, os vídeos são exibidos e, a partir de então, o professor apresenta os postulados e definições referentes a volumes e prossegue com as atividades de demonstrações e deduções das proposições que modelam as situações exibidas nos vídeos.

Figura 62: Possíveis Objetos que os Alunos Podem Encontrar



Fonte: Próprio autor

Na atividade I, trabalha-se volume de cubo e do prisma reto, aqui recomendamos que se faça a dedução usando material dourado, Figura 63.

Figura 63: Material Dourado

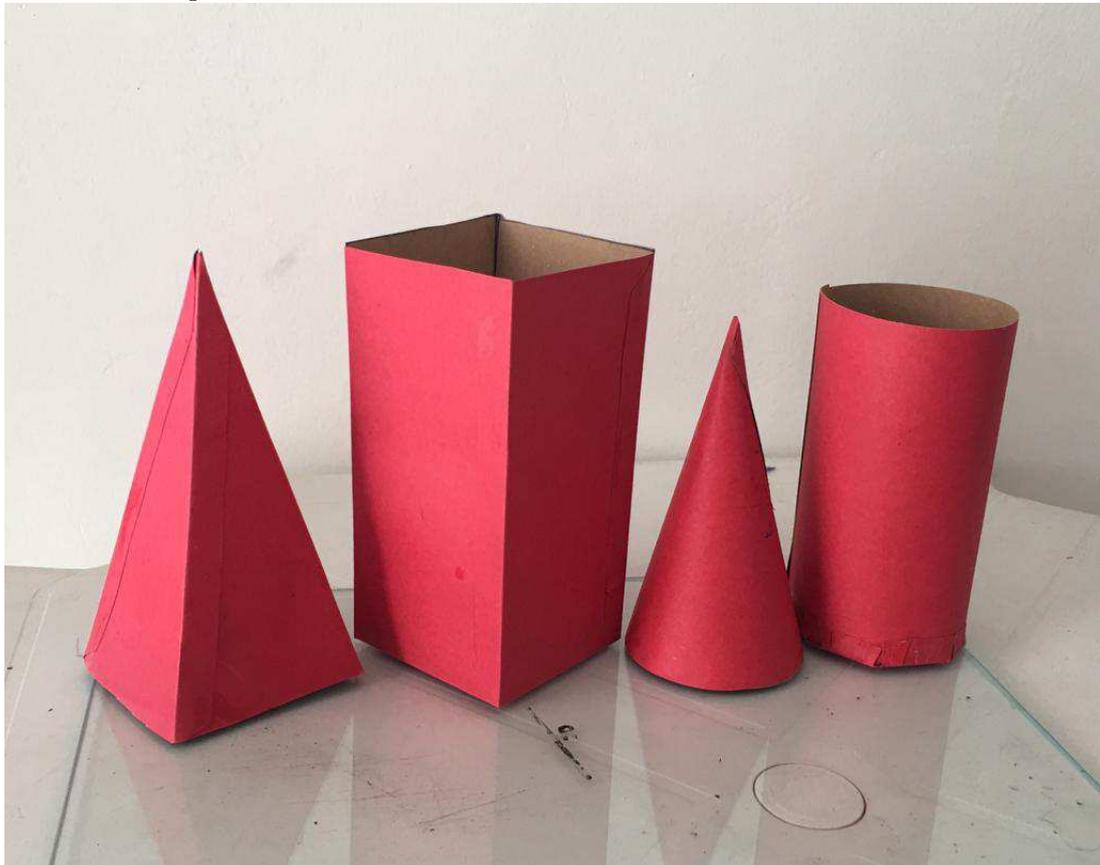


Fonte: Loja Leiturinha

Na atividade II, trabalha-se volume de cilindro, pirâmide e cone. Sugerimos que o professor faça deduções por experimentações, usando material da Figura 64, tal que se comprove ser o volume do cone um terço do volume do cilindro de mesma área da base

e mesma altura, e que o mesmo ocorre em comparação com o volume da pirâmide em relação ao prisma de mesma base e mesma altura, sem deixar de fazer as demonstrações em sala.

Figura 64: Material para Deduzir Volume da Pirâmide e Cone



Fonte: Próprio autor

Ainda recomendamos que todo o material para dedução seja produzido com os alunos, iniciando pelo cone e pirâmide, depois o prisma e o cone.

Na atividade III, trabalha-se o volume de tronco de cone e tronco de pirâmide. Sugerimos nessa atividade que o professor faça as demonstrações partindo do fato de já saber as proposições que nos fornece o volume de cone e pirâmide.

Na atividade IV, trabalha-se o volume da esfera, sugerimos que se façam dedução por experimentação para estimativa de seu volume, semelhante ao que Arquimedes fez, assim o leitor pode usar um Cone e uma Semiesfera onde o raio da base do cone e sua altura são iguais ao raio da semiesfera, conforme a Figura 65.

Esse material pode ser confeccionado pelo alunos com ajuda do professor ou pode ser adquirido em lojas especializadas.

Figura 65: Material para Deduzir Volume da Esfera



Fonte: Próprio autor

A experimentação deve comprovar que o volume de dois cones é igual ao volume da semiesfera se raio da base e altura do cone forem iguais ao raio da semiesfera, e portanto o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone. Como o volume do cone é conhecido, e sua altura e raio da base são iguais ao raio da esfera, com algumas manipulações algébricas, chega-se à proposição que modela o volume da esfera.

Após as deduções e demonstrações, os alunos resolvem os problemas, prosseguindo o professor aplica a avaliação da sequência.

7.2 Considerações Finais

Esse trabalho propôs uma forma alternativa de abordagem para o ensino de Área e Volume, temas que segundo O Boletim de Desempenho e Metas da Secretaria de Estado da Educação do Maranhão de 2018, estão entre aqueles que os alunos apresentaram menores rendimentos (MARANHÃO, 2019), ou seja, resolver problemas envolvendo área de figuras planas e resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera) é um desafio a ser superado pelos alunos. Exatamente pensando nisso que este trabalho foi desenvolvido, dando ênfase à aplicabilidade no cotidiano, nas demonstrações e deduções das proposições que modelam as situações-problemas retratadas pela produção de vídeo.

Destacamos aqui a importância de cada ferramenta utilizada na aplicação deste trabalho: **A produção de vídeos** ajudou os alunos a sanar seus déficits demonstrados na avaliação diagnóstica em relação ao tema, também foi importante para a dinâmica de modelagem em sala, deixando claro o que se pretendia resolver ao final de cada atividade, além disso, observamos que essa ferramenta contribuiu na motivação do alunos e no interesse pelo tema. Destacamos três respostas dos alunos quando perguntados, *se acharam importante fazer os vídeos e apresentar antes das aulas*:

"Achei importante porque eu não sabia de muita coisa que agora sei, aprendi na pesquisa de campo."

"Os vídeos é bom pra gente fazer e quando a gente faz a gente aprende mesmo."

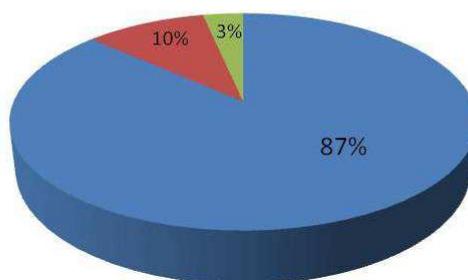
"Com os vídeos a gente já sabia o que teria pra resolver, isso é bom, eu gostei muito".

Observamos, que no final dessa atividade os alunos, que antes nem conheciam os polígonos, sanaram essa dificuldade o que foi além das nossas expectativas e que havia motivação na sala para realização das próximas atividades. O gráfico na Figura 66, mostra que 87% dos alunos afirmam que a produção de vídeo ajudou-lhes na compreensão dos conteúdos.

Figura 66: Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Produção de Vídeo

A produção de vídeo ajudou a compreender melhor o conteúdo estudado? Turma X

■ SIM ■ Não ■ Não Respondeu



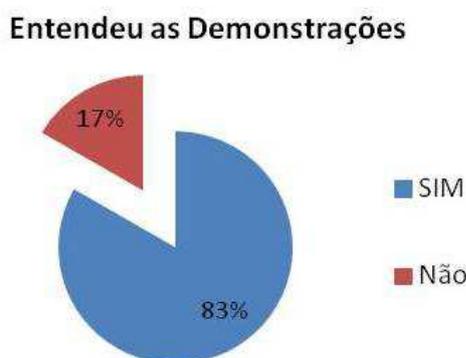
Fonte: Dados da Pesquisa

Quanto às **Deduções e Demonstrações**, destacamos a importância do uso do material concreto para deduções das proposições, isso motivou ainda mais a turma. Inicialmente fizemos algumas intervenções, mas com o tempo observamos que os alunos desenvolviam suas atividades sem precisar dessa orientação, mostrando certa evolução e autonomia quanto ao uso desse recurso. É sempre bom, deixar que o próprio aluno chegue ao resultado esperado sem interferência, mas sempre que solicitado o professor deve

contribuir para que o aluno alcance o resultado esperado.

Fazer atividades com demonstrações não é uma tarefa fácil, o tempo disponível e a grande quantidade de operações algébricas necessárias são fatores complicadores, por esse motivo, tanto o planejamento das tarefas quanto o material usado nas deduções são essenciais para que os objetivos sejam alcançados, um outro fator preponderante no ensino com demonstrações é o aprendizado dos alunos que deve ser acompanhado de forma contínua, pois cada saber a ser aprendido depende de um conhecimento já assimilado. Neste trabalho, como mostra o gráfico da Figura 67, conseguimos que 83% dos alunos entendesse o processo de demonstração, o que consideramos um resultado bem satisfatório.

Figura 67: Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Demonstrações



Fonte: Dados da Pesquisa

A expectativa sobre a participação dos alunos efetivamente nas atividades não eram animadoras, porém o que se observou foi um forte engajamento em todas as atividades, poucas faltas, com exceção de algumas por falta do transporte escolar. Em geral a turma esteve presente nas atividades e fazendo as tarefas que foram propostas. Atribuímos esse engajamento à metodologia aplicada e aos materiais usados, que de alguma forma os motivou a fazerem o que lhes propunha. Quando perguntados se gostaram da maneira como o assunto foi abordado 97% dos alunos responderam positivamente, como mostra o gráfico da Figura 68.

Outro fator importante que destacamos neste trabalho é a **Relação entre o conteúdo e o cotidiano**, segundo a Base Nacional Comum Curricular "[...]os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, [...]" (BRASIL, 2018, p. 60), essa relação foi bastante explorada nas atividades e destacamos o fato que todas as problemáticas foram construídas pelos próprios alunos e com objetos ou coisas de sua vivência.

Figura 68: Gráfico com Opinião dos Alunos sobre a Metodologia de Ensino



Fonte: Dados da Pesquisa

O que observamos durante a realização das atividades, foram alunos motivados pra encontrar a solução da problemática porque entendiam melhor a situação problema, que, em geral, falava de coisas ou objetos do cotidiano.

Finalmente, se tratando de resultados na avaliação final, a turma X, onde foram aplicadas as atividades, apresentou melhor rendimento que a turma Y, quando analisada a quantidade de alunos que obtiveram a nota máxima e também a quantidade com nota inferior a 6, como mostra a Tabela 3, embora as médias das turmas tenham ficado muito

Tabela 3: Número de Alunos com Nota Máxima ou Nota Inferior a 6 por Turma

Tabela de Notas		
Item	Quant. de Alunos da Turma X	Quant. de Alunos da Turma Y
Nota Máxima	5	0
Nota inferior a 6	0	9

Fonte: Dados da Pesquisa

próximas, 7,5 para a Turma X e 7,0 para a Turma Y, pelo fato da intervenção ter sido aplicada na turma X por se tratar da turma que apresentava menor rendimento, podemos afirmar que a aplicação da sequência didática gerou resultados satisfatório.

Este trabalho mostrou-me que o papel do aluno no processo de ensino-aprendizagem está muito além de mero expectador, ele é, na verdade, o protagonista deste processo em que a escola tem êxito na tarefa de transmitir o conhecimento. Quanto maior participação do aluno maior será o seu rendimento.

Sobre o papel do professor, este trabalho provocou em mim uma mudança de postura e gerou uma certeza de que "O professor mediador pode ser mais importante para o aluno que o professor transmissor". Essa relação biunívoca, na qual o aluno apresenta suas dificuldades e o professor reage com atividades que, se aluno as fizer, serão sanadas; o

aluno apresenta resultados e o professor reage com atividades que o levará a buscar novos conhecimentos, que diz respeito à prática docente, é em uma relação de cumplicidade que só tem um resultado possível, o aprendizado.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, T. A. S. *A Demonstração no Ensino de Geometria*. Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Tecnológica do Paraná, Curitiba PR, 2016.

BALDISSERA, A. *A Geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos*, 1987. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_alt-air_baldissera.pdf> Acesso em 10 de nov. 2018.

BARBOZA, K. D. L; BARRETO, A. L; BONFIM, R. S; POLIZELLE, M. A. L, *Produção de Vídeos e seu uso para o Ensino de Matemática: Uma Experiência Viveciada pelo PIBID - 2016*. Disponível em: <http://www.fef.br/upload_arquivos/geral/arq_58822b158d755.pdf>, Acesso em 9 de nov. 2018.

BRASIL: *Guia de Escolha do Livro Didático*, 2018. Disponível em: <<http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/>> Acesso em: 10 dez. 2018.

BRASIL: *Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio*. CNE, 2018.

BRASIL: *Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares - Ciência da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias*. CNE, 1997.

BRASIL: *TV Escola*. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/tv-escola>> Acesso em: 10 dez. 2018.

DANTE, L R. *Matemática Contexto e Aplicações: Ensino médio, volume 2 - 3. Ed.* São Paulo: Ática, 2016.

DORIA, C. M. *Geometria II* Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2007.

FLORES, C. R; MORETTI, M. T. *Metodologia do Ensino de Matemática* Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2008.

FONTENELLE, A. *Metodologia científica: Como definir os tipos de pesquisa do seu TCC?* Disponível em: <https://andrefontenelle.com.br/tipos-de-pesquisa/#Elementos_essenciais_Quanto_a_finalidade>, Acesso em: 21 nov. 2018.

FOSSA, J. A. *Introdução às técnicas de demonstração na Matemática*. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRINHANI, P.E. *Avaliação Matemática Escolar em larga escala: Reflexos na rede municipal de Freire - ES*. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. 2. ed rev. e ampli. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2008.

GERHARDT T. E; SILVEIRA D. T. *Métodos de pesquisa*; Universidade Aberta do Brasil – Secretaria de Educação à Distância - Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UAB/SEAD/UFRGS – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

KOSLOSKI, C. *FUNÇÃO QUADRÁTICA: Uma proposta para o Ensino Médio*. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROF-MAT), Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas – CCT). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

KUADRO, *Tronco da pirâmide - Demonstração da fórmula do volume*. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=PXlyYqUa-rI&app=desktop>>, acesso em 05 jan. 2019.

KILHIAN, *Demonstração da Fórmula do Volume de Tronco de Cone a Partir do Volume de Pirâmide, O Baricentro da Mente*. Disponível em: <<https://www.obaricentrodamente.com/2009/06/demonstracao-formula-volume-tronco-de.html>>, Acesso em 20 nov. 2018.

LALANGE, A., *Vocabulário Técnico e Crítico de Filosofia*. Trad. por Fátima Sá Carneiro, Maria E. de Aguiar, José E. Torres e Maria G. de Sousa: Martins Fontes - 1999.

MARANHÃO: *Ações Estratégicas para Elevar os Índices Educacionais do Maranhão*. SEDUC-MA - 2017.

MARANHÃO: *Plano Mais Ideb - Programa de fortalecimento do ENSINO MÉDIO - Orientações curriculares para o ensino médio - MATEMÁTICA*. SEDUC-MA - 2017.

MARANHÃO: *Boletim de Desempenho e Metas. SEDUC-MA - 2019.*

MEIRELES, E. *Como Organizar Sequências Didáticas*, 2014. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/1493/como-organizar-sequencias-didaticas>>, Acesso em: 22 nov. 2018.

MUNIZ NETO, N. A. C. *Geometria*. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PEDAGOGIA E COMUNICAÇÃO, *Pesquisa Escolar Filosofia*. Disponível em: <<https://educacao.uol.com.br/disciplinas/filosofia/logica—deducao-partindo-do-geral-para-chegar-ao-particular.htm>>. Acesso em: 10 de Fev. 2019.

PEREIRA, R.; LENTZ, C; CATAPAN, A; QUARTIERO E. *Estudo de Softwares Educacionais*, Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2005.

PIETROPAOLO, Ruy Cesar. *Significar a Demonstração nos Currículos da Educação Básica e da Formação de Professores de Matemática*. Tese de Doutorado apresentada à Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), 2005..

PINHO, J. L. R; BATISTA, E; CARVALHO, N. T. B. *Geometria I*, Florianópolis: EAD/UFSC/CED/CFM, 2007.

ROCATO, Paulo Sergio. *The conceptions of the professors on the use of video as potencializadores of the process of education and learning*. 2009. 172 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

RUSSEL, B.A.W., *Introdução à Filosofia Matemática*. Trad. por Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

SADOVSKY, P. *O Ensino da Matemática hoje, Enfoques, sentidos e desafios*. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

SILVA, A. M. *O Vídeo como Recurso Didático no Ensino de Matemática*. Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás, Goiânia Goiás, 2011.

SÓ MATEMÁTICA: *Francesco Bonaventura Cavalieri*, 1998. <Disponível: <https://www.somatematica.com.br/biograf/cavalieri.php>>. Acesso em: 19 de Mar. 2019.

TELECURSO, O que é Telecurso?. Disponível em: <<http://www.telecurso.org.br/o-que-e-o-telecurso/>>. Acesso em: 10 de Dez. 2018.

TUTOR BRASIL, Matemática.TV, Ensino Médio. Disponível em: <<https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=547>>. Acesso em: 16 nov. 2018.

WIKIPEDIA. História da Geometria. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/História da geometria](https://pt.wikipedia.org/wiki/História_da_geometria)>. Acesso em: 10 nov. 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – CARTA DE ANUÊNCIA DA ESCOLA



DECLARAÇÃO DA INSTITUIÇÃO PARTICIPANTE CARTA DE ANUÊNCIA

Autorizamos o pesquisador responsável Natanael Carvalho Sousa, mestrando Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, na Universidade do Estado do Maranhão (UEMA), orientado pelo professor Dr. João Coelho Silva Filho, a realizar uma aplicação para sua Dissertação de Mestrado nas dependências do C.E. Cândido Mendes - Anexo II, Produção de Vídeos e Demonstrações para ensino de área, sendo esta a instituição coparticipante, motivo ao qual está sendo direcionada a carta de anuência. Como mencionado anteriormente, a pesquisa será realizada nas dependências da escola, onde o pesquisador trabalha como docente do Ensino Médio atualmente. Concordamos que os resultados desta pesquisa poderão ser apresentados por escritos e oralmente em banca de Dissertação, em exposição oral, congressos e revistas científicas.

Brejo, ____ de _____ de 2018

Atenciosamente,

Gestor Geral

APÊNDICE B – TERMO DE CONSENTIMENTO - ALUNOS



TERMO DE CONSENTIMENTO

Eu, _____, RG _____
declaro estar ciente da participação do aluno(a) _____,
RG _____, pelo(a) qual sou responsável, na Pesquisa de
Mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da
Universidade do Estado do Maranhão UEMA desenvolvido pelo Acadêmico **Natanael
Carvalho Sousa** e na forma de minicursos sob a orientação do **Prof. Dr. João Coe-
lho da Silva Filho (UEMA)**.

O presente trabalho tem por objetivos: Propor uma forma Alternativa para ensino de
Área e Volume no ensino Médio.

Os instrumentos utilizados serão: Questionários, filmagem, fotografias, resolução de exer-
cícios e demonstrações. Espera-se obter, por este projeto, os seguintes resultados: Refor-
çar o conhecimento do estudante em cálculo de área e Volume; Aprimorar o ensino na
escola pública e interpretar a interação discursiva e a elaboração de significados nas situ-
ações de ensino. Tenho ciência que tenho a liberdade de me recusar a continuar ou retirar
o meu consentimento em qualquer fase do projeto, sem penalização alguma. A qualquer
momento posso buscar maiores esclarecimentos, inclusive relativos à metodologia do tra-
balho. Os responsáveis pela pesquisa garantem o sigilo que assegure a privacidade dos
sujeitos quanto aos dados confidenciais envolvidos no projeto. Declaro ter ciência que
as informações obtidas podem ser usadas para fins científicos, de acordo com a ética na
pesquisa e que esta participação não comporta qualquer remuneração. Declaro ainda
ter conhecimento que essas atividades serão desenvolvidas nos horários regulares onde o
pesquisador é professor titular, com anuência da Gestão da Escola.

Brejo, ____ de _____ de 2018

Responsável pelo aluno(a)

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO DE DIAGNÓSTICO



Aluno: _____, N^o _____
Professor: Natanael Carvalho Sousa, Turma: _____

ATIVIDADE DE DIAGNÓSTICO

1) Desenhe cada uma dos polígonos e numere de acordo com a lista a seguir:

Quadrado (1)

Retângulo (2)

Paralelogramo(3)

Triângulo (4)

Trapézio (5)

Losango (6)

Polígono Regular (7)

Círculo (8)

2) Com qual figura poderíamos relacionar o objeto da foto abaixo?



- A) TRIÂNGULO
- B) TRAPÉZIO
- C) LOSANGO
- D) PARALELOGRAMO
- E) CÍRCULO

3) Cite coisas do seu cotidiano que poderiam ser relacionadas a algum dos polígonos da questão 1.

4) Dos polígonos da questão 1, que você desenhou, quais você saberia calcular sua área?

APÊNDICE D – PRINCIPAIS POLÍGONOS

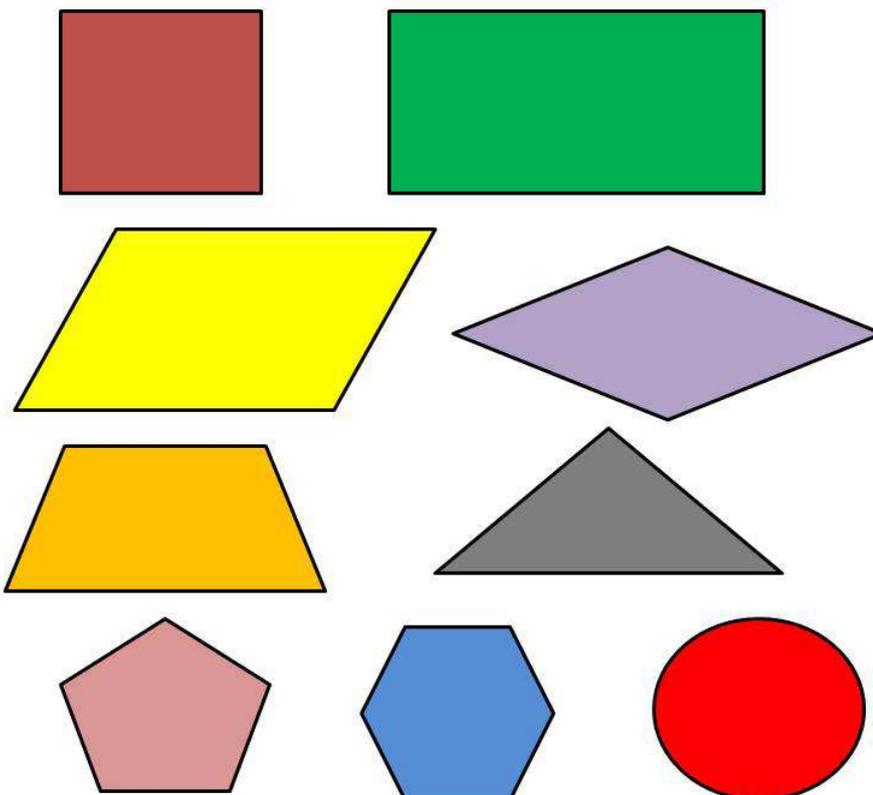


Alunos de números: N° _____, N° _____, N° _____, N° _____, N° _____, N° _____

Professor: Natanael Carvalho Sousa

LISTA DE FIGURAS

1) Façam um registro fotográfico de coisas do cotidiano que sejam parecidas com os polígonos abaixo:



APÊNDICE E – LISTA DE ATIVIDADES I

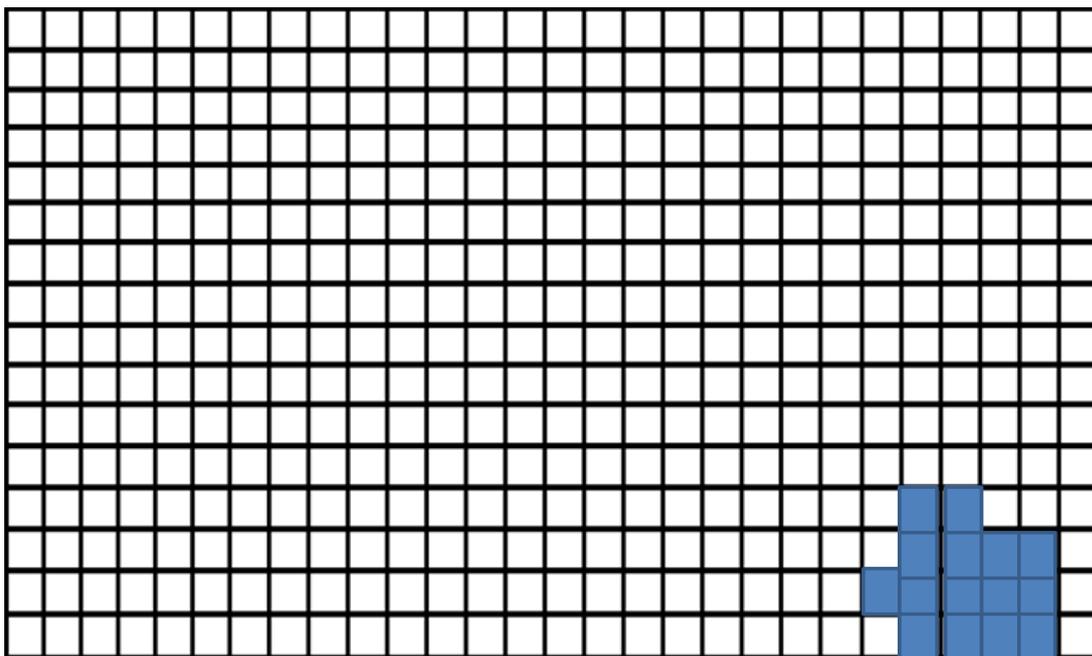


Aluno: _____, Nº _____

Professor: Natanael Carvalho Sousa,

LISTA DE ATIVIDADES I

- 1) Use a parte quadriculada abaixo para construir, um quadrado, um retângulo, um paralelogramo, um triângulo, um trapézio, um losango, um polígono regular e um círculo



2) Liste as figuras desenhadas na questão 1 acompanhadas de seus respectivos perímetros.

3) Considerando que a área de um quadradinho vale 1 (um), qual a área do polígono no canto inferior direito da figura da questão 1? e qual seu perímetro?

APÊNDICE F – LISTA DE ATIVIDADES II



Aluno: _____, N^o _____

Professor: Natanael Carvalho Sousa,

LISTA DE ATIVIDADES II

1) Usando o vidro sobre a folha quadriculada, construa quadrados, um de lado 1, outro de lado 2, outro de lado 3, outro de lado 4, outro de lado 5, outro de lado 6, depois anote ao seu lado qual a área de cada um.

2) Seguindo o raciocínio da questão anterior, um quadrado de lado 10 tem área igual quanto?

3) Considerando um quadrado e sabendo que a medida de seu lado é l , qual seria a sua área?

APÊNDICE G – LISTA DE ATIVIDADES III



Aluno: _____, N^o _____

Professor: Natanael Carvalho Sousa,

LISTA DE ATIVIDADES III

1) Usando o vidro sobre a folha quadriculada, construa retângulos cujo altura seja 1 sempre, e a base varia do retângulo anterior para o próximo em uma unidade e anote a área de cada um, faça o mesmo para retângulo de altura 2, 3, 4 e 5.

2) Pelo raciocínio da questão anterior, qual a área de retângulo com dimensões 8 e 10 e de um retângulo com dimensões 11 e 20?

3) Se um retângulo tem dimensões a e b , qual a sua área?

APÊNDICE H – LISTA DE ATIVIDADES IV



Aluno: _____, N° _____

Professor: Natanael Carvalho Sousa,

LISTA DE ATIVIDADES IV

1) Usando o vidro sobre a folha com o triângulo equilátero, mostre que ao ligarmos os vértices ao centro com um segmento, o triângulo equilátero fica dividido em três triângulos congruentes. Faça o mesmo para o quadrado, pentágono e hexágono.

2) Pelo raciocínio da questão anterior, e considerando que o apótema é também altura dos triângulos formados, como ficaria o cálculo de área do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono e do hexágono?

3) Depois das questões 1 e 2 é possível deduzir a fórmula para um polígono regular com n lados?

4) Com uso de régua, meça o tamanho do raio e do apótema dos polígonos regulares. Faça anotações dos resultados, o que você poderia dizer sobre o que ocorre quando aumentamos o número de lados do polígono em relação ao raio, apótema e formato do polígono?

5) Considerando que o perímetro de um círculo é dado por $2\pi R$, onde R é o raio do círculo e considerando também o que se deduziu sobre o tamanho do raio e apótema quando aumentamos o número de lados de um polígono fazendo com que ele se aproxime de um círculo, qual fórmula nos fornece a área do círculo?

APÊNDICE I – AVALIAÇÃO I - ÁREA DO PRINCIPAIS POLÍGONOS

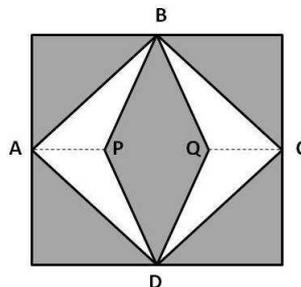


Aluno: _____, N° _____

Professor: Natanael Carvalho Sousa,

AVALIAÇÃO I

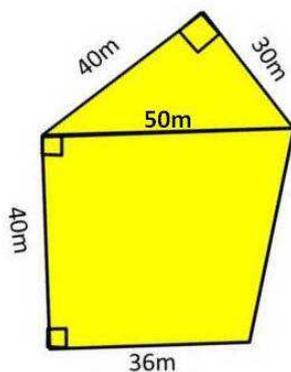
1) (ENEM) Para decorar a fachada de um prédio, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo $1m$, conforme a figura. Nesta figura os



pontos A , B , C e D são pontos médios dos lados do quadrado e dos segmentos AP e QC medem $1/4$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa $R\$30,00$ o m^2 , e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$). que custa $R\$50,00$ o m^2 . De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

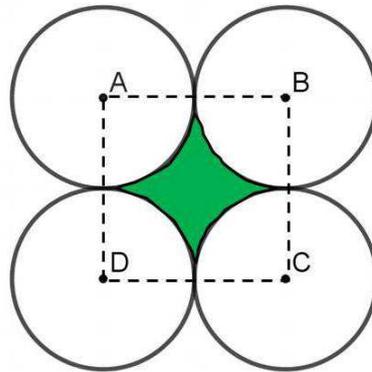
- A) $R\$22,50$ B) $R\$35,00$ C) $R\$40,00$ D) $R\$42,50$ E) $R\$45,00$

2) (DANTE, 2016)Feito o levantamento de um terreno, foram determinados os dados indicados na figura abaixo. Nessas condições, qual a área do terreno?



3) (DANTE, 2016)Um terreno tem forma triangular e as medidas dos seus lados são $17m$, $15m$ e $8m$. Qual a área desse terreno?

4) (DANTE, 2016) O perímetro do quadrado $ABCD$ da figura é 32cm . Calcule a área da região colorida.



5) (DANTE, 2016) Se o raio de um círculo aumenta 10% , então o seu perímetro e sua área aumentarão respectivamente.

- A) 10% e 10% B) 10% e 21% C) 21% e 21% D) 10% e 0% E) 0% e 10%

APÊNDICE J – QUESTIONÁRIO DE AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA



Professor: Natanael Carvalho Sousa

QUESTIONÁRIO DO ALUNO

1) Na sua avaliação a produção de vídeo lhe ajudou a compreender melhor o conteúdo estudado?

A) Sim B) Não

2) Se a sua resposta foi sim na questão anterior, diga porque o vídeo foi importante para você.

3) Você entendeu as deduções e demonstrações?

A) Sim B) Não

4) As demonstrações e deduções lhes ajudaram a entender melhor o assunto?

A) Sim B) Não

5) Você gostou da forma como o assunto foi abordado?

A) Sim B) Não

6) Escreva abaixo sua opinião sobre a forma como o professor abordou o assunto.

ANEXOS

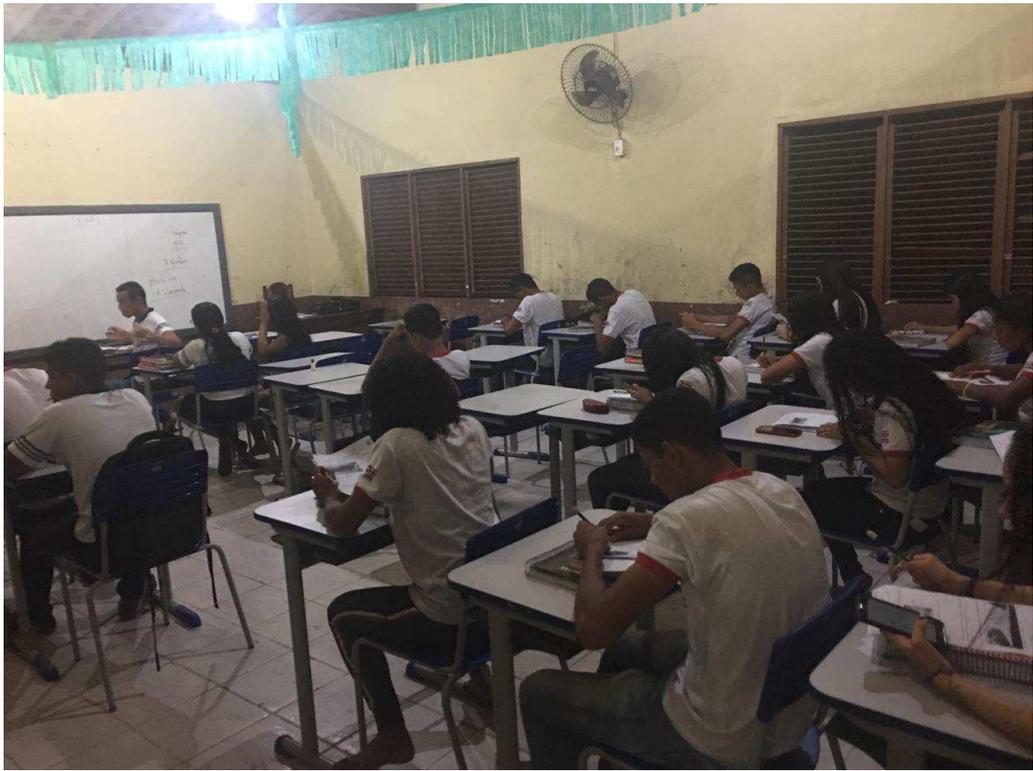
ANEXO A – FOTOS DE MOMENTOS DO TRABALHO

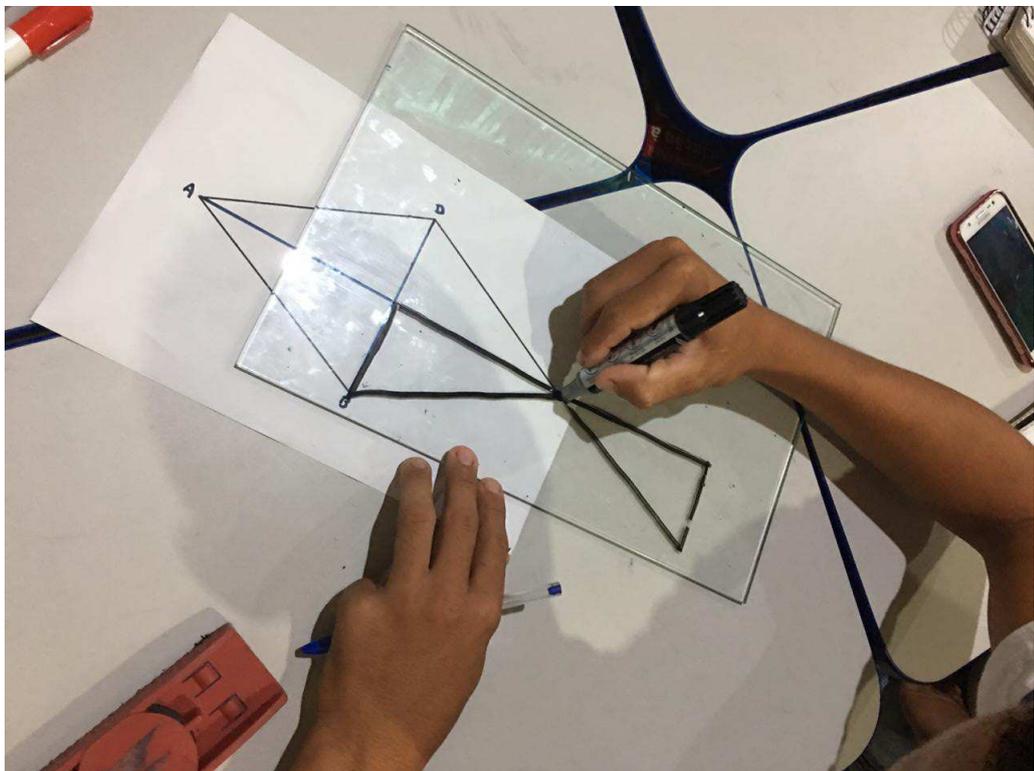
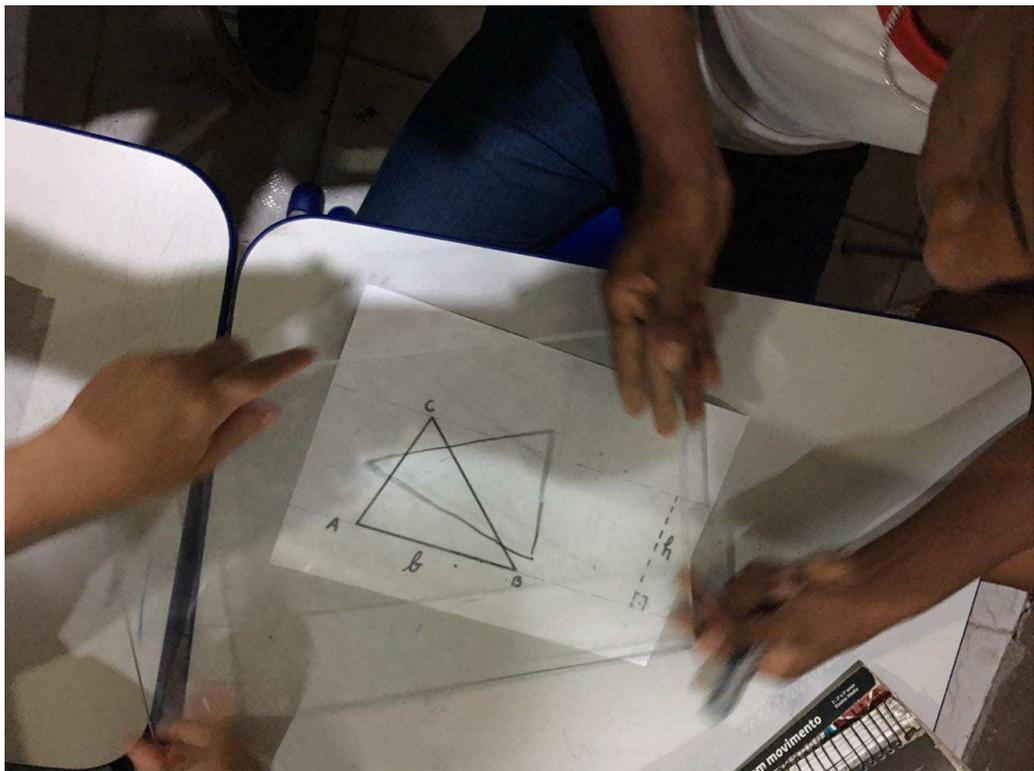


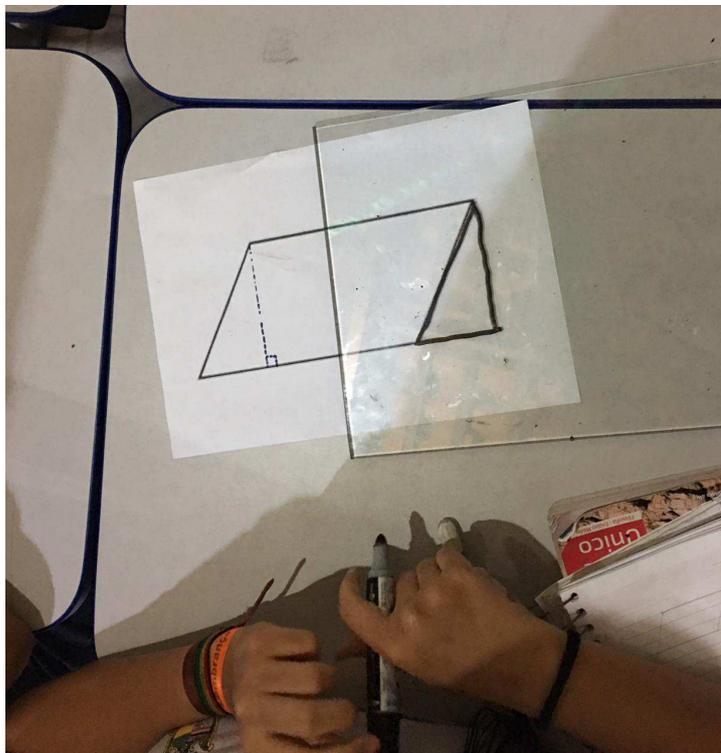
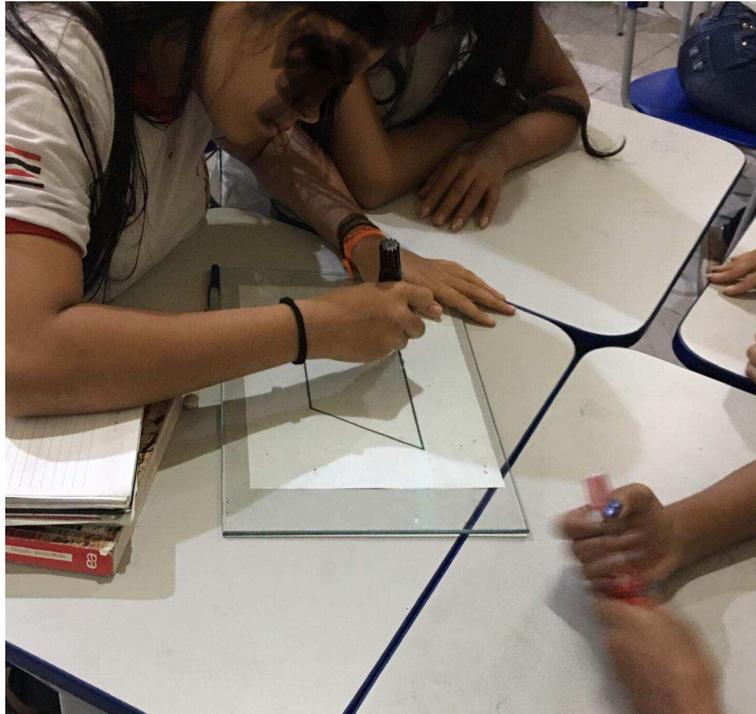
Professor: Natanael Carvalho Sousa

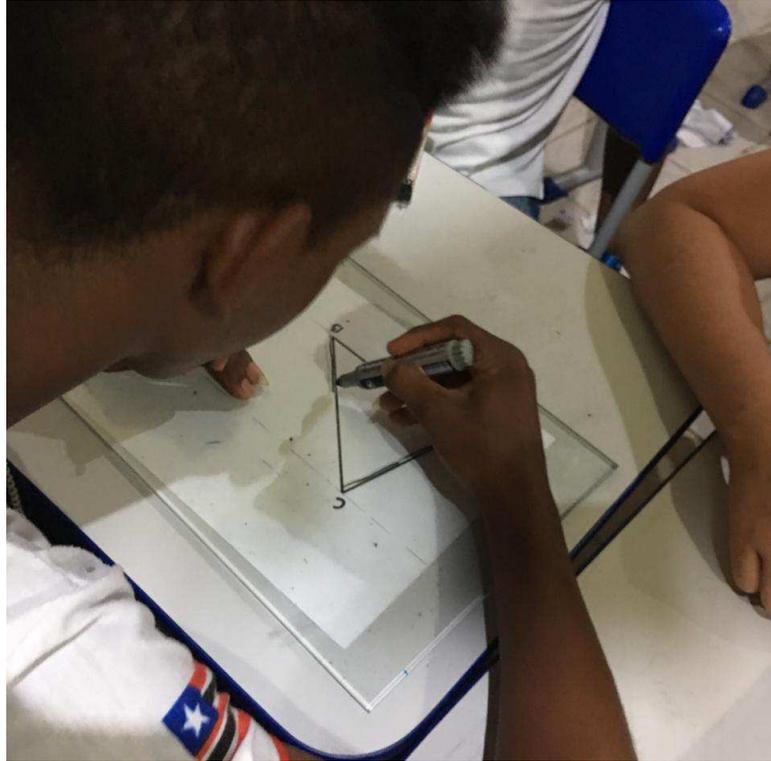
FOTOS DE MOMENTOS DO TRABALHO











OUTRA DEMONSTRAÇÃO...

Tomamos um quadrado de lado medido $m + n$ de lados, que pelo postulado 1 e 2 temos que:

$$A_{(m+n)} = (m+n) \cdot (m+n)$$

$$= (m+n) \cdot m + (m+n) \cdot n$$

$$= 44 \cdot m^2$$

Mas como já vimos anteriormente na dedução da fórmula de área de quadrado $A_{(m+n)} = (m+n)^2$, $A_1 = m^2$ e $A_2 = n^2$