UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Conjuntos numéricos na Educação Básica: dos naturais aos complexos e suas aplicações matemáticas

Antonio Washington dos Santos Silva

São Luís – MA

2019

Antonio Washington dos Santos Silva

Dissertação de Mestrado:

Conjuntos numéricos na Educação Básica: dos naturais aos complexos e suas aplicações matemáticas

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Estadual do Maranhão, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lélia de Oliveira Cruz

São Luís – MA

2019

Silva, Antonio Washington dos Santos.

Conjuntos numéricos na educação básica: dos naturais aos complexos e suas aplicações matemáticas / Antonio Washington dos Santos Silva. – São Luís, 2020.

76 f

Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, 2020.

Orientador: Profa. Dra. Lélia de Oliveira Cruz.

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

ANTONIO WASHINGTON DOS SANTOS SILVA

Conjuntos numéricos na Educação Básica: dos naturais aos complexos e suas aplicações matemáticas.

Dissertação apresentada ao PROFMAT / Universidade Estadual do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 16 / 10 / 2019

Banca Examinadora:

Lélia de Oliveira Cruz

Profª. Drª. Lélia de Oliveira Cruz (Orientadora)
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Celina Amélia da Silva

Profª. Drª. Celina Amélia da Silva
Universidade Estadual do Maranhão (UEMA)

Leda Ferreira Cabral

Profª. Drª. Leda Ferreira Cabral
Instituto Federal do Ceará (IFCE) – Campus Cedro

Dedico este trabalho a toda minha família pelo apoio e por todo amor a mim ofertado. Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por todas as experiências pelas qual passo e que permitem que eu amadureça e cresça espiritual e emocionalmente. Hoje, sei que não há nada que aconteça em minha vida que não seja para meu bem. Aprendi a agradecer por tudo, pois Deus sabe o que faz, abençoando de alguma forma, seja ela pela vitória ou pela derrota.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, primeiramente; segundo, a todas as pessoas que participaram desta minha jornada como meus pais Sinval Alves da Silva e Raimunda Nonata dos Santos Silva, minha esposa Naira Chaves pelo companheirismo e aos meus filhos Victor, Wenzo e Nalya, e a minha orientadora profª Drª. Lélia de Oliveira Cruz que me apoiou nessa jornada tão importante da minha vida e a todos aqueles que contribuíram para o meu sucesso, o meu muito obrigado.

Resumo

O presente trabalho apresenta detalhes relevantes sobre os conjuntos numéricos que vão do conjunto dos números naturais aos imaginários, mostrando partes históricas e um contexto dinâmico de cada conjunto. Fundamentando estes argumentos com a fala de alguns matemáticos sobre os conjuntos numéricos. A dissertação tem como objetivo investigar a organização dos conjuntos numéricos e seus elementos, a partir da teoria dos conjuntos, mostrando sua importância na matemática e sua aplicação na Educação Básica. Os conjuntos possuem os elementos perfeitamente caracterizados e, dentre eles, foram estudados nesta pesquisa os conjuntos dos números Naturais (N), dos Inteiros (Z), dos Racionais (Q), dos Irracionais (I), dos Reais (R) e os Complexos(C). Por fim, realizou-se uma pesquisa de campo com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Teresina – Piauí, na intenção de verificar se os estudantes do último ano da Educação Básica apresentam os conhecimentos de conjuntos numéricos considerados essenciais para dar continuidade à aprendizagem de Matemática sem muitas deficiências, visto que, os conjuntos numéricos são um dos pré-requisitos chave para o bom entendimento dos conteúdos da matemática. A pesquisa foi realizada com a aplicação de um questionário aos alunos. As respostas foram tabuladas e analisadas a partir do referencial teórico e os resultados apontam que existem lacunas de conhecimentos que poderão atrapalhar o percurso formativo dos respondentes.

PALAVRAS-CHAVE: Surgimento dos Números, Conjuntos Numéricos e Educação Básica.

Abstract

This paper presents relevant details on numerical sets ranging from natural to imaginary numbers, showing historical parts and a dynamic context of each set. Supporting these arguments with the speech of some mathematicians about the numerical sets. The dissertation aims to investigate the organization of numerical sets and their elements, from the set theory, showing their importance in mathematics and its application in Basic Education. The sets have the elements perfectly characterized and, among them, were studied in this research the sets of Natural (N), Integer (Z), Rational (Q), Irrational (I), Real (R) and Complexes (C). Finally, a field research was carried out with students of the third year of high school of a public school in Teresina - Piauí, aiming to verify if the students of the last year of Basic Education present the knowledge of numerical sets considered essential to give Continuing mathematics learning without many disabilities, since numerical sets are one of the key prerequisites for a good understanding of math contents. The research was conducted by applying a questionnaire to the students. The answers were tabulated and analyzed from the theoretical framework and the results indicate that there are knowledge gaps that may hinder the formative path of the respondents.

KEYWORDS: Emergence of Numbers, Numerical Sets and Basic Education.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

No ensino de Matemática dentre os diversos conteúdos que devem ser explorados na Educação Básica, destacamos os Conjuntos Numéricos, conjuntos formados por números e que foram sendo organizados e expandidos à medida que o homem e as civilizações evoluíam. Apesar dos conjuntos numéricos terem evoluído a partir da necessidade do homem, muitos alunos terminam o ensino fundamental sem compreender ou utilizar adequadamente os algoritmos das operações, sobretudo da divisão, e ainda apresentam dificuldades para representação e interpretação dos diversos Números Reais, conforme pontua Ponte (2006).

Mesmo aqueles alunos que dominam os algoritmos, apresentam dificuldades e/ou limitações quando precisam ler números ou separar os algarismos em classes, e comumente confundem vírgula e ponto, ao utilizar ou não algum recurso tecnológico para a realização de cálculos com números grandes ou pequenos.

É de fundamental importância que os alunos compreendam os Números Reais. Este também pode servir de base para estudos mais profundos à medida que prosseguem na vida escolar, como por exemplo, quando chegam ao estudo dos Números Complexos, uma vez que, quem não desenvolver capacidade mínima para trabalhar com números e suas operações ficam seriamente limitadas nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática. Algumas dificuldades como a compreensão dos números reais, o desconhecimento da existência de infinitos números, a distinção entre um Número Racional e Irracional, entre outras, conforme identificou Penteado (2009), em uma pesquisa.

Conjuntos numéricos na Educação Básica: dos naturais aos complexos e suas aplicações matemáticas é um trabalho de pesquisa elaborado com o objetivo de identificar os conjuntos numéricos e seus elementos, a partir do surgimento de cada um deles por seus diferentes contextos mostrando sua importância na matemática e sua aplicação na Educação Básica.

Com o propósito de debater pontos cruciais de cada um dos conjuntos numéricos, de forma a atribuir subsídio teórico para que o professor da Educação Básica possa desenvolver suas próprias opções de abordagem para cada conjunto, estabelecemos os objetivos específicos que conduziram a investigação: analisar o contexto histórico sobre a origem dos números, e verificar os conjuntos numéricos desde os naturais até os imaginários; pontuar e operar com conjuntos nas suas diferentes formas de representação; analisar os diferentes conjuntos numéricos, bem como, suas operações e propriedades que rege o conjunto obtendo uma regra que deve ser aplicada nas operações de cada um e identificar em cada conjunto numérico se existe uma nova propriedade um novo argumento que rege o conjunto numérico obtendo uma regra que deve ser aplicada nas operações de cada conjunto numérico.

No desenvolvimento dos capítulos da dissertação foi seguida uma ordem lógica na apresentação dos conteúdos bem como seus conceitos e suas propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da matemática como técnicas e dicas para um bom entendimento dos conteúdos propostos.

No primeiro capítulo, apresentamos a proposta de trabalho e organização do texto é a introdução. No segundo capítulo, estabelecemos uma abordagem relativa à origem dos números. Visto que, a origem e expansão dos números ocorrem com a evolução do homem e das civilizações e acompanha o desenvolvimento da humanidade, uma vez que os números surgiram e são ferramentas para auxiliar na contagem de itens, quantidades e valores. Ainda no mesmo capítulo no período pré-histórico, o homem não tinha uma noção bem desenvolvida sobre a contagem. Sabe-se que, para mensurar quantos alimentos haviam sido coletados ou quantos animais foram caçados, o homem pré-histórico fazia pequenas marcas em ossos, pedras e madeiras, sendo assim, com o desenvolvimento dos modos de vida, outras necessidades surgiram, obrigando o homem a melhorar cada vez mais suas técnicas para contabilizar itens.

No terceiro capítulo, apresentamos os conjuntos numéricos e em cada seção desse capítulo, apresentamos um conjunto numérico que começou com números naturais, por ter sido o primeiro conjunto a surgir e veio provavelmente da técnica natural de contagem. O conjunto dos números naturais (representado pelo símbolo $\mathbb{N}$ ou N) é ordenado e infinito; se somarmos uma unidade a um número natural n, o resultado é um número n+1 e esse resultado será o sucessor de n. Onde foi apresentado o conjunto dos números naturais seguindo os axiomas de Peano e a indução matemática.

A segunda seção aborda o conjunto dos números inteiros, seu surgimento ocorreu quando os números naturais já não eram capazes de atender todas as operações. O símbolo desse conjunto é $\mathbb{Z}$, ou simplesmente Z, esse conjunto é constituído pelos números naturais e seus opostos (ou simétricos) incluindo o zero.

Neste capítulo fez-se uma abordagem sobre as respectivas operações matemáticas e suas aplicabilidades. Na terceira seção, apresentamos o conjunto dos números racionais e incluímos os números ditos fracionários junto com os já existentes, criaram-se o conjunto dos números racionais representados por Q, tal como o nome já indica, são números que se podem representar por uma razão, ou seja, uma divisão de dois números inteiros. De modo que esse conjunto reúna os números naturais e inteiros, os números fracionários finitos e as dízimas periódicas.

Como os números racionais não conseguem preencher todos os espaços entre um intervalo de números inteiros e é nesses "buracos" que surgem os números irracionais, apresentados na quarta seção. Os números irracionais, não podem ser escritos em forma de fração, pois eles possuem infinitas casas decimais e não são periódicos, ou seja, são os números que possuem infinitas casas decimais as quais em nenhuma delas pode ser obtido um período de repetição. Seu símbolo é representado pela letra [duplo I], ou I. As dízimas não periódicas e as raízes quadrada de números que não são quadrados perfeitos são chamadas de números irracionais.

Na quinta e última seção do terceiro capítulo, teremos o conjunto dos números reais pelas quais mostram um agrupamento de todos os conjuntos numéricos N, Z, Q e I, onde consistem simplesmente na junção de dois conjuntos numéricos os racionais e irracionais, seu símbolo é o ℝ, ou R, de modo que possa ser representado por toda reta real, bem como devemos iniciar a ideia da reta real com os números naturais, prolongando a linha para trás para incluir os inteiros negativos, acrescentamos as frações, com isso a reta fica com infinitos pontos entre os inteiros, acrescentamos finalmente os números irracionais preenchendo assim a reta real completa.

No quarto capítulo, abordamos o último conjunto estudado no trabalho, que trata dos números complexos, de forma a conhecer os conceitos e propriedades dos números complexos. Tal estudo dará suporte à aprendizagem para esse conjunto numérico, uma vez que o conjunto é uma ferramenta de trabalho para o desenvolvimento do mesmo, como, por exemplo, forma algébrica, o conjugado e as potencias de i, bem como as operações com as formas algébricas e trigonométricas dos números complexos.

No quinto capítulo, dedicamos à análise da importância dos conjuntos numéricos na Educação Básica e apresentamos a trajetória da pesquisa desenvolvida junto a uma escola da rede pública de Teresina-Piauí. Com base na análise realizada, constatamos que os alunos do terceiro ano do Ensino Médio apresentam lacunas de conhecimento que dificultam o prosseguimento exitoso na vida escolar.

Neste sentido, é de fundamental importância que os alunos compreendam a organização dos conjuntos numéricos, uma vez que, servirão de base para estudos mais profundos feitos mais adiante, como por exemplo, os estudos dos Números Reais e Complexos. Segundo apontaram os teóricos estudados, aquele que não tiver capacidade mínima para trabalhar com números e suas operações, fica seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania.

2. SURGIMENTO DOS NÚMEROS

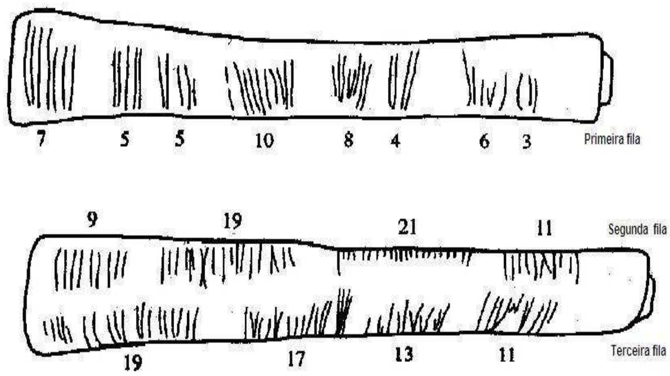
De acordo com algumas pesquisas, os números surgiram com a necessidade de contar objetos. Essa necessidade começou com o desenvolvimento natural das atividades humanas, nos primórdios da civilização, naquela época, os homens viviam em cavernas e/ou grutas, buscando se proteger de animais e das mudanças climáticas, até então não existia a ideia de números, mas eles tinham a necessidade de contar, conforme Galvão (2014, p. 1) “[...] os primórdios da Matemática podem ser recuperados através de registros associados a contagem que foram deixadas por povos que viveram nas mais distintas regiões do globo terrestre”, pesquisas de alguns registros como o osso de Ishango ou bastão de Ishango encontrado no Congo, nas proximidades da fronteira do Zaire e Uganda, datado com vinte mil anos a. C., é uma forte evidência, nele há sessenta cortes em um lado, sessenta no outro e no verso os números estão agrupados em quantidades iguais, como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1: Osso de Ishago

Fonte: Galvão (2014, p. 2)

No osso está encravado um pedaço de quartzo, provavelmente utilizado para produzir as marcas, distribuídas em três filas, representadas na Figura 1. O Osso de Ishango tem em sua primeira fila pequenos grupos de 3 e 6 marcas, 4, 8 e 10 marcas, 5 e 5 marcas e finalizando 7 marcas. Na segunda fila, as marcas estão distribuídas em grupos de 11, 21, 19 e 9 marcas e na terceira fila com 11, 13, 17 e 19 marcas.

Figura 2: Marcas nas três filas do Osso de Ishango



Fonte: Galvão (2014, p. 2)

Várias suposições são feitas a respeito das representações contidas no osso de Ishango, algumas delas são:

> - Primeira fila os grupos próximos estão relacionadas por duplicação 3 e 6, 4 e 8, 5 e 10.
> - Terceira fila as marcas pode ser reescritas da forma 10 + 1, 20 + 1, 20 - 1 e 10 - 9, dos quais representam os números primos entre 10 e 20.
> - Somando a segunda e a terceira fila obterem–se somas iguais a 60, ou seja, dois meses lunares.
> - Somar a primeira fila dá um total de 48 marcas, equivale há um mês e meio lunar. (GALVÃO, 2014, p. 2).

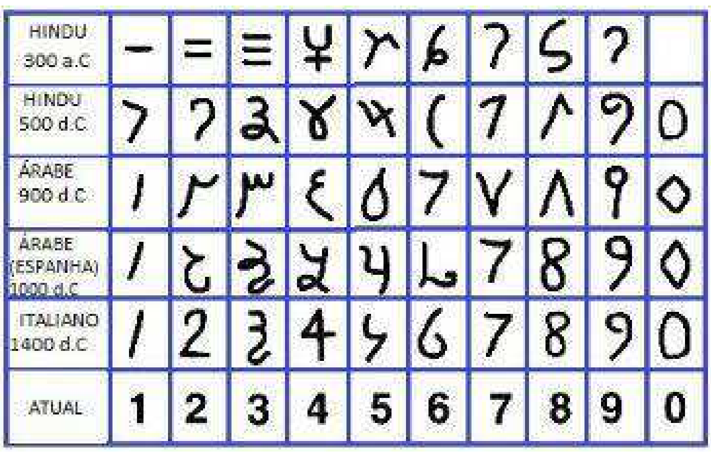
Com a evolução do homem pré-histórico, o modo de vida foi modificando. A procura de alimento para todos os membros do grupo foi ficando mais difícil, pois a população crescia e a caça ia ficando cada vez mais rara. Com isso, houve a necessidade de buscar formas mais eficientes de encontrar alimentos para atender às necessidades do grupo. Com agricultura e o pastoreio, veio à necessidade de uma nova forma de contagem, uma vez que, no pastoreio, o pastor usava várias formas para inspecionar seu rebanho.

Um exemplo conhecido é o da correspondência de uma pedrinha para cada ovelha, ou seja, pela manhã, cada ovelha que saía para o pasto correspondia a uma pedra que era guardada em um saco. Ao fim do dia, quando as ovelhas voltavam do pasto, era feita a contagem inversa, ou seja, para cada ovelha que retornava, era retirada uma pedra do saco, se sobrassem pedras, ficariam sabendo que alguma ovelha ficou desgarrada do bando e se faltassem pedras, saberia que o rebanho tinha aumentado. A palavra cálculo, usada atualmente, deriva da palavra em latim calculus, que significa pedrinha. Vale ressaltar, também, que a relação unidade a unidade não era feita somente com pedras, mas eram usados também nós em cordas.

Desta forma, o surgimento do agrupamento de várias pedrinhas deu ao início a ideia de conjuntos. Segundo Giraldo (2014, p. 53), um conjunto apresenta particularidades, ou seja, um agrupamento de termos com características parecidas no caso da matemática, os números são agrupados em conjuntos denominados numéricos para “[...] caracterizar um conjunto A quer dizer obter um conjunto de propriedades que sejam compartilhadas por todos os seus elementos, e de tal forma que qualquer outro conjunto que também às satisfaça seja (em certo sentido) equivalente a A”.

Ao longo do tempo, os números passaram por uma série de descobertas e mudanças, a última modificação comprovada deu origem aos números e ao sistema de numeração indo-arábico. Segundo Ifrah (1997), os hindus que viveram no vale do Rio Indo, atualmente o Paquistão, desenvolveram um sistema de numeração que reunia diferentes características, entre elas o sistema de numeração indo-arábico, que recebeu esse nome em homenagem aos povos Hindus que o inventaram e, também, por causa dos árabes, que eram grandes comerciantes e viajavam por toda a Europa utilizando este sistema para representar quantidades, registrar valores de transações e também para realizar operações. Assim, eles o propagaram por toda a Europa.

Figura 3: Sistema de numeração hindu-arábico em processo de evolução



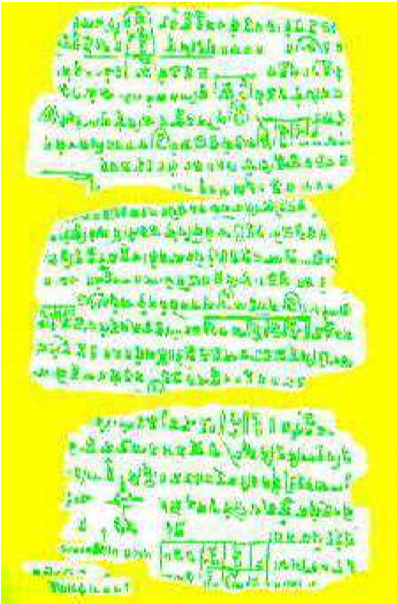
Fonte: Telecurso: Matemática: Volume 1, pág. 27.

Contudo, o sistema foi sendo aperfeiçoado ao longo da história, conforme a Figura 3, os cálculos eram efetuados facilmente, e tornaram-se mais eficientes com o aparecimento do símbolo para designar o zero.

Segundo Gundlach (1992), deve-se aos Hindus a geniosidade de inventar o zero no ano 500 D.C., conta à história que o símbolo conhecido hoje, tem seu primeiro registro em inscrições e manuscritos Hindus para assinalar um espaço em branco, e recebeu variadas denominações, como sunya, significando "lacuna" ou "vazio". Para os árabes, era conhecido como sifr, que significa "vago". Já no latim como zephirum ou zephyrum por volta do ano 1200, mantendo-se seu som, mas não seu sentido. Sucessivas mudanças dessas formas, passando inclusive por zeuero, zepiro e cifre, levaram as nossas palavras "cifra" e "zero". O significado duplo da palavra "cifra" hoje – tanto pode se referir ao símbolo do zero como a qualquer dígito.

Vários antropólogos procuraram explicar como pode ter surgido esta ideia do nada, tão importante para a matemática, uma das explicações mais interessantes parece ser a que liga o conceito do zero à ideia de "nada", bem expressa no misticismo religioso Hindu pelo chamado Nirvana, encontrado nos manuscritos que apresentam os mil anos de cultura Matemática Hindu, através de um livro lendário, Lilavati de Bhaskara. A Figura 4 representa fragmentos do manuscrito, Bakshali, um dos mais antigos exemplares de textos matemáticos Hindus.

Figura 4: Fragmentos do manuscrito de Bakshali.



Fonte: IFRAH, 1997, p. 319.

O manuscrito Bakhshali é um trabalho antigo do século IV da Matemática hindu, embora parte desse material indubitavelmente já fosse conhecida muitos séculos antes. Consiste em cerca de 70 folhas de casca de árvore contendo problemas matemáticos e suas soluções o que faz dele a primeira origem registrada no subcontinente indiano para o símbolo zero.

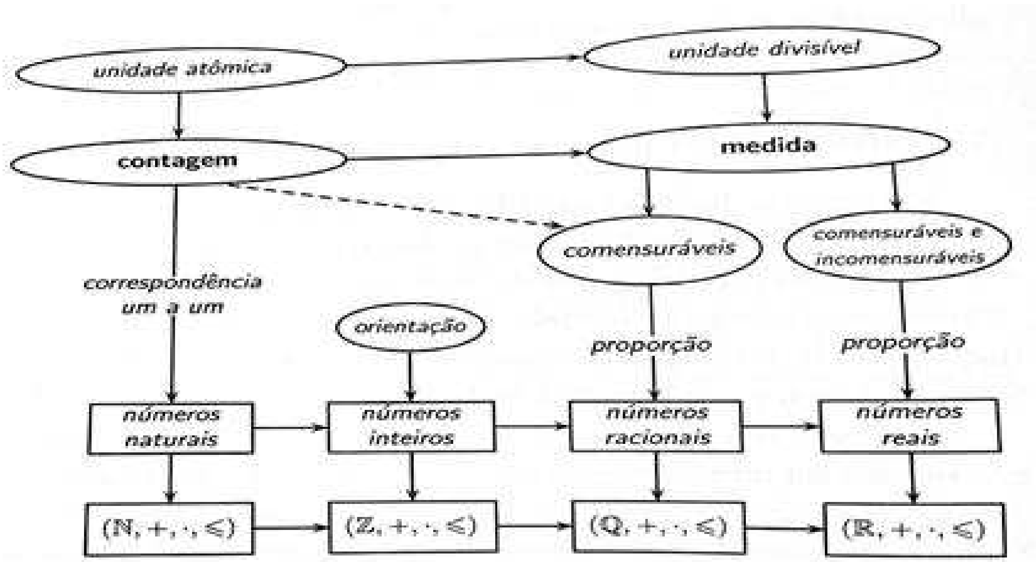
No capítulo seguinte serão apresentados os principais conceitos e definições à cerca dos conjuntos numéricos a serem desenvolvidos no decorrer deste trabalho.

3. CONJUNTOS NUMÉRICOS

Segundo Ripoll, Rangel e Giraldo (2016) a contagem e as medidas são noções fundamentais com base nas quais se sustenta a argumentação ao longo deste tópico. Essas ideias constituem a espinha dorsal das reflexões propostas, no entanto, a organização sequencial deste trabalho é parte da abordagem dos conjuntos numéricos, que segue a ordem de suas inclusões, na forma como se encontra estruturada na matemática contemporânea.

O desenvolvimento de conceito matemático de número, na forma como é estruturado neste trabalho, é representado pelo diagrama da Figura 5.

Figura 5: O desenvolvimento do conceito de número



Fonte: RIPOLL; RANGEL; GIRALDO (2016, p.36).

Pela análise da Figura 5, percebe-se que a organização dos conjuntos numéricos teve como ponto de partida os números naturais. Segundo Ripoll; Rangel; Giraldo (2016, p.36), "[...] principiando com os números naturais, uma estrada que nos leva aos números reais". Nessa caminhada, sucessivamente, as estruturas numéricas foram sendo ampliadas, alcançando a organização:

$$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R \text{ e } I \subset R}$$

3.1 NÚMEROS NATURAIS

Os números naturais dão a ideia da quantidade de objetos que um conjunto possui e foi o primeiro conjunto organizado pelos homens. Os números naturais formam um conjunto que tem como símbolo (IN) cujos elementos estão dispostos da seguinte forma:

$$N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. . .$$

A descrição mostrada acima não é completa, pois só explicitamos alguns poucos de seus elementos. Dessa forma, os números naturais não tem fim, ou seja, o conjunto dos números naturais é dito um conjunto infinito.

> [...] Os Axiomas de Peano, proposto pelo matemático italiano Giuseppe Peano no final do século XIX, foi à primeira construção matemática formal do conjunto dos naturais. A estrutura dos Axiomas de Peano baseia-se em uma ideia elementar central: a de sucessor. Essencialmente, o conjunto dos números naturais é construído tomando-se progressivamente sucessor, a partir de um elemento inicial. Isto é, o (IN) é obtido como o conjunto que se obtém como resultado do processo de se partir de um elemento, acrescentar seu sucessor, o sucessor de seu sucessor, a assim por diante. (GIRALDO 2014, p.47).

Os pesquisadores Maciel e Lima (2005) admitem a existência de um conjunto não vazio IN, para o qual vale os seguintes axiomas:

1. O número 1 é um natural, ou seja, $1 \in N$.
2. Cada número natural n possui um único sucessor, o qual é denotado por s(n);
3. O número natural 1 não é sucessor de nenhum outro número natural, ou seja, $s(n) \neq 1$, $\forall n \in N$;
4. Se o conjunto X c N é tal que $1 \in X$ e s(X) c X, ou seja, se $n \in X$ implica $s(n) \in X$ então X = N.

A partir deste ponto abandonaremos a notação s(n) para denotar o sucessor de n e escrevemos sempre n + 1 como sucessor de n.

O axioma 4 é conhecido como Princípio da Indução, um método de demonstrações de proposições a respeito dos números naturais.

A proposição P(n) é válida para todos os números naturais n, se:

1. P(1) é válida;
2. Se P(n) é válida então P(n + 1) é válida.

Esta última condição quer dizer que: supondo a proposição P(n) válida para um natural n, se for possível mostrar que ela é válida para o sucessor n + 1, então podemos garantir que ela é válida para todos os números naturais. A hipótese de P(n) ser válida denomina-se Hipótese de Indução.

Exemplo 3.1.1. Mostra que a proposição: $P(n) = 1 + 3 + 5 +. . . + (2n - 1) = n^2$, é válida para todo n natural.

Solução: Percebe-se que para n = 1 é valida a proposição, ou seja, P(1): $1 = 1^2$. A hipótese de indução é que a proposição: $P(k) = 1 + 3 + 5 + . . . + (2k - 1) = k^2$, para todo k natural, também é verdadeira.

Adicionando 2k + 1 a ambos os membros desta igualdade, obtemos:

$$1 + 3 + 5 + . . . + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k + 1)^2$$

Isto nos diz que a proposição é verdadeira para P(k +1). Logo, pelo Princípio da Indução, a proposição P(n) é verdadeira para todo natural n.

O conjunto dos números naturais é definido por duas operações fundamentais: adição e multiplicação. Se **a** e **b** são números naturais então se define adição: **a + b**; e multiplicação: **a • b**.

A abordagem será essencialmente axiomática, isto é, segui uma lista de propriedades básicas dos números naturais e das duas operações, adição e multiplicação de acordo Hefez (2016).

1. A adição e a multiplicação são bem definidas: $\forall a, b \in N$.

$$\mathbf{a = a' \text{ e } b = b' \Rightarrow a + b = a' + b \quad \text{e} \quad a \bullet b = a' \bullet b'}.$$

2. A adição e a multiplicação são comutativas: $\forall a, b \in N$,

$$\mathbf{a + b = b + a} \quad \text{e} \quad \mathbf{a \bullet b = b \bullet a.}$$

3. A adição e a multiplicação são associativas: $\forall a, b, c \in N$,

$$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)} \quad \text{e} \quad \mathbf{(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c).}$$

4. A multiplicação possuem elementos neutros: $\forall a \in N$

$$\mathbf{a \bullet 1 = 1 \bullet a}$$

5. A multiplicação é distributiva com relação à adição: $\forall a, b, c \in N$.

$$\mathbf{a (b + c) = a \bullet b + a \bullet c.}$$

6. Tricotomia: Dados $a, b \in N$, uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades é verificada:

(i) $a = b$;

(ii) $\exists\, c \in N, b = a + c$;

(iii) $\exists\, c \in N, a = b + c$.

A relação de ordem no conjunto dos números naturais é definida em termos da adição. Dados quaisquer $a, b \in N$ dizemos que a é menor do que b e escrevemos $a < b$, existe $c \in N$ tal que $b = a + c$, o que é verificado no item (ii) acima. Da mesma forma, dizer que a é maior do que b e escrevemos $a > b$, o que é verificado no item (iii).

Se $a > b$ significa que **a** é maior do que ou igual a **b**. A relação "menor do que" goza das seguintes propriedades:

1. Transitividade: $\forall a, b, c \in N$,

$$a < b \quad \text{e} \quad b < c \Longrightarrow a < c$$

2. A adição é compatível e cancelativa: $\forall a, b, c \in N$,

$$a < b \Longrightarrow a + c < b + c.$$

3. A multiplicação é compatível e cancelativa: $\forall a, b, c \in N$,

$$a < b \Longrightarrow a\, c < b\, c.$$

Relacionamos a ideia das propriedades com números de modo que possamos operar as propriedades a rigor dessas operações no conjunto dos números naturais, das quais foram enunciadas, mas apesar de usadas frequentemente, não recebem maior atenção, isto parece explicável, porque os números naturais gozam das propriedades estabelecidas em situações propostas dentro das leis básicas da aritmética.

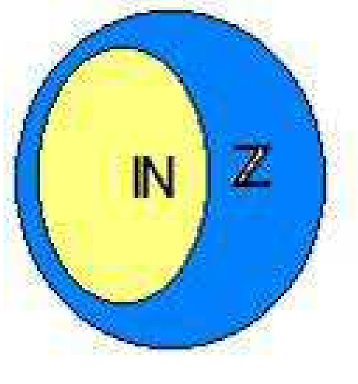
3.2 NÚMEROS INTEIROS

Com o passar dos anos, a expansão mundial do comércio fez surgir uma necessidade cotidiana que implicou a uma nova concepção de número. No século XVIII, no auge das ciências modernas, com o entendimento do zero, ampliou-se o uso dos números negativos que somados às intenções comerciais, de certa forma, inspiraram os matemáticos da época na forma de representar outro conjunto numérico, o conjunto dos números inteiros, representado pela letra **Z**. Vale destacar que, "[...] a letra **Z** corresponde à letra inicial da palavra alemã Zahlen, que significa números" (DOMINGUES, 2016, p.21).

O conjunto dos números inteiros é formado por todos os números naturais, todos os seus números simétricos negativos e o zero. O conjunto, em epígrafe, não possui início nem fim, ao contrário dos naturais, que possui um início e não possui fim.

Neste sentido é possível afirmar que, dentre os subconjuntos dos números inteiros, encontra-se o conjunto dos números naturais, ou seja, $N \subset Z$, conforme expressa a Figura 6.

Figura 6: Representação do diagrama do conjunto dos números inteiros (Z)



Fonte: www.estudopratico.com.br/numeros-inteiros

Segundo Hefez (2016), o conjunto Z dos números inteiros se define pelas operações de adição e multiplicação, válida para as propriedades dos inteiros, citadas para o conjunto dos números naturais. Assim, seguem mais algumas propriedades fundamentais para o conjunto dos números inteiros. Sejam **a**, **b** e **c** inteiros quaisquer, então:

1. A adição possuem elementos neutros:

$$\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$$

2. Integridade: Tem-se que a, b $\in$ Z.

$$\mathbf{a \bullet b = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad ou \quad b = 0.}$$

A relação "menor do que" listada para os naturais também satisfaz para os inteiros, segundo Hefez (2016), citamos mais propriedades que são validas para conjunto dos inteiros:

1. Se $a \in Z$ com $a \neq 0$, então $a < 0$ ou $0 < a$;
2. Se $a, b, c \in Z$ com $a < b$ e $c > 0$, então $ac < bc$;
3. Se $a, b, c \in Z$ com $a < b$ e $c < 0$, então $ac > bc$.

Dados dois números inteiros **a** e **b** com $a \neq b$, sabemos que existe um número inteiro **c** tal que $b = a + c$. Neste caso, definimos o número **b** menos **a**, denotado por $b - a$, como sendo o número **c**. Em símbolos:

$$b - a = c.$$

Dizemos que **c** é o resultado da subtração de **a** de **b**. Portanto, temos por definição.

$$c = b - a, \text{ se somente se, } b = a + c.$$

O número **c** é denotado por inverso aditivo conhecido como subtração entre dois números inteiros. Generalizando, diz-se que **a** é o inverso aditivo de **a** quando.

$$a + (- a) = (- a) + a = 0.$$

Assim, tendo os naturais como universo numérico, existe a necessidade de criar a subtração de dois números quaisquer. Daí surgiu à ideia de construir novas propriedades para garantir a construção dos números negativos, segundo Giraldo, (2014). "Desta forma qualquer conjunto em que essas propriedades elementares valham todas as suas consequências também valerão".

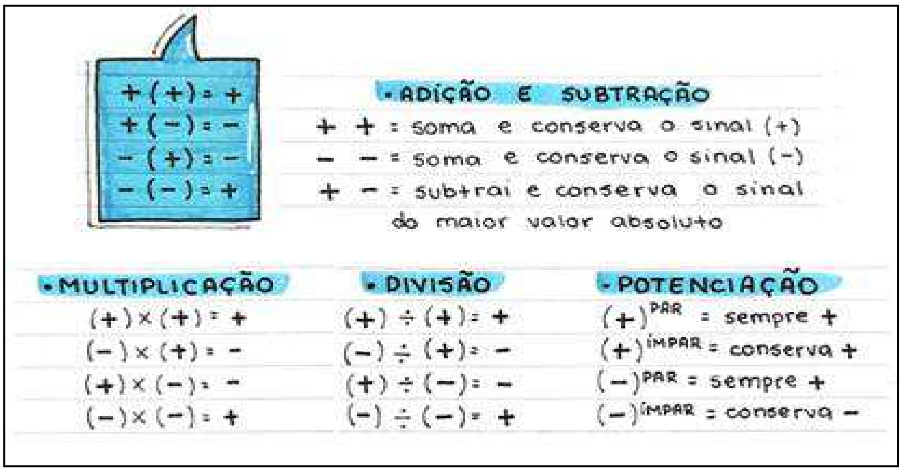
O módulo ou valor absoluto de um número inteiro **a**, o inteiro simbolizado por $|a|$, tal que:

$$|a| = \begin{cases} a, se\ a > 0 \\ -a, se\ a < 0 \end{cases}$$

Logo, o valor absoluto de $|10| = 10$, a distância de 10 até a origem, e o valor absoluto de $|-10|$ = - (- 10) = 10, pois a distância de -10 até a origem (ponto de referência) correspondem a 10.

O modo como ficaram conhecidas às regras usadas para decidir o sinal do resultado das operações matemáticas básicas é o jogo de sinais, apresentados na Figura 7.

Figura 7: Representação dos jogos de sinais



Fonte: www.passeidireto.com/arquivo/60848130/matematica-jogos-de-sinais

A origem da regra dos sinais, conforme afirma Dassie et al (2010, p.10) é imputada a Diofantes de Alexandria (fim do século III d.C).

> Apesar [...] do autor não fazer qualquer referência aos números negativos. No entanto, no início do Livro I da sua "Aritmética" Diofantes escreve '*O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta' (grifo do autor)*, aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças.

Contudo, duraram séculos para que os matemáticos percebessem que a regra de sinais conjuntamente com todas as outras definições que governam os números inteiros e as frações não pode ser provada. Elas foram criadas para darem liberdade operatória, pelo simples fato de preservar as propriedades fundamentais da Aritmética. De acordo com Ripoll; Rangel e Giraldo (2016, p. 93),

> [...] os números inteiros quando é introduzido na escola, o aluno provavelmente já lidou com definições antes, como algumas figuras geométricas, a noção de paralelismo, números primos, ou mesmo as operações de adição e subtração com naturais. Mas em todos os casos, de alguma forma, pode ser estabelecida uma relação com o universo familiar do aluno ou com estruturas lógicas já conhecidas e realizadas. Porém, no caso do produto de dois números negativos, é difícil conseguir referências concretas que sejam familiares aos alunos para sustentar suas definições.

Às vezes, algumas analogias são usadas como "macetes" para memorização para regra dos sinais. Entretanto, essa generalização pode não ser tão direta para os alunos do ensino fundamental, e são importante que eles experimentem diversos exemplos que ilustrem as regras gerais, com fatores positivos e negativos, explorando a interpretação das operações matemáticas de maneira ampliada como reflexão na representação na reta numerada.

3.2.1 Divisibilidade

A divisão entre dois números inteiros nem sempre é possível, se expressa através da relação de divisibilidade. O fato de sempre ser possível efetuar tal divisão é responsável por inúmeras propriedades dos inteiros que exploraremos nas secções seguintes, segundo Hefez (2016).

Dados dois números inteiros **a** e **b** com $a \in Z^*$, podemos afirmar que **a** divide **b** ou que **a** é um divisor de **b** ou simplesmente que **b** é divisível por **a**, escrevendo:

$$b \div a.$$

A relação **a** divide **b** denomina-se relação de divisibilidade em Z. Assim, existem critérios de divisibilidade para a maioria dos números como o dois, o três, o cinco e outros, existem regras que permitem verificar a divisibilidade sem se efetuar a divisão, são chamadas de critérios de divisibilidade.

Pode se verificar que existem também os números inteiros que não admitam outro divisor a não ser ele próprio e a unidade. Neste caso o número receberá denominação de número primo se ele for maior que 1. Por outras palavras, um número primo é aquele que admite apenas dois divisores positivos, ou seja, o número 1 e ele mesmo.

Os números naturais que possuem mais de dois divisores são chamados de números compostos.

Algumas curiosidades do número 1, ele não é primo e nem composto, pois ele apresenta somente um divisor que é ele mesmo.

Entre 1 e 1000 há 168 números primos, conforme apresentado na Figura 8.

Figura 8: Números primos de 1 a 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

Fonte: www.todamateria.com.br/numeros-primos

Quando um número inteiro é escrito como produto de dois ou mais números primos, podemos então formalizar a ideia de um número fatorado ou decomposto em fatores primos.

Existem maneiras para decompor um número composto. Podemos decompor, por exemplo, o número 120 em seus fatores primos utilizando uma maneira prática, conforme segue uma:

$$
\begin{array}{r|l}
120 & 2 \\
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
\hline
1 & 2^3 \;\; 3^1 \;\; 5^1
\end{array}
$$

Logo o número 120 pode ser escrito como sendo $2^3 \bullet 3^1 \bullet 5^1$, ou seja,

$$120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

Assim, o conjunto de todos os divisores de um inteiro qualquer “a”, indicado por D(a), satisfaz a seguinte igualdade:

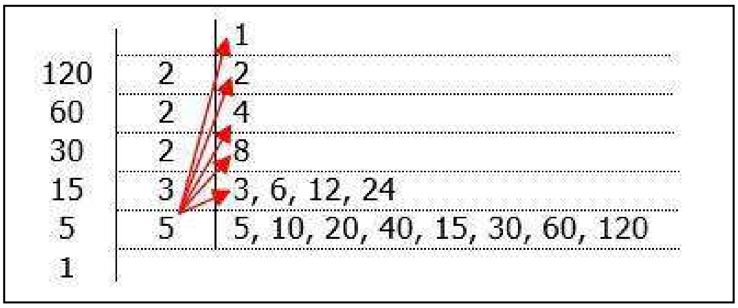
$$D(a) = a \div k, \text{ onde } k \in Z^*.$$

Na prática, determinamos todos os divisores de um número utilizando os seus fatores primos. Desta forma, podemos citar, por exemplo, os divisores de 120:

1. Decompomos o número em fatores primos;
2. Traçamos uma linha e escrevemos o 1 no alto, porque ele é divisor de qualquer número;
3. Multiplicamos, sucessivamente, cada fator primo pelos divisores já obtidos e escrevemos esses produtos ao lado de cada fator primo;
4. Os divisores já obtidos não precisam ser repetidos.

De acordo com a Figura 9, podemos representar todos os divisores inteiros positivos do número 120.

Figura 9: Representação dos divisores de um número inteiro positivo



Fonte: www.matematica.com.br

Portanto os divisores de 120 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

Segundo Hefez (2016), dados dois números inteiros **a** e **b**, não conjuntamente nulos, diz-se que o número inteiro **d** $\in Z^*$. É um divisor comum de **a** e **b** se:

$$d \div a \text{ e } d \div b.$$

Definimos assim o máximo divisor comum (m.d.c.) de **a** e **b** um inteiro **d**, indicado por mdc (a, b) = d, tal que possua as seguintes propriedades:

(i) **d** é um divisor comum de **a** e de **b**;

(ii) **d** é divisível por todo divisor comum de **a** e **b**.

Na prática os pressupostos anteriores são fundamentais na resolução de problemas conforme a questão proposta pelo Instituto Federal da Bahia, 2018.

O Supermercado "Preço Baixo" deseja fazer uma doação ao Orfanato "Me Adote" e dispõe, para esta ação, 528 kg de açúcar, 240 kg de feijão e 2016 kg de arroz. Serão montados Kits contendo, cada um, as mesmas quantidades de açúcar, de feijão e de arroz. Quantos quilos de açúcar deve haver em cada um dos kits, se forem arrumados de forma a contemplar um número máximo para cada item?

Solução: Para encontrar o mdc (528, 240, 2016), primeiramente decompõem-se os valores em fatores primos, conforme segue:

528,	240,	2016	2
264,	120,	1008	2
132,	60,	504	2
66,	30,	252	2
33,	15,	126	3
11,	5,	42	

Daí o mdc (528, 240, 2016) = 2•2•2•2•3 = 48, isto significa que serão organizados 48 kits. Logo, o total de quilos de açúcar por kit é o resultado da operação de $\frac{528}{48}$, então cada kit terá 11 quilos de açúcar.

Vale ressaltar, nas questões que se referem a máximo divisor comum (m.d.c.) se referem à repartição em partes iguais e que tenha o maior tamanho ou quantidade possível. Segundo Hefez (2016), dado um inteiro "a", define-se o conjunto dos múltiplos inteiros de **a** denotada por M(a):

$$M(a) = k \cdot a, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Um número inteiro é um múltiplo comum de dois números inteiros **a** e **b**, se eles forem conjuntamente múltiplos de ambos os números.

Diz–se que um número inteiro **m**, é um mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de **a** e **b**, indicado por m.m.c. (a, b) = m, de acordo com Hefez (2016) segue as seguintes propriedades:

(i) **m** é um múltiplo comum de **a** e **b**;

(ii) se **c** é um múltiplo comum de **a** e **b**, então **m** $\mid$ **c**.

Na prática as citações anteriores são fundamentais na resolução de problemas conforme a questão proposta pelo Instituto Federal de Alagoas, 2016.

Três linhas diferentes de ônibus, A, B e C, passam em certo ponto a cada 8 min, 12 min e 20 min respectivamente. Se às 6 horas, essas três linhas chegam ao mesmo instante a esse ponto, em qual horário do dia as três linhas chegarão novamente no mesmo instante a esse mesmo ponto?

Solução: Para encontrar o mmc (8, 12, 20), decompõe-se os valores em fatores primos, conforme apresentado abaixo:

8	12	20	2
4	6	10	2
2	3	5	2
1	3	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

Daí mmc (8, 12, 20) = 2 • 2 • 2 • 3 • 5 = 120, isto significa que as três empresas vão se encontrar a cada 120 min, ou seja, a cada 2 horas, contando do primeiro instante do encontro. Portanto, os ônibus chegarão novamente nesse mesmo ponto as 6 + 2 = 8 horas.

Outras operações que merecem destaque nos Z devido sua importância na construção de outros conceitos matemáticos, são as operações de potenciação e radiciação.

3.2.2 Potenciação e Radiciação de números inteiros

A potenciação surge como uma ferramenta muito útil na apresentação de uma multiplicação de fatores iguais e sua representação é dada por:

$$a^n = \underbrace{a \bullet a \bullet a \bullet \ldots \bullet a}_{n\ vezes}, \text{ com } a \neq 0.$$

Para tanto, deve-se observar que:

- A base: é o fator que se repete;
- O expoente: indica a quantidade de vezes que se repete a base na multiplicação;
- Potência: é o resultado da multiplicação.

O que na prática é representado por:

$$(+a)^2 = (+a) \bullet (+a) = +a;$$
$$(-a)^2 = (-a) \bullet (-a) = +a.$$

Aplicando a regra de sinal da multiplicação, percebemos que, ao multiplicar uma quantidade par de fatores iguais, a potência será um número positivo.

O que na prática é representado por:

$$(+a)^3 = (+a) \bullet (+a) \bullet (+a) = a;$$
$$(-a)^3 = (-a) \bullet (-a) \bullet (-a) = -a.$$

Quando aplicamos a regra de sinal da multiplicação, percebemos que, se a base for positiva, a potência será um número positivo e, se a base for negativa, a potência será um número negativo.

Na potenciação de números inteiros, sempre ocorrerá a seguinte situação, quando:

- O expoente for um número par, a potência será sempre positiva.
- O expoente for um número ímpar, a potência será positiva ou negativa, ou seja, a potência terá o mesmo sinal da base.

Na potenciação de números inteiros, é importante observar, também que:

- se o expoente for 1, o resultado sempre será a própria base.

$$a^1 = a$$

$$(- a)^1 = - a$$

- se o expoente for 0, o resultado sempre será 1.

$$a^0 = 1$$

$$(- a)^0 = 1$$

Analisando a ideia do conjunto dos números inteiros, verificamos que as seguintes propriedades básicas da potenciação são necessárias para a realização de inúmeras operações matemáticas.

Ainda é relevante mostrar ideias mais amplas sobre as propriedades da potenciação, como a extração da raiz n-enésima de um número natural com n > 2, usando a operação inversa da potenciação, chamada de radiciação.

$$b^n = a \leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b, (n \in N \text{ e } n > 2).$$

Os números naturais que possuem raiz quadrada exata são chamados de quadrado perfeitos. Assim, a raiz quadrada de números inteiros negativos não existe no conjunto dos números inteiros, pois o sinal da potência de expoente par sempre é positivo. A existência de um número cujo quadrado é igual a um número negativo só será estudada nos números complexos. Já a raiz cúbica é uma operação na qual o radicando (o número que se deve multiplicar por si mesmo) tem um índice (a quantidade de vezes que se deve multiplicar) de valor 3. Portanto, o resultado desta radicação será a raiz em questão.

3.3 NÚMEROS RACIONAIS

Segundo Boyer (1996), os números racionais tiveram origem no Egito antigo em forma de frações, mas apenas foram aceitas com a expansão comercial e a evolução da matemática. Por exemplo: uma fatia de um bolo, um pedaço de terreno e outras situações eram difíceis de ser representado, o que levou os homens a buscarem formas de representação surgindo às frações.

Para incluir os números ditos fracionários junto com os já existentes, criaram-se o conjunto dos números racionais representados por Q, tal como o nome já indica, são números que se podem representar por uma razão, ou seja, uma divisão de dois números inteiros. O conjunto dos números racionais engloba:

- Os números naturais e inteiros;
- Os números fracionários finitos;
- E as dízimas periódicas.

Portanto, todo número que tem representação decimal finita ou infinita e periódica são chamados de números racionais.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \ldots, -3, \ldots, \frac{-3}{2}, \ldots, -1, \ldots, 0, \ldots, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, \ldots \right\}$$

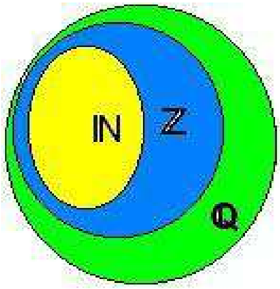
O conjunto dos números racionais, simbolizado pela letra Q, é o conjunto dos números que podem ser escritos na forma de uma fração $\frac{a}{b}$, com **a** e **b** inteiros quaisquer com **b** diferente de zero.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in Z\ e\ b\ \in Z* \right\}$$

O conjunto dos números racionais é a ampliação do conjunto dos números inteiros, onde se definem outros subconjuntos de Q.

Assim, podemos observar que IN é subconjunto de Z, que, por sua vez, é subconjunto de Q; isto é, todo número natural é também número inteiro, e todo inteiro é também número racional, representado assim, pela a Figura 10.

Figura 10: Representação do diagrama do conjunto dos números racionais (Q).



Fonte: www.todamateria.com.br/numeros-racionais

Para fazer a comparação de números racionais, podemos estabelecer uma diferenciação entre os números, comungando com Maciel e Osmundo (2005), ao considerar os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, para determinar em Q as seguintes relações:

a) Igualdade: $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, se e somente se, ad = bc;

b) Adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a\,b + bc}{bd}$

c) Multiplicação: $\frac{a}{b} \bullet \frac{c}{d} = \frac{a \bullet c}{b \bullet d}$

d) Relação de ordem: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais com b, d > 0. Indicamos por $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ quando ad = bc e dizemos que $\frac{a}{b}$ é menor ou igual a $\frac{c}{d}$

É válido lembrar que a relação de "<" (menor do que), é usada para determinar quem é o maior dentre os números racionais,, ,"por exemplo,", $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$:

Solução: Uma maneira de mostrar a dica dada acima é usar a propriedade de igualdade entre os temos: 2 • 4 = 8 e 3 • 3 = 9. Logo, podemos afirma que 8 < 9. Portanto a fração $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

Segundo Guidorizzi (2001), as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são sempre possíveis no conjunto dos números racionais. Assim, se **a** e **b** são números racionais, então gozam das seguintes propriedades:

$$(a + b) \in Q, (a - b) \in Q, (a \cdot b) \in Q, (a \div b) \in Q, \text{ com } b \neq 0.$$

De acordo com Guidorizzi (dizemos que o número racional $\frac{p}{q}$ é positivo se $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} \in$ N. Se $\mathbf{p} \bullet \mathbf{q} \in$ N e $\mathbf{p} \neq 0$ dizem, então, que $\frac{p}{q}$ é estritamente positivo). O número racional **a** é estritamente menor que o número racional **b**, ou que **b** é estritamente maior que **a**, e escrevemos $a < b$, ou respectivamente $b > a$, se existir um número racional **t** estritamente positivo, tal que $b = a + t$. A notação $a \leq b$ é usada para indicar a afirmação "$a < b$ ou $a = b$". A notação $a \geq b$ é equivalente a $\leq$ b. Observe que **a** positivo equivale **a**, $a \geq 0$ e que se $a \leq 0$, dizemos que a é negativo.

Considerando os números racionais x, y e z, a quádrupla (Q, +, • , ≤) satisfaz as seguintes propriedades:

- Associativa: (A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$; (M1) $(xy)z = x(yz)$.
- Comutativa: (A2) $x + y = y + x$; (M2) $xy = yx$
- Existência de elemento neutro: (A3) $x + 0 = x$ (M3) $x\ 1 = x$.
- Existência de oposto: (A4) Para todo racional x existe um único racional y tal que $x + y = 0$. Tal y denomina–se oposto de x e indica–se por $-x$.
  Assim, $x + (-x) = 0$.
- Existência de inverso: (M4) Para todo racional $x \neq 0$ existe um único racional y tal que $x\ y = 1$. Tal y denomina–se inverso de x e indica–se por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.
  Assim, $x \bullet x^{-1} = 1$.
- Distributiva da multiplicação em relação à adição: (D) $x(y + z) = xy + xz$.

- Reflexiva: (O1) $x \leq x$.

- Antissimétrica: (O2) $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$.

- Transitiva: (O3) $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$.

- Quaisquer que sejam os racionais x e y: (O4) $x \leq y$ ou $y \leq x$.

- Compatibilidade da ordem com a adição: (OA) Se $z > 0$ e $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

- Somando-se a ambos os membros de uma desigualdade um mesmo número, o sentido da desigualdade se mantém.
- Compatibilidade da ordem com a multiplicação: (OM) Se $z > 0$ e $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$.

- Multiplicando-se ambos os membros de uma desigualdade por um mesmo número positivo, o sentido da desigualdade se mantém.

- O símbolo ($\Rightarrow$) que aparece em (OA) e (OM) significa "então" ou "implica".

Seja K um conjunto qualquer com pelo menos dois elementos e suponhamos que em K, estejam definidas duas operações indicadas por + e; se a terna (K, +,) satisfaz as propriedades (A1) a (A4), (M1) a (M4) e (D), diremos que (K, +,) é um corpo. Se, além disso, se K estiver definida uma relação (6) de modo que a (K, +, 6) satisfaça todas as 15 propriedades anteriormente listadas, então diremos que (K, +, 6) é um corpo ordenado. Consequentemente (Q, +, 6) é um corpo ordenado, ao passo que (Z, +, 6) não é um corpo ordenado, pois é fácil ver que (M4) não se verifica. (GALDINO, 2011, p. 7-9).

3.3.1 Potenciação de números racionais

Potência de um número racional **a**, com expoente **m** inteiro negativo. A potência de um numeral racional, não nulo, com expoente inteiro negativo é igual à potência do inverso do número racional dado, mas com expoente de mesmo valor absoluto e sinal positivo.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m},$$

com a ≠ 0, b ≠0 e n ∈ Z^*.

Considere "a" como um número real positivo, **n** um número natural não nulo e $\frac{m}{n}$ um número racional na forma irredutível. A potência de base **a** e expoente racional $\frac{m}{n}$ são determinadas por:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \text{ n} \in \text{N, com } n > 1.$$

Potência com expoente racional, o expoente do radicando se transforma no numerador do expoente da base fora da raiz, e o índice da raiz passa a ser o denominador. De modo que as mesmas propriedades valem tanto para as potências de expoente racional quanto para as potências de expoente inteiro.

3.3.2 Dízimas periódicas

Dízima periódica é a representação numérica de números decimais, quaisquer que sejam eles, em que um ou mais dos seus algarismos se repetem infinitamente na mesma ordem.

Temos que 1, 222. . . é chamado de dízima periódica simples. Já 1,1222 . . . é chamado de dízima periódica composta.

Uma dízima periódica simples é uma dízima onde o período ocorre logo após a vírgula, vamos a algumas representações de como transforma essa dízima em uma fração geratriz.

Uma maneira prática para transformar uma dízima periódica em uma fração geratriz conforme a ideia a seguir.

Transforme o número **b**, **aaaa**. . . em uma fração geratriz.

Parte inteira: **b**.

Período: **a**.

A formalização da ideia do denominador: (quantidade de algarismos no período é a quantidade de 9), para esse exemplo tem um algarismo **a** distinto, ou seja, um 9. (Para outros, dois algarismos distintos, ou seja, dois 9, três algarismos distintos, ou seja, três 9 e assim sucessivamente) assim,

$$\frac{\text{junta a parte inteira com o período formado um único número"menos" parte inteira}}{\text{quantidade de 9}}$$

$$= \frac{\text{ba} - \text{b}}{9}$$

Exemplo 3.3.2.1 Como transformar 0, 777 em uma fração geratriz...

Parte inteira: 0

Período 7 (quantidade de noves: 1, ou seja, 9). Assim,

$$\frac{07 - 0}{9} = \frac{7}{9}$$

Exemplo 3.3.2.2 Como transformar 19, 252525. . . em uma fração geratriz.

Parte inteira: 19.

Período 25 (quantidade de noves: 2, ou seja, 99). Assim,

$$\frac{1925-19}{99} = \frac{1906}{99}$$

Uma dízima periódica composta é uma dízima que tem uma parte não periódica logo após a vírgula, vamos a algumas representações de como transforma essa dízima em uma fração geratriz.

Transforme o número **b**, **caaa**. . . em uma fração geratriz.

Parte inteira: **b**.

Parte não periódica: **c**.

Período: **a**.

A formalização da ideia do numerador: (quantidade de algarismos na parte não periódica é a quantidade de zeros), para esse detalhe na parte não periódica tem um algarismo **c** distinto, ou seja, um zero. (Para outros, dois algarismos distintos, ou seja, dois 9, três algarismos distintos, ou seja, três 9 e assim sucessivamente).

A formalização da ideia do denominador: (quantidade de algarismos no período é a quantidade de 9), para esse detalhe tem um algarismo **a** distinto, ou seja, um 9. (Para outros, dois algarismos distintos, ou seja, dois 9, três algarismos distintos, ou seja, três 9 e assim sucessivamente).

Daí temos:

- Numerador: junta a parte inteira com a parte não periódica e o período, formado um único número "menos" a junção da parte inteira com o não periódica.
- Denominador: junta a quantidade de 9 com a quantidade de zeros, formando um único número, segue o modelo abaixo:

$$\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{\text{bca} - \text{bc}}{90}$$

Exemplo 3.3.2.3 Como transformar 0, 2333 . . . em uma fração geratriz.

Parte inteira: 0.

Parte não periódica: 2 (quantidade de zeros: 1, ou seja, 0).

Período: 3 (quantidade de noves: 1, ou seja, 9). Assim,

$$\frac{023 - 02}{90} = \frac{21}{90}$$

Exemplo 3.3.2.4 Como transformar 8, 21453453453 . . . em uma fração geratriz.

Parte inteira: 8.

Parte não periódica: 21 (quantidade de zeros: 2, ou seja, 00).

Período: 453 (quantidade de noves: 3, ou seja, 999). Assim,

$$\frac{821453-821}{99900}=\frac{820632}{99900}$$

3.4 NÚMEROS IRRACIONAIS

Segundo Boyer (1996), a primeira descoberta deste número é atribuída a Hipaso de Metaponto, discípulo de Pitágoras. O que se sabe é que não dá para representar $\frac{p}{q}$ como uma fração de números inteiros com q ≠ 0, pois tem infinitas casas depois da vírgula da qual é chamada de dízima aperiódica. É formado por todos os números que, ao contrário dos racionais, não podem ter uma fração de números inteiros. Esse conjunto é representado pelo símbolo I, onde podemos mostrar o mais famoso número irracional, conhecido como número pi (π = 3, 141592...), e alguns outros.

Daí uma nova pergunta foi feita aos matemáticos da época "os racionais cobrem toda a reta numérica". Essa pergunta foi solucionada a mais de 2500 anos, por Pitágoras e seus discípulos. Estes observaram, com surpresa, que a diagonal de um quadrado de lado unitário é $\sqrt{2}$. Logo, não poderia ser expressa por um número racional, pois o número $\sqrt{2}$ não pertencia ao conjunto numérico dos racionais, daí surgiu à necessidade de ampliar esse conjunto. A nova reorganização mais tarde foi chamada de conjuntos dos números irracionais.

Portanto, se um número for racional, não pode ser irracional, e vice-versa. Da qual podemos acrescentar que o conjunto dos números irracionais foi uma das invenções considerada como um marco nos estudos da trigonometria e geometria.

Assim, como existem as dízimas periódicas, também existem as dízimas não periódicas que são justamente os números irracionais, uma vez que elas nunca poderão ser expressas como uma fração do tipo $\frac{a}{b}$. Deste modo, podemos relacionar as dízimas não periódicas a números decimais infinitos que depois da vírgula não ocorrem período.

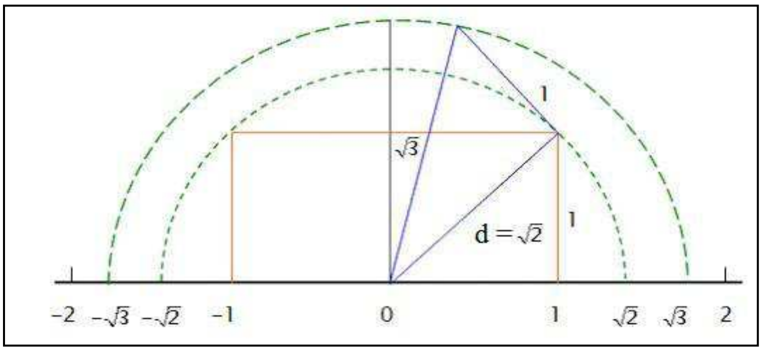
Exemplo 3.4.1 0, 93274908736549263937494123644497 4. . ..

Alguns desses números não exatos ganharam nomes, sendo eles: número pi, número áureo e número de Euler.

3.4.1 Representação de irracionais na reta numérica

Dado um quadrado na reta numérica de lado 1, com um dos vértices na origem, a medida da diagonal é calculada pelo teorema de Pitágoras, onde "A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa", representado assim, pela a Figura 11.

Figura 11: Representação da criação dos números irracionais a partir da diagonal de um quadrado



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 4)

Modo de resolução para determinar a diagonal de um quadrado:

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 1 + 1$$
$$d^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

Logo, podemos concluir que a diagonal do quadrado é um número irracional que mede $\sqrt{2}$.

Os conjuntos dos números irracionais se classificam em transcendentes e algébricos.

Transcendentes: São números aperiódicos.

- O número pi, com seu valor = 3, 14159265358979323846. . . representa o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro.

- O número de Euler, com seu valor e = 2, 7182818285. . . é uma constante que surge em várias aplicações científicas.
- O número de áureo, chamado por Phi (θ) com seu valor = 1, 618033. . .é um número irracional, constante e real, que representa matematicamente a perfeição na natureza.

Algébricos: São equações algébricas de coeficientes inteiros.

- A raiz cúbica de $\sqrt[3]{2}$ pode ser escrita como sendo $x^3 - 2 = 0$.

3.4.2 Números notáveis

O número irracional teve como origem a sua descoberta pela razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência da mesma.

$$\pi = 3,14159265358979\ldots$$

Já, o número áureo, representado por um número irracional dada pela letra grega θ, refere-se à proporção perfeita:

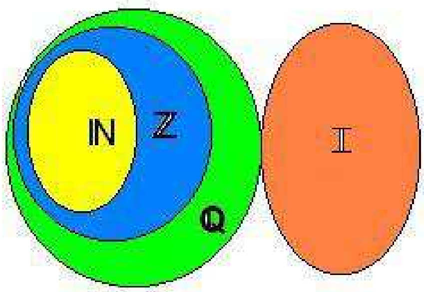
$$\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989$$

Consequentemente o número de Euler, apresentado pelo número "e como base do logaritmo natural é uma importante constante matemática que aprofundou os estudos sobre logaritmos".

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045235360287471352662$$

Portanto, podemos supor que as representações dos conjuntos dos números irracionais são diferentes dos conjuntos dos números racionais de acordo com o diagrama da Figura 12.

Figura 12: Representação do diagrama do conjunto dos números irracionais (I)



Fonte: matematicadidatica.com.br/ConjuntosNumericos

3.5 NÚMEROS REAIS

Com a união dos números racionais e os irracionais, obtemos um novo conjunto numérico chamado de números reais. A união descrita chamou a atenção de inúmeros matemáticos dos quais Hermann Hankel (1839 - 1873) o primeiro matemático a atribuir aos números reais à condição de "Estruturas intelectuais e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides (BOYER, 1996, p. 409)". Outra abordagem completamente diferente foi dada pelo alemão Richard Dedekind, em 1872, na sua obra "A continuidade e os números irracionais".

Dedekind desenvolveu o conceito de continuidade através da aritmética, sem usar a geometria como guia, pois considerava esse método mais rigoroso. O conjunto dos números reais através dos famosos cortes de Dedekind foi uma importante contribuição para a compreensão dos conceitos atuais dos números reais.

POSTULADO DE DEDEKIND. Todo subconjunto não vazio de R, constituído de elementos positivos tem um ínfimo.

O postulado de Dedekind realmente determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. O corpo R assim definido contém um subconjunto que está em correspondência biunívoca com o conjunto Q dos racionais. Na realidade, essa correspondência goza da propriedade de preservar as operações de adição e multiplicação; correspondências biunívocas desse tipo tomam o nome de isorfismos.

Para todos os efeitos, podemos simplificar essa questão do isomorfismo e simplesmente dizer que R contem Q. A reta R é um belo modelo geométrico para o corpo R: cada ponto R representa um real e, vice-versa, a cada real corresponde um ponto de R. As verificações dos seguintes fatos que decorrem diretamente do postulado de Dedekind (FIGUEIREDO, 1996. p. 9).

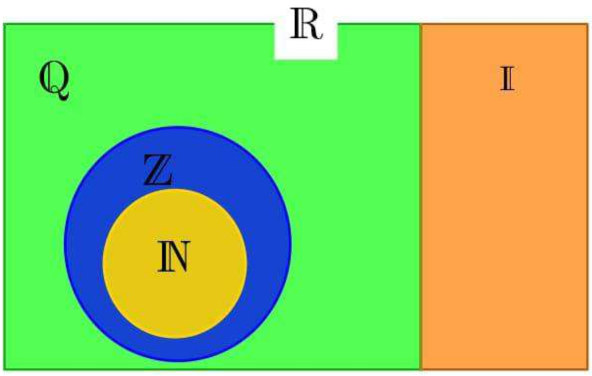
Portanto, podemos afirmar que o conjunto dos números reais, simbolizado pela letra R, é formado pela união dos conjuntos dos números racionais e irracionais.

$$R = \{x \text{ é } racional\ ou\ x \text{ é } irracional\}$$

Desse modo todos os conjuntos numéricos (N, Z e Q), bem como o conjunto dos números irracionais são subconjuntos de IR. Da mesma forma destacam-se os outros subconjuntos dos números reais.

Tomando como referência os fatos estabelecidos, podemos então apresentar o diagrama da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais que formam o conjunto dos números reais, conforme apresentado na Figura 13.

Figura 13: Representação do diagrama do conjunto dos números reais (R)



Fonte: matematicadidatica.com.br/números-reais

Notemos que $N \subset Z \subset Q \subset R$ e $I \subset R$, assim, podemos afirmar que as quatros operações matemáticas serão sempre válidos no conjunto dos números reais, bem como: adição, subtração, multiplicação e divisão.

$$(a + b) \in R,\ (a - b) \in R,\ (a \bullet b) \in R,\ (a \div b) \in R, \text{ com } b \neq 0.$$

3.5.1 Reta real

Construção da reta real

I. Devemos iniciar com os números naturais.

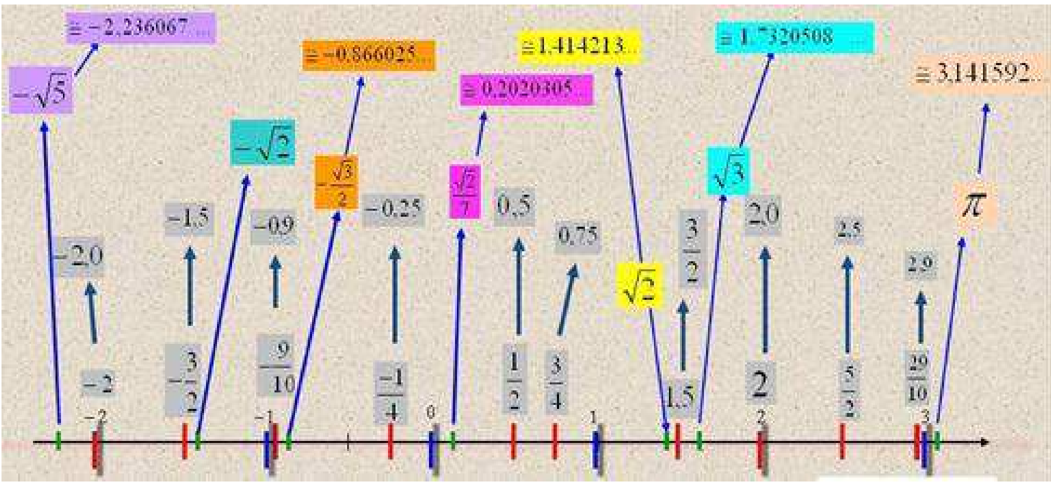
II. Prolongaremos a linha para trás para incluir os inteiros negativos.

III. Acrescentamos as frações, com isso a reta fica com infinitos pontos entre os inteiros.

IV. Acrescentamos finalmente os números irracionais preenchendo assim a reta real completa.

Diante dos dados fornecidos podemos então sugerir uma representação da reta real de acordo com a Figura 14

Figura 14: Representação da reta numérica real



Fonte: slideplayer.com.br/slide/1367566/

De acordo com Guidorizzi (1996), os intervalos numéricos são subconjuntos especiais dos números reais. Nas definições a seguir, consideram-se **a** e **b** dois números reais, tais que a < b.

I. Intervalo Fechado de extremos **a** e **b**:

$$[a, b] = \{x \in R/a \leq x \leq b\}$$

II. Intervalo aberto de extremos **a** e **b**:

] a, b[= (a, b) =$\{x \in R/x \leq a \; ou \; x \geq b\}$

III. Intervalos semiabertos de extremos **a** e **b**:

[a, b[= [a, b) = $\{x \in R/a \leq x < b\}$
(a, b] =] a, b] = $\{x \in R/a < x \leq b\}$

IV. Semirretas:

[a, +∞) = [a, +∞[= $\{x \in R/x \geq a\}$

] a, +∞ [= (a, +∞) = $\{x \in R/x > a\}$

] - ∞, b] = (-∞, b] = $\{x \in R/x \leq b\}$

] - ∞, b[= (-∞, b) =$\{x \in R/x < b\}$

V. Reta:

] - ∞, +∞ [= (-∞, +∞) = R

Como foi visto na seção de números inteiros, o valor absoluto também se estende ao conjunto dos números reais, assim definimos o valor absoluto de um dado número x, da qual indicamos por $|x|$, tal que:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x > 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Dessa forma, por definição, segue as seguintes propriedades do módulo, conforme especificam Elon (1989), Geraldo (1999) e Figueiredo (2008).

P_1. $|x| > 0$, para todo x real;

P_2. $|x| = a$, então $x = a$ e $x = -a$;

P_3. $|x| > a$, se e somente se, $x < -a$ ou $x > a$;

P_4. $|x| < a$, se e somente se, $-a < x < a$;

P_5. $|x| \geq a$, se e somente se, $x \leq -a$ ou $x \geq a$;

P_6. $|x| \leq a$, se e somente se, $-a \leq x \leq a$;

P_7. $|x^2| = |x|^2 = x^2$, para todo x real;

P_8. $x^2 = |x|$, para todo número real;

P_9. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, para quaisquer a e b reais;

P_{10}. $\left|\frac{a}{b}\right| = |a| \div |b|$, com $b \neq 0$;

P_{11}. $|a + b| \leq |a| + |b|$, para quaisquer a e b reais;

P_{12}. $|a - b| \geq |a| - |b|$, para quaisquer a e b reais.

Tomando por base as propriedades, podemos dizer que módulo é o mesmo que distância de um número real ao número zero, uma vez que, o módulo de número real surgiu da necessidade de medir a distância de um número negativo ao zero. Ao medirmos a distância de um número negativo qualquer, ao zero percebe-se que a distância fica negativa e como não é usual dizer que uma distância ou comprimento é negativo foi criado o módulo de número real que torna o valor positivo ou nulo e para que isso seja verdade foram criadas algumas propriedades.

4. NÚMEROS COMPLEXOS

De acordo com Boyer (1996), os reais era o conjunto mais completo, até que por volta de 1500, quando um pensamento recorrente surgiu entre os matemáticos "O quadrado de um número positivo, bem como o de um número negativo, é positivo. Não existe raiz quadrada de um número negativo porque um número negativo não é quadrado de nenhum número" (p. 350, 1996).

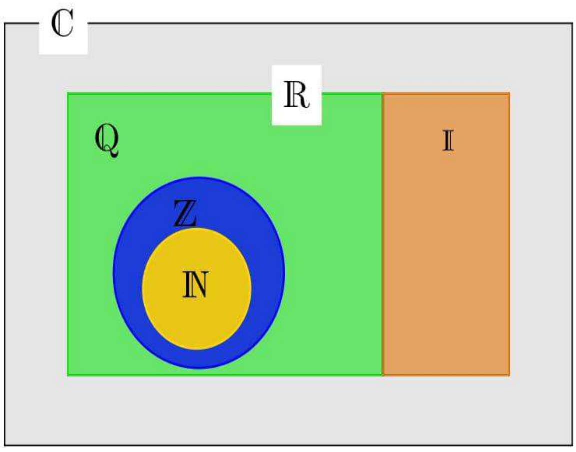
Tudo começou quando Cardano, em 1545 até chegar a Rafael Bombeli, em 1572, quando publicou o tratado da Álgebra, falando sobre a existência de raízes quadradas de números negativos. Com isso, começava a surgir um novo conjunto, chamado de conjunto dos números complexos (C), com todos os elementos de R e no qual as equações que antes não tinha solução, passaram a ter. Foi também criado o símbolo i (pois esses números eram chamados imaginários), para ser usado em lugar de – 1, elemento do conjunto dos números complexos. Desse fato temos que R está contido em C, ou seja:

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

E assim, formou-se o conjunto dos números imaginários, representado pela letra i, que é composto por todas as raízes de números negativos de índice par.

Então podemos ter uma nova divisão, ou o número é real ou não é real, conforme mostra a Figura 15.

Figura 15: Representação do diagrama do conjunto dos números imaginários (C)



Fonte: matematicadidatica.com.br/ConjuntosNumericos

Para solucionar este caso, convencionou-se que a união dos números reais com os números imaginários, deu a origem ao Conjunto dos números complexos, que é representado por C.

Os números complexos, cujo conjunto é simbolicamente representado por C é o conjunto de todos os pares ordenados de coordenadas reais, e seus pares ordenados são dados por z = (a, b).

Daí tem a forma algébrica:

z = a + bi, com **a** e **b** reais.

Unidade Imaginaria (i): definida como $i^2 = -1$.

Segundo Carmo; Morgado; Wagner (1992), para z = a + bi, com a ∈ R e b ∈ R; **a** é a parte real de **z**, denotada por Re(z); **b** é a parte imaginária de **z**, denotada por Im = (z), as notações correspondentes.

I. Quando o número complexo está na forma a + 0i, ou seja, quando b = 0, **z** é real. Assim, R ∈ C;

AI. Quando o número complexo está na forma 0 + bi, ou seja, quando a = 0 e b ≠ 0, **z** é chamado de imaginário puro;

BI. Quando o número complexo está na forma a + bi e b ≠ 0, **z** é imaginário;

IV. Em particular, 0 + 1i = **i** é chamado de unidade imaginária.

Uma característica interessante dos números imaginários é a presença do conjugado de um número complexo que permite realizar operações fundamentais no conjunto dos números complexos. ,

O conjugado de um número complexo z = a + bi é $\overline{z} = a - bi$.

Propriedades:

P_1 $\overline{\overline{z}} = z$

P_2 $z \bullet \overline{z} = a^2 + b^2$

P_3 $z = \overline{z}$, se e somente se, **z** é número real.

P_4 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

P_5 $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

As propriedades assume papel relevante na resolução de operações de números complexos na forma algébrica, para os números complexos z_1 = a + bi e z_2 = c + di, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, de acordo com Carmo; Morgado e Wagner (1992) podem relacionar as seguintes operações:

Igualdade: a + bi = c + di, se e somente se, a = c e c = d.

Adição: $z_1 + z_2$ = (a + c) + (b + d)i

Subtração: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ = (a – c) + (b – d)i

Produto: $z_1 \bullet z_2$ = (ac – bd) + (ad + bc) i

Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \bullet \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 + \overline{z_2}}{c^2 + d^2}$, com $z_2 \neq 0$.

Módulo: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Inverso de z: $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \bullet \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$, com $z \neq 0$.

Inverso de i: $\frac{1}{i} = \frac{i}{i \bullet i}$ = - i

Os números complexos são identificados por z = a + bi, onde **a** é a parte real e **b** a parte imaginária. A letra **i** acompanha a parte imaginária e dependo do valor de sua potência assumirá um valor que irá facilitar vários cálculos.

As potências de i são periódicas. A cada sequência de 4 potências, tem-se uma repetição.

$$i^0 = 1;$$

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = - i.$$

Observa-se que as potências de **i** começam a se repetir depois de i^4, portanto, para determinar uma potência de **i** diferente das anteriores, basta fazer:

$$i^m = i^n$$

Sendo **m** o valor que estar elevando **i** e, **m** o resto da divisão de **n** por 4. Logo, o valor de uma potência de **i**, por exemplo i^{783}, é dado pelo resto do expoente por 4. Observe que, $i^{783} = i^3 = - i$.

Além da forma algébrica e do par ordenado conforme orienta Carmo, Morgado e Wagner (1992) pode-se escrever o número complexo na forma trigonométrica ou polar, da seguinte maneira:

$$z = |z| (\cos\theta + i \bullet \text{sen}\theta)$$

.

Onde, o módulo de **z** é dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ é o argumento de **z** (arg. (z)), sendo $0 \leq \theta < 2\pi$ medida do ângulo, tomado no sentido anti-horário, em que:

$$\text{Arg. (z)} = \theta \text{ é tal que: } \cos\theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{e} \quad \text{sen}\,\theta = \frac{b}{|z|}$$

Sendo $z_1 = |z_1| (\cos\theta_1 + i \bullet \text{sen}\theta_1)$ e $z_2 = |z_2| (\cos\theta_2 + i \bullet \text{sen}\theta_2)$ números complexos escritos na forma trigonométrica, têm-se as seguintes operações no conjunto dos números complexos.

Operação Representação

Multiplicação $z_1 \bullet z_2 = |z_1| \bullet |z_2| \bullet [(cos(\theta_1 + \theta_2) + i \bullet sen\,(\theta_1 + \theta_2)]$

Divisão $z_1 : z_2 = |z_1| : |z_2| \bullet [(cos\,(\theta_1 - \theta_2) + i \bullet sen\,(\theta_1 - \theta_2)\,]$

Potenciação $z^n = |z|^n \bullet [(cos(n\theta_1) + i \bullet sen\,(n\theta_1)]$ - 1ª fórmula de De Moivre

Radiciação $\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|} \bullet \left[cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ em que K = 0, 1, 2, ..., n –1 - 2ª Fórmula de De Moivre conforme (MACHADO, 1986).

5. CONJUNTOS NUMÉRICOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Segundo (CEZAR, 2013, p.2), a ideia de número existe independentemente de estarmos na escola. No entanto, é na escola que a criança inicia o processo de formalização e é nesse momento que o professor de Matemática tem a grande tarefa de orientar o aluno para que o mesmo possa produzir significados relevantes no que se refere à construção dos números reais de forma adequada, a fim de possibilitar uma aprendizagem significativa.

5.1 TRAJETÓRIAS DA PESQUISA

Tendo como base o pressuposto anterior, realizamos uma pesquisa de campo com alunos do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública de Teresina – Piauí, na intenção de verificar se os estudantes do último ano da Educação Básica apresentam os conhecimentos de conjuntos numéricos considerados essenciais para dar continuidade à aprendizagem de Matemática sem muitas deficiências, visto que, os conjuntos numéricos são um dos pré-requisitos chave para o bom entendimento dos conteúdos da matemática.

Para concretização da pesquisa, visitamos a Unidade Escolar Padre Luidino Di Guidi, localizada no bairro Parque Dagmar Mazza, em Teresina Piauí, para formalização da solicitação da pesquisa junto à direção, no momento apresentamos o projeto de trabalho, primeiro para a direção da escola e em seguida para os alunos do terceiro ano do Ensino Médio do turno noturno. Como os alunos em sua maioria, eram pessoas que já tinham maioridade, com faixa etária entre 17 a 28 anos, estabelecemos um diálogo com o objetivo de sensibilizá-los a participarem da pesquisa. Convite aceito demos prosseguimento as atividades planejadas.

Vale ressaltar a pesquisa foi realizada em três momentos: No primeiro momento, foi apresentado um breve contexto histórico e algumas explicações sobre particularidades de cada conjunto numérico. O assunto explanado abordava somente o conceito e seus tópicos básicos, a fim de mostrar a necessidade do estudo dos conjuntos numéricos.

No segundo momento, foi aplicado o questionário de pesquisa que continha dez questões. Após a distribuição o pesquisador resolveu uma questão, no quadro, explicando e mostrando dicas que ajudariam na resolução das outras. Na sequência os alunos puderam responder as nove questões da maneira que sabiam. Os questionários foram recolhidos e corrigidos, os acertos e erros foram tabulados e analisados a luz do referencial teórico.

No encontro seguinte (terceiro momento), entregamos a resolução impressa do questionário e os questionários corrigidos. Em seguida solicitamos que comparassem as duas respostas, a fim de identificarem possíveis dúvidas e avaliassem o próprio desenvolvimento, muitos questionamentos surgiram e, na medida do possível, foram esclarecidos. Solicitamos ainda, que os alunos escolhessem cinco questões para serem respondidas e explicadas.

5.2 ANALISANDO OS ACHADOS DA PESQUISA

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que "[...] a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático" (BRASIL, 1999, p. 41). Na intenção de verificar se os alunos do terceiro ano do Ensino Médio construíram conhecimentos necessários sobre os conjuntos numéricos, ou se consolidaram e/ou aprofundaram as ideias essenciais (conceitos) sobre os conjuntos estudados no ensino Fundamental e Médio, conforme orienta a BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias.

> [...] propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade (BRASIL, 2018).

Neste sentido as respostas dos alunos, coletadas mediante atividade aplicada em sala de aula, foram analisadas. Vale destacar, que mesmo os alunos tendo assumido o compromisso de contribuírem com a pesquisa, não foi o que ocorreu, visto que, no momento da aplicação da atividade, somente 22 alunos se encontravam em sala de um total de 38 que frequentam as aulas regularmente.

Dos que se encontrava em sala quatro alunos se recusaram a resolver a atividade depois de verificarem as questões, sete alunos zeraram ou deixaram em branco toda a lista, 11 conseguiram resolver menos de 5 questões, nenhum aluno conseguiu responder mais de 5 questões. Confirmando a tese de Ponte (2006, p. 8), ao afirmar "[...] muitos alunos têm grandes dificuldades nos Números e suas operações. Outros, [...], conseguem um nível de desempenho razoável neste campo, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na aprendizagem da Álgebra".

Fundamentado na concepção de Ponte (2006), cada resposta foi analisada, e permitiu concluir que muitos alunos não conseguiram absorver os conhecimentos necessários na sua vida escolar para responder as questões, ou não se deram a oportunidade de tentar, alegando que as questões eram complicadas e difíceis de serem entendidas por isso nem tentaram.

Como o índice de questões respondidas por aluno não ultrapassou os 50%, foi entregue a cada participante da atividade uma lista impressa contendo todas as respostas. Dando continuidade as ações propostas, solicitamos que os alunos escolhessem cinco questões das que tiveram mais dúvidas para verificarem seus erros, estabelecendo comparação com as respostas recebidas. Depois de alguns minutos, solicitamos que escolhessem cinco questões para respondermos no quadro, e discutir as possibilidades de resolução, uma forma de reavivarem os conhecimentos que poderiam estar adormecidos e/ou construir alguns conhecimentos novos relativos aos conjuntos trabalhados. As questões indicadas foram as de números dois (2), três (3), seis (6), sete (7) e nove (9).

Ao iniciar a resolução os alunos comentavam incrédulos que não era possível, e exclamavam "que coisa fácil, era só lê". Como cada questão pedia uma avaliação quanto os níveis de dificuldades e que, quase todas as questões tinham sido consideradas com um nível muito difícil, independente de terem sido respondidas ou não. Os resultados comprovaram que os estudantes não assimilaram os conteúdos nos anos escolares precedentes, contudo, imediatamente a entrega das folhas de respostas os alunos verificaram que esses assuntos (conteúdos) foram visto nos anos anteriores.

Verificamos ainda, mediante conversas com os alunos, certa frustração/decepção dos que não tentaram, pois os resultados apontam pouco ou nenhum aprendizado dos conhecimentos abordados na investigação. As lacunas de conhecimento podem ter várias causas, uma apontada na pesquisa de Silva (2011) pode estar relacionada à abordagem didática dos professores da Educação Básica, conforme destaca, "[...] é importante que o professor tenha acesso a abordagens adequadas para o Ensino Fundamental e para o Ensino Médio, tomando certos cuidados didático para desenvolver um bom trabalho com os Números Reais" (SILVA, 2011, p. 286).

Ponte (2006), também evidencia aspectos que podem dificultar a aprendizagem dos Conjuntos Numéricos. "[...] alunos que terminam o Ensino Fundamental sem compreender ou utilizar adequadamente os algoritmos das operações, sobretudo da divisão", outros aspectos apontados por Ponte (2006) referem-se às dificuldades de representação e interpretação dos diversos números reais. Mesmo aqueles que dominam os algoritmos, não sabem ler os números ou separar os algarismos em classes e comumente confundem vírgula e o ponto, quando utilizam ou não algum recurso tecnológico para a realização de cálculos com números grandes ou pequenos.

É de fundamental importância que os alunos compreendam os Números Reais. Este também pode servir de base para estudos mais profundos feitos mais adiante, como por exemplo, os estudos dos Números Complexos. Pois aquele que não tiver capacidade mínima para trabalhar com números e suas operações, fica seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática.

6. CONCLUSÃO

Ao longo desta pesquisa, foram trabalhadas as construções formais dos conjuntos numéricos que estudamos desde o Ensino Fundamental ao Ensino Médio, partindo do conjunto dos números naturais até o conjunto dos números complexos. Também pudemos vivenciar as propriedades, dicas e exemplos de cada um desses conjuntos. Após a análise de livros e materiais, pode-se verificar que não existe a preocupação de muitos autores em repassar ao leitor um contexto histórico desses conjuntos numéricos e nem mesmo de citar os abusos de notação que acabamos cometendo após as imersões de um conjunto no outro.

Esta dissertação surgiu com o intuito de ajudar os professores da Educação Básica para que pudessem perceber que existem muitos tópicos importantes dentro dos conjuntos numéricos das quais não são trabalhados por muitos autores, pois eles ficam restritos em citar apenas o básico nos livros, uma vez que em cada sistema numérico temos objetos de natureza completamente diferentes dos demais.

Desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, quando é apresentada a ideia de conjuntos, podemos verificar que este conteúdo vem perdendo espaço nos livros didáticos, pois o presente trabalho foi possível demonstrar o distanciamento existente entre a matemática apresentada em sala de aula e aquela mais exigida no dia a dia. Observou-se também que alguns alunos na iminência de conclusão do Ensino Médio, viram estes conteúdos de uma forma superficial. No entanto, quando se trata da percepção dos alunos que não haviam respondido o questionário completo isso foi preocupante, pois o questionário trabalhado fazia parte do dia a dia de um ser humano.

Espera-se que este trabalho contribua no sentido de enriquecer as discussões em relação aos Conjuntos Numéricos na Educação Básica, buscando sempre aprimorar os seus conteúdos bem como a vivência que vendo sendo vinculada às necessidades do dia a dia, dada a importância que o conteúdo tem no sistema educacional. Para que isso ocorra, tantos os futuros professores de matemática quanto àqueles que já se formaram, devem ter acesso à formação necessária para transmitir tais conteúdos. Este trabalho procurou deixar claro cada experiência e resultado provenientes de extremo esforço fazendo contas que por muitas vezes desfoquem o verdadeiro objetivo que é elucidar um problema tendo em mãos um produto final e não o seu desenvolvimento.

Isso permitiu que pudéssemos elucidar algumas questões e interpretar algebricamente gramaticalmente de forma mais ampla, elaborada e rápida nos resultados.

Depois que esses números são introduzidos, há uma tentativa nada rigorosa de estender as operações, para os outros Conjuntos Numéricos. Se buscarmos fontes históricas, descobriremos que alguns matemáticos encontraram uma maneira diferente, de mostrar os Conjuntos Numéricos, partindo dos Naturais construindo os Inteiros e assim por diante até chegar aos Complexos, afirmando que unindo os Racionais aos Irracionais, obtém-se o Conjunto dos Números Reais e unindo os Reais aos Imaginários teremos o Conjunto dos Números Complexos.

Por fim, podemos visualizar na dissertação algumas imagens clássicas que de certa forma acaba auxiliando na ideia para algumas conclusões matemáticas. Espero ter deixado claro que do ponto de vista rigoroso da matemática, não faz sentido apresentar tal conjuração, uma vez que os elementos de cada conjunto são de natureza diferente dos demais. Na verdade, procurei fazer algumas mudanças para representar cada Conjunto Numérico, para sim, termos uma visão ampla entre eles, permitindo assim uma cópia algébrica de uma maneira ampla para representar os Conjuntos Numéricos na Educação Básica, dos Naturais aos Complexos.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Introdução à análise matemática**. 2. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério de Estado da Educação Básica. Brasília: MEC, CNE, 2015.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf>. Acesso em 14/12/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC / SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC / SEMTEC, 1999. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1996. ISBN 8521200234.

CEZAR, M. S. Concepções acerca do conceito de Números Reais: Uma breve reflexão sobre seu Ensino na Educação Básica. **Monografia de Especialização em Ensino na Educação Básica**. Departamento de Educação e Ciências Humanas. UFES/CEUNES. São Mateus, ES, 2011.

COBIANCHI, A. S. Estudos de continuidade e números reais: matemática, descobertas e justificativas de professores. **Tese (Doutorado)** – Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, 2001.

CONWAY, John H. e GUY, Richard K. **O Livro dos Números**. Col. Gradiva/Universidade de Aveiro, n° 6, 1. ed., Lisboa, Gradiva, 1999, ISBN 972-662-696-x.

DIAS, M. d. S. Reta real: conceito imagem e conceito definição. **Tese (Doutorado)** – Dissertação (Mestrado em Educação Matemática - PUC), São Paulo, 2006.

GALVÃO, Maria E. E. Lopes. **As origens da Matemática** – dos processos de contagem aos sistemas de numeração (IME-USP), 2014. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~dpdias/2014/MAT1514%20-%20SistemasNumeracao (Texto%20MariaElisa).pdf

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GALVÃO, Maria E. E. Lopes. **As origens da Matemática** – dos processos de contagem aos sistemas de numeração (IME-USP), 2014. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~dpdias/2014/MAT1514%20-%20SistemasNumeracao (Texto%20MariaElisa).pdf

GELSON, Iezzi. **Fundamentos de Matemática Elementar**, v. 6, 3. ed. São Paulo: Atual. 1977. p. 1-9.

GIRALDO, Victor. **Livro Companheiro do Professor de Matemática** – Números. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

GOMES, Emerson Batista. A História de Matemática como Metodologia de Ensino da Matemática: perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos. Belém, 2005. **Dissertação de Mestrado** ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal do Pará. 2005.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v.1.

GUNDLACH, Bernard H. **História dos números e numerais**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de História da Matemática para o uso em sala de aula, V.I).

HEFEZ, Abromo. **Aritmética**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

IFRAH. Georges. **História Universal dos Algarismos.** A Inteligência dos Homens contada pelos números e pelo cálculo, vol. I 2. ed., Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, S.A. 1997, ISBN 85-209-0841-1.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. d. **Concepções dos alunos sobre os números reais**. A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. 1. ed. Belo Horizonte: Editora Fumarc, v. 1, p. 39–67, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1995. v. 1.

LIMA, Elon Lages. et al. **Exame de Textos**: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: VITAE / IMPA / SBM, 2001.

MACIEL, Aldo. B. & LIMA, Osmundo. **A Introdução à Análise Real**. Campina Grande-PB: EDUEPB, 2005.

PONTE, João Pedro da. Números e álgebra no currículo escolar. **XIV EIEM-Encontro de Investigação em Educação Matemática**, p. 5-27, 2006. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf. Acessado em: março/2019.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica**: Números Inteiros. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

SILVA, A. L. V. d. Números reais no Ensino Médio: Identificando e possibilitando imagens conceituais. **Tese (Doutorado)** – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2011.

WAGNER, Eduardo. MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira. CARMO, Manfredo Perdigão do. Trigonometria **e Números Complexos.** IMPA-VITAE, Brasil, 1992.

Anexo I – Questionário

Universidade Estadual do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Questionário

Prezado alunos, estou realizando uma pesquisa que tem como objetivo investigar a organização dos conjuntos numéricos e seus elementos, a partir da teoria dos conjuntos, mostrando sua importância na matemática e sua aplicação na Educação Básica. Por esse motivo solicito sua colaboração, respondendo este questionário, pois sua contribuição é muito importante para a conclusão do meu trabalho de mestrado.

Notações:

N, dos números naturais;

Z, dos números inteiros;

Q, dos números racionais;

Q_+, dos números racionais não negativos;

Q^*_+, dos números racionais positivos;

I, dos números irracionais;

R, dos números reais.

Questão 1 - "Os sistemas de escrita numérica mais antiga que se conhecem são os dos egípcios e dos babilônios, que datam aproximadamente do ano 3500 a.C.". Os Observe, no quadro abaixo, como alguns povos registravam a escrita dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 100.

	Egípcios	Babilônios	Maias	Chineses	Gregos
1	𓏺	𒁹	𝋡	一	α
2	𓏻	𒈫	𝋢	二	β
3	𓏼	𒐈	𝋣	三	γ
4	𓏽	𒐉	𝋤	四	δ
5	𓏾	𒐊	𝋥	五	ε
6	𓏿	𒐋	𝋦	六	ζ
7	𓐀	𒐌	𝋧	七	ξ
8	𓐁	𒐍	𝋨	八	η
9	𓐂	𒐎	𝋩	九	θ
10	𓎆	𒌋	𝋪	十	ι
100	𓍢	𒁹𒌋𒌋𒌋𒌋	𝋠	百	ρ

Diante das várias numerações antigas, podemos ver vários tipos de numerações representadas por números que eram escritos com a forma de combinação desses símbolos. Assim, podemos relacionar os números 2236 e 1122 respectivamente escritos em símbolos egípcios.

- 𓆼𓆼𓍢𓍢𓎆𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
- 𓆼𓍢𓎆𓎆𓏺𓏺

Agora, represente cada número utilizando os símbolos acima.

a) Símbolos Gregos, com o valor 19.

b) Símbolos Maias, com o valor 46.

c) Símbolos Egípcios, com o valor 182.

Ao finalizar a questão, será que podemos fazer uma avaliação das respostas. Marque com um X as afirmações abaixo:

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

( ) Conjunto dos números racionais

( ) Conjunto dos números irracionais

( ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

( ) Nível fácil

( ) Nível médio

( ) Nível difícil

Questão 2 - No Japão, um trem bala parte de uma estação com 568 passageiros. Anotamos os passageiros que sobem em cada estação de acordo com o quadro abaixo:

Fonte: https://exame.abril.com.br/tecnologia/japao-desenvolve-trem-bala-capaz-de-chegar-a-360-kmh/

PARTIDA				CHEGADA
1ª estação	2ª estação	3ª estação	4ª estação	5ª estação
Subiram 186	Subiram 145 Desceram 385	Subiram 136 Desceram 75	Subiram 24 Desceram 257	?

Agora responda: Quantos passageiros chegaram na 5° estação? _______________

Ao finalizar a questão, será que podemos fazer uma avaliação das respostas. Marque com um X as afirmações abaixo:

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

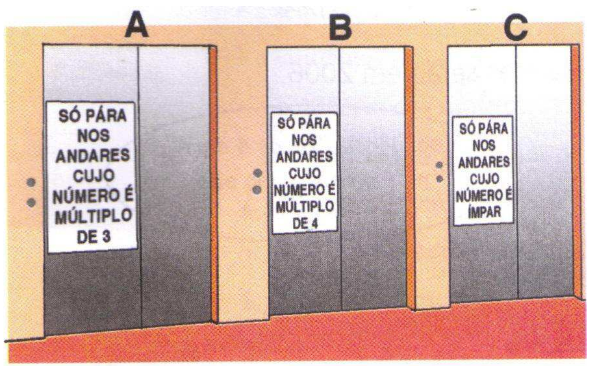
II - Qual o nível dessa questão para você

( ) Nível fácil

( ) Nível médio

( ) Nível difícil

Questão 3 - Os elevadores de um prédio vão desde o andar zero até o trigésimo andar.



a) Quais elevadores você pode utilizar para ir ao 15º andar?

b) Quais elevadores você pode utilizar para ir ao 24º andar?

c) Em quais os andares não para nenhum elevador?

Ao finalizar a questão, será que podemos fazer uma avaliação das respostas. Marque com um X as afirmações abaixo:

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

( ) Nível fácil

( ) Nível médio

( ) Nível difícil

Questão 4 - Em um determinado mês, Victor teve a curiosidade de saber em quais dos dias podemos contar como números primos. De acordo com o calendário escreva quais dos números abaixo são primos?

Dom	Seg	Ter	Qua	Qui	Sex	Sab
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Fonte: http://www.cepe.usp.br/?attachment_id=6064

Números Primos:

Ao finalizar a questão, será que podemos fazer uma avaliação das respostas. Marque com um X as afirmações abaixo:

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

( ) Nível fácil

( ) Nível médio

( ) Nível difícil

Questão 5 - No ano de 2018, uma casa de inverno teve um prejuízo de 14589 reais em outubro, obteve um lucro de 8597 reais em novembro, e lucrou 15278 reais em dezembro.

Considerando-se os três meses juntos, é verdade que essa casa teve:

a) Lucro de 7908 reais

b) Prejuízo de 38464 reais

c) Lucro de 9286 reais

d) Prejuízo de 9286 reais

e) Lucro de 21270 reais

Ao finalizar a questão, será que podemos fazer uma avaliação das respostas. Marque com um X as afirmações abaixo:

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

(   ) Nível fácil

(   ) Nível médio

(   ) Nível difícil

Questão 6 - Pertence ao conjunto dos números racionais, qualquer número que possa ser escrito na forma de fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros.

$$2 \quad 5 = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$35 \quad 3 = \frac{35}{3} = 11{,}6666$$

$$8 \quad 100 = \frac{8}{100} = 0{,}08$$

Uma dízima periódica é um número que quando escrito no sistema decimal apresenta uma série infinita de algarismos decimais que, a partir de certo algarismo, se repetem em grupos de um ou mais algarismos, ordenados sempre na mesma disposição e chamados de período. Portanto, os números decimais infinitos periódicos (que repete uma sequência de algarismos da parte decimal infinitamente), como "1,3333..." e

"0,16666...", também chamados de dízimas periódicas simples e compostos. Sendo as dízimas periódicas simples com os valores de:

X = 1,333... ,

Y = 0,**1**666... .

Qual é o valor de x + y?

Ao finalizar a questão, será que podemos fazer uma avaliação das respostas. Marque com um X as afirmações abaixo:

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

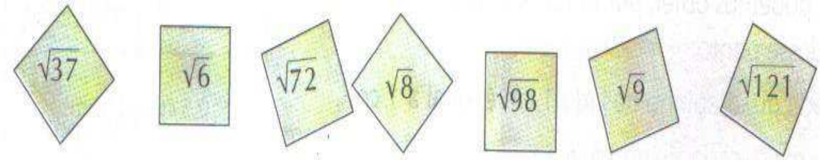
II - Qual o nível dessa questão para você

(   ) Nível fácil

(   ) Nível médio

(   ) Nível difícil

Questão 7 - Pelo o que você estudou sobre aproximação de raízes responda o que se pede abaixo:



a) Quais destas raízes estão compreendidas entre 5 e 10?

b) Quais destes números estão inseridos no conjunto dos números irracionais?

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

(   ) Nível fácil

(   ) Nível médio

(   ) Nível difícil

Questão 8 - Leia a tirinha. Considerando que os quatro bombons serão repartidos igualmente entre os três meninos.

Ziraldo. *O Menino maluquinho: as melhores tiras.* Porto Alegre: L&PM, 1995.

Os números que estão escrito nas tirinhas, pertencem ao(s) conjunto(s).

a) N

b) Z

c) I e Q

d) Z e R

e) Q e R

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

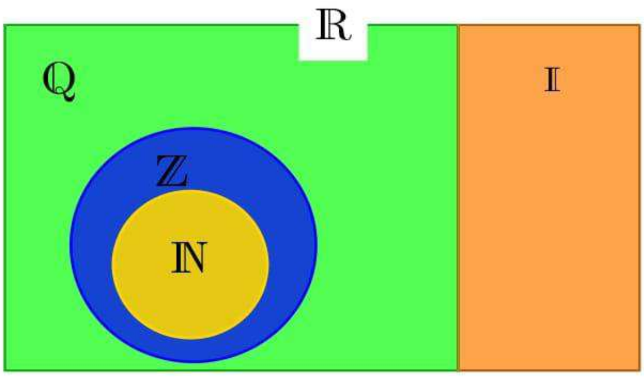
II - Qual o nível dessa questão para você

(   ) Nível fácil

(   ) Nível médio

(   ) Nível difícil

Questão 9 - Abaixo temos a representação dos conjuntos numéricos fundamentais em um diagrama.



Através deste diagrama podemos facilmente observar que o conjunto dos números reais (R) é resultado da união do conjunto dos números racionais como o conjunto dos números irracionais ($R = Q \cap I$). Observamos também que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais ($Z \subset Q$) e que os números naturais são um subconjunto dos números inteiros ($N \subset Z$).

Em relação aos principais conjuntos numéricos é correto afirmar:

a) todo número irracional é real, mas nem todo número real é irracional.

b) todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.

c) todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.

d) todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.

e) todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

(   ) Nível fácil

(   ) Nível médio

(   ) Nível difícil

Questão 10 - Considere os conjuntos:

N, dos números naturais;

Z, dos números inteiros;

Q, dos números racionais;

Q_+, dos números racionais não negativos;

Q^*_+, dos números racionais positivos;

R, dos números reais.

O número que expressa:

a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de Q_+, mas não de N.

b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de N.

c) a velocidade média de um veículo é um elemento de Q, mas não de Q_+.

d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de Q^*_+.

e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de Q.

I - A contextualização da questão acima satisfaz aos quais conjuntos numéricos

(   ) Conjunto dos números racionais

(   ) Conjunto dos números irracionais

(   ) Conjunto dos números Reais

II - Qual o nível dessa questão para você

(   ) Nível fácil

(   ) Nível médio

(   ) Nível difícil