



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM SISTEMAS AEROESPACIAIS

**PAULO RICARDO ALMEIDA FORTE**

**PROJETO LQG/LTR DE UM VEÍCULO LANÇADOR  
SATÉLITES DE MODELO REDUZIDO VIA NORMA  
HANKEL POR INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL**

São Luís

2019



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E SISTEMAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM SISTEMAS AEROESPACIAIS

**PAULO RICARDO ALMEIDA FORTE**

**PROJETO LQG/LTR DE UM VEÍCULO LANÇADOR SATÉLITES DE  
MODELO REDUZIDO VIA NORMA HANKEL POR INTELIGÊNCIA  
ARTIFICIAL**

Projeto de pesquisa apresentado ao Mestrado Profissional em Engenharia de Computação e Sistemas da Universidade Estadual do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Computação, sob a orientação do Prof<sup>o</sup>. MsC. Henrique Mariano Costa do Amaral.

São Luís

2019

*Forte, Paulo Ricardo Almeida.*

*Projeto LQG/LTR de um veículo lançador de satélites de modelo reduzido via norma hankel por inteligência artificial / Paulo Ricardo Almeida Forte. – São Luís, 2019.*

*91 f.*

*Dissertação (Mestrado) – Curso de engenharia de computação e sistemas, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.*

*Orientador: Prof. Me. Henrique Mariano Costa do Amaral.*

*1.Controle de altitude. 2.Redução de ordem. 3.Algoritmo genético. 4.Redes neurais. I.Título*

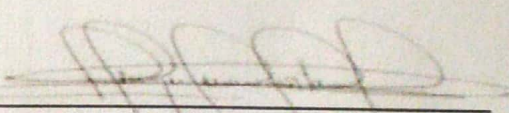
*CDU: 629.7:004.8*

PAULO RICARDO ALMEIDA FORTE

PROJETO LQG/LTR DE UM VEÍCULO LANÇADOR DE SATÉLITES  
DE MODELO REDUZIDO VIA NORMA HANKEL POR INTELIGÊNCIA  
ARTIFICIAL

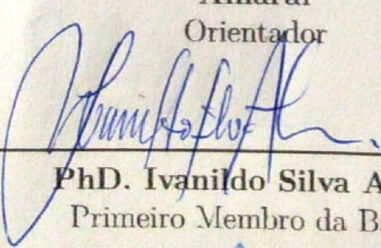
Projeto de pesquisa apresentado ao Mestrado Profissional em Engenharia de Computação e Sistemas da Universidade Estadual do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Computação, sob a orientação do Prof. Msc. Henrique Mariano Costa do Amaral.

Trabalho aprovado. São Luís - MA, 19 de agosto de 2019:



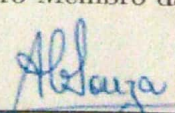
---

Msc. Henrique Mariano Costa do  
Amaral  
Orientador



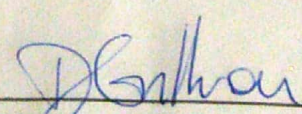
---

PhD. Ivanildo Silva Abreu  
Primeiro Membro da Banca



---

PhD. Alain Giacobini  
Segundo Membro da Banca



---

Msc. Denner Robert Rodrigues  
Guilhon  
Terceiro Membro da Banca

*Dedico este trabalho aos meus pais, Francisco José e Ana Luiza, a minha noiva Márcia Gomes, minha irmã Ana Paula e ao meu sobrinho Rafael Almeida, pelo carinho e pelo grande apoio que me deram, não medindo esforços para que este sonho se tornasse realidade.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria primeiramente de agradecer a Deus, por estar sempre me abençoando e me dando forças para continuar em busca dos meus sonhos. Aos meus amados pais Francisco José Marques Forte e Ana Luiza Almeida Forte, por me mostrarem que Deus é essencial em nossas vidas, por me educarem da melhor maneira possível, por terem semeado seus valores em minha educação, por serem exemplos de pessoas honestas e batalhadoras, por sempre terem acreditado em mim e apoiado minhas decisões, me ajudando sempre na busca dos meus sonhos. A minha irmã, Ana Paula Almeida Forte, por me acompanhar em toda essa jornada acadêmica, por acreditar nas minhas qualidades e me ajudar a chegar até aqui. A minha noiva, Márcia Gomes de Moraes, por me acompanhar durante toda essa jornada acadêmica e por acreditar em mim e ter me ajudado a chegar até aqui. Aos meus professores Msc. Henrique Mariano Costa do Amaral e Phd. Ivanildo Silva Abreu, orientador e coorientador respectivamente, por terem me aceito como orientando, por sua atenção e boa vontade de estar sempre ajudando seus alunos em prol da busca pelo conhecimento, desempenhando um papel honrável e excelente como professor e orientador desta universidade. A todos os meus amigos de curso, em especial ao Paulo Renato, que me incentivou e muito me ajudou no desenvolvimento desta dissertação. A todos os meus demais familiares e amigos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta conquista.

*“Temos o destino que merecemos. O nosso destino está de acordo com os nossos méritos.”*  
*(Albert Einstein)*



## RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo projetar uma Rede Neural Artificial Recorrente (RNAR) e um Algoritmo Genético (AG) para a recuperação das propriedades de robustez do projeto LQG/LTR de um Veículo Lançador de Satélites. A seleção das matrizes de covariância de entrada e saída será realizada pelo AG, enquanto que a solução da Equação Algébrica de Riccati será realizada pela RNAR. As aeronaves possuem modelos de ordens elevadas, o que torna complexo o projeto de leis de controle para estes sistemas. Para contornar tal problema, utiliza-se um modelo de ordem reduzida do sistema através técnica de aproximação via Norma de Hankel. Para comprovar a recuperação da robustez do sistema, o diagrama de Bode mostrou que ao variar-se o parâmetro  $\rho \rightarrow +\infty$  as propriedades de robustez perdidas com a estimação são plenamente recuperadas pelos ajustes do ganho do observador. Desta forma, a abordagem de inteligência computacional, juntamente com o método de redução de ordem mostraram-se uma ferramenta eficaz na aplicação das técnicas de controle robusto.

**Palavras-chave:** Controle de atitude. Redução de ordem. Algoritmo Genético. Rede neural.

## ***ABSTRACT***

This work aims to design a Recurrent Artificial Neural Network and a Genetic Algorithm for the recovery of the robustness properties of the LQG / LTR project of a Launched Satellite Vehicle. The selection of the input and output covariance matrices will be performed by the GA, while the solution of the Algebraic Riccati Equation will be performed by the RNN. Usually, the spacecraft have high order models, which makes their use in control projects difficult. To overcome this problem, a reduced-order system model is used. Thus, in this work, we will apply a model reduction technique, as well as Hankel norm approximation and an illustration of robust stability via singular values. The multivariable bode diagram showed that at low frequencies it requires a minimum singular value that is large, while at high frequencies the maximum singular value is small. In addition, it is clear from the illustrations that the recovery has the infinite gain margin and phase margin of  $60^\circ$ . Thus, the computational intelligence approach, together with the order reduction method, proved to be an effective tool to recover the robustness properties of the system.

**Keywords:** Attitude control. Low order reduction. Genetic Algorithm. Neural Network.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Arquitetura do VLS-1. . . . .	24
Figura 2 – Sistema de Referência . . . . .	25
Figura 3 – Sistema de Referência Fixo ao Corpo. . . . .	26
Figura 4 – Sequência de Rotação YZX . . . . .	27
Figura 5 – Representação do ângulo de ataque e derrapagem de um veículo lançador .	31
Figura 6 – Forças e momentos devidos ao empuxo representadas no plano de arfagem e guinada. . . . .	32
Figura 7 – Representação qualitativa da trajetória no plano de arfagem. . . . .	38
Figura 8 – Modelo Completo. . . . .	42
Figura 9 – Diagrama de blocos para um sistema MIMO com realimentação unitária.	46
Figura 10 – Diagrama de blocos do sistema com o ruído de estado e medida. . . . .	52
Figura 11 – Sistema de controle ótimo. . . . .	54
Figura 12 – Estrutura do controlador LQG. . . . .	56
Figura 13 – Diagrama de Blocos do Sistema para o Estudo do Procedimento de Recuperação. . . . .	58
Figura 14 – Sistema Limite para $\rho \rightarrow \infty$ . . . . .	58
Figura 15 – Diagrama de Blocos da Malha Objetivo. . . . .	59
Figura 16 – Fluxograma do Algoritmo Genético. . . . .	60
Figura 17 – Modelo de um neurônio de McCulloch e Pitts. . . . .	61
Figura 18 – Arquiteturas de redes neurais. . . . .	62
Figura 19 – <i>Fitness</i> da população inicial e final. . . . .	76
Figura 20 – Evolução do fitness (LQR). . . . .	77
Figura 21 – Evolução do fitness (FK). . . . .	78
Figura 22 – Superfície da energia para variação dos parâmetros $n_z$ e $n_v$ . . . . .	80
Figura 23 – Norma do infinito das camadas de entrada, ocultas e saída para $n_v = 8$ e $n_z = 100$ . . . . .	82
Figura 24 – Trajetórias dos estados versus seus estimados . . . . .	83
Figura 25 – Erros de estimação em cada estado . . . . .	84
Figura 26 – Valores singulares das soluções produzidas pelo AG para o LQR. . . . .	85
Figura 27 – Valores singulares das soluções produzidas pelo AG para o FK. . . . .	86
Figura 28 – Recuperação das propriedades de robustez a partir da variação de " $\rho$ ". .	87

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros duais do LQR e do FK. . . . .	67
Tabela 2 – Parâmetros utilizados no algoritmo genético. . . . .	72
Tabela 3 – Faixa de autovalores do projeto para o LQR . . . . .	72
Tabela 4 – Faixa de autovalores do projeto para o FK . . . . .	72
Tabela 5 – Objetivos de controle utilizados na Função de avaliação . . . . .	73
Tabela 6 – Pontuação do fitness . . . . .	73
Tabela 7 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 1. . . .	74
Tabela 8 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 2. . . .	74
Tabela 9 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 3. . . .	74
Tabela 10 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 1. . . .	75
Tabela 11 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 2. . . .	75
Tabela 12 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 3. . . .	75

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DE	<i>Differential Evolution</i> (Evolução Diferencial)
QLMOR	<i>Quadratic Linear Model Order Reduction</i> (Modelo de Redução de Ordem Quadrática Linear)
QLDAE	<i>Quadratic Linear Differential Algebraic Equation</i> (Equação Diferencial Algébrica Quadrática Linear)
ALVs	<i>Aerospace Launch Vehicles</i> (Veículos Lançadores Aer)
DC	Ganho de Baixas Frequências
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i> (Regulador Linear Quadrático)
FK	(Filtro de Kalman)
LQG	<i>Linear Quadratic Gaussian</i> (Linear Quadrático Gaussiano)
LTR	<i>Loop Transfer Recovery</i> (Recuperação de Malha de Transferência)
LQG/LTR	<i>Linear Quadratic Gaussian with Loop Transfer Recovery</i> (Controlador Linear Quadrático Gaussiano com Recuperação de Malha de Transferência )
EAR	(Equação Algébrica de Riccati)
RNAR	(Rede Neral Artificial Recorrente)

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Ângulo de ataque
$\beta$	Ângulo de derrapagem
$\beta_y, \beta_z$	Deslocamento angular da tubeira nos planos de guinada e arfagem
$\delta_a$	Atual deslocamento do divergente
$\delta_c$	Comando de deslocamento para o divergente
$\frac{\delta \vec{V}_B}{\delta t}$	Taxa de variação do vetor $\vec{V}$ vista do referencial não inercial
$\gamma$	Ângulo da Trajetória
$\hat{I}$	Tensor de Inércia
$\hat{i}_b, \hat{j}_b, \hat{k}_b$	Tríade de versores unitários fixo ao corpo
$\mu_d$	Aceleração angular devido ao desalinhamento da tubeira
$\omega_{fi}$	Frequência de flexão associada ao $i$ -ésimo modo de flexão
$\phi_i(l)$	Função forma do $i$ -ésimo modo de flexão
$\rho$	Densidade do Ar
$\theta, \psi, \phi$	Ângulo de Arfagem, Guinada e Rolamento
$\vec{\omega}^{B/L}$	Velocidade angular do referencial do corpo em relação ao referencial inercial
$\vec{F}_E$	Vector Empuxo
$\vec{F}_g$	Força devido à gravidade
$\vec{F}_S$	Somatório de forças externas que agem sobre o veículo
$\vec{F}_A$	Vetor da força aerodinâmica que age sobre o veículo
$\vec{H}$	Vetor Momento Angular
$\vec{l}_a$	Distância entre o centro de massa e o centro de pressão
$\vec{l}_c$	Distância entre o centro de gravidade e o ponto de aplicação da força de empuxo

$\vec{M}_A$	Momento Aerodinâmico
$\vec{M}_E$	Momento gerado devido ao empuxo
$\vec{M}_s$	Somatório dos momentos externos que agem sobre o veículo
$\vec{M}_{AA}$	Momento de amortecimento aerodinâmico
$\vec{r}_e$	Distância do CG ao ponto de saída dos
$\omega_n$	Frequência Natural não amortecida dos gases
$\vec{V}_r$	Vetor velocidade relativa do veículo em relação ao ar, $\vec{V}_r = \vec{V} - \vec{V}_W$
$\vec{V}$	Vetor velocidade
$\vec{V}_B$	Vetor velocidade projetado no sistema de referência solidário ao veículo
$\vec{V}_W$	Velocidade do vento em relação ao referencial inercial
$\xi(l, t)$	Deformação elástica no ponto veículo $l$
$\zeta_a e \omega_a$	Amortecimento e frequência natural de oscilação dos polos mais rápidos do atuador
$\zeta_i$	Amortecimento associado ao enésimo modo de flexão
$A_e$	Área de saída da tubeira
$A_r$	Área de referência
$C^{B/A}$	Matriz de Rotação para a sequência YZX(231)
$C_{l,p}, C_{m,q}, C_{nr}$	Coefficientes aerodinâmicos associado ao amortecimento
$C_{x0}, C_{n,\beta}, C_{n\alpha}$	Coefficientes aerodinâmicos
$CG$	Centro de gravidade
$D$	Arrasto
$d_r$	Diâmetro de referência
$F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}$	Componentes do vetor da força aerodinâmica projetadas no corpo
$F_{Ex}, F_{Ey}, F_{Ez}$	Força empuxo projetada no referencial do veículo
$F_{gx}, F_{gy}, F_{gz}$	Força devido à gravidade decomposta no sistema de referência solidário ao veículo
$g$	Gravidade

$K_a$	Ganho passante do atuador
$l_{ax}, l_{ay}, l_{az}$	Vetor $\vec{l}_a$ decomposto no sistema de referência solidário ao veículo
$l_{cx}, l_{cy}, l_{cz}$	Vetor $\vec{l}_c$ decomposto no sistema de referência solidário ao veículo
$m$	Fluxo de massa
$M_i$	Massa generalizada associada ao enésimo modo de flexão
$m_T$	Massa total do veículo
$M_{AAx}, M_{AAy}, M_{AAz}$	Vetor $\vec{M}_{AA}$ projetado no sistema de referência solidário ao veículo
$M_{AJ}$	Momento de Amortecimento a Jato
$p, q, r$	Componentes da velocidade angular projetada no sistema de referência solidário ao veículo
$p_e$	Pressão de saída dos gases
$p_o$	Pressão atmosférica local
$p_{din}$	Pressão Dinâmica
$Q_i$	Força generalizada associada ao enésimo modo de flexão
$q_i$	Coordenada generalizada associada ao enésimo modo de flexão
$T$	Empuxo Total
$T_o$	Empuxo devido à variação da quantidade de movimento
$T_{vac}$	Empuxo no vácuo
$u, v, w$	Componentes da velocidade linear projetada no sistema de referência solidário ao veículo
$V_e$	Velocidade de escape dos gases
$V_{Wx}, V_{Wy}, V_{Wz}$	Componentes da velocidade do vento projetadas no sistema de referência do corpo
$\zeta$	Fração de Amortecimento
$\underline{\sigma}$	Valor Singular Mínimo
$\bar{\sigma}$	Valor Singular Máximo



$K_{LQR}$	Matriz de ganhos ótimos do LQR
$K_{FK}$	Matriz de ganhos ótimos do Filtro de Kalman
$P_{LQR}$	Solução da Equação Algébrica de Riccati do Controlador LQR
$P_{FK}$	Solução da Equação Algébrica de Riccati do Filtro de Kalman
Q	Matriz de Ponderação de Estados
R	Matriz de Ponderação de Controle
$\Xi$	Matriz de covariância do ruído de estado
$\Theta$	Matriz de covariância do ruído de medida
$\xi(t)$	Ruído do processo
$\theta(t)$	Ruído de medida

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	20
1.1	Motivação e Objetivos . . . . .	21
1.2	Organização do Trabalho . . . . .	21
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA . . . . .	23
2.1	Veículos Lançados de Satélites (VLS) . . . . .	23
2.1.1	Características do VLS . . . . .	23
2.2	Modelagem matemática . . . . .	24
2.2.1	Sistemas de Referência . . . . .	24
2.2.2	Ângulos de Euler . . . . .	26
2.2.3	Equações Diferenciais de Cinemática . . . . .	28
2.2.4	Dinâmica do Corpo Rígido . . . . .	29
2.2.4.1	Forças e Momentos Aerodinâmicos . . . . .	30
2.2.5	Modelo de 6 Graus de Liberdade . . . . .	35
2.2.6	Linearização do modelo . . . . .	37
2.3	Dinâmica do corpo Rígido . . . . .	41
2.4	Redução de ordem via norma HANKEL . . . . .	43
2.5	Controle Multivariável . . . . .	44
2.5.1	Análise Multivariável no Domínio da frequência . . . . .	45
2.5.1.1	Sensibilidades e Consensibilidade . . . . .	47
2.5.2	Decomposição em valores singulares . . . . .	48
2.5.3	Especificações de Desempenho . . . . .	49
2.6	Controle Robusto . . . . .	52
2.6.1	Estimador de estado ótimo: Filtro de Kalman . . . . .	52
2.6.2	O Regulador Linear Quadrático(LQR) . . . . .	53
2.6.3	Controlador Linear Quadrático Gaussiano (LQG) . . . . .	54
2.6.4	Controle Robusto LQG/LTR . . . . .	57
2.7	Algoritmos Genéticos . . . . .	59
2.8	Redes Neurais Artificiais . . . . .	61
3	METODOLOGIA . . . . .	63
3.1	Algoritmo Genético para busca das matrizes de ponderação $Q$ e $R$ . . . . .	63
3.2	Algoritmo Genético para busca das matrizes de covariância $\Xi$ e $\Theta$ . . . . .	67
3.3	Rede Neural Recorrente . . . . .	67

3.3.1	Controle LQG/LTR . . . . .	69
4	PROJETO LQG/LTR DO CONTROLADOR DE ATITUDE DO VLS . . . . .	70
4.1	Modelo de Ordem Reduzida . . . . .	70
4.2	Algoritmo Genético . . . . .	71
4.3	Rede Neural Recorrente para Solução da EAR . . . . .	79
4.4	Filtragem de Kalman . . . . .	82
4.5	Análise da recuperação das propriedades de robustez do sistema	84
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	88
5.1	Trabalhos Futuros . . . . .	88
	REFERÊNCIAS . . . . .	90

## 1 INTRODUÇÃO

O propósito fundamental do sistema de controle de um Veículo Lançador (VL) é controlar sua atitude em relação a seu sistema de orientação. O projeto do controlador de atitude da aeronave deve satisfazer três requisitos principais: estabilizar o veículo, garantir resposta adequada aos comandos de orientação, minimizar desvios de trajetória e minimizar o ângulo de ataque na região de alta pressão dinâmica para garantir integridade estrutural (BLETSOS, 2003).

O problema mais importante associado ao projeto de sistemas de controle de atitude para VLs de alto desempenho surge do comportamento não-estacionário de tal veículo, ou seja, é um sistema não-linear Mehrabian, Lucas e Roshanian (2006). Além disso, o sistema de controle de atitude enfrenta dinâmica variante no tempo com parâmetros incertos e vários distúrbios. Assim, os sistemas de controle de voo são geralmente projetados usando modelos linearizados de equações de movimento não-lineares com forças e momentos aerodinâmicos.

Geralmente, o projeto do controlador leva em consideração modelos reduzidos por suposição e aproximação de parâmetros que caracterizam a dinâmica do veículo, como abordado em Faruqi e Vu (2002), Rahaghi e Roshanian (2006) e Ito e Kunisch (2006). Infelizmente, o uso dessa técnica pode levar a ambiguidade na representação empírica do modelo.

Por essa razão, os autores se concentraram em como obter um modelo de ordem inferior que representasse o modelo da forma mais realista possível. Em Condon e Ivanov (2007) é proposto uma técnica de redução de modelos para sistemas não-lineares baseada na aproximação bilinear em termos da série de Volterra. Um novo método proposto por Gu (2011), chamado modelo de redução de ordem via sistemas quadráticos, reduz os sistemas não lineares que são linearizáveis. O algoritmo converte um sistema não linear em uma equação algébrica diferencial linear quadrática equivalente (QLDAE) e então reduz este em um sistema menor por meio de projeção.

Entre muitas abordagens desenvolvidas para o problema de controle robusto, a abordagem Gaussiana linear quadrática com recuperação da malha de transferência é preferida devido ao seu procedimento de projeto sistemático na solução de problemas de estabilidade, robustez e compensações entre desempenho e esforço de controle permissível. Desde o desenvolvimento da metodologia por Doyle e Stein (1981) e Athans (1986), ela foi aplicada a vários problemas em sistemas aeroespaciais, como abordado em Zarei et al. (2007) e Zhang et al. (2010).

No modelo LQG/LTR clássico, as matrizes de covariância são geralmente escolhidas

através do método de tentativa e erro, como abordado em Johnson e Grimble (1987). Outra abordagem para selecionar matrizes de covariância é apresentada por Zhang et al. (2010), em que o projeto LQG/LTR foi combinado com a Evolução Diferencial (DE) para a busca dos melhores valores para as matrizes de covariância. Alguns métodos para selecionar o ponto de iteração inicial de tais matrizes são sugeridos por Johnson e Grimble (1987) e Hespanha (2007). No entanto nenhum desses métodos garantem a seleção ideal e, geralmente, várias iterações devem ser realizadas para encontrar as melhores matrizes que atendam aos requisitos especificados (NETO; ABREU; SILVA, 2010).

Nesta dissertação, um compensador de LQG/LTR genético-neural híbrido será proposto para o problema de controle de arfagem de um veículo lançador usando um modelo reduzido via aproximação da norma Hankel. O projeto do controlador requer cuidadosamente a sintonização das matrizes de covariância  $Q$ ,  $R$ ,  $\Theta$  e  $\Xi$  que influenciam a forma dos estados e os sinais de controle. Dessa forma, um Algoritmo Genético será usado para automatizar a busca por matrizes de covariância ótimas e uma Rede Neural Recorrente para encontrar a solução de Equação Riccati Algébrica.

## 1.1 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

O projeto do sistema de controle de veículos lançadores possui grandes desafios, pois tais veículos possuem um sistema de equações diferenciais não lineares, acoplado e variante no tempo, e na maioria das situações, não possui solução analítica. Baseado nessas dificuldades a pesquisa surgiu com o propósito de tentar resolver os problemas de controle multivariável utilizando as teorias moderna e clássica de controle, métodos de redução de ordem e as técnicas de computação evolutiva, bem como Algoritmos Genéticos e Redes Neurais Recorrentes. A metodologia escolhida para o projeto do controlador foi a LQG/LTR em que se trabalha com sistemas dinâmicos estocásticos (levando-se em consideração ruídos e perturbações na planta) e recuperam-se as propriedades de robustez através da técnica LTR. O desenvolvimento deste trabalho pode ser justificado pelos seguintes motivos: a ineficiência dos métodos tradicionais utilizados na busca das matrizes de covariância (tentativa e erro), a busca de uma solução ótima da EAR, na qual deve ser assintótica e estável e por fim, a recuperação das propriedades de robustez do sistema.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação está organizada em 5 Capítulos, nos quais se descreve a natureza do problema, sua formulação, testes de validação e análise de resultados. O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica sobre os temas abordados nesta dissertação, bem como: o sistema de equações diferenciais não lineares que rege o movimento do veículo, obtido através de modelagem física do problema, a redução de ordem do modelo matemático que foi utilizada para obtenção de modelo de ordem reduzida, utilizado durante o projeto,

o modelo Linear Quadrático Gaussiano com recuperação da malha de transferência e finaliza-se o capítulo abordando as técnicas de inteligência artificial genéricas que foram utilizadas para o cálculo dos ganhos do controlador.

No Capítulo 3, apresenta-se a metodologia que fora utilizada durante o projeto. Neste capítulo, apresenta-se a estrutura de controle utilizada, a forma como esta estrutura foi encapsulada no método LQG/LTR, os modelos e operadores do AG e a estrutura da RNAR utilizada para cálculo dos ganhos.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados do projeto. O capítulo inicia abordando o modelo de ordem reduzida. Em seguida, apresenta-se os resultados do AG e RNAR, bem como as análises de convergência e velocidade dos mesmos, que serão realizados com base na função de avaliação e superfícies de normas do infinito e energia. De posse dos ganhos projetados, analisa-se a recuperação das propriedades de robustez do sistema para validação do projeto. Finaliza-se o capítulo com uma breve discussão sobre os resultados alcançados.

No Capítulo 5 apresenta-se as considerações finais acerca deste trabalho e algumas sugestões de trabalhos futuros.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 VEÍCULOS LANÇADORES DE SATÉLITES (VLS)

O estudo do sistema de controle de veículos lançadores tem sido de grande interesse da comunidade científica e acadêmica. Uma das principais é a obra publicada por Greensite (1970).

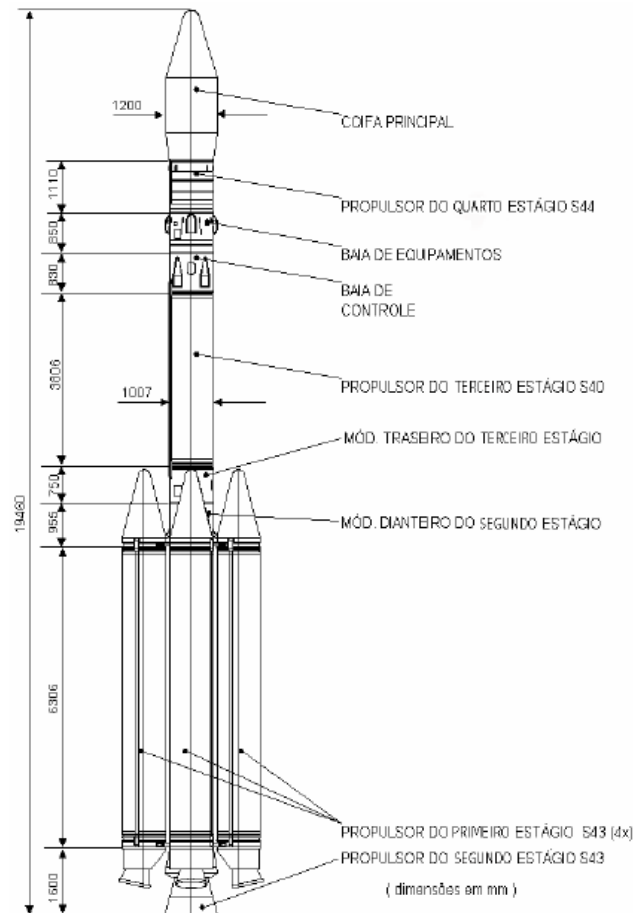
Atualmente está em desenvolvimento no Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE) o Veículo Lançador de Microsatélites (VLM). O objetivo do VLM é satelitizar cargas úteis de massa entre 20 e 100 kg em órbitas circulares entre 200 km e 700 km. Idealizado como um veículo com quatro estágios sólidos, o VLM, é formado pelo corpo central do VLS-1 (propulsores S43, S40 e S44), inclusive a coifa, possuindo como motor de apogeu no quarto estágio o propulsor. Dessa forma, o estudo do controle de atitude do VLS-1, possui sua relevância, uma vez que a dinâmica do corpo central do VLM é baseado no projeto do VLS-1.

#### 2.1.1 CARACTERÍSTICAS DO VLS

O VLS-1 é um lançador de satélites de quatro estágios, utilizando motores-foguete a propelente sólido em todos os estágios como descrito por Isakowitz, Jr e Hopkins (1999). Tem na decolagem o comprimento de 19 m, massa de 50 toneladas, sendo 41 toneladas de combustível, e empuxo de 1000 kN. O desempenho do VLS-1 permite a inserção de satélites, com massa entre 100 e 350 kg, em órbitas circulares de 250 km a 1000 km, em larga faixa de inclinações, desde as equatoriais às polares.

O VLS-1 é constituído de quatro estágios – ilustrados na Figura 1 , sendo o seu primeiro estágio formado por quatro propulsores do mesmo porte, denominados S43B, acionados simultaneamente e fixados simetricamente ao segundo estágio. Suas tubeiras são móveis para permitir o controle de atitude do veículo. O propulsor do segundo estágio possui as mesmas dimensões do primeiro estágio, e sua tubeira móvel que é adaptada ao voo em atmosfera rarefeita que a torna de maiores dimensões (PALMERIO, 2008)

Figura 1 – Arquitetura do VLS-1.



Fonte - Adaptado de Palmerio (2008).

## 2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo Greensite (1970), Du (2010) e Daitx (2012), para o desenvolvimento dos sistemas de controle é necessário obter o modelo a ser controlado, podendo tal modelo ser adquirido por equações matemáticas proveniente da modelagem ou por meio do processo de identificação de sistemas. Nessa seção será desenvolvido o modelo matemático de um veículo lançador.

### 2.2.1 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

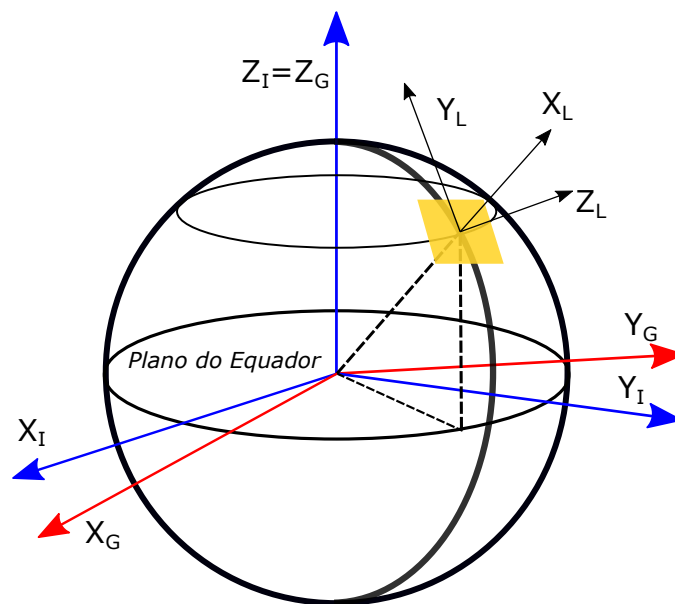
Para uma melhor compreensão, serão definidos primeiramente os sistemas de referências utilizados no decorrer desta dissertação. Em seguida, a modelagem matemática do veículo lançador.



## SISTEMA GEOCÊNTRICO TERRESTRE INICIAL

Com a origem no centro da terra, o sistema abordado nesta seção utilizará um conjunto de vetores  $X_I, Y_I, Z_I$  para defini-lo. Inserido no plano do equador, o eixo  $x$  aponta para o equinócio vernal, o eixo  $z$  é perpendicular ao plano do equador. Por fim, como pode ser observado na Figura 2 o eixo  $y$  completa o triedro ortonormal. O movimento da Terra em torno do Sol será dado como um referencial inercial, uma vez que é desprezível durante a análise da trajetória de voo de um veículo lançador (SILVA, 2014).

Figura 2 – Sistema de Referência



Fonte: Adaptado de Silva (2014)

## SISTEMA GEOCÊNTRICO TERRESTRE ROTACIONAL (NÃO INERCIAL)

Um conjunto de vetores denominados  $X_G, Y_G, Z_G$  define o sistema no qual tem como origem o centro da Terra. O eixo  $x$  aponta para o meridiano de Greenwich e está contido no plano do Equador, o eixo  $z$ , como no sistema geocêntrico terrestre inercial, é perpendicular ao plano do equador e o eixo  $y$  completa o triedro. O sistema gira com uma velocidade angular denominada por  $\Omega_e$ , que é a velocidade de giro da Terra (SILVA, 2014)

## SISTEMA HORIZONTAL NA PLATAFORMA DE LANÇAMENTO

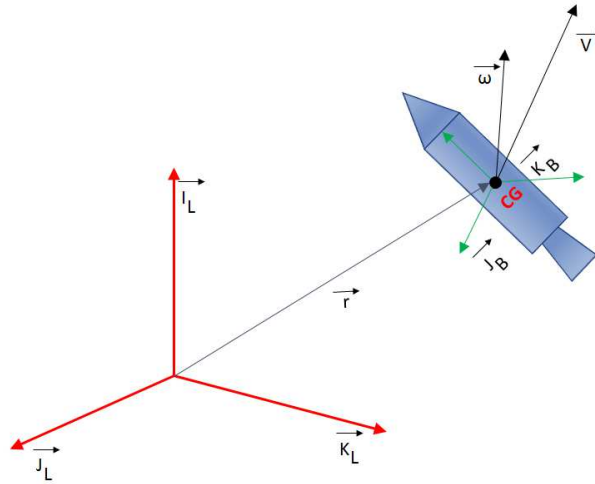
A definição do sistema horizontal na plataforma de lançamento é de grande importância na modelagem matemática de um veículo lançador, uma vez que ajuda a visualização a trajetória do foguete de uma forma intuitiva. Um conjunto de vetores  $X_L, Y_L, Z_L$  definem esse sistema, sendo o centro de lançamento a origem do sistema, onde o eixo  $x$  é normal ao plano tangente que passa pelo centro de lançamento, o eixo  $y$  está localizado no plano

tangente e aponta na direção do norte geográfico, o eixo  $z$  por sua vez aponta para o leste, como ilustrado na Figura 2.

## SISTEMA DE REFERÊNCIA FIXO AO CORPO

O sistema ( $S_B$ ) move-se solidariamente com o corpo. Para a simplificação das equações da dinâmica do veículo, a origem do sistema é no centro de massa do veículo. As componentes dos vetores desse sistema são definidos como  $\hat{i}_b, \hat{j}_b, \hat{k}_b$ . O eixo  $x$  está alinhado com o eixo longitudinal do veículo, o eixo  $y$  é perpendicular ao eixo  $x$  e aponta para um dos outros eixos principais de inércia do veículo, e o eixo  $z$  completa o triedro, como pode ser visto na Figura 3

Figura 3 – Sistema de Referência Fixo ao Corpo.



Fonte: Adaptado de Silva (2014)

Na ilustração acima são apresentados os vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{w}$ , que representam, respectivamente o vetor velocidade linear e o vetor angular. Tais vetores expressos no sistema de referência ( $S_B$ ) são representados por:

$$\vec{V}_B = u\hat{i}_b + v\hat{j}_b + w\hat{k}_b \quad (2.1)$$

e

$$\vec{\omega}^{B/L} = p\hat{i}_b + q\hat{j}_b + r\hat{k}_b \quad (2.2)$$

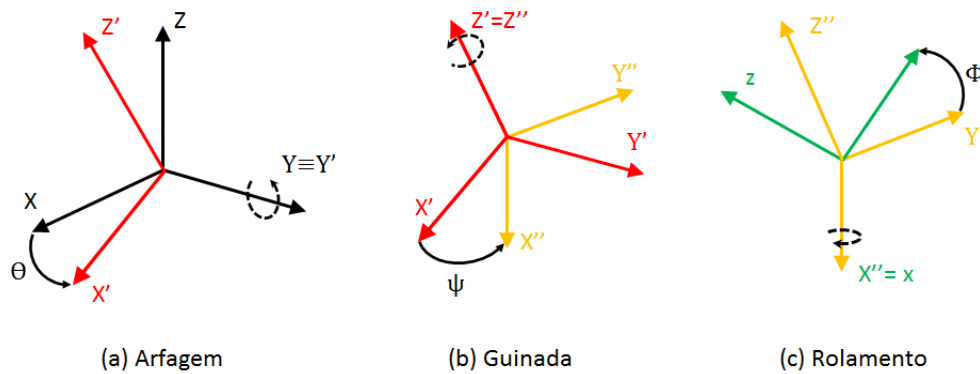
### 2.2.2 ÂNGULOS DE EULER

Existem diversas maneiras de relacionar sistemas de diferentes coordenadas, dentre eles estão, os ângulos de Euler, deslocamento angular, matrizes de cosseno diretores,

parâmetros de Gibbs, quatérnions, entre outros (Morimoto, 2017),(WIE; DU; WHORTON, 2008). Para este trabalho foi escolhido trabalhar com a representação por ângulos de Euler.

Para representar a rotação no espaço tridimensional, é utilizado dois sistemas de coordenadas: um sistema inercial fixo e outro que gira junto ao sistema. Para a realização da rotação, do sistema em relação ao sistema inercial, é empregado o uso de três ângulos independentes, os chamados ângulos de Euler  $(\psi, \theta, \phi)$ .

Figura 4 – Sequência de Rotação YZX .



Fonte: Adaptado de Silva (2014)

A sequência de rotação escolhida para este trabalho é ilustrada na Figura 4. Então fazemos uma sequência de rotação que é listada como:

1. Rotação em torno do eixo Y (Arfagem) de um ângulo  $\theta$ .
2. Rotação em torno do eixo Z (Guinada) de um ângulo  $\psi$ .
3. Rotação em torno do eixo X (Rolamento) de um ângulo  $\phi$ .

essa sequência é denominada YZX(321). A escolha de tal sequência foi feita para evitar a ocorrência de singularidades.

Considerando a sequência YZX, a qual relaciona a atitude do sistema de referência A e B. Tem como representação as sequências dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_2(\theta) &= A' \leftarrow A \\
 C_3(\psi) &= A'' \leftarrow A' \\
 C_1(\phi) &= B \leftarrow A''
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde  $A'$  e  $A''$  são os sistemas de referência intermediários gerados durante as rotações sucessivas do sistema  $A$  para que esse possua a mesma orientação do  $B$ . Assim,

$$C^{B/A} = B \leftarrow A = C_1(\phi)C_3(\psi)C_2(\theta) \quad (2.4)$$

sendo que cada rotação pode ser descrita matricialmente por:

$$C_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$C_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$C_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Dessa forma, a matriz  $C^{B/A}$  é dada por:

$$C^{B/A} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta & \text{sen}\psi & -\text{sen}\theta\cos\psi \\ \text{sen}\theta\text{sen}\phi - \cos\theta\text{sen}\psi\cos\phi & \cos\phi\cos\psi & \cos\theta\text{sen}\phi + \text{sen}\theta\text{sen}\psi\cos\phi \\ \text{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\text{sen}\psi\text{sen}\phi & -\cos\psi\text{sen}\phi & \cos\theta\cos\phi - \text{sen}\theta\text{sen}\psi\text{sen}\phi \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

### 2.2.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE CINEMÁTICA

Nesta seção será abordada as equações da cinemática, as quais estão relacionadas com a evolução temporal do sistema em questão. É válido ressaltar que para cada sequência de Euler existe um conjunto de equações da cinemática. Dessa forma, serão desenvolvidas a seguir, as equações para a sequência de rotação  $YZX$ .

Partindo da equação 2.3, é possível obter a derivada dos ângulos de Euler  $(\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi})$  representadas por:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}^{A'/A} : A' \leftarrow A &= \dot{\theta} \hat{j}' \\ \vec{\omega}^{A''/A'} : A'' \leftarrow A' &= \dot{\psi} \hat{k}'' \\ \vec{\omega}^{B/A''} : B \leftarrow A'' &= \dot{\phi} \hat{i} \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo  $j''$  o versor a direção  $Y'$  para o sistema de referência  $A'$ ,  $k''$  é o versor na direção  $Z''$  no sistema de referência  $A''$  e  $i$  é o versor na direção  $x$  no sistema de referência  $B$ .

Para a velocidade angular no sistema  $B$  em relação ao  $A$  tem-se:

$$\vec{\omega}^{B/A} = \vec{\omega}^{B/A''} + \vec{\omega}^{A''/A'} + \vec{\omega}^{A'/A} = \dot{\phi}\hat{i} + \dot{\psi}\hat{k}'' + \dot{\theta}\hat{j}' \quad (2.10)$$

Ressalta-se que  $C_1(\phi)$  relaciona o sistema de referência intermediário  $A''$  com o sistema  $B$  e  $C_1(\phi)C_3(\psi)$  por sua vez, relaciona o sistema  $A'$  com o  $B$ , e ainda que:

$$\vec{\omega}^{B/A} = p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

assim, é possível obter

$$\vec{\omega}^{B/A} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_1(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + C_1(\phi)C_3\psi \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

dessa forma, obtendo a relação

$$\vec{\omega}^{B/A} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \text{sen}\psi & 0 \\ 0 & \text{cos}\phi\text{cos}\psi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi\text{cos}\psi & \text{cos}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Calculando a relação inversa da equação anterior, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\text{sen}\psi}{\text{cos}\psi}\text{cos}\phi & \frac{\text{sen}\psi}{\text{cos}\psi}\text{sen}\phi \\ 0 & \frac{\text{cos}\phi}{\text{cos}\psi} & -\frac{\text{sen}\phi}{\text{cos}\psi} \\ 0 & -\text{sen}\phi & \text{cos}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

De posse da equação 2.14 e das velocidades angulares, é possível obter a relação entre os dois sistemas de referência integrados numericamente a equação anterior. Porém, deve-se ter cuidado com tal procedimento, devido à singularidade existente em  $\psi = \pm 90^\circ$ .

## 2.2.4 DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

Neste trabalho, as equações que regem a dinâmica do corpo rígido serão derivadas em relação a um referencial inercial no qual o sistema  $S_L$  será adotado como tal referencial, visto que durante a fase de voo de um veículo lançador a rotação da Terra é desprezível, isso se justifica pela curta duração de voo do veículo (GREENSITE, 1967)

Dada a Figura, a aceleração inercial do  $CG$ ,  $\vec{V}$ , expressa no referencial do corpo é escrito da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}(\vec{V}) = \frac{\delta\vec{V}_B}{\delta t} + \vec{\omega}^{B/L} \times \vec{V}_B \quad (2.15)$$

sendo  $\frac{\delta \vec{V}_B}{\delta t}$  a taxa de variação do vetor  $\vec{V}$  vista do referencial  $S_B$  dada por:

$$\frac{\delta \vec{V}_B}{\delta t} = \dot{u}\hat{i}_b + \dot{v}\hat{j}_b + \dot{w}\hat{k}_b \quad (2.16)$$

para  $\vec{V}_B$  o vetor  $\vec{V}$  expresso no triedro solidário ao corpo.

Assim, aplicando a segunda lei de Newton, é possível obter a equação translacional do corpo rígido

$$\vec{F}_S = m_T \frac{d}{dt}(\vec{V}) \quad (2.17)$$

em que  $\vec{F}_S$  é o somatório das forças externas que atuam sobre o veículo e  $m_T$  a massa total.

Para a equação de Euler do movimento rotacional dada por:

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}) = \vec{M}_S \quad (2.18)$$

em que  $\vec{H}$  é o vetor momento angular em relação ao centro de massa e  $\vec{M}_S$  é o somatório de torques aplicados em relação ao centro de massa do veículo. O momento angular pode ser expresso da seguinte forma

$$\vec{H} = \hat{I} \cdot \vec{\omega}^{B/L} \quad (2.19)$$

em que o tensor de inércia ( $\hat{I}$ ) é calculado a partir do centro de massa do veículo e é dado por:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

considerando o alinhamento do sistema  $S_B$  com os eixos principais de inércia. A equação do movimento rotacional pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt}(\hat{I} \cdot \vec{\omega}^{B/L}) = \frac{\delta \hat{I}}{\delta t} \cdot \vec{\omega}^{B/L} + \hat{I} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{\omega}^{B/L}) + \vec{\omega}^{B/L} \times (\hat{I} \cdot \vec{\omega}^{B/L}) \quad (2.21)$$

A partir das equações 2.17 e 2.18 e das forças e momentos que agem sobre o veículo são obtidas as equações reagem no movimento translacional e rotacional.

#### 2.2.4.1 FORÇAS E MOMENTOS AERODINÂMICOS

Durante a fase de voo atmosférico o veículo está sujeito a forças e momentos aerodinâmicos devido ao movimento relativo entre o veículo e o ar.

## Forças Aerodinâmicas

Força de arrasto, sustentação e lateral, são as forças aerodinâmicas que agem sobre o veículo durante o voo. As equações a seguir, representam as forças aerodinâmicas projetadas no referencial do corpo rígido. A força aerodinâmica,  $\vec{F}$  é dada por

$$\vec{F}_A = \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{x0}P_{din}A_r \\ -C_{n\beta}P_{din}A_r\beta \\ -C_{n\alpha}P_{din}A_r\alpha \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

sendo que  $A_r$  é a áreas de referência,  $C_{x0}$ ,  $C_{n\beta}$  e  $C_{n\alpha}$  são coeficientes aerodinâmicos que são função do ângulo de ataque ( $\alpha$ ) ângulo de derrapagem ( $\beta$ ), Mach e outras variáveis.

Para a pressão dinâmica ( $P_{din}$ ) temos:

$$P_{din} = \frac{1}{2}\rho|\vec{V} - \vec{V}_W| \quad (2.23)$$

sendo  $\rho$  é a densidade do ar e  $\vec{V}_W$  a velocidade do vento em relação ao referencial inercial. A velocidade do vento projetada e dada por:

$$\vec{V}_W = V_{Wx}\hat{i}_b + V_{Wy}\hat{j}_b + V_{Wz}\hat{k}_b \quad (2.24)$$

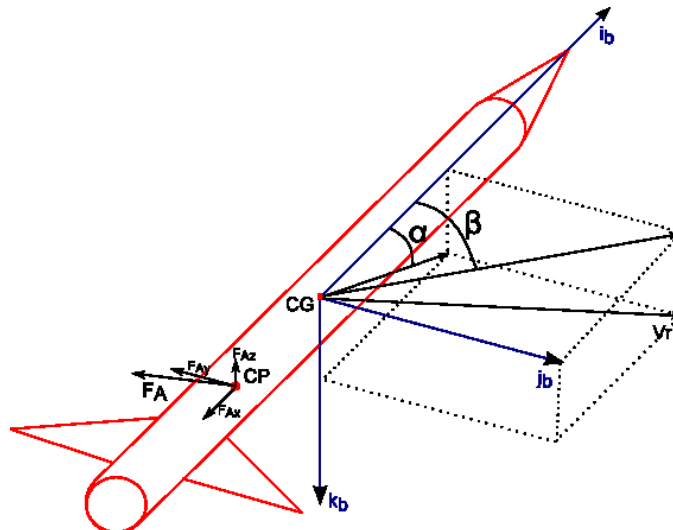
Para os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  temos respectivamente

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{w - V_{Wz}}{u} \right) \quad (2.25)$$

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{v - V_{Wy}}{u} \right) \quad (2.26)$$

Como ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Representação do ângulo de ataque e derrapagem de um veículo lançador .



Fonte: Adaptado de Silva (2014)

## Momento Aerodinâmico

Considerando que o centro de gravidade (CG) e o centro de pressão (CP) estejam situados no eixo de simetria do veículo, temos o momento dinâmico caracterizado pela equação abaixo

$$\vec{M}_A = \vec{l}_a \times \vec{F}_A = \begin{bmatrix} l_{ax} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ F_{Az} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

em que  $\vec{M}_A$  é o momento aerodinâmico e  $\vec{l}_a$  a distância entre o centro de massa e o centro de pressão.

## Forças e Momentos Propulsivos

O empuxo gerado durante a exaustão dos gases é descrito por:

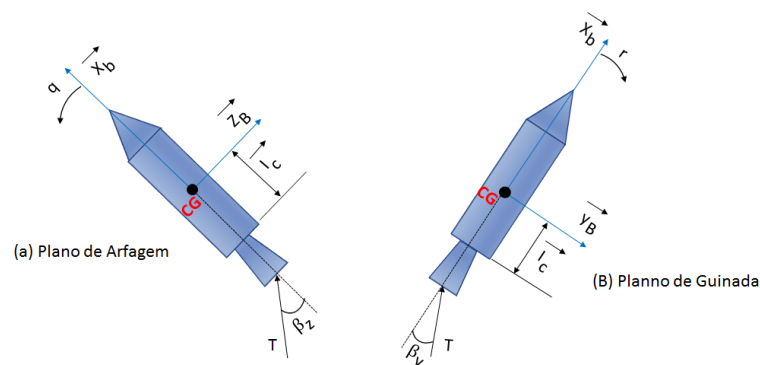
$$T = T_0 + (p_e - p_o)A_e \quad (2.28)$$

em que se tem  $T_0 = \dot{m}|V_e|$ , sendo  $V_e$  a velocidade de escape dos gases e  $\dot{m}$  representa o fluxo de massa,  $p_e$  a pressão de saída dos gases.  $p_o$  a pressão atmosférica no local, e por fim  $A_e$ , que representa a área de saída da tubeira divergente. Uma forma conveniente de escrever o empuxo é:

$$T = T_{vac} - p_o A_e \quad (2.29)$$

em que  $T_{vac}$  é o empuxo no vácuo. Em virtude do veículo possuir controle do vetor de empuxo, as forças de propulsão projetada no eixo do veículo dependem do deslocamento angular da tubeira, como ilustrado na Figura 6

Figura 6 – Forças e momentos devidos ao empuxo representadas no plano de arfagem e guinada.



Fonte: Adaptado de Silva (2014)



Dessa forma, a força de propulsão decomposta nos eixos do foguete é

$$\vec{F} = F_{E_x}\hat{i}_b + F_{E_y}\hat{j}_b + F_{E_z}\hat{k}_b \quad (2.30)$$

Segundo (CAMPOS,2004) a expressão abaixo é uma ótima aproximação para pequenos deslocamentos angulares da tubeira, onde  $\beta_z$  e  $\beta_y$  são, respectivamente, o deslocamento do atuador nos planos de arfagem e guinada.

$$\begin{bmatrix} F_{E_x} \\ F_{E_y} \\ F_{E_z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} T \\ -T\beta_y \\ T\beta_z \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

O momento gerado no centro de massa do veículo devido à força propulsiva é dado por

$$\vec{M}_E = \vec{l}_c \times \vec{F}_E = \begin{bmatrix} l_{ex} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{E_x} \\ F_{E_y} \\ F_{E_z} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

em que  $\vec{l}_c$  é a distância do centro de massa ao ponto de aplicação da força e ambos estão situados sobre o eixo de simetria do veículo.

### Força Peso

A força peso atua no CG do veículo e aponta para o centro gravitacional da Terra. Considerando a Terra plana, essa força projetada no sistema de referência inercial é igual a:

$$\vec{F}_{gl} = \begin{bmatrix} -m_T g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

sendo  $\vec{F}_{gl}$  a força peso representada no sistema  $S_L$  e  $g$  a gravidade terrestre.

Devido ao sistema de equações que representam o movimento do corpo estarem sendo desenvolvidas no sistema solidário ao corpo,  $S_B$ , é necessário projetar essas forças no mesmo. Utilizando a matriz de transformação,  $C^{B/L}$  que leva do sistema  $S_L$  para o  $S_B$  é a equação.

$$\vec{F}_g = C^{B/L}\vec{F}_{gl} = F_{gx}\hat{i}_b + F_{gy}\hat{j}_b + F_{gz}\hat{k}_b \quad (2.34)$$

sendo

$$\begin{bmatrix} F_{gx} \\ F_{gy} \\ F_{gz} \end{bmatrix} = -m_T g \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\psi\cos\phi \\ \sin\theta\cos\psi + -\cos\theta\sin\psi\sin\phi \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Considerando  $\phi = 0$  e  $\psi \approx 0$  é obtido

$$\begin{bmatrix} F_{gx} \\ F_{gy} \\ F_{gz} \end{bmatrix} = -m_T g \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \psi\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

### Momento de Amortecimento Aerodinâmico

Este momento é consequência da rotação do veículo em relação ao CG em um meio viscoso (neste caso o ar) e é maior, quão maior for a rotação angular. Quando o veículo sai da atmosfera, este momento desaparece. Esse momento, projetado no sistema de referência do corpo é dado por:

$$\vec{M}_{AA} \begin{bmatrix} M_{AAx} \\ M_{AAy} \\ M_{AAz} \end{bmatrix} = \frac{P_{din} A_r d_r^2}{2|\vec{V} - \vec{V}_w|} \begin{bmatrix} -C_{l,p} p \\ -C_{m,q} q \\ -C_{n,r} r \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

sendo  $C_{l,p}$ ,  $C_{m,q}$  e  $C_{n,r}$  coeficientes de momento aerodinâmicos do veículo associado ao amortecimento. A variável  $d_r$  é o diâmetro de referência.

### Momento de Amortecimento de Jato

Este momento surge para corpos na qual a variação instantânea da massa é considerável. Para mais detalhes e demonstração veja Cornelisse (1979) e Janssens e Ha (2005). Este momento é dado por:

$$\vec{M}_{AJ} = m\vec{r}_e \times (\vec{\omega}^{B/L} \times \vec{r}_e) \quad (2.38)$$

onde  $m$  é o fluxo de massa e  $\vec{r}_e$  a distância entre o CG até o ponto de saída dos gases, que é aproximadamente  $l_c$ .

## 2.2.5 MODELO DE 6 GRAUS DE LIBERDADE

Partindo das equações anteriormente desenvolvidas as equações do movimento translacional e rotacional do corpo rígido serão derivadas a partir das equações 2.17 e 2.18 obtém-se, respectivamente

$$m_t \frac{d}{dt}(\vec{V}) = \vec{F}_E + \vec{F}_g \vec{F}_A \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{H}) = \vec{M}_A + \vec{M}_E + \vec{M}_{AA} + \vec{M}_{AJ} \quad (2.40)$$

Ao substituir as respectivas forças e momentos, obtém-se as equações

$$m_T \begin{bmatrix} \dot{u} + qw - rv \\ \dot{v} + ru - pw \\ \dot{w} + pv - qu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T \\ -T\beta_y \\ -T\beta_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_T g(\cos\psi\cos\theta) \\ -m_T g(\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\sin\psi\cos\phi) \\ -m_T g(\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\psi\sin\phi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{x_0} P_{din} A_r \\ -C_{n_\beta} P_{din} A_r \beta \\ -C_{n_\alpha} P_{din} A_r \alpha \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

e

$$\begin{bmatrix} I_{xx}\dot{p} + \dot{I}_{xx}p + qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ I_{xx}\dot{q} + \dot{I}_{yy}q + pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ I_{zz}\dot{r} + \dot{I}_{zz}r + pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -T\beta_z l_{cx} \\ -T\beta_y l_{cx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ C_{n_\alpha} P_{din} A_r l_{ax} \alpha \\ -C_{n_\beta} P_{din} A_r l_{ax} \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -C_{l,p} p P^* \\ -C_{m,q} q P^* \\ -C_{n,r} r P^* \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ qr_e^2 \\ rr_e^2 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

para  $P^* = \frac{P_{din} A_r d_r^2}{2|\vec{V} - \vec{V}_w|}$

Reordenando as equações 2.41 e 2.42 são obtidas

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \frac{T}{m_T} - \frac{C_{x_0} P_{din} A_r}{m_T} - g\cos\psi\cos\theta + rv - qw \\ \dot{v} = \frac{T}{m_T} - \frac{C_{x_0} P_{din} A_r}{m_T} - g\cos\psi\cos\theta + rv - qw \\ \dot{w} = \frac{T}{m_T} \beta_y - \frac{C_{n_\beta} P_{din} A_r}{m_T} \beta - g(\sin\theta\sin\phi - \cos\theta\sin\psi\cos\phi) + pw - ru \end{array} \right. \quad (2.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\frac{\dot{I}_{xx}}{I_{xx}} + \frac{C_{l,p} P^*}{I_{xx}} p + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{zz}} qr \\ \dot{q} = -\frac{T l_{cx}}{I_{yy}} \beta_z + \frac{C_{n_\alpha} P_{din} A_r l_{ax}}{I_{yy}} \alpha + \left( \frac{mr_e^2}{I_{yy}} - \frac{\dot{I}_{yy}}{I_{yy}} - \frac{C_{m,q} P^*}{I_{yy}} \right) q + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} pr \\ \dot{r} = -\frac{T l_{cx}}{I_{zz}} \beta_y - \frac{C_{n_\beta} P_{din} A_r l_{ax}}{I_{zz}} \beta + \left( \frac{mr_e^2}{I_{zz}} - \frac{\dot{I}_{zz}}{I_{zz}} - \frac{C_{n,r} P^*}{I_{zz}} \right) r + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} pq \end{array} \right. \quad (2.44)$$

que são as equações de 6 graus de liberdade para o movimento de um veículo lançador. Para a obtenção de tais equações foram feitas algumas suposições descritas a seguir.

## Suposições

- Devido ao voo do veículo ser suficientemente curto, é possível considerar o referencial  $S_L$  como sendo inercial;
- O tensor de inércia  $\hat{I}$  possui somente elementos na diagonal principal, em outras palavras, o sistema  $S_B$  está alinhado com os eixos principais de inércia do veículo lançador;
- O ponto de aplicação da força de controle está sobre o eixo longitudinal do veículo, isso implica que  $l_c$  possui somente a componente na direção do eixo longitudinal( $\hat{i}_b$ );
- O ponto de aplicação da força aerodinâmica está sobre o eixo longitudinal do veículo, assim,  $l_a$  possui somente a componente na direção  $\hat{i}_b$ ;
- O deslocamento do atuador é pequeno para que  $\sin(\beta) \approx \beta$

Com intuito de simplificar a notação, a seguir, serão definida novas variáveis dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} Y_\beta = \frac{C_{n\beta} P_{din} A_r}{m_T}; & Z_\alpha = \frac{C_{n\alpha} P_{din} A_r}{m_T} \\ N_\beta = \frac{C_{n\alpha} P_{din} A_r l_{ax}}{I_{zz}}; & \mu_{\beta_z} = \frac{C_{n\alpha} P_{din} A_r l_{ax}}{I_{yy}}; \\ N_{\beta_y} = \frac{T l_{cx}}{I_{zz}}; & \mu_{\beta_z} = \frac{T l_{cx}}{I_{yy}}; \\ N_r = \frac{\dot{I}_{zz}}{I_{zz}} + \frac{C_{n,r} P^*}{I_{zz}} - \frac{m r_e^2}{I_{zz}}; & \mu_q = \frac{\dot{I}_{yy}}{I_{yy}} + \frac{C_{m,q} P^*}{I_{yy}} - \frac{m r_e^2}{I_{yy}}; \\ Z_{\beta_z} = \frac{T}{m_T}; & Y_{\beta_y} = \frac{T}{m_T}; \\ L_p = \frac{\dot{I}_{xx}}{I_{xx}} + \frac{C_{l,p} P^*}{I_{xx}}; & \end{array} \right. \quad (2.45)$$

em que  $N_\beta, N_{\beta_y}, \mu_\alpha$  e  $\mu_{\beta_z}$  são coeficientes na unidade de aceleração angular por unidade de ângulo,  $N_r, \mu_q$  e  $L_p$  possui como unidade aceleração angular por velocidade angular e  $Z_{\beta_z}, Y_{\beta_y}, Y_\beta, Z_\alpha$  possuem como unidade aceleração linear por unidade angular.

Assim, ao usar tais coeficientes nas equações 2.43 e 2.44 obtém-se as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = \frac{T}{m_T} - \frac{C_{x0} P_{din} A_r}{m_T} - g \cos \psi \cos \theta + r v - q w \\ \dot{v} = -Y_{\beta_y} \beta_y - Y_\beta \beta - g(\sin \theta \sin \psi - \cos \theta \sin \psi \cos \phi) + p q - r u \\ \dot{w} = Z_{\beta_z} \beta_z - Z_\alpha \alpha - g(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \psi \sin \phi) + q u - p v \end{array} \right. \quad (2.46)$$

para a dinâmica translacional e

$$\begin{cases} \dot{p} = -L_p p + \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}} q r \\ \dot{q} = -\mu_{\beta_z} \beta_z + \mu_{\alpha} \alpha - \mu_q q + \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}} p r \\ \dot{r} = -N_{\beta_y} \beta_y + N_{\beta} \beta - N_r r + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} p q \end{cases} \quad (2.47)$$

para a dinâmica rotacional.

### 2.2.6 LINEARIZAÇÃO DO MODELO

As equações 2.46 e 2.47 juntas, formam um sistema de 6 equações diferenciais não lineares, acopladas e variantes no tempo que geralmente não possuem solução analítica. Desse modo, o problema é simplificado mediante a adoção de algumas suposições e, posteriormente o sistema é linearizado em torno de um ponto de operação.

**Suposição-1- $u$  (velocidade do eixo longitudinal) é um parâmetro variante no tempo**

A trajetória de um veículo lançador é otimizada para inserir a maior carga útil possível em órbita, minimizando os esforços aerodinâmicos durante a ascensão do veículo na atmosfera, ou seja,  $\alpha \approx 0$ . Segundo (WIE,2008), a maioria das trajetórias seguem o *gravity turn*, na qual a gravidade é utilizada para mudar a direção do vetor velocidade do veículo. A partir dessa trajetória otimizada é gerada a atitude de referência  $\theta(t)$ . O ângulo da trajetória  $\gamma$  é dado por.

$$\gamma = \theta - \alpha \quad (2.48)$$

Considerando o ângulo de ataque  $\alpha$  de tamanho desprezível, a atitude de referência coincidirá com o ângulo da trajetória, como ilustrado na Figura 7. Considerando que  $\theta(t)$  seja conhecido e sua variação seja dada pelas forças normais a trajetória, pode-se obter a variação da velocidade tangencial a trajetória ( $V = u$ ). Equilibrando as forças obtêm-se

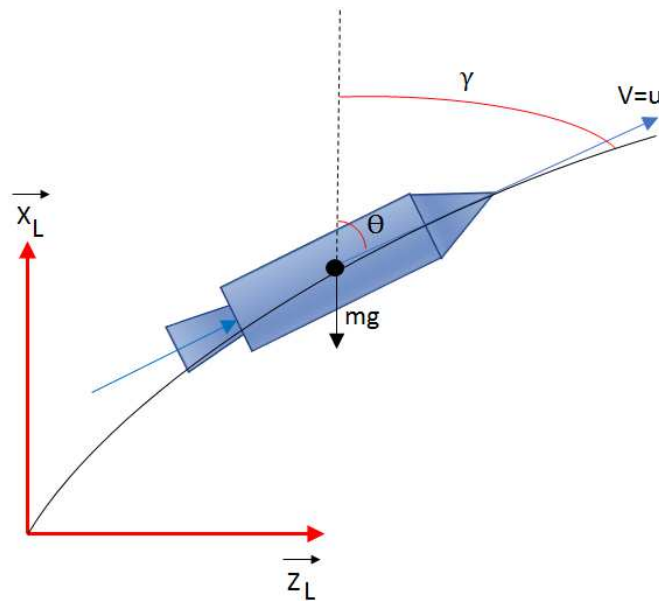
$$\dot{u} \approx \frac{T - D - g \cos \theta}{m_T} \quad (2.49)$$

em que temos que  $D$  é o arrasto dado por

$$D = c_{x0} P_{din} A_r \quad (2.50)$$

Dessa forma, a velocidade  $u$  pode ser calculada a priori independente das demais variáveis de estado. Logo  $u$  passa a ser um parâmetro variante no tempo e não mais uma varável de estado.

Figura 7 – Representação qualitativa da trajetória no plano de arfagem.



Fonte: Adaptado de Silva (2014)

### Suposição 2 - Rolamento ( $p \approx 0$ )

Supondo que o veículo possua controle de rolamento que o possibilita se manter a uma velocidade de rolamento bem próxima de zero, o acoplamento giroscópico pode ser desprezado. Essa mesma situação ocorre quando o veículo não possui controle de rolamento, mas a velocidade residual de rolamento permanece baixa apesar dos troques perturbadores, originários dos efeitos aerodinâmicos ou propulsivos.

Nos primeiros instantes do voo, costuma ser realizado uma manobra de rolamento para alinhar um dos eixos do foguete com o azimute de voo. Porém, nesse intervalo não se manobra nos outros planos.

### Suposição 3 - Vetor velocidade $|\vec{V} - \vec{V}_w| \approx u$

Esta suposição não é válida apenas nos instantes iniciais do voo, visto que a magnitude do vetor velocidade relativa do foguete em relação ao ar é aproximadamente  $u$ , pois as componentes  $v$  e  $w$  são bem pequenas quando comparadas à  $u$ .

### Suposição 4 - Baixos ângulos de ataque e derrapagem

Como os foguetes não são projetados para suportar grandes esforços estruturais na direção dos seus eixos transversais. Isso implica em uma limitação das forças laterais, as quais são oriundas de duas fontes: propulsiva e aerodinâmica. Uma otimização na trajetória do utilizando o *gravity turn* pode reduzir as forças aerodinâmicas. Como consequência,

tem-se que os ângulos de ataque e derrapagem durante o voo na fase atmosférica são bem próximos de zero.

Dessa forma, as equações do ângulo de ataque 2.25 e derrapagem 2.26 podem ser aproximadas por:

$$\alpha = \frac{w - V_{wz}}{u} \quad (2.51)$$

e

$$\beta = \frac{v - V_{wy}}{u} \quad (2.52)$$

#### Suposição 4 - Simplificação da cinemática

A solução do sistema de equações não lineares 2.44 e 2.46, descreve a evolução do movimento rotacional e translacional em um sistema de coordenadas girante fixado no corpo. Para fins de visualização da solução em relação a um sistema inercial, utiliza-se a rotação YZX (2-3-1) descrita anteriormente. Dado que as manobras do foguete ocorrem principalmente no plano de arfagem e as manobras no plano de guinada estão limitadas a correções para manter o veículo no plano de arfagem, pode-se considerar que  $\psi \approx 0$  ao longo do voo. Assim, a equação da cinemática dada por 2.13 pode ser simplificada da seguinte maneira

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} + \dot{\theta}\psi \\ \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\psi}\sin\psi \\ \dot{\psi}\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Como foi imposto na Suposição 2 que  $p \approx 0$ , sem perda de generalidade,  $\phi = 0$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= q \\ \dot{\psi} &= r \end{aligned} \quad (2.54)$$

#### Equações da Dinâmica Rotacional e Translacional Simplificadas

A partir das suposições acima citadas e de que os momentos de inércia dos eixos transversais são iguais ( $I_{yy} = I_{zz}$ ) e que  $pq \approx 0$  e  $pr \approx 0$ , obtêm-se as novas equações do movimento

$$\begin{cases} \dot{w} = Z_{\beta_z}\beta_z - \frac{Z_{\alpha}}{u}w - g\sin\theta + qu + \frac{Z_{\alpha}}{u}V_{wz} \\ \dot{q} = -\mu_{\beta_z}\beta_z - \mu_qq + \frac{\mu_{\alpha}}{u}w - \frac{\mu_{\alpha}}{u}V_{wz} \\ \dot{\theta} = q \end{cases} \quad (2.55)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v} = Y_{\beta_y} \beta_y - \frac{Y_{\beta}}{u} v - g \cos \theta \psi - ru + \frac{Y_{\beta}}{u} V_{wy} \\ \dot{r} = -N_{\beta_y} \beta_y - N_r r - \frac{N_{\beta}}{u} v - \frac{N_{\beta}}{u} V_{wy} \\ \dot{\psi} = r \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Tais equações são separadas por plano de arfagem e guinada respectivamente. A partir desse ponto será considerado somente as equações do plano de arfagem. Devido a simetria do veículo em torno do eixo  $X$ , as deduções feitas para o plano de guinada são semelhantes.

### Equações lineares no plano de arfagem

A partir das equações do movimento no plano de arfagem 2.55 e levando em consideração pequenas perturbações em torno da trajetória de referência, obtêm-se as relações  $\alpha_N = 0$ ,  $w_N = 0$  e  $\dot{\gamma} = \dot{\theta}_N = q_N$  (LUKENS et al., 1961) e aproximando a nova trajetória, como sendo a nominal mais uma variação pequena em torno dessa trajetória, obtêm-se

$$\dot{X} = \dot{x}_N + \delta \dot{X} = \dot{x}_N + \left. \frac{\partial f(X)}{\partial(X)} \right|_{X=X_N, U=U_N} \delta + \left. \frac{\partial f(X)}{\partial U} \right|_{X=X_N, U=U_N} \delta U \quad (2.57)$$

em que  $X$  é o vetor de estados  $X = [w \ q \ \theta]$  e  $U$  as entradas  $U = [\beta_z \ V_{wz}]$ . O termo  $\delta \dot{X}$  é o termo da primeira ordem na expansão pela série de Taylor. Assim, obtêm-se as seguintes equações

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\delta w} = \frac{Z_{\alpha}}{u} \delta w + Z_{\beta_z} \delta \beta_z + g \cos \theta_N \delta \theta + u \delta q + \frac{Z_{\alpha}}{u} \delta V_{wz} \\ \dot{\delta q} = -\mu_{\beta_z} \beta_z N + \mu_q q N + \frac{\mu_{\alpha}}{u} w_N - \frac{\mu_{\alpha}}{u} V_{wz} N \\ \dot{\delta \theta} = \delta q \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Além disso, no ponto linearizado da trajetória têm-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{w}_N = \frac{Z_{\alpha}}{u} w_N + Z_{\beta_z} \beta_z N + g \sin \theta_N + q_N u + \frac{Z_{\alpha}}{u} V_{wz} N \\ \dot{q}_N = -\mu_{\beta_z} \beta_z N - \mu_q q N + \frac{\mu_{\alpha}}{u} w_N - \frac{\mu_{\alpha}}{u} V_{wz} N \\ \dot{\delta}_N = q_N \end{array} \right. \quad (2.59)$$



Ao substituir os valores nominais dos estados têm-se  $\dot{w}_N = Z_{\beta_z}\beta_z N - g \sin\theta_N + q_N u = 0$  e  $\dot{q}_N = 0$ . Assim, obtém-se o sistema de equações lineares abaixo, o qual representa o sistema no ponto de linearização da trajetória de referência

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\theta} \\ \delta\dot{q} \\ \delta\dot{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mu_q & \frac{\mu_\alpha}{u} \\ -g \cos\theta_N & u & -\frac{Z_\alpha}{u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\theta \\ \delta q \\ \delta w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_{\beta_z} \\ Z_{\beta_z} \end{bmatrix} \delta\beta_z + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\mu_\alpha}{u} \\ \frac{Z_\alpha}{u} \end{bmatrix} \delta V_{wz} \quad (2.60)$$

De posse de tais equações, é possível projetar o sistema de controle para sistemas lineares. A função de transferência desse sistema é dada por:

$$\frac{\delta\theta(s)}{\delta\beta_z(s)} = G_p(s) = \frac{\mu_{\beta_z}s + \frac{Z_\alpha\mu_{\beta_z}}{u} + \frac{Z_{\beta_z}\mu_\alpha}{u}}{s^3 + \left(\frac{Z_\alpha}{u} + \mu_q\right)s^2 + \left(\frac{Z_\alpha\mu_q}{u} - \mu_\alpha\right)s + \frac{\mu_\alpha g \cos\theta_N}{u}} \quad (2.61)$$

### 2.3 DINÂMICA DO CORPO RÍGIDO

A modelagem realizada na seção anterior considera o veículo como um corpo rígido, isto é, a distância de um elemento de massa do corpo até um sistema de coordenada fixo ao corpo é constante. Entretanto, essa aproximação não é válida para o caso de um veículo lançador, pois ao aplicar forças no veículo esse sofre deformações elásticas. Um dos problemas associados à flexão está relacionado ao sistema de medição de atitude, pois os sensores medem tanto o deslocamento do corpo rígido quanto o deslocamento local devido à flexão. Esse sinal, ao ser realimentado na malha de atitude, provoca a interação entre o sistema de controle e a estrutura, podendo levar o veículo à instabilidade. Adicionalmente, a flexão pode afetar a integridade estrutural do veículo tornando a modelagem desse fenômeno necessária.

Diante do exposto, foram considerados, além da função de transferência do corpo rígido, os dois primeiros modos de flexão por serem menos atenuados. O modelo linear da tubeira móvel também foi levado em consideração, como mostrado na Figura 8.

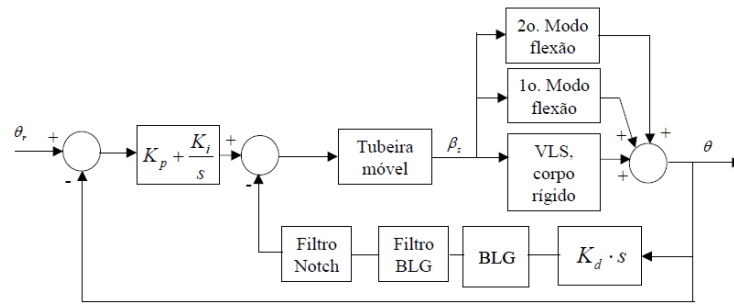
No canal de realimentação existem 3 elementos além do ganho derivativo: o Filtro Notch, o BLG (Bloco Girométrico) e o filtro BLG.

O Bloco Girométrico é o elemento responsável pela medida da velocidade angular  $q$ , entre outras medidas. No entanto, a dinâmica deste componente foi desconsiderada.

O filtro Notch foi projetado para atenuar o 1º modo de flexão, de modo que este pudesse ser desconsiderado (já que este modo tem frequência mais baixa e mais próxima dos comandos de manobra) e o filtro BLG é responsável pela filtragem da saída do bloco BLG, eliminando ruídos de alta frequência.

As funções de transferência de cada elemento são apresentadas a seguir:

Figura 8 – Modelo Completo.



Fonte: Adaptado de Silva (2014)

- **1° e 2° Modos de flexão:** Os dois modos de flexão são representados de maneira simplificada através da função de transferência (GREENSITE, 1967).

$$TF_{Flex} = \frac{k_{fi}}{s^2 + 2\zeta_{fi}\omega_{fi}s + \omega_{fi}^2} \quad (2.62)$$

sendo que  $K_{fi}$ , representa o ganho,  $\zeta_{fi}$  o coeficiente de amortecimento e  $\omega_{fi}$  a frequência natural do modo de flexão  $i$ . Vale ressaltar que somente  $\zeta_{fi}$  é considerado constante durante o voo, os demais parâmetros variam.

- **Tubeira Móvel:** O modelo matemático da tubeira móvel (atuador) é dado por

$$TF_{tubeira} = \frac{K_a\omega_a^2}{(s + K_a)(s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2)} \quad (2.63)$$

para que  $K_a$  representa a banda passante do atuador,  $\zeta_a$  e  $\omega_a$  são o amortecimento e frequência natural de oscilação dos polos mais rápidos, respectivamente.

- **BLG:** Como comentado acima, a dinâmica do BLG não foi considerada e, como consequência, sua função de transferência adotada é  $TF_{BLG} = 1$ .
- **Filtro BLG:** A função de transferência do filtro BLG é dada por:

$$TF_{BLG} = \frac{\omega_s^2}{(s^2 + 2\zeta_s\omega_s s + \omega_s^2)} \quad (2.64)$$

- **Filtro Notch:** A função de transferência do filtro Notch é dada por

$$TF_{Notch} = \frac{s^2 + 2\zeta_n\omega_{nf}s + \omega_{nf}^2}{s^2 + 2\zeta_{df}\omega_{df}s + \omega_{df}^2} \quad (2.65)$$

## 2.4 REDUÇÃO DE ORDEM VIA NORMA HANKEL

Os métodos tradicionais para redução de ordem, geralmente são baseados em conceitos de análise modal ou domínio da frequência. O Método da Ótima Norma de Hankel difere dos demais por introduzir duas definições fundamentais, as quais se referem à teoria das realizações balanceadas e à aproximação através da ótima norma de Hankel.

A primeira parte do método da mínima norma de Hankel, consiste em determinar uma realização balanceada para o sistema, utilizando para isto o procedimento proposto por Moore (1981). Em seguida, deve-se aplicar a definição da aproximação de ótima norma de Hankel. Assim, com a aplicação destas técnicas é possível calcular o erro da resposta em frequência entre o sistema real e o modelo reduzido.

O trabalho de Glover (1984) coloca-se como um marco no que diz respeito à utilização da norma Hankel para simplificar o problema da redução de modelos. Basicamente, Glover utiliza das propriedades da forma balanceada para parametrizar todas as aproximações de ordem  $k < n$  de uma função de transferência  $G(s)$  que são ótimas no sentido da norma Hankel.

### Definição do Problema

Seja o sistema dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.66)$$

cujas a função de transferência do sistema é

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.67)$$

Se os autovalores de  $A$  tem parte real negativa, pode-se definir a matriz gramiana de controlabilidade dada por:

$$P = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (2.68)$$

e a matriz gramiana de observabilidade dada por:

$$Q = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \quad (2.69)$$

as quais são simétricas e positiva definidas e satisfazem as equações de Lyapunov (GLOVER, 1984)

$$AP + PA^T + BB^T = 0 \quad (2.70)$$

$$A^T Q + QA + C^T C = 0 \quad (2.71)$$

### Definição dos Valores Singulares de Hankel

Se  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0, \forall i$ , então os valores singulares de Hankel da matriz  $G(s)$  possui a seguinte definição

$$\sigma_i(G(s)) = [\lambda_i(PQ)]^{1/2} \quad (2.72)$$

em que  $G(s)$ ,  $P$  e  $Q$ , são definidos pelas equações 2.67, 2.68 e 2.69, respectivamente. Além disso, convencionou-se que  $\forall_i, \sigma_i(G(s)) \geq \sigma_{i+1}(G(s))$ .

### Definição da Norma Hankel

Seja a função de transferência representada pela equação 2.72, com  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < 0 \forall i$ , então a norma Hankel para  $G(s)$  é definida como:

$$\|G(s)\|_H = \sigma_i = [\lambda_{max}(PQ)]^{1/2} \quad (2.73)$$

sendo  $\lambda_{max}$  o maior autovalor e  $P$  e  $Q$  as matrizes gramianas de controlabilidade e observabilidade, respectivamente. Da definição de valores singulares segue que a norma Hankel do sistema é o maior valor singular do sistema,  $\lambda_{max}$ .

$$\|G(s)\|_H = \lambda_{max} \quad (2.74)$$

Para o bom condicionamento do problema de redução de modelos através da norma de Hankel, a norma  $H_\infty$  apresentada na equação deve ser respeitada.

$$\|G(s) - G(s)_H\|_\infty \leq \sum_{nr+1}^n \sigma_i \quad (2.75)$$

na qual  $G(s)$  é o modelo completo,  $G(s)_H$  é o modelo reduzido,  $\sigma_i$  são os valores singulares de Hankel referentes a cada grau de liberdade do sistema e  $nr$  a ordem do modelo reduzido, com  $i = 1, 2, \dots, n$ , com  $n$  sendo o número de graus de liberdade do modelo completo.

## 2.5 CONTROLE MULTIVARIÁVEL

No projeto de sistemas de controle é importante perceber que um conjunto de equações diferenciais lineares, que forma a base de um projeto, é uma representação ou aproximação para os sistemas do mundo real. Vários sistemas têm dinâmicas que são importantes em altas frequências, que às vezes, são negligenciadas no projeto do modelo (LEWIS; SYRMOS, 1995). Estas dinâmicas não modeladas em alta frequência podem atuar desestabilizando um sistema de controle que pode ter comportamento bastante satisfatório em termos do modelo do sistema. Em sistemas não lineares, o equilíbrio é modificado para um novo ponto de operação, enquanto que no modelo da planta linearizada descreve mudanças de comportamento com presença de perturbações. Estas variações paramétricas

afetadas em baixa frequência podem também atuar para desestabilizar o sistema. Para compensar estas variações, nós podemos determinar ganhos de controladores satisfatórios para modelos linearizados em vários pontos de equilíbrio do projeto sobre um conjunto de operação. Estes ganhos projetados podem ser programados em computadores para o desempenho satisfatório do controlador sobre o ambiente inteiro. Para ganhos programados, é essencial que os ganhos do controlador estejam presentes em cada ponto de equilíbrio projetado para garantir estabilidade e manter as condições de operações perto do ponto de equilíbrio.

### 2.5.1 ANÁLISE MULTIVARIÁVEL NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A seguir, apresenta-se a definição de Sistema Multivariável sob o ponto de vista de sua descrição em função de transferência. Um Sistema Multivariável que possui  $m$ -entradas e  $q$ -saídas é descrito por um modelo entrada e saída,

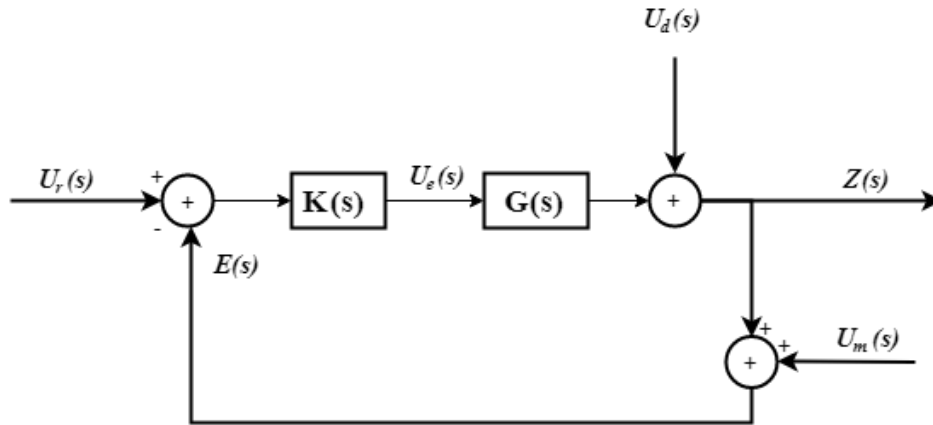
$$Z(t) = G(t)U_r(t) \quad (2.76)$$

em que  $Z \in \mathbb{R}^q$  a saída do Sistema Planta,  $U_r(t) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de entrada e  $G \in \mathbb{R}^{q \times m}$  é a matriz resposta ao impulso. Uma modificação na primeira entrada  $u_1$  pode afetar todas as saídas  $z_1, \dots, z_q$ . Isto mostra que existe interação entre entradas e saídas. Se afetar somente  $z_1$  podemos observar que não existe acoplamento para as saídas restantes. A presença de direções no sistema MIMO o diferencia em relação ao sistema SISO.

A Figura 9 ilustra um diagrama em blocos padrão do sistema com realimentação no domínio da frequência. Podemos ainda observar a saída da planta  $Z \in \mathbb{R}^q$ , a entrada do controle da planta  $U_c \in \mathbb{R}^m$ , a entrada de referência  $U_r(t) \in \mathbb{R}^q$ , o distúrbio atuando no sistema  $U_d(t)$  e  $U_m(t)$  o ruído do sensor ou medição. Os sinais de ruídos e de distúrbios são geralmente vetores de dimensões  $q$ , sendo que os distúrbios ocorrem em baixas frequências, abaixo de algum  $\omega_d$ , enquanto o ruído de medida  $U_m(t)$  tem seus efeitos predominantes em altas frequências, acima de algum  $\omega_m$ .

Observa-se que a localização perfeita não pode ser alcançada a menos que o número  $m$  de entradas de controle seja maior ou igual ao número  $q$  de saídas. Então, podemos considerar que  $m = q$  tal que a planta e o compensador são quadrados. Isto é somente uma consequência de projeto de sensibilidade, e não uma restrição nos tipos de plantas que podem ser consideradas.

Figura 9 – Diagrama de blocos para um sistema MIMO com realimentação unitária.



Fonte - Adaptado de Lewis, Vrabie e Syrmos (2012).

O erro de acompanhamento

$$e(t) = U_r(t) - z(t) \quad (2.77)$$

devido a presença de ruído da medição, o erro é melhor representado como ilustrado na equação,

$$e(t) = U_r(t) - z(t) - U_m(t) \quad (2.78)$$

Uma análise é apresentada em termos de domínio da frequência, a partir da Figura 9 considere a saída da planta,

$$Z(s) = G(s)K(s) + U_d(s) \quad (2.79)$$

A equação 2.76 no domínio da frequência, a entrada do controlador,

$$E(s) = U_r(s) - Z(s) - U_m(s) \quad (2.80)$$

substituindo a equação 2.80 em 2.79, temos  $Z(s)$  em função das entradas  $U_r(s), U_m(s)$  e  $U_d(s)$  externas e da função de transferência,

$$Z(s) = (I + GK)^{-1}GK(U_r(s) - U_m(s)) + (I + GK)^{-1}U_d(s) \quad (2.81)$$

substituindo a equação 2.81 na equação erro 2.80,

$$E(s) = [I + (I + GK)^{-1}GK]U_r(s) + (I + GK)^{-1}GKU_m(s) - (I + GK)^{-1} - U_d(s) \quad (2.82)$$

Aplicando-se o lema da inversa na equação 2.82,

$$E(s) = (I + GK)^{-1}(U_r(s) - U_d(s)) + (I + GK)^{-1}GKU_m(s) \quad (2.83)$$

Desde que  $GK$  é quadrada inversível,

$$(I + GK)^{-1}GK = [(GK)^{-1}(I + GK)]^{-1} = [(GK)^{-1} + I]^{-1} \quad (2.84)$$

ainda,

$$[(I + GK)(GK)^{-1}]^{-1} = GK(I + GK)^{-1} \quad (2.85)$$

Considerando as equações 2.84 e 2.85 e fazendo as devidas substituições, obtém-se as novas equações da saída e do erro,

$$Z(s) = GK(I + GK)^{-1}(U_s(s) - U_m(s)) + (I + GK)^{-1}U_s(s) \quad (2.86)$$

e

$$E(s) = (I + GK)^{-1}(U_r(s) - U_d(s)) + GK(I + GK)^{-1}U_m(s) \quad (2.87)$$

### 2.5.1.1 SENSIBILIDADES E CONSENSIBILIDADE

Nesta Subsecção estende-se as noções clássicas de ganho da malha de diferença de retorno e de sensibilidades para sistemas multivariáveis que são matrizes de transferência quadrada de dimensão  $m \times m$ . As equações 2.81 e 2.86 de saída e de erro 2.82 e 2.87 fornecem duas funções importantes para a análise e para o projeto de Sistemas Multivariáveis no domínio da frequência que são as funções de sensibilidade e de cosensibilidade ou de sensibilidade complementar. Então, de acordo com as citadas equações, a sensibilidade do sistema,

$$S(s) = (I + GK)^{-1} \quad (2.88)$$

e sua consensibilidade,

$$T(s) = GK(I + GK)^{-1} = (I + GK)^{-1}GK \quad (2.89)$$

A saída e o erro são expressas em termos de sensibilidade e da cosensibilidade,

$$Z(s) = T(s)(U_r(s) - U_m(s)) + S(s)U_d(s) \quad (2.90)$$

e

$$E(s) = S(s)(U_r(s) - U_d(s)) + T(s)U_m(s) \quad (2.91)$$





$j\omega$ , considerando  $U$  e  $V$ . Desde que  $AA^* = U\Sigma V^*V\Sigma U^* = U\Sigma^2U^*$ , segue que os valores singulares de  $A$  são simplesmente a raiz quadrada positiva dos autovalores de  $AA^*$ ,

$$SVD = \sqrt{eig(AA^*)} \quad (2.97)$$

Note que um gráfico completo de um comportamento de uma matriz versus ( $j\omega$ ) deve considerar as direções dos valores singulares bem como as fases multivariáveis, que também podem ser obtidas da decomposição do SVD. Assim, generalizações completas MIMO de magnitude de gráficos de Bode e fases são analisados. Portanto, a teoria relativa a porção fase do gráfico é mais difícil usar em uma técnica de projeto prático, pois um sistema MIMO para uma relação de Bode ganho-fase é avaliado (DOYLE; STEIN, 1979). Devemos então somente empregar gráficos de VSs versus frequências, que correspondem a gráficos de magnitude de Bode para sistemas MIMO.

A magnitude de uma matriz da função de transferência quadrada em algumas frequências ( $j\omega$ ) depende da direção de excitação de entrada. Entradas em uma certa direção no espaço de entrada excitará somente os valores singulares associados com essas direções. Contudo, para algumas entradas, a magnitude da função de transferência em algumas dadas frequências ( $j\omega$ ) pode saltar para seus máximos valores singulares, denotado por  $\sigma_{max}(G(j\omega))$ , e abaixo para seus mínimos valores singulares, denotado  $\sigma_{min}(G(j\omega))$ . Assim, todos nossos resultados, bem como os gráficos que devemos analisar, precisam considerar as magnitudes destes dois valores.

As direções são relevantes para vetores e matrizes, a maior parte das ideias e técnicas de sistemas SISO é estendida para o caso MIMO. A técnica dos métodos de decomposição singular fornece informação que permite quantificar os sistemas Multivariáveis direcionalmente. Os resultados de sistema SISO podem ser genérico para sistemas MIMO, considerando magnitude (valor absoluto), levando em conta o valor singular máximo. A condição de estabilidade não é genérico em termos de SVD, isto mostra a dificuldade em determinar uma ótima medida de base da função de transferência MIMO.

### 2.5.3 ESPECIFICAÇÕES DE DESEMPENHO

Comparando os Gráficos de Valores Singulares e os Gráficos de Bode podemos ressaltar que os saltos dos Valores Singulares em algumas faixas de frequências não são possíveis de serem observadas. Então, tem-se a necessidade de discutir as especificações de desempenho no domínio da frequência para o caso MIMO. O ponto importante é que em baixas frequências é requerido que os valores singulares mínimos sejam grandes, enquanto que em altas frequências os valores singulares máximos sejam pequenos.

1. **Ganho de operação:** Define-se a norma  $\|S\|_2$  de um vetor em função do tempo  $S(t)$  como,

$$\|S\|_2 = \left[ \int_0^\infty S^T(t)S(t)dt \right]^{1/2} \quad (2.98)$$

A equação 2.98 representa a energia total em  $S(t)$ . O sistema linear e invariante no tempo têm entradas  $U_r(t)$  e suas saídas  $Z(t)$  são representadas por uma integral de evolução, como representado na equação,

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-r)u(\tau)d(\tau) \quad (2.99)$$

sendo  $h(t)$  a resposta ao impulso. O operador ganho  $\| G \|_2$ , de cada sistema é definido como um dos menores valores de  $\gamma$  tal que,

$$\| Z \|_2 \leq \gamma \| U_r \|_2 \quad (2.100)$$

sendo o ganho do operador  $\| G \|_2$ ,

$$\| G \|_2 \leq \max[\sigma_{\max}(G(j\omega))] \quad (2.101)$$

sendo  $G(s)$  a função de transferência do sistema e sua norma, dada por  $\| G \|_2$ , sendo o valor máximo sobre a frequência  $\omega$  dos máximos valores singulares de  $G(j\omega)$ , ou seja,  $\max(\text{svd}(G(s)))$ . Assim,  $\| G \|_2$  é uma norma infinita no domínio da frequência. Estes resultados fornecem incrementos importantes para  $\sigma_{\max}(G(j\omega))$ , como estamos interessados em manter  $Z(t)$  pequeno sobre uma faixa de frequência, então, devemos tomar cuidado com  $\sigma_{\max}(G(j\omega))$  que é pequeno sobre essa faixa.

Agora é necessário ver como estes resultados podem ser usados em especificações no domínio do tempo. Alguns fatos que nós devemos usar nesta discussão,

$$\sigma_{\min}(GK) - 1 \leq \sigma_{\min}(I + GK) \leq \sigma_{\min}(GK) + 1 \quad (2.102)$$

$$\sigma_{\max}(M) \leq 1/\sigma_{\min}(M^{-1}) \quad (2.103)$$

$$\sigma_{\max}(AB) \leq \sigma_{\max}(A)\sigma_{\max}(B) \quad (2.104)$$

Para as matrizes A, B, GK, M, com M não singular. Antes de iniciar uma discussão de especificações de desempenho, notamos o seguinte: Se  $S(j\omega)$  é pequeno, como descrito em baixas frequências,

$$\sigma_{\max}(S) = \sigma_{\max}[(I + GK)^{-1}] \approx 1/\sigma_{\min}(GK) \quad (2.105)$$

Isto é, um grande valor  $\sigma_{\min}(GK)$  garante um pequeno valor para  $\sigma_{\max}(S)$ . Por outro lado, se  $T(j\omega)$  é pequena, como é desejado em altas frequências, então

$$\sigma_{\max}(T) = \sigma_{\max}[GK(I + KG)^{-1}] \approx 1/\sigma_{\min}(GK) \quad (2.106)$$

Assim, um pequeno valor de  $\sigma_{max}(GK)$  garante um pequeno valor de  $\sigma_{max}(T)$ . Isto significa que especificações de  $S(j\omega)$  é pequena em baixas frequências e  $T(j\omega)$  é pequena em altas frequências, podendo igualmente ser formulado em termos de  $\sigma_{min}(GK)$ , sendo grande em baixas frequências e  $\sigma_{max}(GK)$  sendo pequena em altas frequências. Assim, todas nossas especificações de desempenho serão em termos do máximo e mínimo valores singulares de ganho de malha  $GK(j\omega)$ . O significado prático disto á que nós precisamos somente calcular os valores singulares do ganho de malha  $GK(j\omega)$ , e não os de  $S(j\omega)$  e  $T(j\omega)$ .

Considera-se as especificações em baixas frequências no gráfico do valor singular, e depois em altas frequências. Como visto nas equações 2.90 e 2.91, a cosensibilidade estar relacionada com as entradas de referências  $U_r$  e com o distúrbio  $U_d$ , enquanto que a sensibilidade envolve o ruído de medida  $U_n$ .

2. **Especificações em baixas frequências:** Para baixas frequências, podemos considerar que o ruído, equação 2.91, do sensor é zero,

$$E(s) = S(s)(U_r(s) - U_d(s)) \quad (2.107)$$

Assim, para manter  $\|e(t)\|_2$  pequeno, é necessário somente assegurar que o operador norma  $\|S\|_2$  seja pequeno em altas frequências onde  $U_r(j\omega)$  e  $U_d(j\omega)$  estão presente. Isto pode ser alcançado assegurando que, em cada frequência,  $\sigma_{max}(S(j\omega))$  é pequeno, como já temos visto, isto pode ser garantido se nós selecionarmos,

$$\sigma_{max}(GK(j\omega)) \gg 1, \text{ para } \omega \leq \omega_d \quad (2.108)$$

os sinais  $U_r(j\omega)$  e  $U_d(j\omega)$  estão presentes para  $\omega \leq \omega_d$ .

Desta forma, exatamente como no caso clássico (LEWIS; SYRMOS, 1995), estamos aptos para especificar um desempenho em baixas frequências que garante o desempenho robusto; que é, um ótimo desempenho na presença de distúrbios de baixas frequências.

3. **Especificações em altas frequências:** Vamos agora discutir especificação de desempenho em altas frequências. O ruído do sensor faz-se presente acima de alguns valores de frequências conhecidas. Assim, de acordo com a equação 2.91, para manter pequenos  $\|e(t)\|_2$  na presença de ruídos de medidas devemos assegurar que o operador  $\|T\|_2$  é pequeno em altas frequências, isto pode ser garantido se,

$$\sigma_{max}(GK(j\omega)) \gg 1, \text{ para } \omega \leq \omega_n. \quad (2.109)$$

## 2.6 CONTROLE ROBUSTO

### 2.6.1 ESTIMADOR DE ESTADO ÓTIMO: FILTRO DE KALMAN

O Filtro de Kalman é um método de estimação estocástica utilizado para obter estimativas ótimas das variáveis de estados de um sistema dinâmico, de tal maneira que o erro é minimizado estatisticamente. Considere a planta representada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) + \xi(t) \\ y &= Cx(t) + \theta(t) \end{aligned} \quad (2.110)$$

Em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $y(t) \in \mathbb{R}^n$  são denominados vetores de entrada e de saída respectivamente,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  são matrizes que representam o sistema,  $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$  é o ruído do processo e  $\theta(t) \in \mathbb{R}^q$ , o ruído de medida, onde ambos são ruídos brancos Gaussianos e matrizes de covariâncias  $\Xi$  e  $\Theta$ , dadas por:

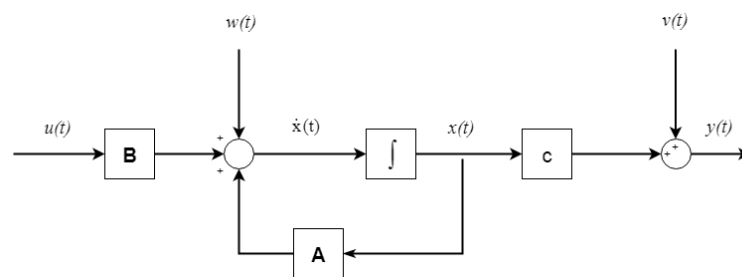
$$\begin{aligned} E[\xi(t)\xi(t)'] &= \Xi \geq 0, \\ E[\theta(t)\theta(t)'] &= \Theta > 0. \end{aligned} \quad (2.111)$$

A matriz de covariância do ruído no estado  $\Xi$  é positiva semi-definida e a matriz do ruído de medida  $\Theta$ , é positiva definida. Assume-se que estes sinais são correlacionados entre si, ou seja:

$$E\xi(t)\xi(t)' = 0 \quad , \quad E\theta(t)\theta(t)' = 0. \quad (2.112)$$

O diagrama de blocos da Figura 10 representa o sistema descrito.

Figura 10 – Diagrama de blocos do sistema com o ruído de estado e medida.



Fonte - Adaptado de Pinto (2012)

O problema do FK consiste em obter-se uma estimativa  $\hat{x}(t)$  do estado  $x(t)$  a partir da observação de saída  $y(t)$ . A dinâmica do Filtro de Kalman é dada por:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K_{FK}(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.113)$$

Onde o erro entre o valor estimado  $\hat{x}(t)$  e o estado observado  $x(t)$  é dado por:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.114)$$

O filtro de Kalman é um sistema dinâmico em que a matriz de ganho do observador é

$$K_{fk} = P_{FK}C^T\Theta^{-1} \quad (2.115)$$

onde  $P_{FK}$  é uma solução simétrica definida positiva da Equação Algébrica de Riccati (CRUZ, 1996) dada por:

$$AP_{FK} + P_{FK}A^T + G\Xi G^T - P_{FK}C^T\Theta^{-1}CP_{FK} = 0, t \leq T \quad (2.116)$$

O Filtro de Kalmam é tal que

$$Re[\lambda_i(A - K_{fk}C)] < 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.117)$$

A estimativa gerada pelo filtro é ótima no sentido de que a variância do erro de estimação é mínima.

$$\min \sum_{i=1}^n E [x_i(t) - \hat{x}(t)]^2 \quad (2.118)$$

### 2.6.2 O REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO(LQR)

Esta seção tem por objetivo fazer uma breve revisão e mostrar a resolução do problema de Alocação de auto-estrutura para controle multivariável, especificamente no Projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR).

O controle Linear Quadrático (LQ) é uma técnica de controle moderno que surgiu aproximadamente em 1960. Dentro desta técnica existem alguns casos especiais como: LQR (Linear Quadratic Regulator), LQG (Linear Quadratic Gaussian) e LQG/LTR (Loop Transfer Recovery) que é o LQG com recuperação da malha de transferência. Segundo (LEWIS; VRABIE; SYRMOS, 2012) o problema LQR é formulado como uma estrutura de otimização com objetivo de determinar uma lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$ . A filosofia do projeto é estabelecer um compromisso entre as energias do vetor de estado  $x(t)$  e do vetor de controle  $u(t)$ . Considera uma planta representada matematicamente por:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.119)$$

$$y = Cx(t)$$

A determinação da lei  $u(t)$  que minimiza a função de custo quadrática também conhecida como índice de desempenho quadrático a ser minimizada, é representada por:

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} [x^T Q(t)x(t) + u^T R(t)u(t)]dt \quad (2.120)$$

Onde a lei de controle estabelecida tem como parâmetros as matrizes de ponderação simétricas  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$  semi-definidas ( $Q(t) \geq 0$ ) e definidas positivas ( $R(t) > 0$ ),

respectivamente. Supondo que o sistema seja estabilizável, a lei de controle que estabiliza o sistema e minimiza o critério é:

$$u(t) = -Kx(t). \quad (2.121)$$

Sendo  $K$  uma matriz  $r \times n$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_1 & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_2 & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ k_{r1} & k_{r1} & \dots & k_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.122)$$

Assim, o projeto de controle ótimo se reduz à determinação dos elementos da matriz do ganho do controlador  $K$ , dada por:

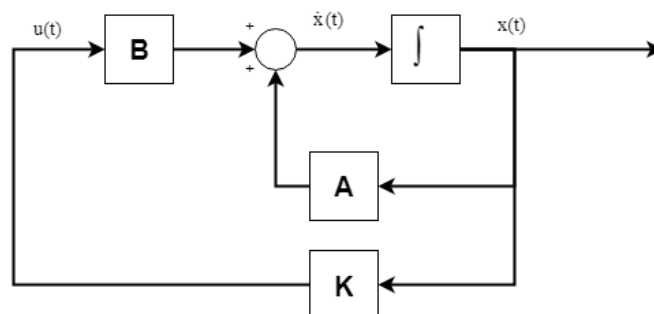
$$K = R^{-1}B^T P_{LQR} \quad (2.123)$$

Sendo  $P$  uma matriz definida positiva que é obtida resolvendo-se a equação de Ricatti a seguir

$$0 = A^T P_{LQR} + P_{LQR} A - P_{LQR} B R^{-1} B^T P_{LQR} + Q, t \leq T \quad (2.124)$$

Dessa forma, a solução do problema LQR pode ser encontrado de acordo com a equação 2.123. A seguir, a Figura 11 mostra o diagrama de blocos da configuração ótima de malha fechada com realimentação de estado.

Figura 11 – Sistema de controle ótimo.



Fonte - Adaptado de Pinto (2012)

### 2.6.3 CONTROLADOR LINEAR QUADRÁTICO GAUSSIANO (LQG)

A adição de um observador ao projeto LQR para estimação do estado através da saída medida é um esquema prático e comum nos sistemas de controle. Tal processo é denominado de realimentação de saída. O observador projetado pode ser determinístico

(observador clássico ou de Luenberger) ou estocástico (Filtro de Kalman). Se o observador projetado considera um ruído gaussiano, o controle é chamado de Linear Quadrático Gaussiano (LQG). É importante frisar que com a adição do Filtro de Kalman as propriedades de robustez do LQR não são garantidas, podendo haver uma degradação das mesmas (DOYLE; STEIN, 1979). De acordo com (FILHO et al., 2006), as principais vantagens do uso de projetos de controladores LQG são: ação integral que pode ser introduzida facilmente; sinais de referência estocásticos podem ser incluídos; sistemas multivariáveis não quadrados, com atraso nas diferentes malhas, podem ser controlados. Como citado anteriormente, a principal desvantagem do controle LQG é a perda da robustez devido à inclusão do estimador e o tempo gasto com a estimação. Considerando a planta representada por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) + \xi(t) \\ y &= Cx(t) + \theta(t) \end{aligned} \quad (2.125)$$

Na qual  $\xi(t)$  representa perturbações externas ao processo (ruído do processo) e  $\theta(t)$  (ruído de medida), sendo sinais não correlacionados, de mediada zero, com matrizes de densidade de potência espectral  $\Xi$  e  $\Theta$  constantes, ou seja  $\xi(t)$  e  $\theta(t)$  são ruídos branco com covariâncias:

$$\begin{aligned} E[\xi(t)\xi(t)'] &= \Xi\delta(t - \tau). \\ E[\theta(t)\theta(t)'] &= \Theta\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.126)$$

e

$$E[\xi(t)\xi(t)'] = 0 \quad , \quad E[\theta(t)\theta(t)'] = 0. \quad (2.127)$$

sendo  $E$  o valor esperado) e  $\delta(t - \tau)$  a função delta de Dirac. O problema do controle LQG caracteriza-se em encontrar o sinal de controle ótimo  $u(t)$  que satisfaça a equação:

$$J = E \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)dt) \right] \quad (2.128)$$

Sendo  $Q$  e  $R$  as matrizes de ponderação

$$Q = Q^T \geq 0 \quad e \quad R = R^T > 0. \quad (2.129)$$

Conhecida como Teorema da Separação ou Princípio da Equivalência Exata, a solução do problema LQG é dividida em duas partes:

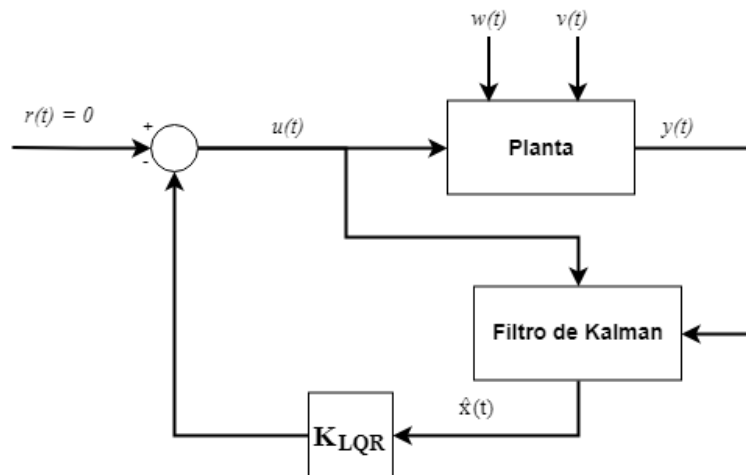
1. Solução do problema LQR: Encontrar a solução para o problema do Regulador Linear Quadrático que pode ser dada em termos da lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$ , sendo  $K$  a matriz de realimentação de estado que não depende de  $\Xi$  e  $\Theta$ .
2. Estimação ótima de  $x(t)$ : Obtida via Filtro de Kalman e independente das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ .

Dessa forma, substituindo-se o vetor de estado  $x(t)$  pela estimativa ótima dos estados  $\hat{x}(t)$  chega-se à solução do problema LQG dada por:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \quad (2.130)$$

Portanto, a solução do problema LQG pode ser resolvido de duas formas diferentes e independentes, como ilustrado na Figura 12.

Figura 12 – Estrutura do controlador LQG.



Fonte - Adaptado de Pinto (2012)

### Propriedades do LQG

Uma breve abordagem das propriedades de estabilidade e robustez do controlador LQR e do Filtro de Kalman serão analisadas separadamente e em seguida o sistema completo (LQR + Filtro). Inicialmente para análise do LQR, substitui-se a equação 2.121 na equação 2.119 para obter-se a equação do sistema de malha fechada, dada por:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.131)$$

Segundo Maciejowski (1989), os autovalores de  $(A - BK)$  estão no SPE, o que caracteriza o sistema LQR como assintoticamente estável. Combinando as equações 2.113, 2.130 e 2.131, obtém-se o sistema que descreve a dinâmica por realimentação de estados estimados via FK como apresentado na Figura 12 e representado na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ K_{fk}C & A - K_{fk}C - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

Assim, ao combinar a equação 2.132 e o erro de estimação definido em 2.114 obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_{fk}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \xi(t) - K_{fk}\theta(t) \end{bmatrix} \quad (2.133)$$



Sendo a equação característica dada por:

$$|sI - (A - BK)| |sI - (A - K_{fk}C)| = 0 \quad (2.134)$$

Os autovalores da equação 2.134 são dados de maneira desacoplada pelo sistema com realimentação de estados através do LQR e do Filtro de Kalman. Desta forma, a estabilidade consiste em garantir que a parte real de todas as raízes da equação característica esteja no semiplano esquerdo, ou seja:

$$Re[\lambda_i(A - BK)] < 0 \quad e \quad Re[\lambda_i(A - k_{fk}C)] < 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.135)$$

A combinação do Regulador Linear Quadrático e o Filtro de Kalman é utilizado pra projetar um regulador dinâmico chamado LQG. Sabe-se que LQR e o Filtro de Kalman possuem excelentes propriedades de robustez, ou seja, possui margem ganho infinita e margem de fase de 60 graus, quando analisados isoladamente como mostrado por (LEWIS; SYRMOS, 1995) e (FILHO et al., 2006). Como o LQR e o Filtro de Kalman exibem ótimas propriedades de robustez, era esperado que o controlador Linear Quadrático Gaussiano resultante da combinação entre eles também apresentasse ótimas propriedades. Contudo, a adição do FK pode resultar em uma perda das propriedades do LQR. Dessa forma, no projeto LQG tais propriedades não são garantidas (DOYLE; STEIN, 1979).

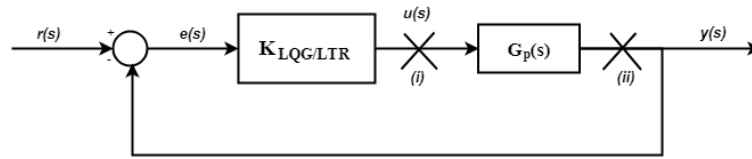
#### 2.6.4 CONTROLE ROBUSTO LQG/LTR

A combinação do Regulador Linear Quadrático e o Filtro de Kalman é utilizado pra projetar um regulador dinâmico chamado LQG. Sabe-se que as propriedades de robustez do LQR são ótimas, ou seja, possui margem ganho infinita e margem de fase de 60 graus (LEWIS; SYRMOS, 1995). Como o LQR e o Filtro de Kalman exibem ótimas propriedades de robustez, era esperado que o controlador Linear Quadrático Gaussiano resultante da combinação entre eles também apresentasse ótimas propriedades. Contudo, a inclusão do estimador pode resultar em uma perda das propriedades de robustez. Então, com o objetivo de recuperar estas propriedades, é utilizado a metodologia de Projeto LTR (*Loop Transfer Recovery*). Tal método a partir da manipulação de parâmetros possibilita para o sistema LQG, que as características do LQR ou do Filtro de Kalman sejam recuperadas na saída ou na entrada da planta do sistema (DOYLE; STEIN, 1979).

Existem dois tipos de procedimentos (duais) de recuperação, um deles se refere à matriz de funções de transferência de malha  $G_p(s)K_{LQG/LTR}(s)$  que é correspondente à abertura da malha na saída da planta (ponto (ii)), o outro é aquele associado à matriz de funções de transferência de malha  $K_{LQG/LTR}(s)G_p(s)$  correspondente à abertura da planta na entrada (ponto (i)) como ilustrado na Figura 13.

Neste trabalho foi adotado o procedimento do LTR na saída da planta. Como demonstrado por (MACIEJOWSKI, 1989) este procedimento consiste em dois passos:

Figura 13 – Diagrama de Blocos do Sistema para o Estudo do Procedimento de Recuperação.



Fonte - Adaptado de Pinto (2012)

1. Projetar o FK manipulando as matrizes de covariância  $\Xi$  e  $\Theta$  de modo a obter a razão de retorno desejada na saída da planta  $-C(sI - A)^{-1}K_{fk}$  (Malha objetivo) de acordo com os requisitos de sensibilidade e robustez.
2. Ajustar o LQR, com  $R = I$  e  $Q = \rho I$  aumentando-se “ $\rho$ ” de modo que a razão de retorno na saída da planta compensada se aproxime suficientemente da razão de retorno desejada. Alternativamente pode-se fazer  $Q = I$  e  $R = vI$  sendo o ajuste conseguido pela diminuição de “ $v$ ”.

Logo, se  $\rho \rightarrow \infty$  os valores singulares  $G_p(s)k_{LQG/LTR}(s)$  tendem a se aproximar dos de  $-C(sI - A)^{-1}K_{fk}$  das baixas para as altas frequências. Para a matriz de função de transferência de malha dada por:

$$G_{(i)}(s) = G_p(s)K_{LQG/LTR}(s) \tag{2.136}$$

E a malha objetivo dada por:

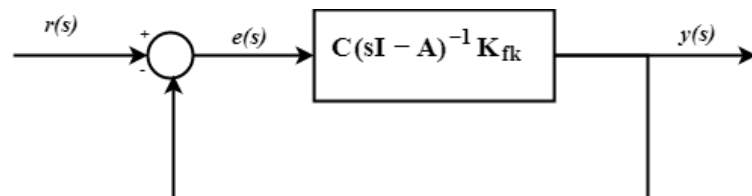
$$G_{(i)}(s) = -C(sI - A)^{-1}K_{fk} \tag{2.137}$$

Assim, o resultado fundamental é:

$$G_{(i)}(s) \rightarrow G_{(ii)}(s). \tag{2.138}$$

O sistema nominal em malha se aproxima ponto a ponto do que está representado na Figura 14 quando  $\rho \rightarrow \infty$ .

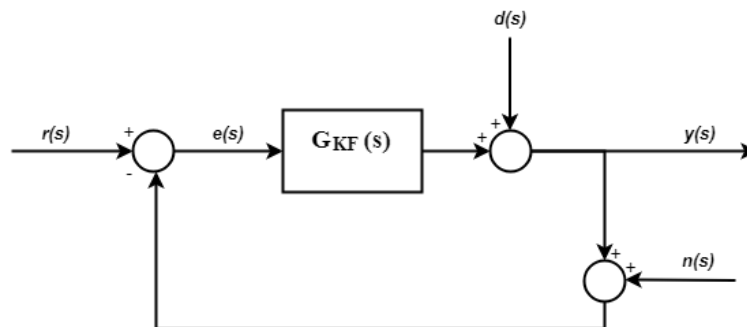
Figura 14 – Sistema Limite para  $\rho \rightarrow \infty$



Fonte - Adaptado de Pinto (2012)

Dessa maneira, a problemática do projeto resume-se em escolher a matriz  $K_{fk}$  que o sistema da Figura 14 possua características ótimas de estabilidade de desempenho. Em síntese o projeto consiste nos seguintes passos: Dada a planta  $G_p(s)$ , encontrar a matriz  $K_{fk}$  de ganhos do Filtro de Kalman de maneira que a matriz da função de transferência  $G_{KF}(s) = C(sI - A)^{-1}K_{fk}$ , seja tal que a malha representada na Figura 15 satisfaça a barreira de robustez. O procedimento LTR é aplicado na matriz  $G_{KF}(s)$  e obtém-se, para  $\rho \rightarrow \infty$  suficientemente grande como demonstrado em (MACIEJOWSKI, 1989) uma outra alternativa seria fazer com quem  $v \rightarrow 0^+$  suficientemente pequeno. Dessa maneira, à medida que  $\rho$  aumenta ou  $v$  diminui as curvas características de resposta em frequência de  $G_p(s)K_{LQG/LTR}(s)$  tende a se aproxima de  $C(sI - A)^{-1}K_{fk}$  das baixas frequências para altas frequências. Com isso, a malha representada na Figura 15 é denominada de malha objetivo (*target loop*). De acordo com (XUE; CHEN; ATHERTON, 2009) o ponto chave para a solução do problema do controlador LQG/LTR é seleção de um valor alto para  $\rho$ . Entretanto, na prática  $\rho$  não pode ser um valor muito alto, uma vez que isso introduziria erros numéricos de truncamento que podem afetar na robustez de todo o sistema.

Figura 15 – Diagrama de Blocos da Malha Objetivo.



Fonte - Adaptado de Pinto (2012)

## 2.7 ALGORÍTIMOS GENÉTICOS

De modo geral, um AG é um algoritmo baseado em comportamento de populações considerado como um método de otimização estocástica global, motivado pela biologia e baseado nos mecanismos de genética e seleção natural descritos por Charles Darwin (WORDEN, STASZEWSKI e HENSMAN, 2010), (SHENG, 2004). De acordo Darwin, o processo de reprodução genética na biologia busca garantir a continuidade hereditária de características convenientes à sobrevivência e adaptabilidade de futuras gerações de uma determinada espécie, levando as características desfavoráveis da mesma a uma gradual extinção. O AG funciona de forma muito similar, onde garante a continuidade dos conjuntos de soluções mais convenientes à convergência do problema proposto, levando também as soluções menos favoráveis a um progressivo desaparecimento ao longo de sua execução.

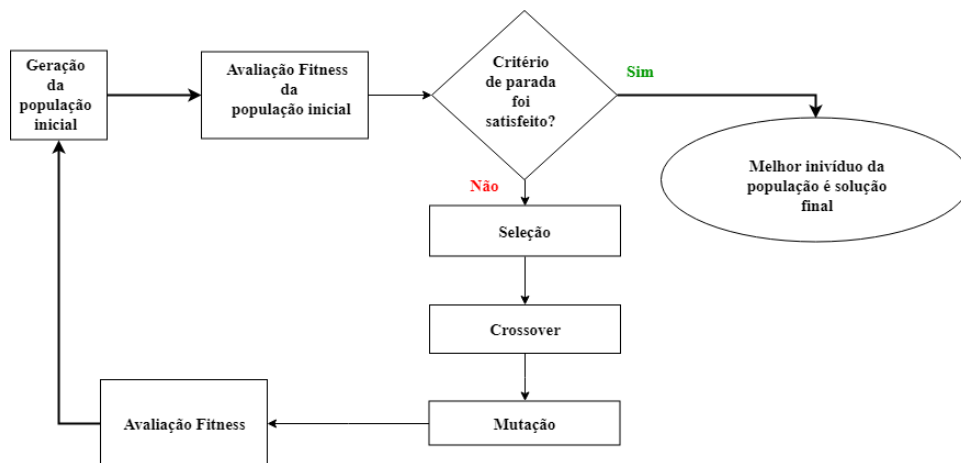
De maneira simplificada, o processo computacional de um AG recebe como entrada um conjunto de valores propostos como solução inicial de um problema e, através de modificações impostas pelos operadores, resulta em um conjunto mais adequado à solução do que os valores previamente escolhidos. O tipo de cromossomo empregado depende em geral, do tipo de problema a ser resolvido, podendo ser representado por bits, números inteiros ou reais, estruturas customizadas, entre outros.

Assim como no processo evolutivo de Darwin, para que ocorra a evolução das espécies no AG é necessário uma diversidade populacional, é necessário também que em cada conjunto de valores obtido a cada iteração, haja variabilidade suficiente entre os indivíduos de maneira que o domínio do problema seja melhor explorado. Desse modo garante-se que os operadores genéticos possam desempenhar sua função como esperado em busca da solução do problema e que a convergência prematura do algoritmo seja evitada.

### Fluxo de um Algoritmo Genético

Segundo Jain e Martin (1998), um AG tem basicamente a estrutura conforme ilustrado na Figura 16

Figura 16 – Fluxograma do Algoritmo Genético.



Fonte - Autor

O fluxo segue as seguintes instruções: para uma população inicial escolhida ou aleatoriamente gerada, enquanto um critério de parada ou a convergência não forem alcançados, aplicam-se os operadores genéticos de seleção, cruzamento e mutação. O resultado será, a cada geração, uma população qualitativamente melhor que a anterior. A seguir, no Capítulo 3 cada elemento do AG será melhor descrito para que o processo possa ser entendido em maior nível de detalhamento.

## 2.8 REDES NEURAIS ARTIFICIAIS

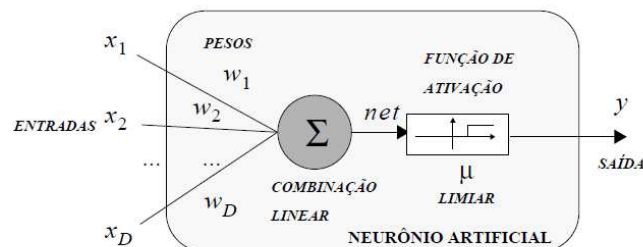
Uma rede neural artificial (RNA) tem duas facetas elementares: a arquitetura e o algoritmo de aprendizagem. Recentes avanços em neurofisiologia têm desvendado vários mecanismos sobre o fluxo e o processamento de informações que ocorrem no cérebro humano. Alguns destes mecanismos foram modelados matematicamente permitindo a elaboração de algoritmos computacionais que simulam, ainda que de modo simplificado, a mais básica das estruturas cerebrais: o neurônio. A capacidade de implementar computacionalmente versões simplificadas de neurônios biológicos deu origem a uma subespecialidade da inteligência artificial, conhecida como redes neurais.

### Modelo de Neurônio Artificial

Um neurônio é uma unidade de processamento de informações que é fundamental para a operação da rede neural artificial. Os neurônios artificiais são não lineares e realizam funções muito simples, bem como coletar os sinais existentes em suas entradas, ordená-los de acordo com suas funções de entrada e produzir sua saída de acordo a função ativação inerente. Na Figura 18 é mostrado o modelo de um neurônio artificial de (MCCULLOCH; PITTS, 1943). Este modelo tenta simular as realidades biológicas que ocorrem dentro de uma célula do sistema nervoso. Informação fornecida por outros neurônios entra em  $D$  entradas  $x_j$  (=sinapses) no neurônio processador. O processamento consiste em uma combinação linear das entradas  $net = w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_Dx_D = \sum_{j=1}^D w_jx_j = \underline{w}^T \underline{x}$ . Sendo que para entrada um peso  $w_j$ , refletindo na importância da entrada  $x_j$ . A resultante dessa combinação é o valor  $net$ . Em termos matemáticos o sinal de saída de um neurônio é dado por:

$$y = \Theta\left(\sum_{j=1}^D w_jx_j - \mu\right) \quad (2.139)$$

Figura 17 – Modelo de um neurônio de McCulloch e Pitts.



Fonte - Adaptado de McCulloch e Pitts (1943)

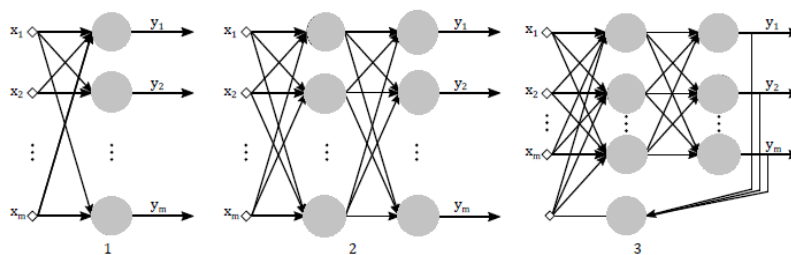
para  $\Theta$  a função de ativação de Heaveside, também conhecida como função escada e  $\mu$  o limiar. A comparação do  $net$  com o limiar (bias) é realizada pela função de Heaveside.

## Arquitetura de Redes Neurais

O processo de conexão entre os neurônios artificiais leva à geração de sinapse e à construção de redes neurais artificiais. Existem basicamente três camadas em uma rede neural artificial: uma *camada de entradas*, um *camada intermediária*, e uma *camada de saída*. A forma com que os neurônios são interligados está diretamente relacionado com o algoritmo utilizado no seu treinamento (CASTRO; CASTRO, 2001). Assim, existem basicamente três principais tipos de arquitetura em RNAs como ilustrado na Figura 18

1. *Redes Feedforward de Camada Simples*: Consiste em uma camada de entrada e uma camada de saída. Nesta arquitetura o fluxo de dados segue sempre em direção à saída.
2. *Rede Feedforward de Camadas Múltiplas*: As redes de múltiplas possuem uma ou mais camadas intermediárias ou escondidas. A saída de cada camada intermediária é utilizada como entrada para a próxima camada. Nesta arquitetura o fluxo de dados também segue sempre em direção à camada de saída.
3. *Redes Recorrentes* O terceiro principal tipo de arquitetura de RNAs são as denominadas redes recorrentes, pois elas possuem, pelo menos, um laço realimentando a saída de neurônios para outros neurônios da rede. Esta arquitetura é comumente empregada para problemas variantes no tempo.

Figura 18 – Arquiteturas de redes neurais.



Fonte - Adaptado de McCulloch e Pitts (1943)

### 3 METODOLOGIA

Com o objetivo de projetar o controlador de atitude do VLS utilizando técnicas de Controle Robusto e Inteligência Artificial, a dissertação seguiu os seguintes passos:

1. Redução de ordem do modelo linear de movimento no plano de arfagem do Veículo Lançador.
2. Verificação da validade da técnica de redução de modelo adotada a partir da análise no domínio da frequência do modelo linear e reduzido.
3. Execução do Algoritmo Genético para obtenção das matrizes de ponderação ( $Q$  e  $R$ ) e covariância ( $\Xi$  e  $\Theta$ )
4. Execução da Rede Neural Artificial Recorrente para aquisição dos ganhos  $K$ .
5. Simulação e análise no domínio da frequência dos valores singulares das soluções produzidas pelo AG.
6. Análise da recuperação das propriedades de robustez do sistema.

Para a implementação da metodologia, foi utilizado o software MATLAB, dado ao vasto número de ferramentas existentes para simulações de Sistemas de Controle e sua versabilidade para cálculos numéricos. As próximas seções abordam a estrutura de controle adotada para o projeto, as características do AG, como o problema de controle foi encapsulado no algoritmo e a arquitetura da RNAR.

#### 3.1 ALGORÍTIMO GENÉTICO PARA BUSCA DAS MATRIZES DE PONDERAÇÃO $Q$ E $R$

Nesta seção, um modelo de Algoritmo Genético utilizado para a determinação das matrizes de ponderação no projeto LQR de forma a determinar um controlador que leve o sistema dinâmico a um ótimo desempenho e estabilidade. De forma sucinta, os processos a serem executados para desenvolvimento do AG são: modelagem das matrizes  $Q$  e  $R$ , geração da população inicial de cromossomos, avaliação da função *fitness*, reprodução, crossover, mutação, nova geração e o acúmulo dos melhores resultados.

##### Modelagem das Matrizes $Q$ e $R$

Aqui será apresentado um modelo genético artificial para as matrizes  $Q$  e  $R$ , ou seja, estabelecer à um cromossomo, de forma a representar uma potencial solução para

o problema, de forma a reduzir a carga computacional e representando as matrizes de ponderação. Primeiramente, considera-se a ordem das matrizes do sistema dinâmico dadas por  $A_{n \times n}$ ,  $B_{n \times m}$ ,  $C_{n \times p}$ . As dimensões das matrizes apresentadas e as especificações do Projeto  $LQR$  nos levam a montar uma matriz  $Q_{n \times n}$  e  $R_{m \times m}$ , sendo simétricas, positiva e semi-positiva definidas, respectivamente. Assim, a representação matricial de tais matrizes será:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & \dots & q_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & q_{n4} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{mm} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Devido ao fato das matrizes acima serem simétricas, é necessário guardar apenas os elementos superiores das mesmas. Dessa forma, o cromossomo que irá representar as matrizes  $Q$  e  $R$  será:

$$QR_k = \bigcup_{i,j=1}^n q_{i,j} \wedge \bigcup_{i,l=1}^m q_{i,l} \quad (3.3)$$

$$k = 1, \dots, crom \quad (3.4)$$

Onde:

- n - Número de linhas ou colunas da matriz A;
- m - Número de colunas da matriz B;
- $q_{i,j}$  - Gene da matriz Q;
- crom - Número de cromossomos;



## Geração da População Inicial

A geração da população inicial de cromossomo é um primeiro passo para a execução de um AG. Deste modo, é necessário considerar que o cromossomo  $QR_k$ , é um elemento constituído de  $g$  genes, que por sua vez, representa uma matriz  $Q_{n \times n}$  e uma outra matriz  $R_{m \times m}$ , sendo ambas simétricas. A quantidade de  $g$  de genes de uma solução é dada por:

$$g = \frac{(n(n+1) + m(m+1))}{2} \quad (3.5)$$

Para esse AG é produzido uma população com uma quantidade de cromossomos  $QR_k$ , assim formando uma população inicial que dará origem, através das operações genéticas, às possíveis soluções para o problema, onde tal população será representada matematicamente na forma:

$$QR_{n_{crom} \times g} = [QR_1; QR_2; QR_3; \dots; QR_{n_{crom}}] \quad (3.6)$$

sendo  $n_{crom} \times g$  indica a quantidade de cromossomos da população inicial e de genes em cada cromossomo respectivamente. Cada gene é gerado de forma aleatória, porém seguindo uma criteriosa restrição: as matrizes  $Q$  e  $R$  devem ser positiva e semi-positiva respectivamente.

## Modelo da Função Fitness

A função de avaliação ou fitness, relacionada às restrições e objetivos do projeto, foi construída de modo a avaliar a qualidade de cada indivíduo e é dada por

$$\begin{aligned} K_z &= LQR_z(A, B, Q_z, R_z) \\ A_z &= (A - BK_z) \\ S_z &= \frac{\|V_z\|^2 \|W_z\|^2}{\langle V_z, W_z \rangle} \\ F_{S_z} &= \sum S_z \\ R_{S_z} &= rank(S_z, F_{S_z}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde  $z = 1, \dots, n_{indiv}$ ,  $A_z$  é a matriz do sistema em malha fechada para o ganho de realimentação  $K_z$ .  $S_z$  é a sensibilidade,  $V_z$  e  $W_z$  são autovetores de  $A_z$ .  $F_{S_z}$  é o índice de desempenho e  $R_{S_z}$  é a pontuação do indivíduo. As especificações de desempenho no domínio do tempo (tempo de subida, tempo de assentamento e máximo sobressinal) foram incorporadas na função de avaliação de modo a assegurar não somente a alocação dos autovalores como também boa resposta temporal.

## Reprodução (Seleção Roleta)

Um fundamental elemento dos Algoritmos Genéticos é a reprodução, uma vez que ela é a responsável pela a seleção probabilística dos indivíduos que irão continuar no processo de desenvolvimento. De acordo com a função Fitness, os indivíduos que obtiverem maior pontuação serão escolhidos, em outras palavras, aqueles que possuem maior pontuação terão uma maior probabilidade de sobreviver.

O objeto de seleção utilizado é a roleta. A montagem da mesma é simples, uma vez que soma-se parcialmente a Fitness de cada elemento  $QR_k$  formando intervalos, como descrito na equação

$$Fitness(i) = \sum_{j=1}^{crom} Fitness(j) \quad i = 1, \dots, crom \quad (3.8)$$

Posteriormente, um numero aleatório é gerado e o somatório das Fitness individuais, caso o número gerado esteja dentro do intervalo, o elemento escolhido de  $QR_{crom \times g}$  será o  $QR_k$ .

## Crossover

No AG o crossover é responsável pelo cruzamento entre dois indivíduos. É nesse momento que  $QR_k$  da matriz  $QR_{crom \times g}$  trocam informações genéticas entre si. Dada uma população  $G$ , ao considerar que dois indivíduos  $l1$  e  $l2$ , de forma que  $l1 \neq l2$ , obtém-se o modelo para esta operação. Assim:

$$\begin{aligned} QR_{G+1,l1} &= \alpha(QR_{G,l1}) + (1 - \alpha)(QR_{G,l2}) \\ QR_{G+1,l2} &= \alpha(QR_{G,l2}) + (1 - \alpha)(QR_{G,l1}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Onde o  $G$  representa a  $G$ -ésima população e o índice  $G + 1$ , a próxima geração de uma dada população.  $l1$  representa a  $l1$ -ésimo indivíduo e  $l2$  indivíduo da população  $G$ , respectivamente, que a participam do acasalamento, em que  $\alpha$  é um número gerado de forma aleatória entre 0 e 1.

## Mutação

O operador de mutação ajuda na diversificação populacional de uma forma bem diferente do cruzamento. Ambos operadores atuam na quebra de padrões genéticos, mas a mutação não consegue criar padrões novos. Neste AG, cada elemento  $QR_k$  da matriz  $QR_{crom \times g}$  tem probabilidade de 5% de chance de ser mutado. Quando um elemento é escolhido, ele é simplesmente substituído por um outro elemento gerado de forma aleatória

### 3.2 ALGORÍTIMO GENÉTICO PARA BUSCA DAS MATRIZES DE COVARIÂNCIA $\Xi$ E $\Theta$

De acordo com (BLACKMORE; BITMEAD, 1995) o Filtro de Kalman e o LQR são duais, o que significa que é possível obter relações análogas nos dois casos simplesmente fazendo-se a correspondência entre os parâmetros indicados na Tabela 1

Tabela 1 – Parâmetros duais do LQR e do FK.

LQR	FK
A	$A^T$
B	$C^T$
Q	$\Gamma\Xi\Gamma^T$
R	$\Theta$
$P_c$	$P_f$
$K_c$	$K_f$

Assim, pelo princípio da dualidade as matrizes de covariância  $\Xi$  e  $\Theta$  foram encontradas a partir das matrizes Q e R obtidas pelo AG descrito na Seção 3.1

### 3.3 REDE NEURAL RECORRENTE

De posse das matrizes de ponderação (Q e R) e covariância ( $\Xi$  e  $\Theta$ ), deve-se solucionar a EAR de forma a obter os ganhos do controlador ( $P_{LQR}$  e  $P_{FK}$ ). Para obter um  $P_{LQR}$  e  $P_{FK}$  simétrico e positivo definido, uma restrição adicional  $LL^T = P_{(LQR,FK)}$  deve ser adicionada a EAR. Uma vez que, qualquer matriz definida real, simétrica e positiva tem um fator Cholesky ( $L$ ). Onde  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz triangular inferior com uma diagonal positiva Wang e Wu (1998). Para encontrar as matrizes  $P_{(LQR,FK)}$  e  $L$  que

$$\min_{P,L} E(PSP - A^T P - PA - Q + LL^T - P) \quad (3.10)$$

sendo que  $E$  é uma função de energia convexa limitada inferior.

As equações dinâmicas da rede neural para resolver as equações algébricas de Riccati podem ser descritas da seguinte maneira: Para  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;

$$\begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= -\eta_v [P(t)SU(t) + U(t)SP(t) - AU(t) \\ &\quad - U(t)A^T - Y(t)] \\ \frac{dL(t)}{dt} &= -\eta_z Y(t)L(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

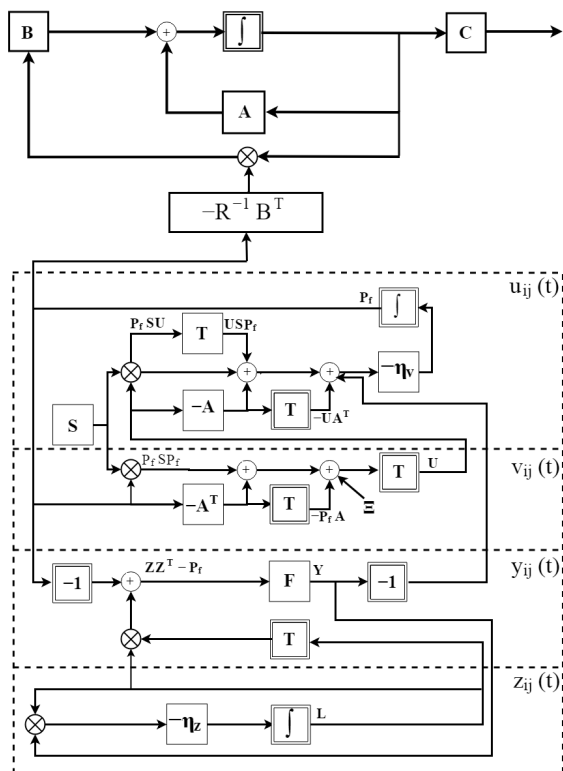
$$U(t) = F[P(t)SP(t) - A^T P(t) - P(t)A + Q]$$

$$Y(t) = F[L(t)L(t)^T - P(t)]$$

em que  $U$ ,  $P$  e  $Y$  são matrizes quadradas,  $n_v$  e  $n_z$  são parâmetros de projeto e  $L$  é uma matriz triangular inferior dos estados de ativação,  $P(0) = P(0)^T, Y(0) \neq 0$ .

A Equação 3.11 representa a dinâmica da RNAR, cuja estrutura está ilustrada na Figura ?? . A RNAR apresenta quatro camadas conectadas bidirecionalmente: uma camada de saída representada por  $P(t)$ , uma camada de entrada representada por  $U(t)$  e duas camadas escondidas representadas por  $L(t)$  e  $Y(t)$ . As camadas  $P(t)$ ,  $U(t)$  e  $Y(t)$  consistem de matrizes quadradas, enquanto  $L(t)$  é triangular. Para verificar a validade da solução da Equação Algébrica de Ricatti fornecida pela RNAR realiza-se análises de estabilidade e solvabilidade.

A figura ?? ilustra a arquitetura da RNAR para resolver a equação algébrica de Riccati que consiste em quatro camadas conectadas bidirecionalmente: uma camada de saída representada por  $v_{ij}(t)$ , uma de entrada representada por  $u_{ij}(t)$ , e duas camadas ocultas  $y_{ij}(t)$  e  $z_{ij}(t)$ .



Arquitetura da Rede Neural.

Em seguida é feita uma análise de estabilidade e solvabilidade para validar a solução da Equação Algébrica de Ricatti fornecida pela RNAR.

1. **Análise de estabilidade:** Se toda função de ativação for contínua, pelo menos por partes diferenciável, monótona não decrescente e  $f_{ij}(\zeta) = 0$  se  $\zeta = 0$  por

$(i, j = 1, 2, \dots, n)$  então a RNN é assintoticamente estável  $\forall V(0), Z(0), \exists \bar{Z}, \bar{V}$  de tal modo que  $\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \bar{Z}$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \bar{V}$ .

2. **Análise de solvabilidade:** Suponha que toda função de ativação seja contínua, pelo menos por partes diferenciável, monótona e não decrescente  $f_{ij}(\zeta) = 0$  se  $\zeta = 0$ . A matriz de estado estacionário da rede neural recorrente é sempre a solução definida simétrica e positiva para a equação Riccati da matriz de qualquer estado inicial simétrico  $V(0)$  e quaisquer estados iniciais diferentes de zero  $Z(0)$  se e somente se  $rank(\bar{V}S - A) = n$  e todos os elementos diagonais  $\bar{Z}$  são diferentes de zero, (ou seja,  $\forall i, \bar{z}_{ij} \neq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

### 3.3.1 CONTROLE LQG/LTR

Apesar da robustez do LQR e da robustez do Filtro de Kalman, que se dá em função da dualidade, o controle LQG que é a união do LQR com o FK não é robusto. Assim para recuperar a robustez do projeto LQR, utiliza-se o procedimento de recuperação através da metodologia LTR. Esta metodologia compõe-se de dois passos: no primeiro, define-se a chamada Malha Objetivo (*Target Feedback Loop*) e, no segundo, através de um procedimento assintótico, recuperam-se as características de resposta em frequência dessa malha ajustando um determinado parâmetro " $\rho$ " (DOYLE; STEIN, 1981), (CRUZ, 1996). Neste trabalho será utilizado a recuperação do ganho de malha de realimentação na saída, onde faz-se primeiro o projeto do filtro de Kalman (dual do regulador LQR) de tal forma que os ganhos principais de sua função de transferência apresentem características de resposta em frequência ideais. Num segundo passo projeta-se o regulador linear quadrático (LQR) de uma forma especial, de tal forma que a função de transferência (TFL) em malha aberta do sistema controlado recupere exatamente, ou pelo menos aproximadamente, as mesmas características de resposta em frequência do *TargetFeedback Loop* (TFL) que foi projetado no primeiro passo do método através do filtro de Kalman.

## 4 PROJETO LQG/LTR DO CONTROLADOR DE ATITUDE DO VLS

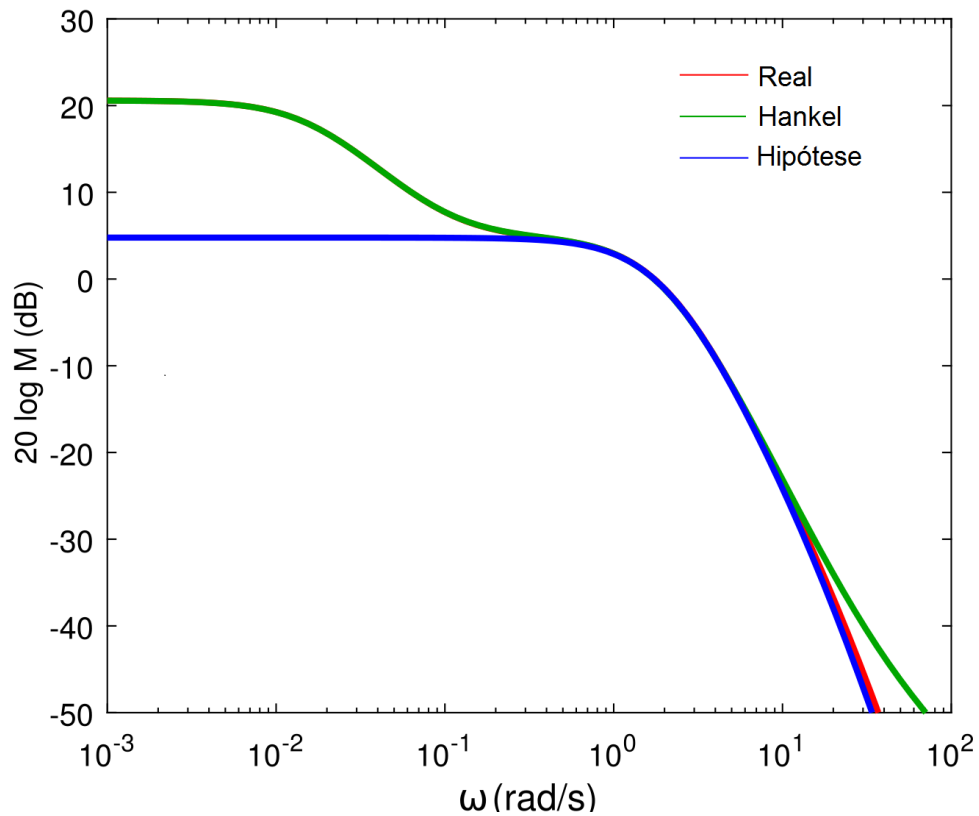
Os testes de avaliação dos modelos de busca genética e da eficiência da lei de controle são realizadas no modelo do Veículo Lançador de Satélite utilizando um modelo de ordem reduzida da dinâmica do lançador. A avaliação de performance do AG é realizada em termos da função de avaliação (*fitness*). Por outro lado, a convergência da RNAR é avaliada via experimentos computacionais da norma do infinito e função energia da solução da EAR. A recuperação das propriedades de robustez do sistema são avaliadas no domínio da frequência a partir da variação de alguns parâmetros.

### 4.1 MODELO DE ORDEM REDUZIDA

O sistema cheio descrito na Equação (2.60) foi reduzida via Norma Hankel e resultou no modelo descrito na equação (4.1).

$$\begin{aligned} \dot{x}_{red} &= \begin{bmatrix} 1.985 & 0.2474 & 0 \\ 0 & 0.0164 & 0 \\ 0 & 0 & -2.021 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.3841 \\ -0.08952 \\ 1.319 \end{bmatrix} u \\ \dot{y}_{red} &= \begin{bmatrix} -4.412 & 1.723 & -1.319 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (4.1)$$

Antes de prosseguir com o projeto do controlador, foi realizada uma análise do domínio da frequência para a comparação do desempenho do modelo de redução adotado. Como mostrado na Figura 20 o modelo reduzido usando a norma Hankel apresentou resultados satisfatórios, rastreando o sistema completo para frequências de até 20 rad/s. Como o sistema foi reduzido da 7ª para a 3ª ordem, são esperadas perdas de dinâmica de altas frequências. Estas observações sugerem inicialmente que a redução da norma de Hankel pode ser usada sem nenhum problema.



Análise no domínio da frequência do modelo de ordem reduzida.

## 4.2 ALGORÍTIMO GENÉTICO

O foco desta subseção é analisar o desempenho do Algoritmo Genético elaborado para a busca das matrizes de ponderação e covariância bem como apresentar os parâmetros utilizados para a inicialização do algoritmo tais como a faixa de autovalores e função de avaliação.

### Parâmetros utilizados na implementação do AG

Esta Subseção apresenta os parâmetros utilizados na implementação do AG, os quais envolvem a dimensão do cromossomo, tamanho da população e sua composição, como mostra a Tabela 2

Tabela 2 – Parâmetros utilizados no algoritmo genético.

<b>Parâmetros</b>	
Dimensão do cromossomo	7
Tamanho da população	120
Probabilidade de mutação	40
Fator de mutação(LQR)	0.1
Fator de mutação (FK)	0.001
<b>Composição da população</b>	
Seleção	20
Roleta	20
Crossover	20
Mutação	40
Novos indivíduos	20

### Seleção da Faixa de autovalores

Para o AG proposto, foi utilizado as restrições de projeto para o LQR e Filtro de Kalman, respectivamente mostrados nas Tabela 3 e 4 que são os limites de autovalores e suas sensibilidades associadas.

Tabela 3 – Faixa de autovalores do projeto para o LQR

Nº	Autovalores	Sensibilidades
$\lambda_1$	$-6 \leq Re \leq 0$ $-1 \leq Im \leq 1$	1.6
$\lambda_2$	$-6 \leq Re \leq 0$ $-1 \leq Im \leq 1$	1.4
$\lambda_3$	$-6 \leq Re \leq 0$ $-1 \leq Im \leq 1$	1.3

Tabela 4 – Faixa de autovalores do projeto para o FK

Nº	Autovalores	Sensibilidades
$\lambda_1$	$-25 \leq Re \leq -20$ $-1 \leq Im \leq 1$	3.2
$\lambda_2$	$-25 \leq Re \leq -20$ $-1 \leq Im \leq 1$	2.8
$\lambda_3$	$-25 \leq Re \leq -20$ $-1 \leq Im \leq 1$	2.6



Na Tabela 5 são apresentados os objetivos que não foram utilizados na seleção das faixas de autovalores, e que serão encapsulados na função de avaliação do algoritmo.

Tabela 5 – Objetivos de controle utilizados na Função de avaliação

Objetivos de controle	
Tempo de assentamento	$5\text{seg.} < t_s < 10\text{seg.}$
Tempo de subida	$0.5\text{seg.} < t_r < 1.5\text{seg.}$
Máximo sobressinal	$\%M_p < 50\%$

A função de avaliação pontua cada indivíduo da população de acordo os valores da Tabela 6. Uma vez que o sistema de malha fechada possui 3 polos, o valor da pontuação máxima que cada indivíduo pode ser pontuado será de  $(1.2 \times 3) + 1.2 + 1.5 + 1.4 = 7.7 + \Sigma_{si}$ .

Tabela 6 – Pontuação do fitness

Pontuação	
Auto-estrutura	1.2
Tempo de assentamento	1.2
Tempo de subida	1.5
Máx. Altrap. Percentual	1.4
Sensibilidades (LQR)	1.2 0.1 1.2 1.5 .14
Sensibilidades (FK)	[32. 2.8 2.6]

## Resultados computacionais do AG-LQR

Neste ponto será mostrado os resultados obtidos do Algoritmo Genético para a geração das matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  do controle baseado nos parâmetros mostrados anteriormente.

Para tais simulações utilizou-se o ambiente computacional *MATLAB* para a implementação da metodologia proposta. As matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  produzidas pelo AG para um total de 10 gerações, das quais foram obtidos três resultados, os quais são mostrados a seguir:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.5930 & 0.0270 & 0.0118 \\ & 0.2315 & 0.1395 \\ & & 0.9687 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

$$R_1 = 0.0510 \quad (4.3)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.7000 & 0.0705 & 0.0035 \\ & 0.2355 & 0.1039 \\ & & 0.9282 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$R_2 = 0.0243 \quad (4.5)$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0.4932 & 0.0764 & 0.0844 \\ & 0.2990 & 0.0765 \\ & & 0.8645 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$R_3 = 0.0187 \quad (4.7)$$

Os autovalores de malha fechada, as sensibilidades dos autovalores e os ganhos dos controladores, os quais foram obtidos utilizando as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  geradas pelo AG para cada solução, são mostrados nas Tabelas 7, 8 e 9

Tabela 7 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 1.

No	Autovalor	Sensibilidade	Ganho		
1	-1.7063	0.8947	-14.4604	- 7.2117	8.8871
2	-3.5904 + 0.8348i	0.7840			
3	-3.5904 - 0.8348i	0.8076			

Tabela 8 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 2.

No	Autovalor	Sensibilidade	Ganho		
1	-1.7833	0.7184	-19.0340	- 9.4795	10.8230
2	-3.3908	0.9451			
3	-5.6489	0.8441			

Tabela 9 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 3.

No	Autovalor	Sensibilidade	Ganho		
1	-1.5453	0.7523	-20.6414	- 10.5874	11.5947
2	-4.0796	0.9144			
3	-5.9698	0.8410			

## Resultados computacionais do AG-FK

Devido a dualidade entre o LQR e o Filtro de Kalman, Subseção 3.2, utiliza-se basicamente a mesma estrutura do algoritmo descrito na Seção 3.1 para o projeto LQR, bem como, as mesmas preocupações, que consiste em determinar um estimador que leve o sistema a um bom desempenho com estabilidade, de acordo com as especificações do projeto.

A seguir, mostra-se as matrizes de covariância  $\Xi$  e  $\Theta$  produzidas pelo AG para um total de 10 gerações, onde foram obtido três resultados, como mostrado a seguir:

$$\Xi_1 = \begin{bmatrix} 0.9548 & 15.3469 & 4.6201 \\ & 143.2140 & 23.8657 \\ & & 255.8941 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\Theta_1 = 0.0011 \quad (4.9)$$

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} 2.4427 & 0.0009 & 2.4040 \\ & 312.7496 & 8.8726 \\ & & 423.0120 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\Theta_2 = 0.0033 \quad (4.11)$$

$$\Xi_3 = \begin{bmatrix} 0.5731 & 11.2997 & 2.7184 \\ & 85.9627 & 0.8756 \\ & & 361.0125 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\Theta_3 = 0.0009 \quad (4.13)$$

Tabela 10 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 1.

No	Autovalor	Sensibilidade	Ganho		
1	-24.2459	0.3947	44.8257	584.5556	- 474.5464
2	-15.2357	0.4012			
3	-5.3441	0.4024			

Tabela 11 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 2.

No	Autovalor	Sensibilidade	Ganho		
1	-24.3421	0.3984	41.3519	479.8184	- 360.4721
2	-11.7805	0.3886			
3	-5.2293	0.4013			

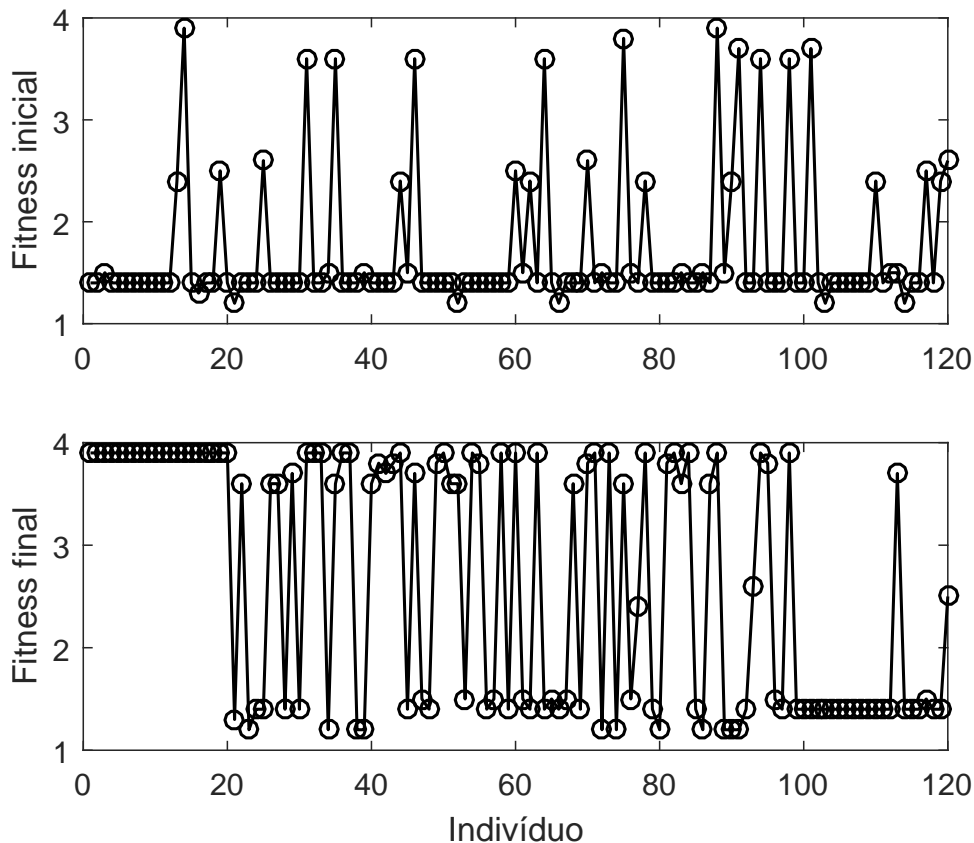
Tabela 12 – Autovalores, sensibilidades e ganho do controlador para solução 3.

No	Autovalor	Sensibilidade	Ganho		
1	-17.0724	0.9485	41.7019	573.4627	- 610.7392
2	-13.9987	0.9184			
3	-10.6308	0.7678			

## Análise da população

O perfil da população inicial e final é definido pelos valores da função de avaliação (fitness) de cada cromossomo, apresentado na Figura 19. Analisando a população inicial, nota-se uma grande presença de indivíduos com fitness aproximadamente 1.5, significando que estes não alcançaram o objetivos função de avaliação proposta de forma satisfatória. Nota-se também, que alguns indivíduos alcançaram nota máxima 4, ou seja, cumpriram muitos dos requisitos da avaliação. A média de fitness da população é de aproximadamente 2 e dada a grande diversidade genética notada na figura (necessária para a não convergência prematura), esta população é satisfatória para iniciar o processo de busca das matrizes. Após rodar o AG, nota-se que grande parte dos elementos finalizaram o processo de busca com fitness máximo (fitness = 4), ou seja, todos os requisitos da função de avaliação foram satisfeitos. Esta análise confirma que o AG produz resultados satisfatórios das matrizes Q e R.

Figura 19 – *Fitness* da população inicial e final.



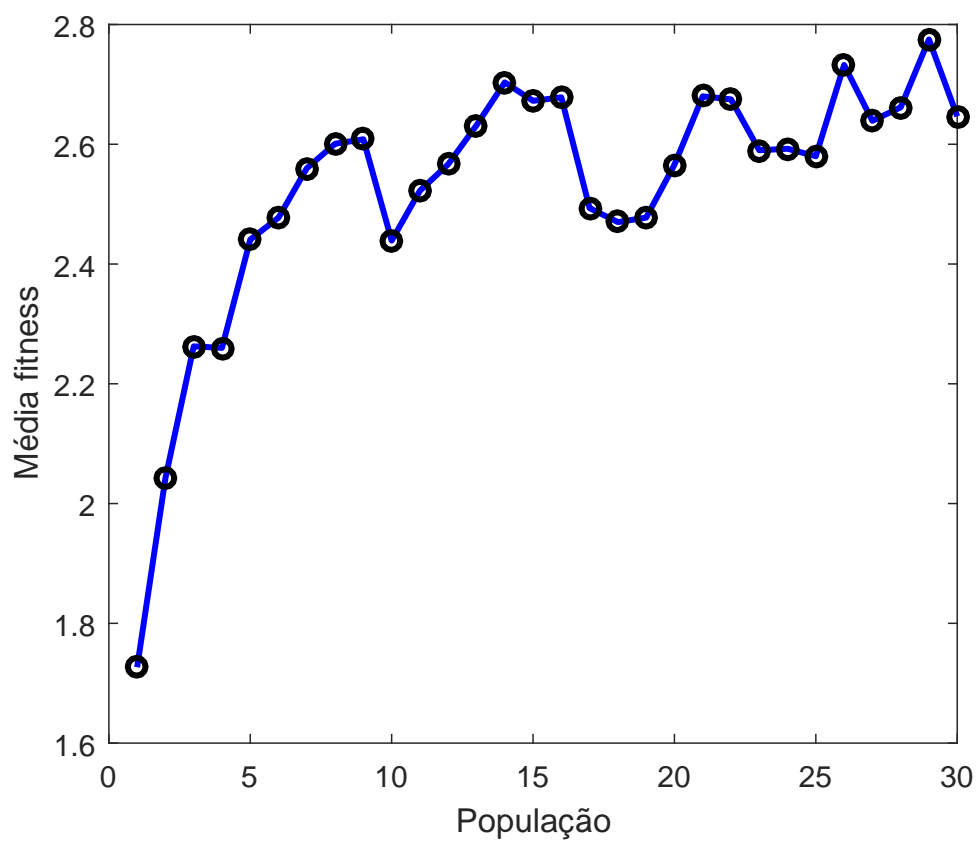
Fonte: Autor.

## Análise de convergência do AG

Nas Figuras 20 e 21 é apresentado a evolução do *fitness* de cada população durante o processo de busca para o LQR e Filtro de Kalman respectivamente. Diante disso, é

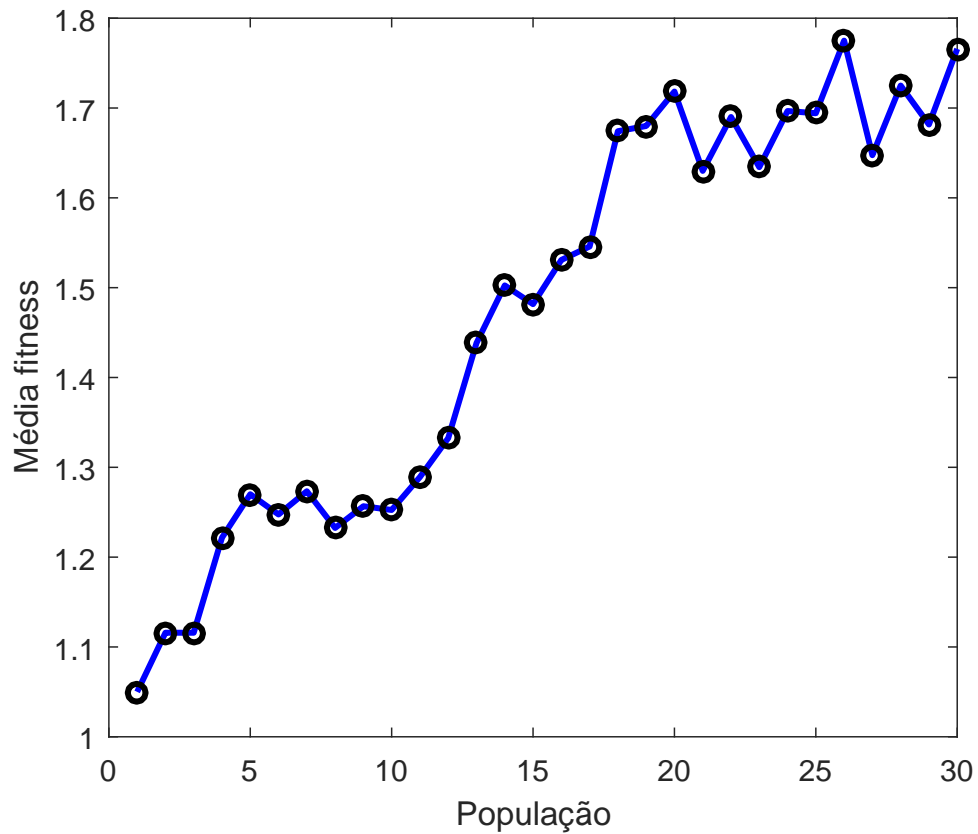
possível notar que a média de avaliação apresentou uma evolução até a trigésima geração.

Figura 20 – Evolução do fitness (LQR).



Fonte: Autor.

Figura 21 – Evolução do fitness (FK).



Fonte: Autor.

### Matrizes de Ponderação e Covariância

Foi escolhido o indivíduo número 2 da população final, cujas matrizes de ponderação são:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0.7000 & 0.0705 & 0.0035 \\ & 0.2355 & 0.1039 \\ & & 0.9282 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$R_2 = 0.0243 \quad (4.15)$$

e covariância:

$$\Xi_2 = \begin{bmatrix} 2.4427 & 0.0009 & 2.4040 \\ & 312.7496 & 8.8726 \\ & & 423.0120 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\Theta_2 = 0.0033 \quad (4.17)$$

As quais serão utilizadas na Subseção 4.2.3 para encontrar a solução da EAR e posteriormente na Subseção 4.2.4 para recuperação das propriedades de robustez do LQR perdidas com a estimação.

### 4.3 REDE NEURAL RECORRENTE PARA SOLUÇÃO DA EAR

Esta seção apresenta as características de convergência da RNAR para solucionar a EAR. As propriedades de convergência são classificadas em termos de velocidade e singularidade da solução da equação algébrica de Ricatti.

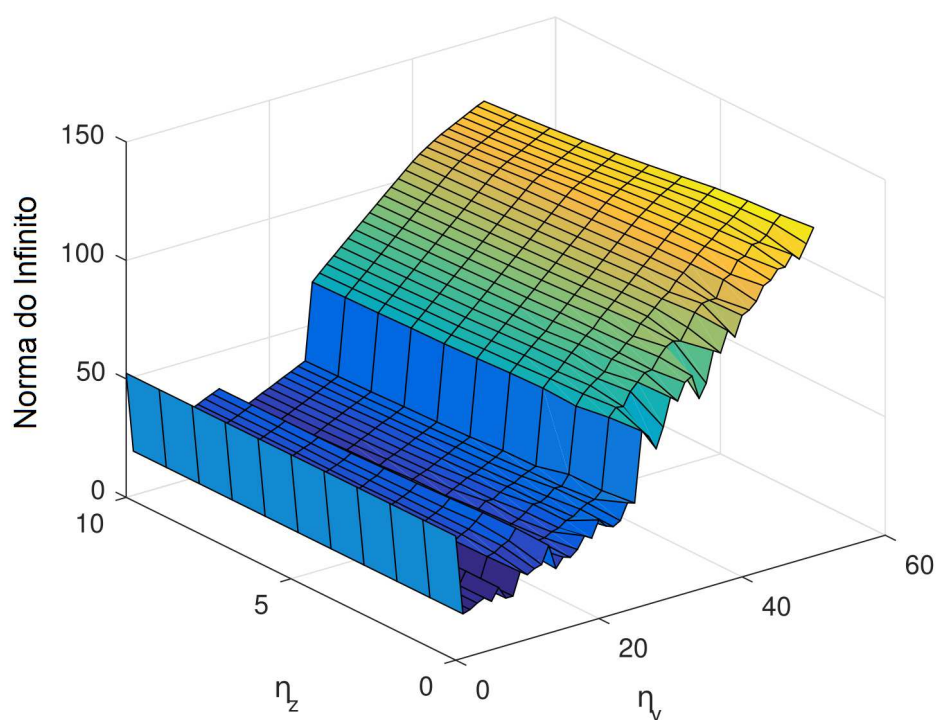
#### Sintonia dos Parâmetros $n_v$ e $n_z$

Os parâmetros de ajustes  $n_v$  e  $n_z$ , Equações 3.11 e ??, são sustentados pela norma do infinito e superfícies da energia da matrizes de solução da EAR. As superfícies da norma do infinito e da energia, são avaliadas para definir uma inicialização para otimizar as características de estabilidade de convergência e solvabilidade da rede neural, descritos anteriormente na Seção 3.3.

A influência da variação dos parâmetros  $n_v$  e  $n_z$  são apreciados pela avaliação das superfícies da função energia e norma do infinito. Tais superfícies possuem significados qualitativos no ajuste da rede neural artificial recorrente pelos parâmetros de sintonia.

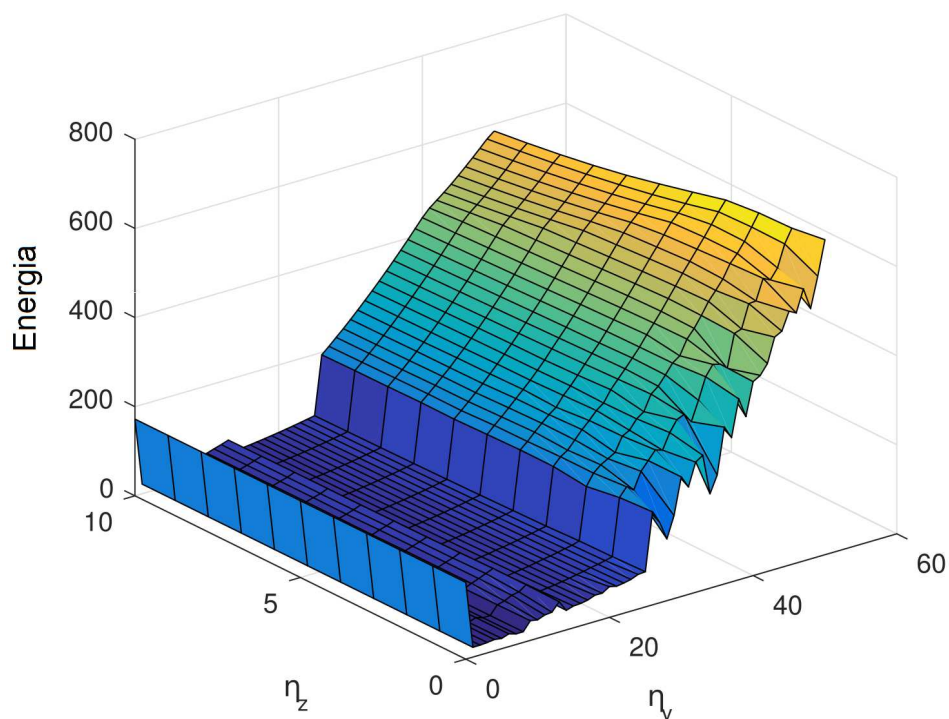
A Figura ?? apresenta a superfície da norma do infinito da camada de entrada  $U$ , com intervalos de variação dos parâmetros  $0 < n_v < 60$  e  $0 < n_z < 10$ . Os passos dos parâmetros de sintonia são  $h_{n_v} = 1$  e  $h_{n_z} = 10$ . A mesma faixa de variação dos parâmetros  $n_v$  e  $n_z$  e os mesmos passos foram estabelecidos para a superfície da função energia apresentada na Figura 22.

Ao analisar as superfícies das Figuras ?? e 22, nota-se que há uma concordância entre a norma do infinito e a função energia. Dessa forma, torna-se claro que para valores de  $n_v = 0$  e  $n_z = 1$  as superfícies são mínimas, o que significa que a escolha de tais valores foram satisfatória.



Superfície da norma do infinito para variação dos parâmetros  $n_z$  e  $n_v$ .

Figura 22 – Superfície da energia para variação dos parâmetros  $n_z$  e  $n_v$ .



Fonte: Autor.



### Solução Neural da EAR

A solução neural da Equação Algébrica de Ricatti é baseada nas Equações 3.11 e ?? para resolver a estrutura de otimização que minimiza a função energia dada pela Equação ?. A solução da EAR é a camada de saída da RNAR dada por:

$$P_{lqr} = \begin{bmatrix} 2.1760 & 0.9725 & -0.4622 \\ 0.9725 & 0.5124 & -0.2302 \\ -0.4622 & -0.2302 & 0.2629 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

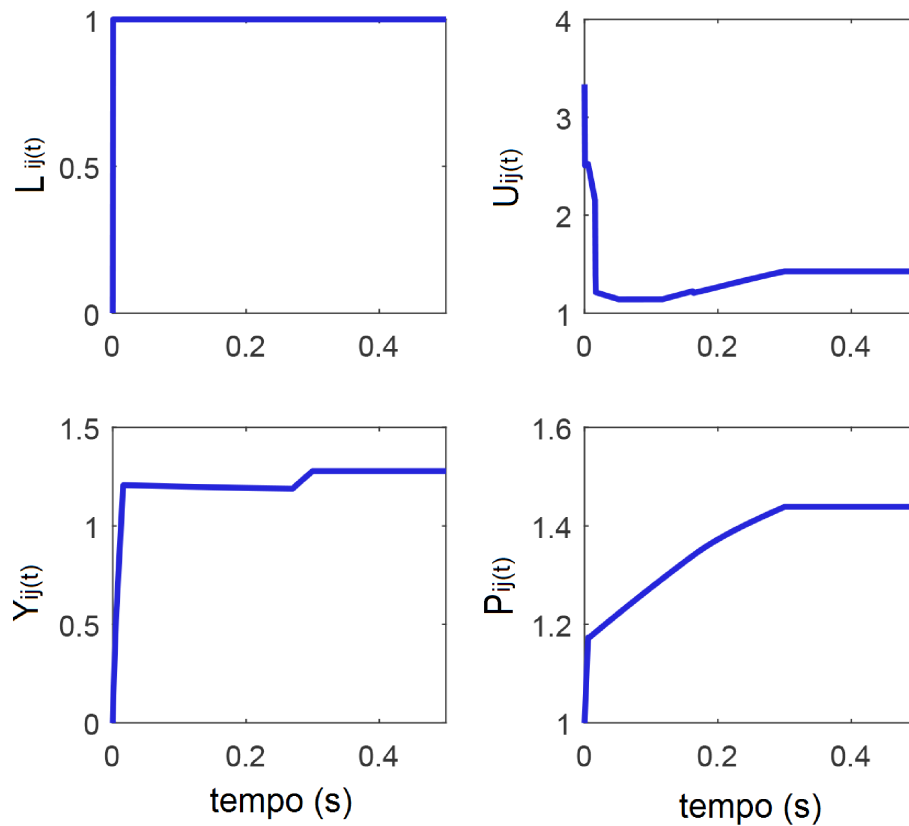
A matriz de ganhos do controlador utilizando as matrizes Q e R fornecidas pelo AG, é dada por:

$$K_{lqr} = \begin{bmatrix} -19.0203 & -9.4726 & 10.8171 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

### Análise de Convergência

A Figura 23 apresenta as normas do infinito das quatro camadas da RNAR. Os valores da norma do infinito tendem a uma solução estável. Estes gráficos mostram que todas as camadas tendem a um valor quando  $t \rightarrow \infty$ . Conseqüentemente, uma solução estável da EAR atingiu a convergência, sendo esta alcançada em torno de 500 iterações

Figura 23 – Norma do infinito das camadas de entrada, ocultas e saída para  $n_v = 8$  e  $n_z = 100$ .

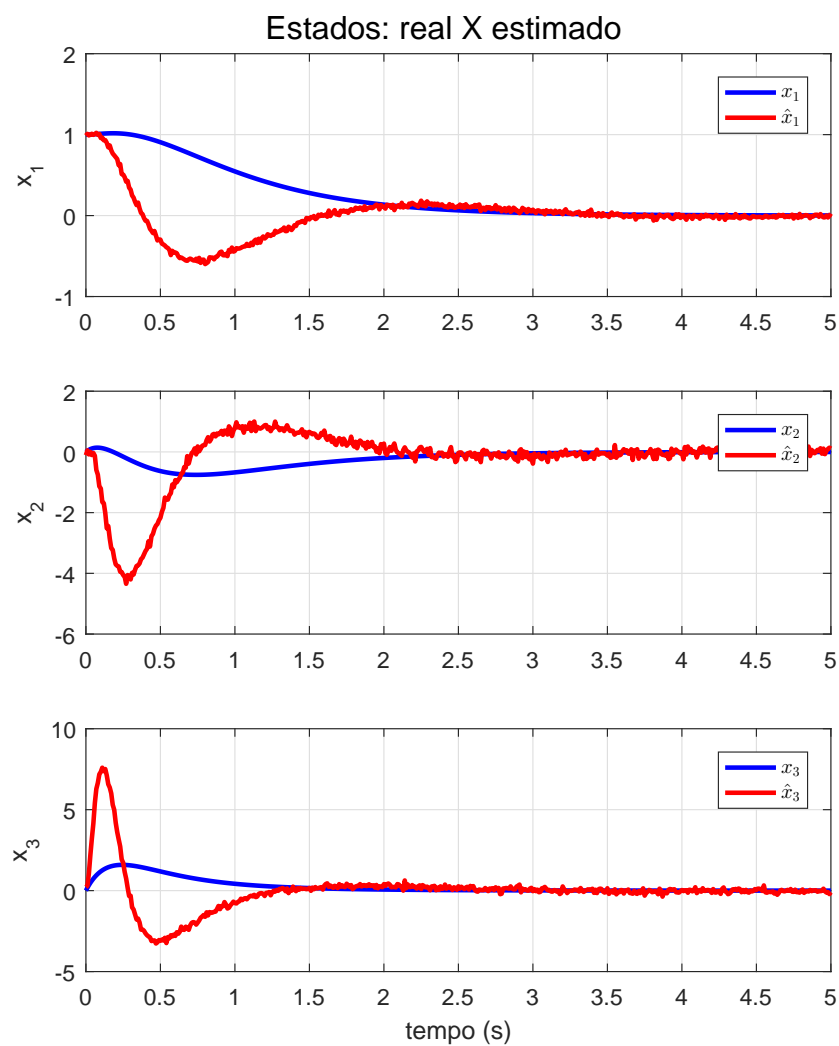


Fonte: Autor.

#### 4.4 FILTRAGEM DE KALMAN

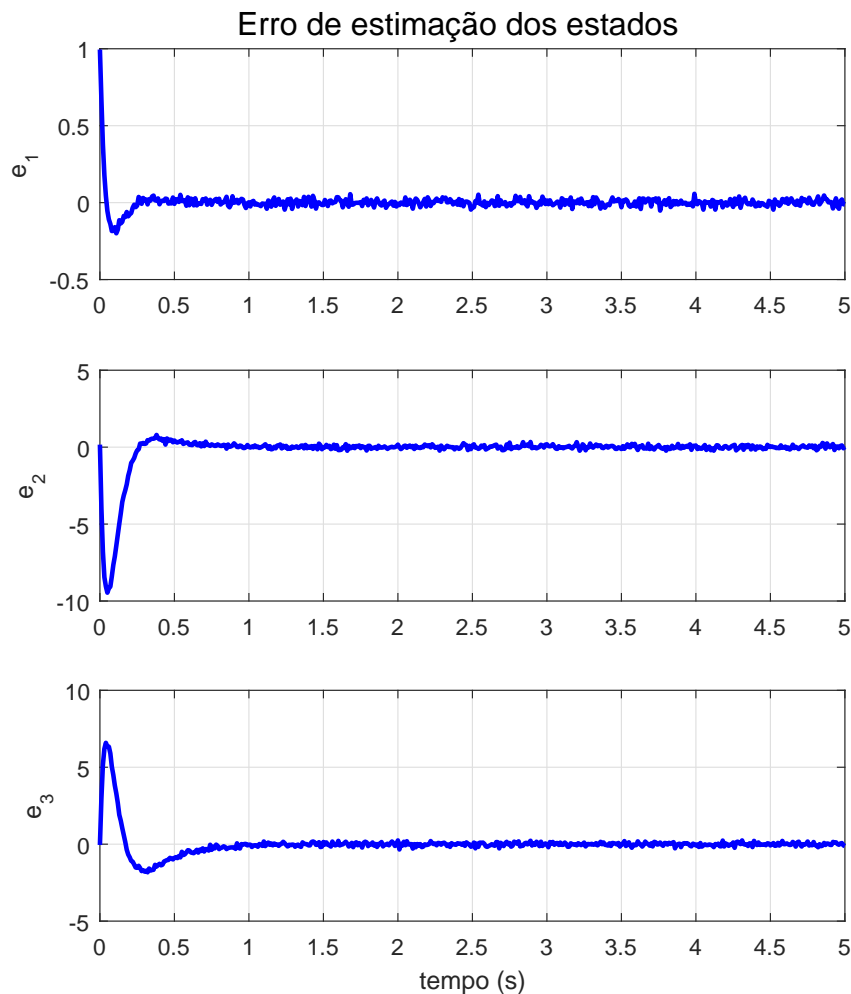
A Figura 24, a seguir, mostra os resultados da Filtragem de Kalman. Nela verificam-se as trajetórias dos estados versus os estados estimados. Percebe-se que, apesar da presença de ruídos, a ação reguladora é detectada em todos os estados. Para uma análise mais precisa, na Figura 25 apresenta-se o erro de estimação em cada estado. Observou-se que o Estado 1 apresenta o menor erro de estimação, enquanto que o maior erro foi verificado no Estado 3.

Figura 24 – Trajetórias dos estados versus seus estimados



Fonte: Autor.

Figura 25 – Erros de estimação em cada estado



Fonte: Autor.

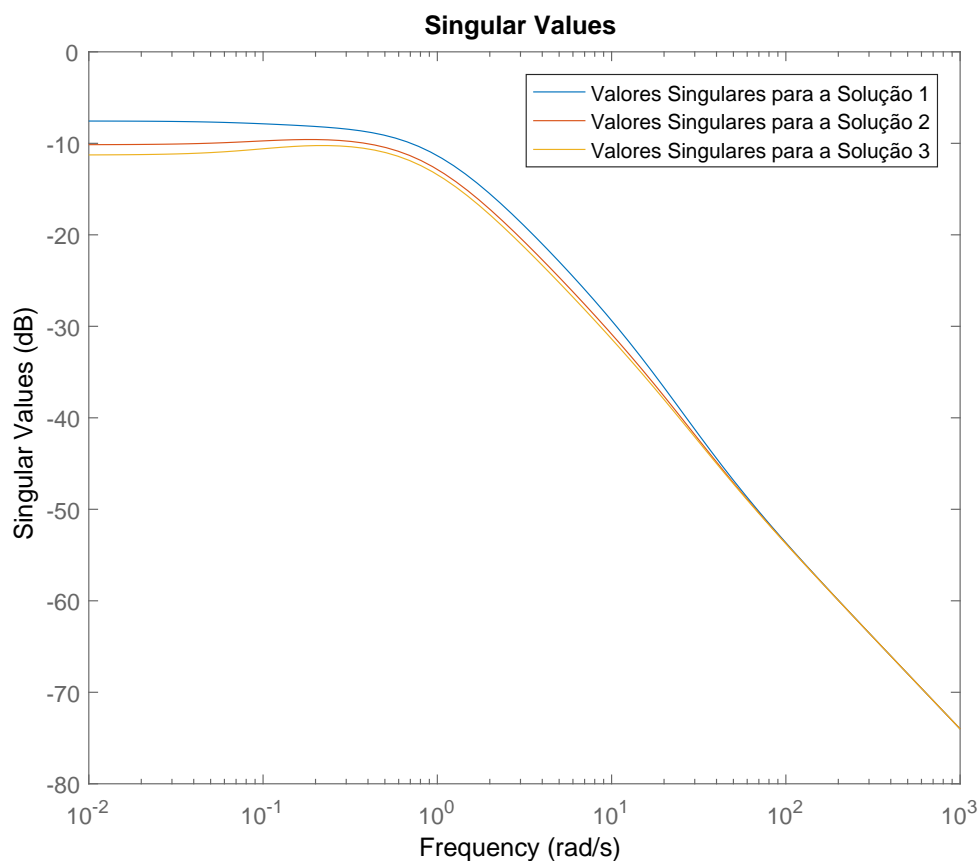
#### 4.5 ANÁLISE DA RECUPERAÇÃO DAS PROPRIEDADES DE ROBUSTEZ DO SISTEMA

Após a dedução do procedimento de recuperação do ganho de malha de realimentação (LTR) na saída, Capítulo 2, percebe-se que escolhendo-se devidamente as matrizes de covariâncias e variando-se o parâmetro " $v$ " pode-se obter a robustez desejada, ou seja, pode-se aproximar o LQG do LQR que é robusto.

A seguir, mostram-se as simulações deste procedimento de recuperação. O ganho do controlador  $K$ , fixado no procedimento, será determinado através da metodologia apresentada no Capítulo 2. Este ganho foi escolhido segundo uma análise de desempenho e de estabilidade robustos, de acordo com a análise dos valores singulares apresentada na Subseção 2.6.3.

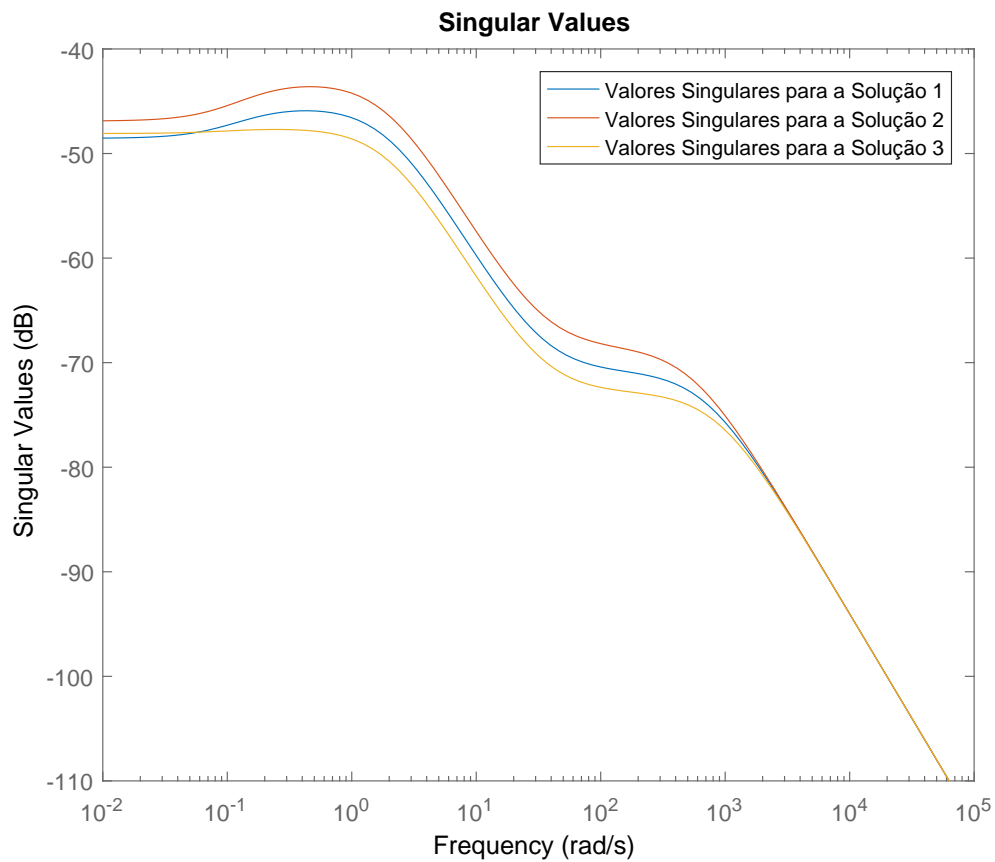
As Figuras 26 e 27 mostram os gráficos dos valores singulares para as três soluções do AG proposto para o LQR e para o FK na Seção 4.2.2, respectivamente. Nestes gráficos, pode-se destacar a melhor solução do AG para os critérios de desempenho e estabilidade. Das três soluções obtidas no projeto LQR, a de  $n^{\circ}1$ , foi a de melhor desempenho, pois obteve o maior dos menores valores singulares, em baixas frequências, dentre as soluções. Já para a estabilidade, o menor dos maiores valores singulares, em altas frequências são bem próximos nas três soluções. Adotando-se os mesmos critérios adotados na análise do projeto LQR para o projeto do FK, a solução de  $n^{\circ}2$ , obteve o melhor resultado. Assim, devido às proximidades das curvas serem mais acentuadas em altas frequências, resolveu-se fixar o controlador obtido na solução de  $n^{\circ}2$  produzida pelo AG, pois apresenta ótimos resultados nos dois projetos. Porém, qualquer uma das outras duas soluções poderia trazer resultado satisfatório, pois, como já ressaltado anteriormente, seus valores singulares estão bem próximos.

Figura 26 – Valores singulares das soluções produzidas pelo AG para o LQR.



Fonte: Autor.

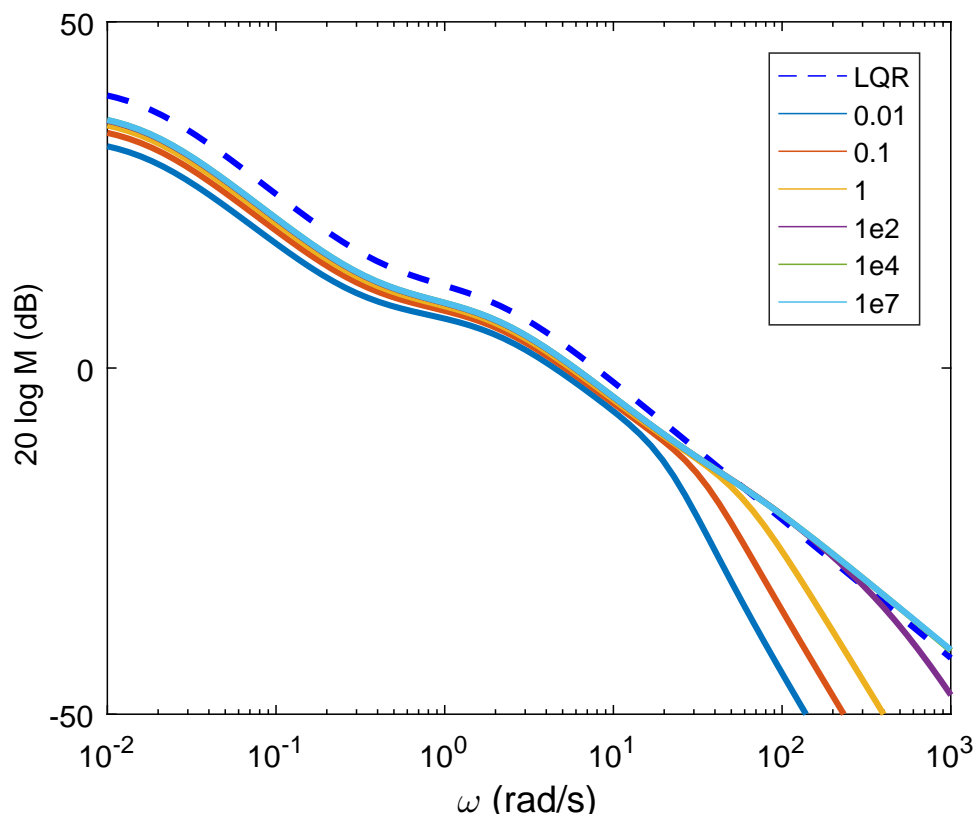
Figura 27 – Valores singulares das soluções produzidas pelo AG para o FK.



Fonte: Autor.

A seguir, mostram-se os resultados obtidos através das simulações do procedimento de recuperação das propriedades de Robustez do sistema, para comprovação da metodologia proposta, na qual consiste em fazer o sistema completo, com observador, tender ao LQR que é robusto. Para isso, escolheram-se adequadamente as matrizes de covariância  $\Xi$  e  $\Theta$ , conforme mostrado na Subseção 4.2.2, e variou-se o parâmetro " $\rho$ " e verificou-se que quando  $\rho \rightarrow +\infty$  as propriedades de robustez perdidas com a estimação são plenamente recuperadas pelos ajustes do ganho do observador, conforme mostra a Figura 28. Isso quer dizer que a margem de ganho infinita e a margem de fase de  $60^\circ$  tendem a serem alcançadas.

Figura 28 – Recuperação das propriedades de robustez a partir da variação de " $\rho$ ".



Fonte: Autor.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho desenvolveu uma abordagem para a recuperação da robustez do sistema de controle de arfagem de um veículo lançador de satélites usando um controlador genético-neural híbrido baseado na metodologia LQG/LTR. A avaliação do desempenho da abordagem proposta foi realizada com base na evolução do Algoritmo Genético e superfícies da Rede Neural.

Tínhamos consciência de que a aplicação desta metodologia para projetos de controladores mais simples, tipo o LQR, era plenamente viável. Contudo, o interesse em verificar a ação da metodologia em sistemas mais realísticos, como os sistemas estocásticos, funcionou para nós como elemento de motivação.

O algoritmo Genético solucionou o problema de busca das matrizes de ponderação do projeto LQR, e de forma dual solucionou também o problema de busca das matrizes de covariância do estimador de estado estocástico (FK).

Utilizando a técnica LTR, a recuperação das propriedades de robustez perdidas pela estimação das variáveis de estado foram obtidas, para o qual a alocação de Auto-estrutura do problema de controle e do problema de estimação de estados, utilizou-se o LQR e o Filtro de Kalman, respectivamente, como metodologias de projeto para a alocação.

Por fim, ficou claro que as técnicas de computação evolutiva são de grande importância para problemas de otimização de projetos de engenharia, uma vez que, a rapidez e eficiência dos seus resultados, são na maioria das vezes satisfatórias. Dessa forma, o estudo da aplicabilidade de tais técnicas no setor aerospacial mostra-se de grande relevância para o desenvolvimento do programa aeroespacial brasileiro.

### 5.1 TRABALHOS FUTUROS

Como perspectivas futuras convém destacar que é possível:

- Estudo comparativo entre as diversas técnicas de projeto de sistema de controle de atitude já empregadas no problema do VLS, destacando aspectos positivos e negativos de cada uma delas, sob diferentes critérios de avaliação: robustez em estabilidade, desempenho temporal e sensibilidade às não linearidades
- Aplicar outras técnicas de redução de ordem que represente o sistema de forma mais realística.
- Alocar Auto-estrutura utilizando o Projeto de controladores Robustos LQG/LTR com recuperação na Entrada.



- Incrementar mais operadores genéticos para a melhoria das soluções produzidas pelo AG.

## REFERÊNCIAS

- ATHANS, M. *Lecture note on multivariable control system*. [S.l.]: MIT Mass., 1986. Citado na página 20.
- BLACKMORE, P. A.; BITMEAD, R. R. Duality between the discrete-time kalman filter and lq control law. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 40, n. 8, p. 1442–1444, 1995. Citado na página 67.
- BLETOSOS, N. Launch vehicle guidance, navigation, and control. *Crosslink*, p. 30–33, 2003. Citado na página 20.
- CASTRO, F. D.; CASTRO, M. D. Redes neurais artificiais. *Porto Alegre, RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul*, 2001. Citado na página 62.
- CONDON, M.; IVANOV, R. Krylov subspaces from bilinear representations of nonlinear systems. *COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, Emerald Group Publishing Limited, v. 26, n. 2, p. 399–406, 2007. Citado na página 20.
- CRUZ, J. J. d. Controle robusto multivariável. *Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil*, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 69.
- DOYLE, J.; STEIN, G. Robustness with observers. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 24, n. 4, p. 607–611, 1979. Citado 3 vezes nas páginas 49, 55 e 57.
- DOYLE, J.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 4–16, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 69.
- FARUQI, F. A.; VU, T. L. *Mathematical models for a missile autopilot design*. [S.l.], 2002. Citado na página 20.
- FILHO, J. G. B. et al. Controle robusto lqg/ltr com recuperação do ganho da malha de transferência. *Universidade Federal do Maranhão*, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 57.
- GLOVER, K. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their l<sub>1</sub>-error bounds. *International journal of control*, Taylor & Francis, v. 39, n. 6, p. 1115–1193, 1984. Citado na página 43.
- GREENSITE, A. L. Analysis and design of space vehicle flight control systems. volume i-short period dynamics. 1967. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 42.
- GU, C. Qlmor: A projection-based nonlinear model order reduction approach using quadratic-linear representation of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, IEEE, v. 30, n. 9, p. 1307–1320, 2011. Citado na página 20.
- HESPANHA, J. P. Lqg/lqr controller design. *Undergraduate Lecture Notes, University of California, Santa Barbara, California, USA*, 2007. Citado na página 21.

- ISAKOWITZ, S. J.; JR, J. H.; HOPKINS, J. International reference guide to space launch systems, american institute of aeronautics and astronautics. *Inc. Reston, VA*, 1999. Citado na página 23.
- ITO, K.; KUNISCH, K. Reduced order control based on approximate inertial manifolds. *Linear Algebra and its Applications*, New York: Elsevier Science, 1968-, v. 415, n. 2-3, p. 531–541, 2006. Citado na página 20.
- JOHNSON, M.; GRIMBLE, M. Recent trends in linear optimal quadratic multivariable control system design. In: IET. *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. [S.l.], 1987. v. 134, n. 1, p. 53–71. Citado na página 21.
- LEWIS, F. L.; SYRMOS, V. Optimal control. a wiley-interscience publication. *J. Wiley*, 1995. Citado 3 vezes nas páginas 44, 51 e 57.
- LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. *Optimal Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 53.
- MACIEJOWSKI, J. M. Multivariable feedback design. electronic systems engineering series. *Wokingham, England: Addison-Wesley*, v. 6, p. 85–90, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 56, 57 e 59.
- MCCULLOCH, W. S.; PITTS, W. A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The bulletin of mathematical biophysics*, Springer, v. 5, n. 4, p. 115–133, 1943. Citado 3 vezes nas páginas 10, 61 e 62.
- MEHRABIAN, A. R.; LUCAS, C.; ROSHANIAN, J. Aerospace launch vehicle control: an intelligent adaptive approach. *Aerospace Science and technology*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 149–155, 2006. Citado na página 20.
- MOORE, B. Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction. *IEEE transactions on automatic control*, IEEE, v. 26, n. 1, p. 17–32, 1981. Citado na página 43.
- NETO, J. V. da F.; ABREU, I. S.; SILVA, F. N. D. Neural-genetic synthesis for state-space controllers based on linear quadratic regulator design for eigenstructure assignment. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, IEEE, v. 40, n. 2, p. 266–285, 2010. Citado na página 21.
- PALMERIO, A. Introdução à tecnologia de foguetes. *MPEA, ITA, São José dos Campos*, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- PINTO, V. P. Controladores robustos lqg/ltr com ação integral aplicados ao controle de geradores eólicos interligados ao sistema de distribuição de energia elétrica baseados em máquina de indução duplamente alimentada. *Universidade Federal do Ceará. Fortaleza*, p. 167, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 52, 54, 56, 58 e 59.
- RAHAGHI, M. I.; ROSHANIAN, J. Nonlinear optimal control techniques applied to a launch vehicle autopilot. *Journal of aerospace science and technology*, v. 3, n. 1, p. 43–49, 2006. Citado na página 20.
- SILVA, A. G. Análise e projeto de sistemas de controle de atitude para o veículo lançador de satélites (vls). 2014. Citado 7 vezes nas páginas 25, 26, 27, 31, 32, 38 e 42.

- WANG, J.; WU, G. A multilayer recurrent neural network for solving continuous-time algebraic riccati equations. *Neural Networks*, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 939–950, 1998. Citado na página 67.
- WIE, B.; DU, W.; WHORTON, M. Analysis and design of launch vehicle flight control systems. In: *AIAA guidance, navigation and control conference and exhibit*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 6291. Citado na página 27.
- XUE, D.; CHEN, Y.; ATHERTON, D. Linear feedback control: analysis and design with matlab. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2009. Citado na página 59.
- ZAREI, J. et al. Design and comparison of lqg/ltr and h controllers for a vstol flight control system. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 344, n. 5, p. 577–594, 2007. Citado na página 20.
- ZHANG, M. et al. Lqg/ltr flight controller optimal design based on differential evolution algorithm. In: IEEE. *Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA), 2010 International Conference on*. [S.l.], 2010. v. 2, p. 613–616. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.