



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO / PPG
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL / PROFMAT

JOSÉ RIBAMAR FERREIRA SILVA

RAZÃO ÁUREA:
A Sequência de Fibonacci e aplicações

São Luís
2025

JOSÉ RIBAMAR FERREIRA SILVA

RAZÃO ÁUREA:

A Sequência de Fibonacci e aplicações

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre no Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) – Mestrado em Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Geílson Mendes dos Reis

São Luís
2025

Silva, José Ribamar Ferreira.

Razão Áurea: a sequência de Fibonacci e aplicações. / José Ribamar Ferreira Silva. São Luís- MA, 2025.

79p.

Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) Universidade Estadual do Maranhão - UEMA, São Luís - MA, 2025.

Orientador: Prof. Me. Geílson Mendes dos Reis.

1. Número Áureo. 2. Sequência de Fibonacci. 3. Sequência Didática. 4. Ensino Básico. I. Título.

CDU:519.6

JOSÉ RIBAMAR FERREIRA SILVA

RAZÃO ÁUREA:

A Sequência de Fibonacci e aplicações

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre no Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) – Mestrado em Matemática.

Aprovada em: / /2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **GEILSON MENDES DOS REIS**
Data: 12/02/2025 18:03:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Msc. Geilson Mendes dos Reis (Orientador)
Mestre em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Documento assinado digitalmente
 **SERGIO NOLETO TURIBUS**
Data: 19/02/2025 17:36:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Sergio Noleto Turibus
Doutor em Engenharia Nuclear
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

Documento assinado digitalmente
 **JOSE SANTANA CAMPOS COSTA**
Data: 18/02/2025 19:09:09-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Santana Campos Costa
Doutor em Matemática
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

À minha família e ao meu orientador
professor MsC. Geílson.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor MsC. Geílson Mendes dos Reis, por sua disponibilidade, por seu compromisso e por suas sábias orientações.

Aos meus professores, especialmente à professora Dr^a. Celina, por seu auxílio, seus conselhos e por contribuir de forma significativa para a produção deste trabalho.

Aos meus colegas de turma por sua parceria, amizade, compromisso e dedicação, em especial a Silmário, Marcos, Hiago e Elder, por todo o apoio durante esses anos de curso e a produção deste trabalho.

Ao corpo de profissionais da UEMA, com ênfase àqueles que compõem o Programa de Pós-Graduação em Matemática e, especialmente à Ananda, por todas as orientações, cuidado e suporte para comigo e os demais acadêmicos deste curso.

À minha família, especialmente à minha esposa, Jeniffer, e às minhas filhas, Morgana e Catarina por todo o carinho, dedicação, torcida e cuidado.

À minha irmã, Maria Cirlene Pedrosa Lima, por todo apoio e suporte no decorrer do curso.

Aos meus colegas de trabalho, especialmente à diretora Angélica e à secretária Ivagna, por possibilitarem a disponibilidade de tempo necessário para a realização deste curso.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para mais essa etapa de construção de conhecimento, formação acadêmica e qualificação profissional.

*“Deus fez a natureza, mas a fez com
determinada ordem”*

Leonardo da Vinci

RESUMO

Este trabalho investiga a relação entre o número áureo e a sequência de Fibonacci, explorando aplicações práticas e propondo sequências didáticas para o ensino da razão áurea no ensino básico. Utilizando pesquisa bibliográfica, de natureza qualitativa e exploratória a partir de uma coleta de dados em livros, artigos, periódicos, revistas de referência, sites e outras fontes relevantes sobre o número áureo, a sequência de Fibonacci e estratégias didáticas e em autores de referência que tratam sobre os assuntos aqui abordados. O estudo aborda a história e aplicações da razão áurea na geometria, trigonometria, natureza e arte, além de comprovar sua relação com a sequência de Fibonacci. Por fim, são apresentados modelos de sequências didáticas para enriquecer o currículo de Matemática no Ensino Médio e aprimorar a qualificação dos alunos em atividades práticas e com o uso de ilustrações como forma de facilitar a sua compreensão a partir de um estudo que vise fundamentar e enriquecer esta análise.

Palavras-Chave: número áureo; sequência de Fibonacci; sequência didática; ensino básico

ABSTRACT

This work investigates the relationship between the golden number and the Fibonacci sequence, exploring practical applications and proposing didactic sequences for teaching the golden ratio in basic education. Using bibliographical research, of a qualitative and exploratory nature, based on data collection in books, articles, periodicals, reference magazines, websites and other relevant sources about the golden number, the Fibonacci sequence and teaching strategies and in reference authors who deal with the subjects covered here. The study addresses the history and applications of the golden ratio in geometry, trigonometry, nature and art, in addition to proving its relationship with the Fibonacci sequence. Finally, models of didactic sequences are presented to enrich the Mathematics curriculum in High School and improve students' qualifications in practical activities and with the use of illustrations as a way of facilitating their understanding from a study that aims to substantiate and enrich this analysis.

Keywords: Golden ratio; Fibonacci sequence; didactic sequence; basic education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	– Papiro Matemático de Rhind.....	15
Figura 2.2	– Tábua de Shamash.....	16
Figura 2.3	– O pentagrama de origem pitagórica, pode ser construído com seus vértices sobre um pentágono regular.....	17
Figura 2.4	– O homem Vitruviano e sua relação com a proporção áurea.....	17
Figura 3.1	– Segmento cortado em extrema e média razão.....	19
Figura 3.2	– A razão áurea no segmento de reta.....	19
Figura 3.1.1	– Retângulo áureo.....	21
Figura 3.1.2	– Construindo o retângulo áureo.....	23
Figura 3.1.3	– Construindo o retângulo áureo a partir do retângulo recém-formado..	23
Figura 3.1.4	– Espiral de Fibonacci.....	24
Figura 3.1.5	– Espiral de ouro em coordenadas polares.....	24
Figura 3.2.1	– Segmento áureo do pentágono.....	29
Figura 3.2.2	– Pentagrama ou estrela pitagórica e seus segmentos.....	29
Figura 3.2.3	– Triângulo acutângulo e seus segmentos.....	30
Figura 3.2.4	– Segmento áureo no decágono.....	30
Figura 4.1	– Representação da reprodução dos coelhos observada por Leonard Fibonacci.....	33
Figura 6.1.1	– Pentágono regular.....	45
Figura 6.2.1	– Gráfico da sequência de Fibonacci para $f_1 = 1, f_2 = 2$	50
Figura 6.3.1	– Filotaxia.....	53
Figura 6.3.2	– Sequência de Fibonacci no Girassol.....	53
Figura 6.3.3	– Sequência de Fibonacci em diversas espécies de plantas.....	54
Figura 6.3.4	– Sequência de Fibonacci no abacaxi.....	54
Figura 6.3.5	– A sequência de Fibonacci nos animais.....	55
Figura 6.3.6	– Sequência de Fibonacci e o corpo humano.....	56
Figura 6.3.7	– Demonstração da sequência de Fibonacci no braço humano.....	56
Figura 6.3.8	– Os dentes e a proporção áurea.....	57
Figura 6.4.1.1	– A proporção áurea na obra A Mona Lisa de Leonardo da Vinci.....	58
Figura 6.4.1.2	– A proporção áurea na obra de Leonardo da Vinci.....	59

Figura 6.4.1.3 – A proporção áurea na obra O Nascimento de Vênus de Sandro Botticelli.....	60
Figura 6.4.1.4 – Obras de Joaquín Torres García.....	60
Figura 6.4.2.1 – A proporção áurea no violino Stradivarius.....	61
Figura 6.4.2.2 – Bocal para saxofone alto projetado por Jody Espina.....	62
Figura 6.4.2.3 – Baixo gota de Fernando Fonterrada.....	62
Figura 6.4.2.4 – Sequência de Fibonacci e as teclas de um piano.....	63

LISTA DE SÍMBOLOS

τ	- Tau
φ	- Phi
DÔE	- ângulo
tan	- tangente
θ	- teta
$\overline{OD}$	- segmento
π	- Pi
ρ	- Rô
α	- Alfa
log	- logaritmo
ln	- logarítmo natural
$\approx$	- aproximadamente
f_n	- número de Fibonacci
$a b$	- a divide b
m.d.c.	- máximo divisor comum
$\neq$	- diferente
Σ	- sigma / somatório
$\forall$	- para todos
∞	- infinito
$\rightarrow$	- tende
$\mathbb{R}$	- conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	- conjunto dos números naturais
$\Leftrightarrow$	- se, e somente se
lim	- limite
cos	- cosseno
sen	- seno
$\mathbb{Z}$	- conjunto dos números inteiros
e	- número de Euler

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 HISTÓRIA DA PROPORÇÃO ÁUREA	15
3 A RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO ÁUREO	18
3.1 O retângulo áureo e a espiral	21
3.2 Segmentos áureo no pentágono	28
4 OS NÚMEROS DE FIBONACCI	32
5 O NÚMERO φ E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI	38
5.1 Potência do número φ	38
5.2 Demonstrações que a razão entre termos consecutivos dos números de Fibonacci tendem para o número φ .	39
6 APLICAÇÕES	45
6.1 O número φ e a trigonometria	45
6.2 O número φ e os números complexos	48
6.3 A sequência de Fibonacci e Progressão Geométrica	49
6.4 O número áureo em seres vivos	52
6.6 O número áureo na arte	57
6.6.1 O número áureo na pintura	57
6.6.2 O número áureo na música	61
7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA	64
8 CONCLUSÃO	76
REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

Ao observar o meio em que vivemos é possível perceber que a natureza está repleta de padrões matemáticos que conferem qualidade e beleza por meio da simetria existente em sua formação, tais como, na organização das folhas em uma planta, em padrões de nascimento dos animais ou nas dimensões do corpo de alguns seres, inclusive do corpo humano. Toda essa forma de construção da natureza despertou o interesse de grandes pensadores e estudiosos que, como Pitágoras, se permitiram afirmar que “a matemática estaria em toda a composição da natureza e, por isso, funcionaria de forma harmônica” (RUTHERFORD, 1991).

Hoje é possível perceber que a natureza segue padrões que lhe conferem beleza, maior qualidade de vida e harmonia e que podem ser expressos por meio de estudos e análises que tenham por base o conhecimento matemático expresso por meio do número 1,618.... Trata-se de uma razão também conhecida por proporção áurea, número de ouro, número áureo, secção áurea, proporção áurea ou de ouro, razão áurea ou de ouro, média e extrema razão, proporção divina, divina secção, proporção em extrema razão, divisão de extrema razão.

Outro nome que lhe fora atribuída é razão de Phídeas, em homenagem ao arquiteto matemático Phídeas, famoso por ter utilizado essa proporção na construção do Parthenon no século V a.C., e é representado pela letra grega φ (*phi*), daí também seu outro nome, número *phi*. Porém, não se sabe ao certo onde ou como ele surgiu, ou desde quando ele é utilizado, pois há evidências de seu uso primitivo desde o século I a.C. (antes mesmo que Phídeas construísse o Parthenon). Também não se sabe se aqueles que a utilizavam possuíam o conhecimento acerca dele.

Uma das formas mais conhecidas de aplicação deste número está presente na sequência de Fibonacci. Esta sequência é proveniente dos estudos e observações do matemático Leonardo Fibonacci, que viveu durante a Idade Média. Ao observar o problema da reprodução dos coelhos, Fibonacci descobriu uma sequência de números que poderia ser encontrada de várias formas na natureza.

Neste sentido, o presente estudo foi desenvolvido com o objetivo de pesquisar a relação entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci em aplicações práticas a partir do estabelecimento de uma relação entre a razão áurea e a sequência de Fibonacci, da demonstração de algumas aplicações da razão áurea e a sequência

de Fibonacci e da proposição de sequências didáticas para o ensino da razão áurea no ensino médio.

Portanto, iremos abordar a temática do número áureo e a proporção áurea em diferentes contextos com enfoque em várias formas e momentos em que ele é aplicado. Deste modo, iniciamos com a história da proporção áurea no Capítulo 2 onde serão abordados sinais da existência e da utilização deste número ainda na Grécia antiga. No Capítulo 3 tratamos sobre a razão áurea e o número áureo demonstrando a estrutura do retângulo áureo e da espiral bem como a presença do número áureo no pentágono. O Capítulo 4 aborda sobre os números de Fibonacci a partir do seu estudo sobre o problema da reprodução dos coelhos e no Capítulo 5 fazemos uma relação entre os números de Fibonacci e o número phi demonstrando a relação entre este número e a sequência encontrada nos estudos de Fibonacci.

Já no Capítulo 6 traremos explicações de como o número áureo pode ser aplicado e encontrado na trigonometria, em progressões geométricas, nos seres vivos e na arte. A partir desse estudo é possível perceber que o número de ouro tem uma função importante na manutenção, qualidade e beleza dos seres e das coisas, além de estar presente em vários elementos presentes no dia-a-dia das pessoas.

Dada a relevância e a frequência com que o número áureo aparece em elementos ao nosso redor, além de sua presença marcante no cotidiano, surge a seguinte questão: por que não explorar o número áureo e a sequência de Fibonacci em sala de aula, especialmente com alunos do Ensino Médio?

Assim, no Capítulo 7, apresentamos modelos de sequências didáticas com orientações sobre como esse conteúdo pode ser abordado em sala de aula de maneira lúdica, preparando os alunos para identificá-lo em sua realidade e utilizá-lo nas mais diversas situações do cotidiano, dentro e fora do ambiente escolar. O objetivo não é apontar caminhos prontos a serem seguidos, mas indicar modos para que os docentes possam descobrir novos caminhos, tendo um modelo como exemplo.

Este trabalho foi desenvolvido com base em pesquisa bibliográfica, utilizando como referência estudiosos que abordam a razão áurea, a sequência de Fibonacci, sequências didáticas como ferramentas de ensino e o ensino de Matemática no Ensino Médio. Trata-se de uma pesquisa básica, com abordagem qualitativa e caráter exploratório. A coleta de dados incluiu livros, artigos, periódicos, revistas e sites, utilizando palavras-chave relacionadas ao número áureo, à sequência de Fibonacci e às sequências didáticas. Autores como Euclides, Maurício Zahn,

Boyer, Zabala e Brousseau foram consultados para fundamentar o estudo, buscando oferecer contribuições relevantes à comunidade acadêmica, científica e educacional, especialmente para professores e interessados em ampliar o conhecimento e a aplicação desses conteúdos matemáticos no Ensino Médio.

Para tanto, espera-se que este trabalho sirva como um norteador para que o professor possa abordar estes temas que são de grande relevância para a vida pessoal e profissional dos seus alunos tendo como base um conhecimento tão rico e valioso como é o estudo sobre o número áureo e a sequência de Fibonacci.

2 HISTÓRIA DA PROPORÇÃO ÁUREA

A proporção áurea existe desde tempos remotos e não se sabe ao certo onde foi a primeira vez que tal proporção foi utilizada. Foi Euclides de Alexandria quem definiu a proporção áurea pela primeira vez, em meados dos anos 300 antes de Cristo, a qual ele chamou de razão extrema e média. A razão áurea está presente nas artes e na arquitetura desde tempos remotos.

No papiro de Rhind, que é um documento que data por volta do ano 1650 a.C. é onde se tem um dos primeiros registros sobre a razão áurea (Figura 2.1).

Nesse documento existem 85 problemas. Nos textos deste papiro é citada uma “razão sagrada” a qual acredita-se ser a razão áurea.

Muito do que conhecemos a respeito da familiaridade dos antigos egípcios com frações, por exemplo, vem do Papiro de Rhind (ou Ahmes). É um imenso papiro (cerca de 5,5 metros de comprimento por 30 centímetros de altura) que foi copiado por volta de 1650 a.C. de documentos mais antigos por um escriba chamado Ahmes. O papiro foi encontrado em Tebas e comprado em 1858 pelo colecionador de antiguidades escocês Henry Rhind, e está atualmente no British Museum (exceto por alguns fragmentos, que apareceram inesperadamente em uma coleção de papéis médicos, e que estão atualmente no Brooklyn Museum). O Papiro de Rhind, que é, na verdade, um manual de calculador, tinha nomes simples apenas para frações da unidade, como $1/2$, $1/3$, $1/4$ etc., e para $2/3$. Alguns outros papiros tinham também um nome para $3/4$ (LÍVIO, 2006).

Figura 2.1 – Papiro Matemático de Rhind



Fonte: Disponível em: <<https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>>. Acesso em: 06/nov./2024)

A Tábua de Shamash (Figura 2.2) é uma tábua que o arqueólogo Hormusd Rassan encontrou em uma escavação realizada em Sippar que fica localizada na região sul do Iraque. “Essa tábua tem o comprimento de 29,21 cm, largura de 17,78 cm. A razão entre essas medidas é $29,21/17,78 = 1,6428571428571428571428571428571\dots$, bem próximo do número φ que é aproximadamente $1,61803398874948482045868343656\dots$ ” (ZAHN, 2011). O que mostra que os babilônios antigos sabiam criar o retângulo áureo que é um retângulo que possui dimensões em razão áurea.

Figura 2.2 – Tábua de Shamash

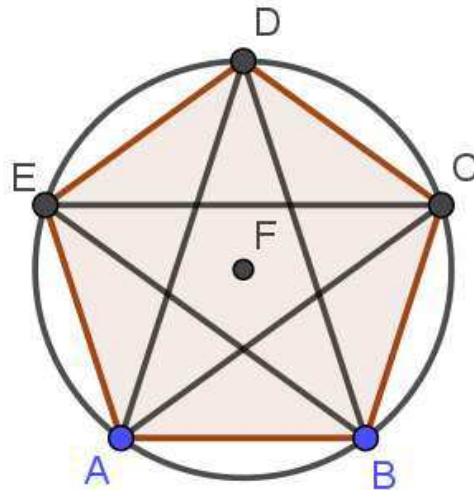


Fonte: Disponível em: <<http://mitographos.blogspot.com/2013/01/shamash.html>>. Acesso em: 06/nov./2024)

A razão áurea também conhecida como o *Número de Ouro*, teve como primeiro símbolo para representá-la a letra grega τ (tau) a qual significava “o corte”. O nome φ (phi) veio, no entanto, a ser designada apenas no século XX pelo matemático Mark Barr. “ φ , é, a primeira letra grega do nome Fídias o qual foi um escultor na antiga Grécia. As maiores realizações de Fídias foram o ‘Partenon de Atenas’ e o ‘Zeus’ no templo de Olímpia”. (LÍVIO, 2006, p. 16).

Na construção da estrela pitagórica (Figura 2.3Figura 2.), os pitagóricos usaram a razão áurea, embora não tivessem conhecimento do número φ . Os pitagóricos acreditavam que a existência dos números irracionais deveria ser guardada em segredo, pois representavam algum tipo de erro cósmico de tão horrível que eles achavam. É certo que a razão do segmento da estrela pitagórica é o número φ , por esse motivo a estrela pitagórica têm o formato regular e simétrico.

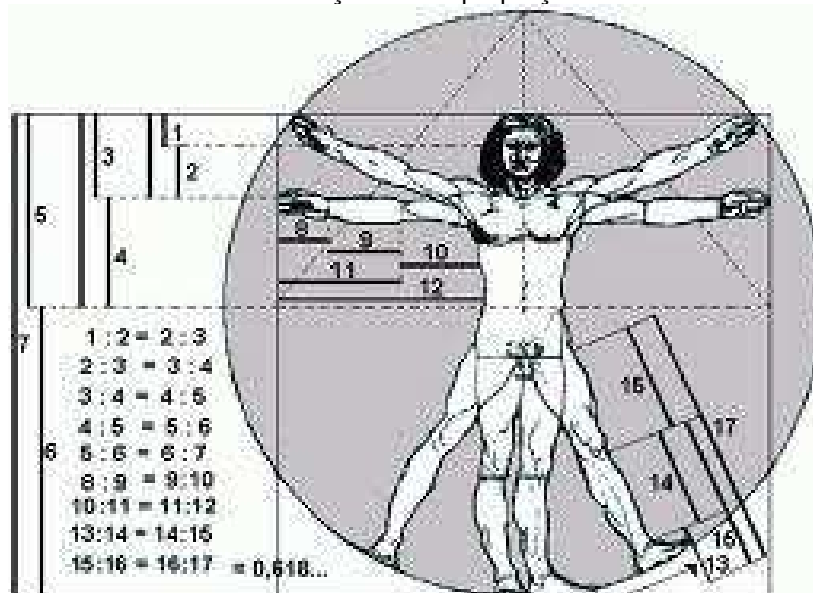
Figura 2.3 – O pentagrama de origem pitagórica, pode ser construído com seus vértices sobre um pentágono regular



Fonte: o autor, 2024.

O número áureo tem o poder de despertar tanto interesse porque ele surge onde menos se espera de forma quase natural (LÍVIO, 2006). As sementes da maçã, por exemplo, estão organizadas na forma de uma estrela de um pentagrama. As pétalas de uma rosa também estão agrupadas de acordo com uma regra que se baseia na proporção áurea. A proporção áurea também está nos espirais das conchas de alguns moluscos. Inclusive, a proporção áurea também aparece diversas vezes no ser humano, como mostra na pintura de Leonardo da Vinci, O Homem Vitruviano (Figura 2.4).

Figura 2.4 – O homem Vitruviano e sua relação com a proporção áurea.



Fonte: Disponível em: <<http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/>>. Acesso em: 06/nov./2024

3 A RAZÃO ÁUREA E O NÚMERO ÁUREO

Segundo Carl B. Boyer (1974), livro história da matemática, Euclides foi o autor de textos matemáticos mais bem sucedido de todos os tempos.

Apesar de sua grande fama, pouco se sabe sobre Euclides. Não se sabe ao certo datas de nascimento e morte e até mesmo cidade onde nasceu. Por deduções de fatos históricos, acredita-se que Euclides viveu no tempo do primeiro Ptolomeu e que recebeu seu treinamento matemático dos discípulos de Platão em Atenas.

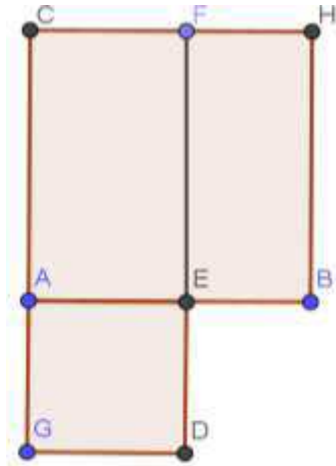
Os livros “Os elementos de Euclides” não foram os primeiros a serem escritos, porém, superou tanto os outros livros que foram os únicos, dos tempos antigos, a sobreviver. Esses livros tratam de textos introdutórios de toda matemática elementar, ou seja, aritmética, geometria sintética e álgebra.

Euclides, no livro VI, os elementos, definiu a média e extrema razão da seguinte forma: uma reta é dita está cortada em extrema e média razão, quando como a toda esteja para o maior seguimento, assim o maior para o menor.

Para cortar um seguimento AB em extrema e média razão, Euclides, usa a seguinte construção:

Seja a reta finita dada AB ; é preciso então, cortar a reta AB em extrema e média razão. Fique descrito sobre a AB o quadrado BC , e fique aplicado à AC o paralelogramo CD igual a BC , excedente pela figura AD semelhante a BC . Mas o BC é um quadrado; portanto, também a AD é um quadrado. E, como o BC é igual a CD , fique subtraído o CE comum; portanto, o BF restante é igual à AD restante. Mas também é equiângulo com ela. Portanto, os lados, à volta dos ângulos iguais, dos BF , AD são inversamente proporcionais; portanto, como a FE está para ED , assim como a AE está para EB . Mas por um lado, FE é igual à AB , e, por outro lado, a ED , à AE . Portanto, como a BA está para AE , assim a AE para EB . Mas a AB é maior do que a AE ; portanto, também a AE é maior do que a EB . Portanto a reta AB foi cortada em extrema e média razão no E , e o maior segmento dela é o AE ; o que era preciso fazer.

Figura 3.1 – Segmento cortado em extrema e média razão



Fonte: O autor, 2024

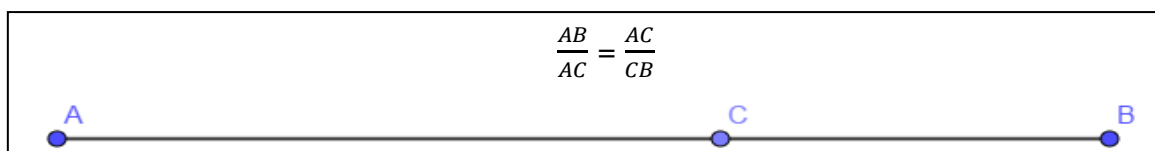
Pode-se interpretar as afirmações de Euclides da seguinte forma:

- i) Reta finita é o mesmo que segmento de reta
- ii) A diagonal representa um paralelogramo
- iii) Quando Euclides coloca que o paralelogramo CD é igual a BC, ele está falando de suas áreas respectivamente, isto é, o paralelogramo de diagonal CD têm a mesma área do paralelogramo de diagonal BC.
- iv) Para Euclides, descrever um paralelogramo de área A e lado BC, é o mesmo que construir um paralelogramo de base BC e área A .
- v) Aplicar uma figura de área A sobre um segmento BC excedente por uma figura semelhante a um paralelogramo dado, é o mesmo que construir um paralelogramo no qual o seguimento AB esteja contido na base, cuja a área é A , tal que se pode aumentar a base até que se obtenha um paralelogramo semelhante ao paralelogramo dado.

Podemos escrever assim: uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior seguimento, o maior seguimento está para o menor.

Desta forma temos: Seja um segmento AB, dizemos que um ponto C divide AB na razão áurea (Figura 3.2).

Figura 3.2 – A razão áurea no segmento de reta



Fonte: O autor, 2024.

Seja $AB = a$ e $AC = x$, temos as seguintes equações:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \quad (3.1)$$

Resolvendo a equação de segundo grau obtemos:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2}}{2}. \quad (3.2)$$

Assim, as duas raízes da equação, são:

$$x_1 = -a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$x_1 = a \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right). \quad (3.3)$$

Dividindo ambos os membros das equações por a , temos:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{x_2}{a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (3.4)$$

Para a solução da primeira Equação de (3.4) podemos fazer:

$$\frac{a}{x_1} = \frac{2}{-1 - \sqrt{5}}.$$

Multiplicando o denominador e o numerador por $(1 - \sqrt{5})$

$$\frac{a}{x_1} = \left(\frac{2}{-1 - \sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right) = \frac{2(1 - \sqrt{5})}{4} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \quad (3.5)$$

Esse número chamaremos de φ_1 . Temos que $\varphi_1 = -0,61803398...$

Para a segunda Equação de (3.4), temos:

$$\frac{a}{x_2} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}}. \quad (3.6)$$

multiplicando numerador e denominador por $(1 + \sqrt{5})$, obtemos:

$$\frac{a}{x_2} = \left(\frac{2}{-1 + \sqrt{5}} \right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right) = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (3.7)$$

esse número chamaremos de φ_2 o qual é a razão áurea. Temos que $\varphi_2 = 1,61803398...$

Elevando φ ao quadrado temos:

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{4+2+2\sqrt{5}}{4} \\ &= 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \varphi^2 &= 1 + \varphi\end{aligned}\quad (3.8)$$

ou seja, o número φ tem a propriedade de fazer seu quadrado somando 1 igual a ele mesmo.

Fazendo $\varphi_1 + \varphi_2$, iremos obter

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1, \quad (3.9)$$

no entanto, fazendo $\varphi_1 \times \varphi_2$, obtemos:

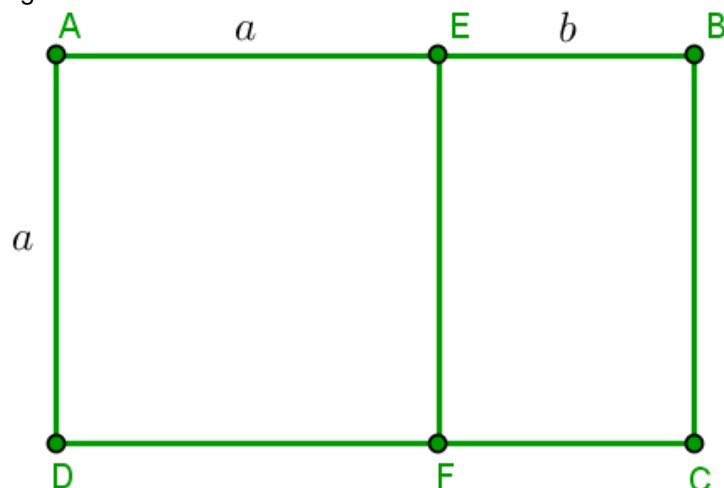
$$\varphi_1 \times \varphi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \times \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-4}{4} = -1, \quad (3.10)$$

Podemos observar daí que $-\varphi_1$ é igual ao inverso de φ_2 .

3.1 O retângulo áureo e a espiral

O retângulo áureo (Figura 3.1.1), também chamado de retângulo de ouro, é um retângulo que, se o dividirmos em um quadrado e um retângulo, o próximo retângulo a ser criado será semelhante ao original, isto é, qualquer retângulo ABCD, quando suprimimos um quadrado, como AEFD, o restante será semelhante à ABCD.

Figura 3.1.1 – Retângulo áureo



Fonte: O autor, 2024.

Seja o retângulo ABCD onde $a + b$ e a são as dimensões do retângulo original. EFCB é semelhante ao retângulo ABCD. Com isso podemos fazer a seguinte proporção:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{EB}{EF} \quad (3.1.1)$$

$$\frac{a}{a + b} = \frac{b}{a}$$

onde obteremos as seguintes equações:

$$a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0. \quad (3.1.2)$$

O resultado desta equação em a será $b\varphi$. Desta forma,

$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b\varphi}{b} = \varphi \quad (3.1.3)$$

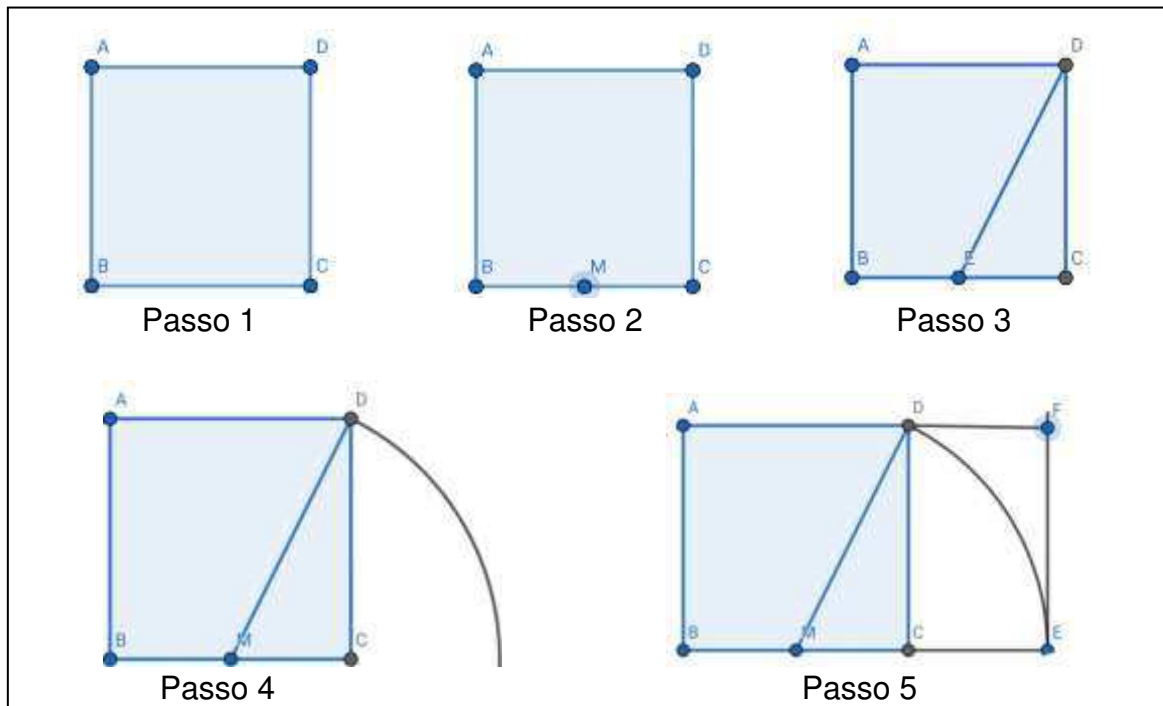
Podemos notar esse retângulo na arquitetura, como por exemplo, O *Parthenon*, conhecido por ser o templo da deusa Atena Paternos. Ao observar atentamente sua estrutura, é possível notar que ela forma, quase exatamente, um retângulo áureo. Mas, por ser uma construção do século V a. C., não há como comprovar historicamente que o arquiteto possuía conhecimento sobre a proporção áurea.

Também podemos notar o uso do retângulo áureo em trabalhos artísticos, como no famoso quadro de Leonardo Da Vinci, a *Mona Lisa*. Da Vinci referia-se à proporção áurea como a “Proporção Divina”, e é possível supor que ele a tenha utilizado em seus famosos trabalhos.

Também é possível construir este retângulo seguindo os passos indicados abaixo (Figura 3.1.2):

1. Construir um quadrado ABCD
2. Determinar o ponto médio M do segmento AC
3. A partir do ponto M, traçar um segmento até o ponto D
4. Com a ajuda de um compasso, colocar a ponta sobre o ponto M, partindo do ponto D, construir um arco λ .
5. Partindo do ponto C, construir um segmento paralelo a BC formando o ponto E, intersecção com o arco λ . Partindo do ponto C Construir uma semirreta paralela a CD. Partindo do ponto D construir uma semirreta paralela a AD, encontrando, assim, o ponto F que é intersecção das duas semirretas. Assim, O retângulo ABEF é um retângulo áureo.

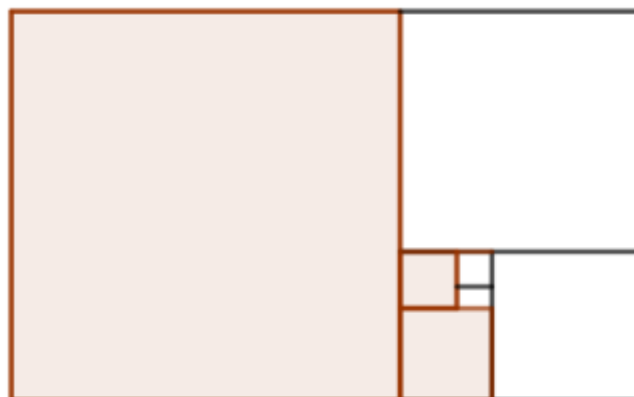
Figura 3.1.2 – Construindo o retângulo áureo



Fonte: O autor, 2024.

Podemos fazer este mesmo processo dentro do retângulo recém-formado, construindo um outro quadrado dentro dele, onde se obtêm um novo retângulo, que pode ser repetido várias vezes tornando-se um processo infinito, mas contendo sempre a sequência de ouro em seu interior. (Figura 3.1.3).

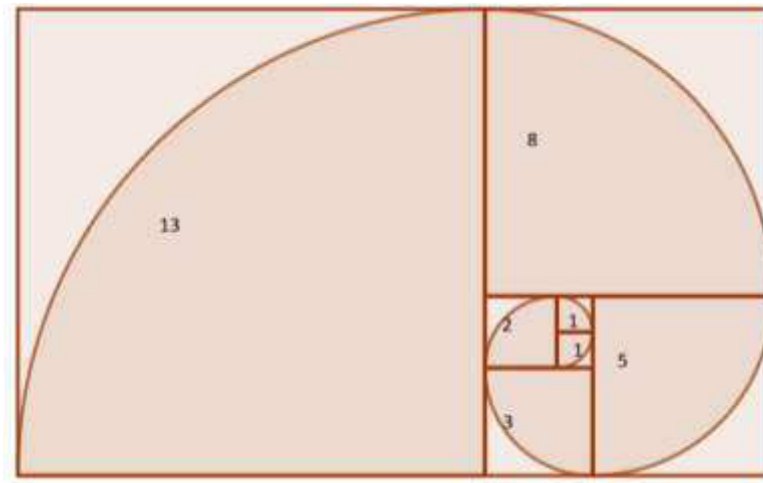
Figura 3.1.3 – Construindo o retângulo áureo a partir do retângulo recém-formado



Fonte: O autor, 2024.

Podemos construir uma sequência de quadrados no interior do retângulo de ouro com dimensões $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 5 \times 5, \dots$, que é a sequência de Fibonacci. Desenhando um arco seguindo os quadrados dentro do retângulo, forma-se um padrão, chamado de espiral de Fibonacci (Figura 3.1.4).

Figura 3.1.4 – Espiral de Fibonacci



Fonte: O autor, 2024

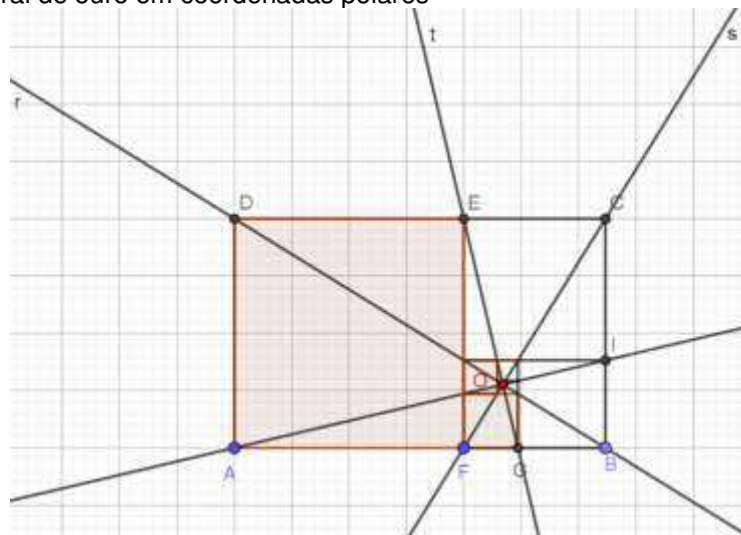
Esta espiral é o que se pode chamar de “padrão da perfeição”, pois está associada a tudo aquilo o que consideramos lindo na natureza. Como por exemplo a maioria das galáxias que puderam ser observadas pelo telescópio de Hubble, quando um furacão se forma seu “olho” também forma esse padrão e, também, nas ondas gigantes.

Sobre este assunto, Jacques Bernoulli *apud* Lívio (2006) escreve que

(...) a espiral logarítmica “pode ser usada como um símbolo tanto do vigor e constância na adversidade quanto no corpo humano, no qual, após todas as mudanças, até mesmo após a morte, será restaurado ao seu exato e perfeito ser.”

Vamos deduzir agora a equação do espiral de ouro em coordenadas polares (Figura 3.1.5).

Figura 3.1.5 – Espiral de ouro em coordenadas polares



Fonte: O autor, 2024.

Seja a sequência de retângulos apresentada na Figura 3.1.5 na qual o retângulo ABCD é o maior. Observemos, então que as retas que contém as diagonais se cruzam no ponto O. Esse ponto O vai ser a origem do sistema polar. No retângulo ABCD construímos um quadrado ADEF cujo lado é igual a 1.

Primeiramente colocamos o ponto A como a origem do nosso sistema cartesiano. Dessa forma vamos obter os pontos: A(0,0), B(φ ,0), C(φ ,1), D(0,1), E(1,1) e F(1,0).

Notemos que a reta r passa pelos pontos B(φ ,0) e D(0,1). Podemos obter a equação dessa reta através da condição de alinhamento.

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \varphi & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + \varphi y - y = 0$$

Logo a equação da reta r é dada por:

$$(r): y = -\frac{1}{\varphi}x + 1. \quad (3.1.4)$$

Podemos obter, também a equação da reta s

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ \varphi & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x + (\varphi - 1) + 1 = 0.$$

Assim, a equação da reta s será:

$$(s): y = \frac{1}{\varphi - 1}x - \frac{1}{\varphi - 1} \quad (3.1.5)$$

Sejam o coeficiente angular da reta r (m_r) e o coeficiente angular da reta s (m_s). Temos que $m_r = -\frac{1}{\varphi}$ e $m_s = \frac{1}{\varphi - 1}$. Fazendo a multiplicação dos coeficientes angulares vamos ter:

$$m_r \times m_s = -\frac{1}{\varphi} \times \frac{1}{\varphi - 1} = -\frac{1}{\varphi^2 - \varphi}.$$

Utilizando a Equação (3.8) temos que:

$$m_r \times m_s = -1. \quad (3.1.6)$$

Isso mostra que as retas r e s são perpendiculares.

Para encontrar o ponto O, resolvemos então o sistema formado pela Equação (3.1.4) e pela Equação (3.1.5). Dessa forma teremos:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{\varphi}x + 1 \\ y = \frac{1}{\varphi - 1}x - \frac{1}{\varphi - 1} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}; y = \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1} \quad (3.1.7)$$

Que são as coordenadas do ponto O.

Agora iremos calcular o ângulo DÔE triângulo DOE. Para isso, temos que encontrar o ângulo formado pelas retas r e t .

O coeficiente angular da reta t (m_t) é dado por:

$$\begin{aligned} m_t = \frac{y_c - y_o}{x_c - x_o} &= \frac{1 - \frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1}}{1 - \frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}} = \frac{\frac{2\varphi - 1 - \varphi + 1}{2\varphi - 1}}{\frac{2\varphi - 1 - \varphi^2}{2\varphi - 1}} \\ &= \frac{\varphi}{\varphi^2 - 2\varphi - 1} = \frac{\varphi}{(\varphi - 1)^2}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Então o ângulo DÔE pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} tg \theta &= \left| \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \times m_t} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{\varphi} + \frac{\varphi}{(\varphi - 1)^2}}{1 + \left(-\frac{1}{\varphi}\right) \left(\frac{-\varphi}{(\varphi - 1)^2}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{-(\varphi - 1)^2 + \varphi^2}{\varphi(\varphi - 1)^2}}{\frac{\varphi(\varphi - 1)^2 + \varphi}{\varphi(\varphi - 1)^2}} \right| = 1 \\ tg \theta &= 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Portanto, pela Equação (3.1.6) vemos que o ângulo DÔC é de 90° . E como o ângulo DÔE mede 45° , podemos dizer que o ângulo EÔC tem medida igual a 45° .

Com esses resultados podemos observar que cada retângulo áureo é obtido de outro retângulo por uma rotação de 90° e uma contração. Calcularemos agora a contração sofrida pelos retângulos áureos em cada rotação.

Como já foi determinado acima temos que: $D(0,1)$, $C(\varphi,1)$, $O\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1}, \frac{\varphi-1}{2\varphi-1}\right)$, podemos calcular agora a distância de OD. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^2}{2\varphi-1} - 0\right)^2 + \left(\frac{\varphi-1}{2\varphi-1} - 1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^4}{(2\varphi-1)^2}\right) + \left(\frac{\varphi-1-(2\varphi-1)}{2\varphi-1}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^4}{(2\varphi-1)^2}\right) + \left(\frac{\varphi^2}{(2\varphi-1)^2}\right)} = \sqrt{\frac{\varphi^2(\varphi^2+1)}{(2\varphi-1)^2}} \\ &= \frac{\varphi}{2\varphi-1} \sqrt{\varphi^2+1} \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

Agora calculemos a distância de OC

$$\begin{aligned}
 \overline{OC} &= \sqrt{\left(\varphi - \frac{\varphi^2}{2\varphi - 1}\right)^2 + \left(\frac{\varphi - 1}{2\varphi - 1} - 1\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^2 - \varphi(2\varphi - 1)}{2\varphi - 1}\right)^2 + \left(\frac{(\varphi - 1) - (2\varphi - 1)}{2\varphi - 1}\right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{\varphi^2 - \varphi}{2\varphi - 1}\right)^2 + \left(\frac{-\varphi}{2\varphi - 1}\right)^2} = \sqrt{\frac{\varphi^4 - 2\varphi^3 + \varphi^2 + \varphi^2}{(2\varphi - 1)^2}} = \quad (3.1.11) \\
 &= \sqrt{\frac{\varphi^4 - 2\varphi^3 + 2\varphi^2}{(2\varphi - 1)^2}} = \sqrt{\frac{\varphi^2(\varphi^2 - 2\varphi + 2)}{(2\varphi - 1)^2}} = \\
 &= \frac{\varphi}{2\varphi - 1} \sqrt{\varphi^2 - 2\varphi + 2}
 \end{aligned}$$

Pela Equação (3.8) podemos fazer:

$$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \varphi^2 + 1 = \varphi + 1 + 1 \Rightarrow \varphi^2 + 1 = \varphi + 2. \quad (3.1.12)$$

Temos que:

$$\varphi^3 = \varphi^2 \times \varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi \quad (3.1.13)$$

Assim, podemos fazer:

$$\begin{aligned}
 \varphi^2 - 2\varphi + 2 &= \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2 - 2\varphi + 2)\varphi^2 = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2 + 1 - 2\varphi + 1)\varphi^2 = \\
 &= \frac{1}{\varphi^2}(\varphi + 2 - 2\varphi + 1)\varphi^2 = \frac{1}{\varphi^2}(3 - \varphi)\varphi^2 = \frac{1}{\varphi^2}(3\varphi^2 - \varphi^3) = \\
 &= \frac{1}{\varphi^2}(3\varphi^2 - (1 + 2\varphi)) = \frac{1}{\varphi^2}(3(1 + \varphi) - (1 + 2\varphi)) \quad (3.1.14) \\
 &= \frac{1}{\varphi^2}(3 + 3\varphi - 1 - 2\varphi) = \\
 &= \frac{1}{\varphi^2}(\varphi + 2) = \frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \overline{OC} &= \frac{\varphi}{2\varphi - 1} \sqrt{\varphi^2 - 2\varphi + 2} = \frac{\varphi}{2\varphi - 1} \sqrt{\frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2 + 1)} = \\
 &= \frac{\varphi}{2\varphi - 1} \sqrt{(\varphi^2 + 1)} \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \overline{OD} \quad (3.1.15)
 \end{aligned}$$

Esse resultado mostra que cada retângulo sofre uma contração de $\frac{1}{\varphi}$, pois

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} < 1.$$

Seja, então o sistema de coordenadas polares que possui a origem no ponto O. Tem como eixo imaginário OE eixo real OI. Esses dois eixos são perpendiculares pelo que já foi mostrado. Dessa forma teremos os seguintes pontos: $I(1,0)$, $E\left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)$ e $G\left(\varphi^{-1}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Temos que todos os pontos estão de acordo com a relação apresentada acima e são da forma: $\left(\varphi^n, n\frac{\pi}{2}\right)$ onde n pertence aos números naturais.

Observemos que a curva que passa pelos pontos G, E, I, A é o espiral procurado. Tal curva, em coordenadas polares, tem variação do raio ρ em relação ao argumento θ proporcional ao próprio raio ρ .

Então temos a equação diferencial a seguir tal que os pontos $\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right)$ e $(1,0)$ satisfaça

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \alpha\rho. \quad (3.1.16)$$

Resolvemos então a equação por separação de variáveis.

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \alpha \int d\theta \Rightarrow \ln \rho = \alpha\theta + c$$

Isto é

$$\log_e \rho = \alpha\theta \Rightarrow \rho = ke^{\alpha\theta} \quad (3.1.17)$$

Para o ponto $(\rho, \theta) = (1,0)$ obtemos

$$\rho = ke^{\alpha\theta} \Rightarrow 1 = ke^0 \Rightarrow k = 1. \quad (3.1.18)$$

Para o ponto $(\rho, \theta) = \left(\varphi, \frac{\pi}{2}\right)$ vamos ter:

$$\rho = ke^{\alpha\theta} \Rightarrow \varphi = e^{\alpha\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \ln \varphi = \alpha\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{e}{\pi} \ln \varphi.$$

Portanto:

$$\rho = e^{\alpha\theta} = e^{\frac{2\theta}{\pi} \ln \varphi} = e^{\ln \varphi \frac{2\theta}{\pi}} = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}} \quad (3.1.19)$$

Logo, a equação do espiral para o retângulo cujos lados são 1 e φ é dada por:

$$\rho(\theta) = \varphi^{\frac{2\theta}{\pi}} \quad (3.1.20)$$

3.2 Segmentos áureo no pentágono

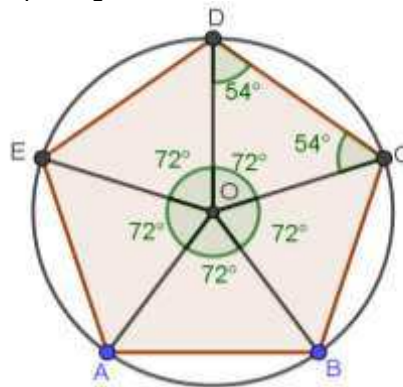
Com a ajuda do número φ , podemos fazer diversas figuras geométricas como foi visto no retângulo Áureo, com ele temos maior facilidade para fazer traços com medidas planas com ângulos e lados iguais.

A figura do pentágono áureo ou pentágono regular, por exemplo, oferece regularidades matemáticas do número áureo.

Para construir este pentagrama, fazemos uma circunferência qualquer, onde dividimos do ponto central (ponto O), em cinco ângulos com 72° . Marcamos os pontos ABCDE, intersecção dos lados dos ângulos com a circunferência.

Conectando os pontos ABCDE vamos obter os segmentos do pentágono áureo (Figura 3.2.1).

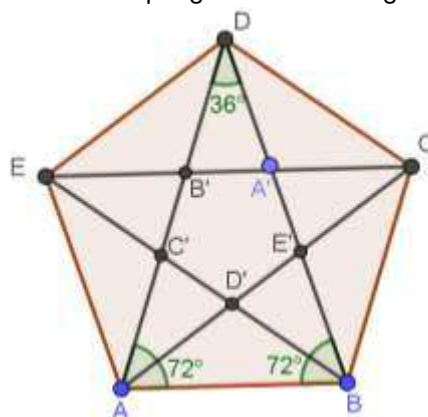
Figura 3.2.1 – Segmento áureo do pentágono



Fonte: O autor, 2024.

Seja o polígono regular $ABCDE$. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é dada por $(n - 2) \cdot 180$, sendo n o número de lados. Assim, a soma das medidas dos ângulos internos do pentágono é igual a 540° . Como o pentágono em questão é regular, então cada ângulo mede 108° . Para os triângulos AED e ACB , temos que $\overline{AE} = \overline{AB}$ e $\overline{ED} = \overline{BC}$ e os ângulos $\widehat{AED}$ e $\widehat{CBA}$ são congruentes de medida igual a 108° . Portanto os triângulos AED e ACB são congruentes pelo caso lado, ângulo, lado.

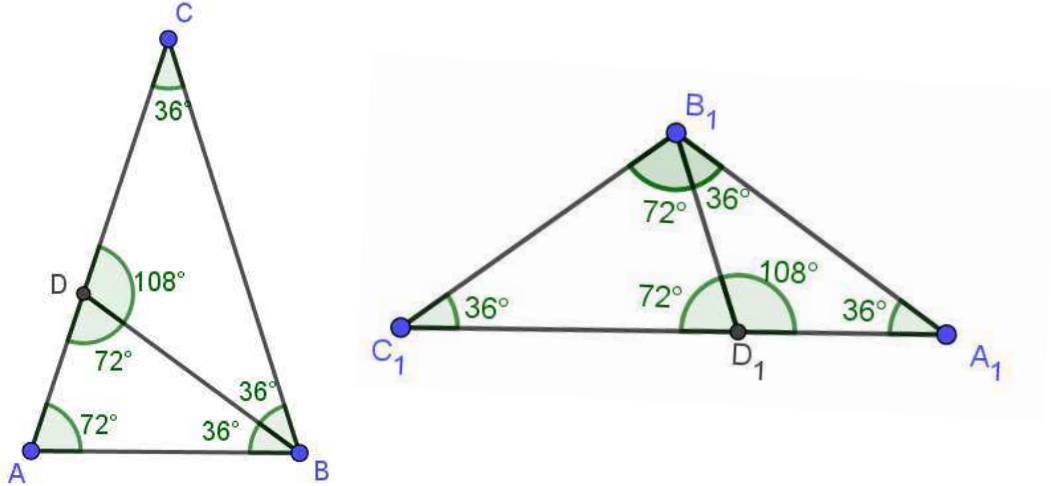
Figura 3.2.2 – Pentagrama ou estrela pitagórica e seus segmentos



Fonte: O autor, 2024.

Vamos chamar o triângulo cujos ângulos têm medidas 36° , 72° e 72° de triângulo acutângulo de ouro e o triângulo cujos ângulos medem 108° , 36° e 36° de triângulo obtusângulo de ouro. Veja a figura

Figura 3.2.3 – Triângulo acutângulo e seus segmentos



Fonte: O autor, 2024.

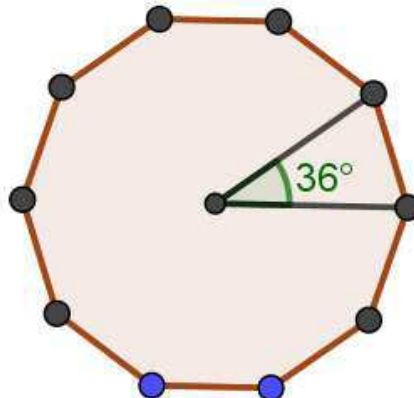
No triângulo acutângulo temos que $AB = CD = y$, $AC = BC = x$ e $AD = x - y$. No triângulo $A_1B_1C_1$ temos que $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = y$, $A_1C_1 = x$ e $B_1D_1 = A_1D_1 = x - y$. Temos que os triângulos ABD é semelhante ao triângulo ABC e o Triângulo $A_1B_1C_1$ é semelhante ao triângulo $A_1B_1D_1$. Assim, temos

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{y}{x-y} = \frac{x}{y} \text{ e } \frac{A_1B_1}{A_1D_1} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} \Rightarrow \frac{y}{x-y} = \frac{x}{y} \quad (3.2.1)$$

A equação acima é idêntica a (3.1) cuja solução é dada pela Equação (3.7), isto é

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{CD} = \frac{x}{y} = \varphi \text{ e } \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{A_1C_1}{C_1D_1} = \frac{x}{y} = \varphi \quad (3.2.2)$$

Figura 3.2.4 – Segmento áureo no decágono



Fonte: O autor, 2024

Onde temos o ângulo total de 360° , dividindo este ângulo por dez (número de ângulos iguais), chegaremos ao resultado do ângulo interno da figura, 36° . E como é um triângulo isósceles os outros dois ângulos medem 72° . Assim, temos o triângulo acutângulo de ouro.

4 OS NÚMEROS DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci nasceu em Pisa na Itália, em 1175, motivo pelo qual ficou conhecido Leonardo de Pisa. Seu pai se chamava Guilielmo Bonnaci. Assim, Fibonacci não é seu verdadeiro sobrenome, pois Fibonacci é o diminutivo de Fillius Bonacci, que significa Filho de Bonnacio. Por ter iniciado seus estudos com professores islâmicos, Fibonacci, aprendeu o sistema hindu-arábico. Escreveu o livro Liber Abbaci (livro do ábaco) em 1202. Encontramos nesse livro o problema de reprodução de coelhos do qual originou a sequência de Fibonacci.

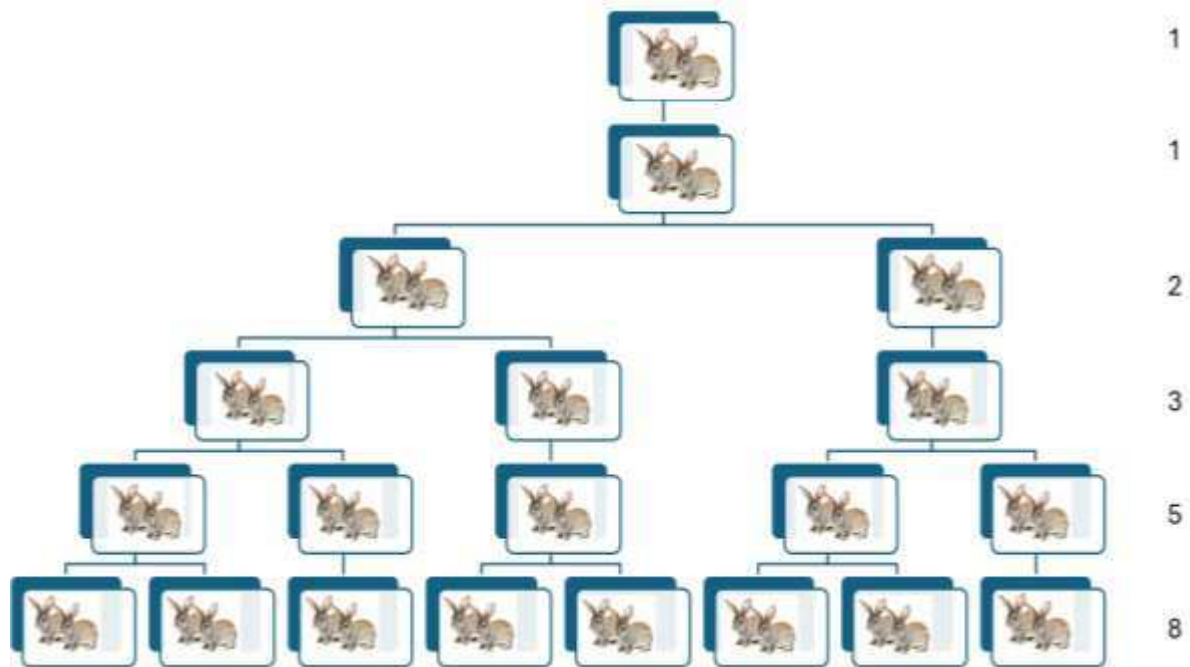
O problema da reprodução de coelhos tem o seguinte enunciado: Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muros por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

Para solucionar esse problema vamos ver a reprodução em cada mês considerando as condições dadas no problema.

- Primeiro mês: temos apenas um casal, pois o mesmo é filhote.
- Segundo mês: ainda temos apenas um casal, mas agora o casal é adulto e fértil.
- Terceiro mês: Temos dois casais, pois o casal anterior gerou um casal de filhotes.
- Quarto mês: Temos três casais, pois o primeiro casal deu à luz a um casal de filhotes e ainda temos o casal de filhotes anterior que agora é adulto e fértil.
- Quinto Mês: Temos 5 casais, pois os dois casais adultos deram origem a dois casais de filhotes e o casal de filhotes anterior ficou adulto e fértil.
- Sexto mês: teremos oito casais de coelhos, pois os três casais adultos deram origem a três casais de filhotes e os dois casais de filhotes anterior ficaram adultos e férteis.
- Sétimo mês: temos um total de 13 casais de coelhos, pois 5 casais de coelhos deram origem a cinco casais de filhotes e os três casais de filhotes anterior ficaram adultos.

Continuando dessa forma obteremos a seguinte sequência onde o número representa a quantidade de coelho e sua posição representa o mês (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144).

Figura 4.1 – Representação da reprodução dos coelhos observada por Leonard Fibonacci



Fonte: O autor, 2024.

Esse resultado motivou Fibonacci a definir a seguinte sequência que hoje é conhecida como sequência de Fibonacci.

Definição 4.1: seja a sequência definida por: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...). Essa sequência chamamos de sequência de Fibonacci e os termos dessa sequência chamam-se número de Fibonacci.

Definição 4.2: Seja f_n o número de Fibonacci que está na posição n . A sequência definida recursivamente por

$$\begin{cases} f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \\ f_1 = f_2 = 1 \end{cases}$$

Chama-se sequência de Fibonacci:

Seguem abaixo alguns resultados importantes relativos à sequência de Fibonacci. Esses resultados podem ser encontrados em Zahn (2011).

Proposição 4.1: Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.

Demonstração. Suponha por absurdo que pra certo n_0 existe um d tal que $m.d.c(f_{n_0}, f_{n_0+1}) = d \neq 1$. Dessa forma vemos que $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0+1}$. Temos que $f_{n_0+1} = f_{n_0} + f_{n_0-1}$ e $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0+1}$, assim $d|f_{n_0-1}$. Vemos também que $f_{n_0} = f_{n_0-1} + f_{n_0-2}$, como $d|f_{n_0}$ e $d|f_{n_0-1}$, então $d|f_{n_0-2}$. Continuando com o mesmo raciocínio chegaremos a $d|f_2$ e $d|f_1$. Portanto, como $f_1 = f_2 = 1$, temos $d|1$, isto é, $d = 1$, o que contradiz que $d \neq 1$. Logo, dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.

Proposição 4.2: Seja f_n a sequência de Fibonacci. Portanto, para todo $n \geq 1$, valem as propriedades a seguir:

i). Soma dos números da sequência

$$\sum_{i=1}^n f_i = f_{n+2} - 1$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução que

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1, \forall n \geq 1$$

a) Para $n = 1$ temos, $f_1 = 1$ e $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$. O que mostra que $f_1 = f_{1+2} - 1$, portanto vale para $n=1$.

b) Suponhamos, por hipótese de indução, que seja válido para um certo número n , isto é,

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1 \quad (4.1)$$

Somando f_{n+1} a ambos os membros de (4.1) temos,

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1} = f_{n+2} + f_{n+1} - 1 \quad (4.2)$$

Por definição temos,

$$f_{n+1} + f_{n+2} = f_{n+3} \quad (4.3)$$

Substituindo (3) em (2) temos,

$$f_1 + f_2 + \dots + f_n + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

o que conclui a demonstração.

ii). Soma dos números ímpares da sequência

$$\sum_{i=1}^n f_{2i-1} = f_{2n}$$

a) Mostraremos primeiro para $n = 1$. Observe que

$$f_{2 \times 1 - 1} = f_1, f_{2 \times 1} = f_2 \text{ e } f_1 = f_2 = 1$$

Isso mostra que é verdadeira a base da indução.

b) Suponhamos que a igualdade seja válida para um certo número n , isto é:

$$f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n} \quad (4.4)$$

Mostraremos que a igualdade também é válida para $n + 1$, isto é

$$f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} + f_{2(n+1)-1} = f_{2(n+1)}$$

Somando f_{2n+1} a ambos os membros de (4.4) temos,

$$f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1} \quad (4.5)$$

Por definição,

$$f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.5), obtemos

$$f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n+2}$$

o que conclui a demonstração.

iii). Soma dos números de ordem par da sequência

$$\sum_{i=1}^n f_{2i} = f_{2n+1} - 1$$

a) Mostraremos primeiro para $n = 1$. Temos que

$$f_{2 \times 1} = f_2 = 1 \text{ e } f_{2 \times 1 + 1} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Portanto, vale a base da indução.

b) Suponhamos que a igualdade é válida para um certo número n , isto é,

$$f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1 \quad (4.7)$$

Vamos mostrar que também é válido para $n + 1$.

Somando f_{2n+2} em ambos os membros de (4.7), obtemos

$$f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} + f_{2n+2} = f_{2n+1} + f_{2n+2} - 1 \quad (4.8)$$

Por definição,

$$f_{2n+1} + f_{2n+2} = f_{2n+3} \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) em (4.8), concluímos que

$$f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} + f_{2(n+1)} = f_{2(n+1)+1} - 1.$$

Isso completa a demonstração.

iv). A soma dos quadrados dos números da sequência

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n \times f_{n+1}$$

a) Vemos que a igualdade é válida para $n = 1$, pois

$$f_1^2 = 1^2 = 1 \text{ e } f_1 \times f_2 = 1 \times 1 = 1$$

Logo vale a base a indução.

b) Suponhamos agora que a igualdade seja válida para um certo número n , ou seja,

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n = f_n \times f_{n+1} \quad (4.10)$$

Mostraremos, então, que também é válido para $n + 1$. De fato, somando f_{n+1}^2 em ambos os membros de (10), obtemos

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n + f_{n+1}^2 = f_n \times f_{n+1} + f_{n+1}^2. \quad (4.11)$$

Note que

$$f_n \times f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) \quad (4.12)$$

Por definição temos,

$$f_n + f_{n+1} = f_{n+2} \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) em (4.12) obtemos

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n + f_{n+1}^2 = f_{n+1} \times f_{n+2}.$$

Isso completa a demonstração.

v) Vale a igualdade $f_{m+n} = f_{m-1} \times f_n + f_m \times f_{n+1}$, $\forall m \geq 1; \forall n > 1$.

Faremos a demonstração por indução sobre m .

a) Para $m = 1$ temos que

$$f_{n+1} = f_{n-1} \times f_1 + f_n \times f_2 = f_{n-1} \cdot 1 + f_n \cdot 1 = f_{n-1} + f_n$$

Para $m = 2$ vamos obter

$$f_{n+2} = f_{n-1} \times f_2 + f_n \times f_3$$

Portanto temos que

$$f_{n+2} = f_{n-1} + 2f_n \quad (4.14)$$

e assim temos

$$f_{n+2} = f_{n-1} + f_n + f_n. \quad (4.15)$$

Logo,

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

O que mostra que é válida a base da indução.

b) Seja $p > 2$. Suponhamos então que a igualdade seja válida para todo q , tal que $2 \leq q \leq p$ e para um certo número n temos

$$f_{n+(p-2)} = f_{n-1} \times f_{p-2} + f_n \times f_{p-1} \quad (4.16)$$

e temos também que

$$f_{n+(p-1)} = f_{n-1} \times f_{p-1} + f_n \times f_p \quad (4.17)$$

Somando membro a membro as duas equações obtemos

$$f_{n+(p-2)} + f_{n+(p-1)} = f_{n-1} \times f_{p-2} + f_n \times f_{p-1} + f_{n-1} \times f_{p-1} + f_n \times f_p \quad (4.18)$$

Dessa forma vamos ter

$$f_{n+(p-2)} + f_{n+(p-1)} = f_{n-1}(f_{p-2} + f_{p-1}) + f_n(f_{p-1} + f_p). \quad (4.19)$$

Por definição, temos

$$f_{n+p} = f_{n-1} \times f_p + f_n \times f_{p+1}.$$

Isso conclui a demonstração.

Proposição 4.3: Sejam $k, n \in \mathbb{N}$, temos que f_{kn} é múltiplo de f_n .

a. Notemos que para $k = 1$ vamos ter $f_n | f_n$. Logo, é válida a base da indução.

b. Suponhamos, então, que seja válido para um certo k , isto é, $f_n | f_{kn}$.

Mostraremos que $f_n | f_{(k+1)n}$.

Aplicando a propriedade v, temos

$$f_{(k+1)n} = f_{kn+n} = f_{kn-1} \times f_n + f_{kn} \times f_{n+1}. \quad (4.20)$$

Dessa forma, como $f_n | f_{kn-1} \times f_n$ e $f_n | f_{kn} \times f_{n+1}$, portanto temos que

$$f_n | f_{(k+1)n}.$$

5 O NÚMERO φ E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

5.1 Potência do número φ

Como foi mostrado nas equações (3.8) e (3.1.13), temos as potências de φ^2 e φ^3 , portanto para outras potências temos:

$$\varphi^3 = \varphi^2 \times \varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi \quad (5.1.1)$$

$$\varphi^4 = \varphi^2 \times \varphi^2 = (1 + \varphi)(1 + \varphi) = 1 + 2\varphi + \varphi^2 = 1 + 2\varphi + 1 + \varphi = 2 + 3\varphi \quad (5.1.2)$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 \times \varphi = (2 + 3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1 + \varphi) = 3 + 5\varphi. \quad (5.1.3)$$

Continuando com o raciocínio anterior teremos:

$$\varphi^6 = 5 + 8\varphi \quad (5.1.4)$$

$$\varphi^7 = 8 + 13\varphi \quad (5.1.5)$$

$$\varphi^8 = 13 + 21\varphi \quad (5.1.6)$$

Com esses resultados podemos observar que chamando $f_0 = 0$, os termos constantes e os coeficientes de φ , formam, na ordem que aparecem a sequência de Fibonacci.

Conjectura: $\varphi^n = f_{n-1} + f_n \times \varphi, \forall n \geq 1$.

a) Mostraremos primeiro para $n = 1$. Assim temos.

$$\varphi^1 = f_0 + f_1 \times \varphi = 0 + 1 \times \varphi = \varphi$$

b) Supomos então que seja válida a igualdade para $n = q$, isto é,

$$\varphi^q = f_{q-1} + f_q \times \varphi.$$

Mostraremos, então, que é válida para $n = q + 1$. temos que:

$$\varphi^{q+1} = \varphi^q \times \varphi. \quad (5.1.7)$$

Assim obteremos:

$$\varphi^q \times \varphi = (f_{q-1} + f_q \times \varphi) \times \varphi \quad (5.1.8)$$

Daí vamos ter:

$$\varphi^{q+1} = (f_{q-1} + f_q \times \varphi) \times \varphi. \quad (5.1.9)$$

e então temos:

$$\varphi^{q+1} = f_{q-1} \times \varphi + f_q \times \varphi^2. \quad (5.1.10)$$

Portanto, substituindo φ^2 por $\varphi + 1$ vamos ter então:

$$\varphi^{q+1} = f_{q-1} \times \varphi + f_q \times (\varphi + 1). \quad (5.1.11)$$

Fazendo a multiplicação, teremos:

$$\varphi^{q+1} = f_{q-1} \times \varphi + f_q \times \varphi + f_q. \quad (5.1.12)$$

Fatorando a expressão obtermos:

$$\varphi^{q+1} = (f_{q-1} + f_q)\varphi + f_q. \quad (5.1.13)$$

Pela Definição 5.2 $f_{q-1} + f_q = f_{q+1}$, portanto, a equação fica

$$\varphi^{q+1} = f_{q+1} \times \varphi + f_q. \quad (5.1.14)$$

Portanto está provada a conjectura.

Proposição 4.3 para todo número natural $n \geq 1$ vale a seguinte igualdade

$$\varphi^n = f_{n-1} + \varphi \times f_n \quad (5.1.15)$$

tal que $f_j, j = 1, 2, 3, \dots$ são número de Fibonacci e $f_0 = 0$.

5.2 Demonstrações que a razão entre termos consecutivos dos números de Fibonnaci tendem para o número φ .

Demonstração 1

Pela Definição 4.2 temos $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ assim podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n}. \quad (5.2.1)$$

Assim vamos ter:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}. \quad (5.2.2)$$

Podemos escrever da seguinte forma:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}. \quad (5.2.3)$$

Escrevemos ainda:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}}. \quad (5.2.4)$$

Obteremos assim:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}}. \quad (5.2.5)$$

Podemos escrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}}. \quad (5.2.6)$$

Desta forma teremos:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-2} + f_{n-3}}{f_{n-2}}}}. \quad (5.2.7)$$

Obteremos então:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}}} = \dots \quad (5.2.8)$$

Assim representamos $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ como uma fração contínua. Portanto, temos a seguinte conjectura:

Conjectura 5.2.1:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}} \rightarrow \varphi, \quad (5.2.9)$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Para provar essa conjectura faremos alguns passos.

Seja x_n a sequência definida por:

$$x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1 \quad (5.2.10)$$

Definimos a função $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}. \quad (5.2.11)$$

Podemos observar que para cada um dos termos da sequência vamos obter:

$$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots \quad (5.2.12)$$

Vemos então que f é decrescente, pois,

$$\begin{aligned} f(a) < f(b) &\Leftrightarrow \frac{a+1}{a} < \frac{b+1}{b} \Leftrightarrow (a+1)b < (b+1)a \Leftrightarrow ab + b < ab + a \\ &\Leftrightarrow a > b \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Conjectura 5.2.2:

$$x_1 < x_3 < x_5 < \dots < x_6 < x_4 < x_2. \quad (5.2.14)$$

Para formamos duas subsequências de x_n , sendo um dos termos pares (x_{2n}) e outra dos termos ímpares (x_{2n-1}) procedemos da seguinte forma:

Seja $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = (f \circ f)(x), \quad (5.2.15)$$

isto é,

$$g(x) = f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x} + 1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}. \quad (5.2.16)$$

Começando por x_1 teremos o seguinte:

$$g(x_1) = f(f(x_1)) = f(x_2) = x_3, \quad (5.2.17)$$

$$g(x_3) = f(f(x_3)) = f(x_4) = x_5, \dots, \quad (5.2.18)$$

$$\dots, g(x_{2n-1}) = x_{2n+1}, \dots \quad (5.2.19)$$

Seguindo o mesmo raciocínio iremos ter:

$$x_4 = g(x_2), x_6 = g(x_4), \dots, x_{2n+2} = g(x_{2n}), \dots \quad (5.2.20)$$

Podemos dizer que g é crescente, pois,

$$\begin{aligned} g(a) < g(b) &\Leftrightarrow \frac{2a+1}{a+1} = \frac{2b+1}{b+1} \Leftrightarrow 2ab + 2a + b + 1 = \\ &= 2ab + 2b + a + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Para provarmos a Conjectura 5.2.2, primeiro provaremos algumas afirmações:

Primeira afirmação: $x_{2n-1} < x_{2n+1}$, $\forall n$, ou seja, a subsequência dos termos ímpares é crescente.

Provaremos por indução.

a) Para $n = 1$ temos que $x_{2 \times 1 - 1} = x_1 = 1$ e $x_{2 \times 1 + 1} = x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Como $1 < \frac{3}{2}$, então vale a base da indução.

b) Vamos supor agora que a afirmação seja válida para um certo n . Mostraremos que vale para $n + 1$.

$$\begin{aligned} x_{2n-1} < x_{2n+1} &\Rightarrow g(x_{2n-1}) < g(x_{2n+1}) \Rightarrow \\ &x_{2n+1} < x_{2n+3}. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Isso prova a primeira afirmação

Segunda afirmação: $x_{2n} > x_{2n+2}$, $\forall n$, ou seja, a subsequência dos termos pares é decrescente.

a) Para $n = 1$, temos $x_{2 \times 1} = x_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ e $x_{2n+2} = x_{2 \times 1 + 2} = x_4 = 1 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. como $2 > \frac{5}{3}$, logo vale a base da indução.

b) Suponhamos que a igualdade seja válida para um certo n mostraremos que é válida para $n + 1$.

$$x_{2n} > x_{2n+2} \Rightarrow g(x_{2n}) > g(x_{2n+2}) \Rightarrow g(x_{2n+2}) > g(x_{2n+4}) \quad (5.2.23)$$

Terceira afirmação: $x_{2n-1} < x_{2n}$, $\forall n$, ou seja, todo termo ímpar da sequência x_n é menor que o termo par subsequente.

a) Para $n = 1$, temos $x_{2 \times 1 - 1} = x_1 = 1$ e $x_{2 \times 1} = x_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$. Como $1 < 2$, então vale a base da indução.

b) Suponhamos então que a afirmação seja válida para um certo n . Mostraremos que também é válida para $n + 1$. De fato temos:

$$x_{2n-1} < x_{2n} \Rightarrow g(x_{2n-1}) < g(x_{2n}) \Rightarrow x_{2n+1} < x_{2n+2} \quad (5.2.24)$$

Isso prova a afirmação.

As afirmações anteriores provam a Conjectura 5.2.2.

Daí podemos notar que a subsequência x_{2n-1} é limitada superiormente por $x_2 = 2$. Assim, existe L_1 tal que $L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} x_{2n-1}$.

Da mesma forma podemos observar que x_{2n} é decrescente e limitada inferiormente por $x_1 = 1$. Assim, existe L_2 tal que $L_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} x_{2n}$.

Temos que

$$x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) = \frac{2x_{2n-1}+1}{x_{2n-1}+1} \quad (5.2.25)$$

Colocando o limite, obtemos:

$$L_1 = \frac{2L_1+1}{L_1+1} \quad (5.2.26)$$

Multiplicando temos

$$L_1^2 + L_1 = 2L_1 + 1 \quad (5.2.27)$$

Portanto, vamos obter

$$L_1^2 - L_1 + 1 = 0 \quad (5.2.28)$$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos

$$L_1 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \quad (5.2.29)$$

$$L_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (5.2.30)$$

Portanto,

$$L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \quad (5.2.31)$$

De forma análoga temos:

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}) = \frac{2x_{2n}+1}{x_{2n}+1}. \quad (5.2.32)$$

Colocando os limites vamos obter:

$$L_2 = \frac{2L_2+1}{L_2+1}. \quad (5.2.33)$$

O que implica que

$$L_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi. \quad (5.2.34)$$

Dessa forma vemos que $L_1 = L_2 = \varphi$.

Logo,

$$\begin{cases} x = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \end{cases} \rightarrow \varphi \quad (5.2.35)$$

ou seja,

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{2}{1+\frac{1}{1+\dots}} \rightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (5.2.36)$$

O que mostra que a conjectura 5.2.1 também é verdadeira.

Demonstração 2

Para essa demonstração utilizaremos a fórmula de Binet.

Teorema 5.2.1 (Fórmula de Binet). Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad (5.2.37)$$

onde n é o n – ésimo número de Fibonacci.

Provaremos por indução sobre n .

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2\sqrt{5}}{2} \right] = 1 \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

Suponhamos agora que (5.2.37) é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Provaremos que também é válida para $n + 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostraremos agora que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \varphi$.

Seja $(X_n)_n$ uma sequência definida por $(X_n)_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$

Pela fórmula de Binet dada pela Equação (5.2.37), temos

$$\begin{aligned}
 X_n = \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} = \\
 &= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \right)} = \\
 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n}
 \end{aligned} \tag{5.2.40}$$

Temos que $0 < \left| \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right| < 1$, portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0 \tag{5.2.41}$$

Dessa forma, aplicando o limite na Equação 4.1.57, teremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \tag{5.2.42}$$

Como queríamos provar.

Essas últimas demonstrações são apresentadas por Caneiro, Nobokite e Fernandes (2023).

6 APLICAÇÕES

6.1 O número φ e a trigonometria

Zahn (2011) trabalha as aplicações do número φ na trigonometria da seguinte forma:

➤ Resolver a equação $\operatorname{tg} x = \cos x$ com $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Notemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = \cos x &\Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \\ &= 1 - \operatorname{sen}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Resolvendo a equação temos que

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi} \quad (6.1.2)$$

e

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\varphi \quad (6.1.3)$$

Podemos descartar essa última raiz, pois $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

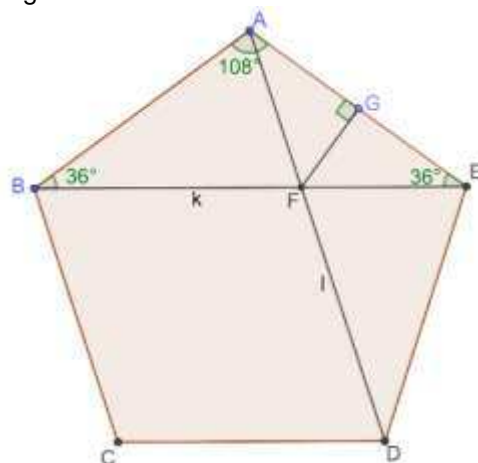
Mostramos aí uma relação entre o número φ e o seno do arco x .

➤ Determinando o $\cos 36^\circ$

Podemos observar o pentágono regular a seguir (Figura 6.1.1). Temos que a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dado por:

$$a_i = \frac{180^\circ(n-2)}{n}. \quad (6.1.4)$$

Figura 6.1.1 – Pentágono regular



Fonte: O autor, 2024.

Assim, para o pentágono teremos

$$a_i = \frac{180^\circ(5 - 2)}{5} = 108^\circ. \quad (6.1.5)$$

Considerando o triângulo isósceles AEB da figura, sendo $\hat{A}BE = \hat{B}EA = \alpha$ e sabendo que o ângulo $\hat{B}AE$ é 108° , pela soma dos ângulos internos do triângulos, vamos obter:

$$\alpha + 108^\circ + \alpha = 180 \Leftrightarrow \alpha = 36^\circ. \quad (6.1.6)$$

Observamos agora na figura a o triângulo AEF semelhante ao triângulo AEB . Teremos então:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}}. \quad (6.1.7)$$

Fazendo a multiplicação iremos obter

$$\overline{AE} \times \overline{AB} = \overline{BE} \times \overline{EF}. \quad (6.1.8)$$

Como $\overline{BE} = \overline{BF} + \overline{FE}$ e $\overline{AE} = \overline{AB}$, podemos escrever

$$\overline{AB}^2 = (\overline{BF} + \overline{FE}) \times \overline{FE}. \quad (6.1.9)$$

Dessa forma vamos ter

$$\overline{AB}^2 = \overline{BF} \times \overline{FE} + \overline{FE}^2. \quad (6.1.10)$$

Dividindo a igualdade acima por $\overline{FE}$ teremos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FE}} \times \overline{AB} = \overline{BF} + \overline{FE}. \quad (6.1.11)$$

Dividimos agora a equação acima por $\overline{AB}$. Sendo $\overline{AB} = \overline{BF}$ a equação fica da seguinte forma:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} = 1 + \frac{\overline{FE}}{\overline{BF}}. \quad (6.1.12)$$

Chamamos agora $\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} = y$, podemos escrever:

$$y = 1 + \frac{1}{y}. \quad (6.1.13)$$

Portanto teremos:

$$y^2 - y - 1 = 0. \quad (6.1.14)$$

Assim, resolvendo a equação vamos ter

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \quad (6.1.15)$$

Como y é positivo, então

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi. \quad (6.1.16)$$

Isso mostra que o ponto F divide o seguimento $\overline{BE}$ na razão áurea, pois $\frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} = \varphi$.

Observando agora o triângulo retângulo FGE o qual é reto em G , temos que $\overline{AG} = \overline{GE}$. Utilizando a trigonometria no triângulo retângulo e sendo $\overline{AE} = \overline{BF}$ vamos ter:

$$\cos(\widehat{GEF}) = \cos 36^\circ = \frac{\overline{EG}}{\overline{FE}} = \frac{\frac{\overline{AE}}{2}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BF}}{2} \times \frac{1}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FE}} \times \frac{1}{2} = \frac{\varphi}{2}. \quad (6.1.17)$$

➤ Determinando o $\text{sen}18^\circ$

Temos as seguintes relações trigonométricas:

$$\text{sen}2a = 2\text{sen}a \cos a \quad (6.1.18)$$

e

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a = 1 - 2\text{sen}^2 a. \quad (6.1.19)$$

Sendo $a = 18^\circ$, podemos escrever:

$$\text{sen}36^\circ = 2\text{sen}18^\circ \cos 18^\circ \quad (6.1.20)$$

e

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\text{sen}^2 18^\circ. \quad (6.1.21)$$

Além disso, para o ângulo de 72° , temos:

$$\text{sen}72^\circ = 2\text{sen}36^\circ \cos 36^\circ. \quad (6.1.22)$$

Substituindo os valores de $\text{sen}36^\circ$ e $\cos 36^\circ$ na equação acima, vamos ter:

$$\text{sen}72^\circ = 2(2\text{sen}18^\circ \cos 18^\circ)(1 - 2\text{sen}^2 18^\circ). \quad (6.1.23)$$

Assim,

$$\text{sen}72^\circ = 4\text{sen}18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2\text{sen}^2 18^\circ). \quad (6.1.24)$$

Observando que $\text{sen}72^\circ = \cos 18^\circ \neq 0$ podemos substituir na igualdade anterior.

Assim, teremos:

$$\cos 18^\circ = 4\text{sen}18^\circ \cos 18^\circ (1 - 2\text{sen}^2 18^\circ). \quad (6.1.25)$$

Dividindo os dois membros da equação acima por $\cos 18^\circ$, vamos obter:

$$1 = 4\text{sen}18^\circ (1 - 2\text{sen}^2 18^\circ). \quad (6.1.26)$$

Fazendo $\text{sen}18^\circ = y$, escrevemos:

$$1 = 4y(1 - 2y^2) \Rightarrow 8y^3 - 4y + 1 = 0. \quad (6.1.27)$$

Para resolver essa equação podemos utilizar primeiramente o método das raízes racionais:

Sejam p e q primos entre si com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}_+$, sendo p divisor de 1 e q divisor de 8, assim temos os seguintes números de $\frac{p}{q}$: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}$. Podemos observar que $\frac{1}{2}$ é raiz da equação. Portanto, podemos escrever:

$$(y - \frac{1}{2})(8y^2 + 4y - 2) = 0 \quad (6.1.28)$$

Como $y = \frac{1}{2}$ não satisfaz porque o ângulo cujo o seno é igual a $\frac{1}{2}$ é o ângulo de 30° , nos resta então verificar a outra possibilidade resolvendo a equação $8y^2 + 4y - 2 = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} y &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 8 \times (-2)}}{2 \times 8} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{16} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{16} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}. \end{aligned} \quad (6.1.29)$$

Como o seno de 18° é positivo, segue que

$$\text{sen}18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2\varphi}. \quad (6.1.30)$$

6.2 O número φ e os números complexos

Seja $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária dos números complexos.

Mostraremos que $\text{sen}(i \ln \varphi) = \frac{i}{2}$.

Temos a relação de Euler

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \text{sen} \alpha. \quad (6.2.1)$$

Então para $-\alpha$ vamos ter

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \text{sen} \alpha. \quad (6.2.2)$$

Subtraindo membro a membro as duas equações anteriores, teremos:

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \text{sen} \alpha \Rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}. \quad (6.2.3)$$

Assim, para $\alpha = i \ln \varphi$, vamos ter:

$$\text{sen}(i \ln \varphi) = \frac{e^{i \times i \ln \varphi} - e^{-i \times i \ln \varphi}}{2i} = \frac{e^{-\ln \varphi} - e^{\ln \varphi}}{2i}. \quad (6.2.4)$$

Dessa forma, utilizando as propriedades do logaritmo, teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(i \ln \varphi) &= \frac{e^{\ln \varphi^{-1}} - e^{\ln \varphi}}{2i} = \frac{e^{\ln \varphi^{-1}} - e^{\ln \varphi}}{2i} = \frac{\frac{1}{\varphi} - \varphi}{2i} = \\ &= \frac{1 - \varphi^2}{\varphi} \times \frac{1}{2i}. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Temos que $\varphi^2 = 1 + \varphi$. Assim, obtemos:

$$\operatorname{sen}(i \ln \varphi) = \frac{1 - (1 + \varphi)}{2\varphi i} = \frac{-\varphi}{2\varphi i} = \frac{-1}{2i}. \quad (6.2.6)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por i , obteremos:

$$\operatorname{sen}(i \ln \varphi) = \frac{-1}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{2i^2} = \frac{i}{2}. \quad (6.2.7)$$

O que conclui a demonstração.

6.3 A sequência de Fibonacci e Progressão Geométrica

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das sequências de Fibonacci, Silva (2018) mostra que $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial de dimensão dois.

Lema 6.2.1 Dadas $(u_n)_n$ e $(v_n)_n \in \mathcal{F}$, então $(u_n + v_n)_n \in \mathcal{F}$ e $(\alpha u_n)_n \in \mathcal{F}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração

$$\begin{aligned} \text{Sejam as sequências } (s_n)_n &= (u_n + v_n)_n \text{ e } (t_n)_n = (\alpha u_n)_n. \text{ Temos que} \\ s_n &= u_n + v_n = (u_{n-1} + u_{n-2}) + (v_{n-1} + v_{n-2}) = (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n-2} + v_{n-2}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \end{aligned}$$

e

$$t_n = \alpha u_n = \alpha(u_{n-1} + u_{n-2}) = \alpha u_{n-1} + \alpha u_{n-2} = t_{n-1} + t_{n-2},$$

logo $(t_n)_n$ e $(s_n)_n$ são sequências de Fibonacci.

Dadas as operações $(u_n)_n + (v_n)_n = (u_n + v_n)_n$ e $\alpha(u_n)_n = \alpha u_n$, Silva (2,18) mostra que $\mathcal{F}$ é um espaço vetorial.

Teorema 6.2.1 $\dim \mathcal{F} = 2$

Demonstração

Vamos encontrar dois vetores $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ em $\mathcal{F}$ de forma que $\{(u_n)_n, (v_n)_n\}$ seja base de $\mathcal{F}$, ou seja, para todo $(f_n)_n \in \mathcal{F}$, existem $a, b \in \mathbb{R}$, sendo a e b únicos, tais que $f_n = au_n + bv_n$. Assim temos:

$$\begin{cases} f_1 = au_1 + bv_1 \\ f_2 = au_2 + bv_2 \end{cases} \quad (6.2.1)$$

Vemos que o sistema **(6.2.1)** é possível e determinado se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ou seja, $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ não podem ser proporcionais. Podemos notar que as sequências $(1,1,2,3,5,8, \dots)$ e $(0,1,1,2,3,5,8, \dots)$ são de Fibonacci mas não são proporcionais, podendo assim, formar uma base de $\mathcal{F}$. Dessa forma, $\mathcal{F}$ tem dimensão 2.

Resolvendo o sistema (6.2.1), obtemos:

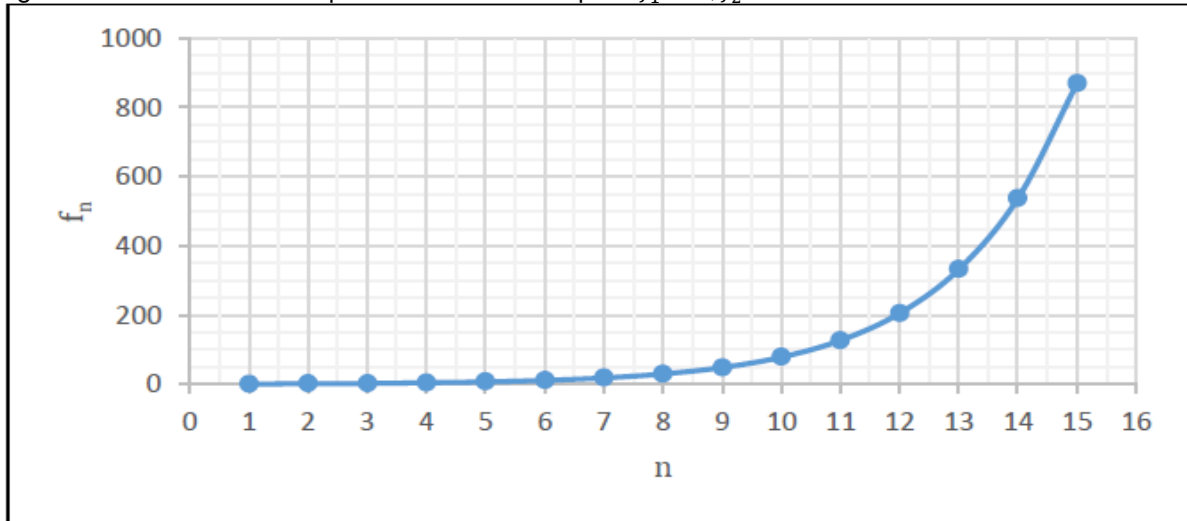
$$a = \frac{f_1 v_2 - f_2 v_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \text{ e } b = \frac{f_2 u_1 - f_1 u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1} \quad (6.2.2)$$

Segue que

$$f_n = au_n + bv_n \quad (6.2.3)$$

Observemos que o gráfico de uma função de Fibonacci se assemelha ao gráfico da função exponencial. (Figura 6.2.1)

Figura 6.2.1 - Gráfico da sequência de Fibonacci para $f_1 = 1, f_2 = 2$



Fonte: Silva (2018).

Em Zahn (2011), vemos que uma sequência é sequência de Fibonacci quando obedece a lei recursiva $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$. Assim, seja $f_n = q^n$, temos uma progressão geométrica será uma sequência de Fibonacci quando, e somente quando

$$q^{n+1} = q^n + q^{n-1}, \forall n \geq 2 \quad (6.2.4)$$

Podemos dividir (6.2.4) por $q^{n-1} \neq 0$, obtendo, assim, a equação

$$q^2 = q + 1 \quad (6.2.5)$$

cujas raízes são

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi. \quad (6.2.6)$$

Portanto, Silva (2018), demonstra que as sequências $(\varphi^{n-1})_n$ e $((1 - \varphi)^{n-1})_n$ são de Fibonacci, onde os termos gerais são funções apenas de n .

Temos que $\varphi \neq 1 - \varphi$ e, além disso, φ e $1 - \varphi$ não são proporcionais, portanto, são linearmente independentes, assim, formam uma base de $\mathcal{F}$. Assim

$$f_n = a\varphi^{n-1} + b(1 - \varphi)^{n-1} \quad (6.2.7)$$

Dessa forma podemos formar, assim, o sistema.

$$\begin{cases} f_1 = a + b \\ f_2 = a\varphi + b(1 - \varphi) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$a = \frac{f_1(1-\varphi)-f_2}{1-2\varphi} \text{ e } b = \frac{f_2-\varphi f_1}{1-2\varphi}. \quad (6.2.8)$$

Substituindo (6.2.8) em (6.2.7) e simplificando, iremos obter

$$f_n = \frac{(f_1 + \varphi f_2)\varphi^{n-2} - (f_2 - \varphi f_1)(1 - \varphi)^{n-1}}{\sqrt{5}} \quad (6.2.9)$$

Como queríamos mostrar.

Em Silva (2018), vemos que, sendo $|1 - \varphi| < 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \varphi)^{n-1} = 0$, assim, para valores muito grandes de n , temos

$$f_n \approx \frac{(f_1 + \varphi f_2)\varphi^{n-2}}{\sqrt{5}} \quad (6.2.10)$$

Dessa forma, o erro é

$$\left| \frac{(f_2 - \varphi f_1)(1 - \varphi)^{n-1}}{\sqrt{5}} \right| \quad (6.2.11)$$

Pela Equação (3.10)

$$\left| \frac{(f_2 - \varphi f_1)(1 - \varphi)^{n-1}}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{(f_2 - \varphi f_1)}{\sqrt{5}} \right| \varphi^{1-n} \quad (6.2.12)$$

Sendo $\varepsilon > 0$, a tolerância para se calcular f_n , temos

$$\left| \frac{(f_2 - \varphi f_1)}{\sqrt{5}} \right| \varphi^{1-n} > \varepsilon \quad (6.2.13)$$

Assim, para os valores de n , temos

$$n > 1 - \frac{\ln \varepsilon + 0,5 \ln 5 - \ln |f_2 - \varphi f_1|}{\ln \varphi} \quad (6.2.14)$$

Vamos denotar por $\llbracket x \rrbracket$ o inteiro mais próximo de x . Observando a sequência original $(f_n)_n = (1, 1, 2, 3, 5 \dots)$, temos que para o erro de cálculo seja menor do que 0,5, o valor de n deve ser necessariamente maior que $-0,23$. O que implica que

$$f_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor \quad (6.2.15)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

A Equação (6.2.15) descreve todos os termos da sequência original de Fibonacci $(f_n)_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots)$. Por exemplo, podemos determinar o décimo termo dessa sequência pondo $n = 10$.

$$f_{10} = \left\lfloor \frac{\varphi^{10}}{\sqrt{5}} \right\rfloor = 55,00363587$$

cujo inteiro mais próximo é 55, o décimo termo da sequência.

6.4 O número áureo em seres vivos

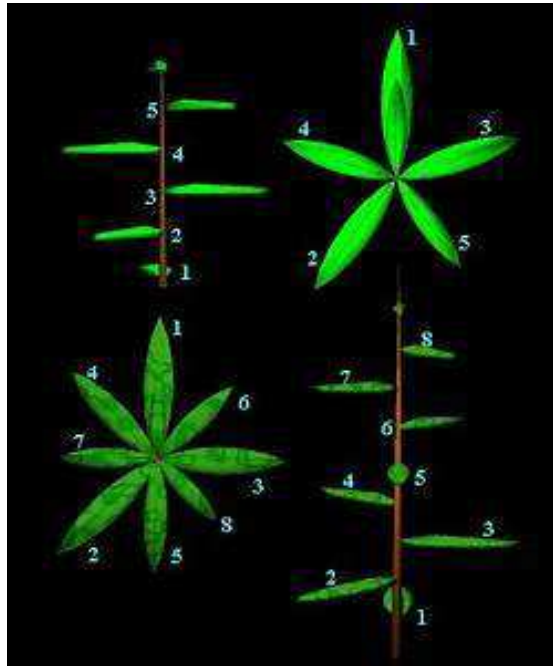
A espiral de Fibonacci é utilizada como um padrão que inspira beleza e qualidade a partir de formas específicas. Estas formas e padrões também podem ser encontradas frequentemente na natureza. As plantas, os animais e o próprio ser humano possuem uma estrutura em sua formação que obedecem a uma ordem que os levam à razão de ouro.

As folhas das plantas, por exemplo, nascem em posições e espaços bem regulares, como uma forma natural de melhorar a sua exposição ao sol e à chuva, garantindo uma distribuição adequada de nutrientes. Na botânica, esse fenômeno é chamado de *phyllotaxis* (que em grego significa “arranjo de folhas”), ou filotaxia conforme demonstrado na Figura 6.4.1.

A sequência do crescimento das folhas foi estudada pelos matemáticos franceses Douady e Couder no ano de 1993. A partir desses estudos concluiu-se que essa sequência forma o ângulo $222^\circ 29' 34''$ e foi chamado de ângulo “ótimo”, justamente porque ao crescer formando tais ângulos favorece o desenvolvimento saudável da planta.

Traça-se uma espiral que passe pela base verticalmente acima do ponto de partida. Tomemos p como o número de voltas da espiral e q como o número de bases de folhas pelas quais a espiral passou (excluindo-se a primeira). Então p/q é uma fração característica da planta, ou seja, a divergência das folhas. Tanto o numerador como o denominador desta fração têm tendência a ser membros da sequência de Fibonacci: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots$ (HUNTLEY, 1985).

Figura 6.4.1 – Filotaxia



Fonte: Disponível em: <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/natureza.htm>>. Acesso em: Acesso em: 25/nov./2024.

Nos girassóis (em especial nos girassóis do campo), também é possível notar essa sequência no formato em que se distribuem as suas sementes. Elas nascem em padrões com sentidos opostos, onde o número de curvas é diferente entre si, uma vez que é comum observar que se o núcleo da flor tiver 21 curvas do lado esquerdo, haverá 34 do lado direito, quando existem 34 fileiras espirais num sentido horário, haverá 55 no sentido anti-horário e assim por diante, formando a sequência Fibonacci que varia de acordo com o tamanho dela (Figura 6.4.2).

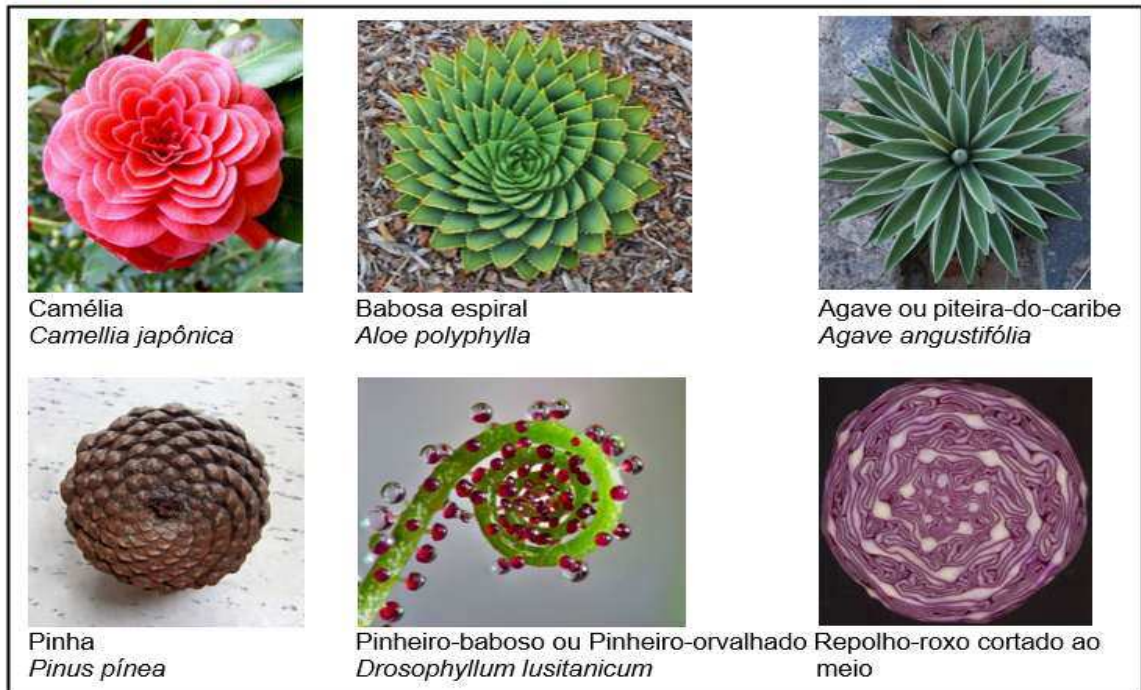
Figura 6.4.2 – Sequência de Fibonacci no Girassol



Fonte: Disponível em: <<https://super.abril.com.br/blog/supernovas/o-girassol-e-a-sequencia-de-fibonacci/>>. Acesso em: 26/nov./2024.

É possível perceber padrões similares também em outras espécies de plantas, tais como demonstrado na Figura 6.4.3.

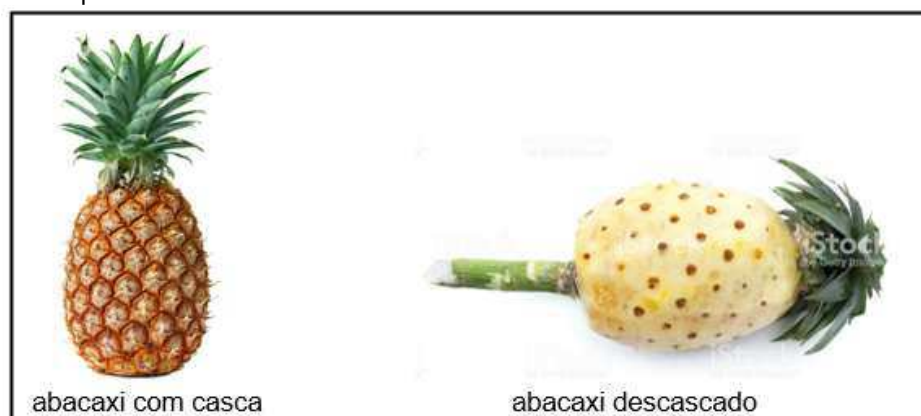
Figura 6.4.3 – Sequência de Fibonacci em diversas espécies de plantas



Fonte: Disponível em: <<https://www.pensamentoverde.com.br/meio-ambiente/geometria-milimetrica-das-plantas-e-sequencia-fibonacci/>> (adaptado). Acesso em: 26/nov./2024.

No abacaxi, também é possível perceber a presença da sequência de Fibonacci. As espirais que se formam em direções opostas normalmente possuem o número de lados iguais a 13, 21 e 34. Também é possível perceber este padrão retirando a casca da fruta (Figura 6.4.4).

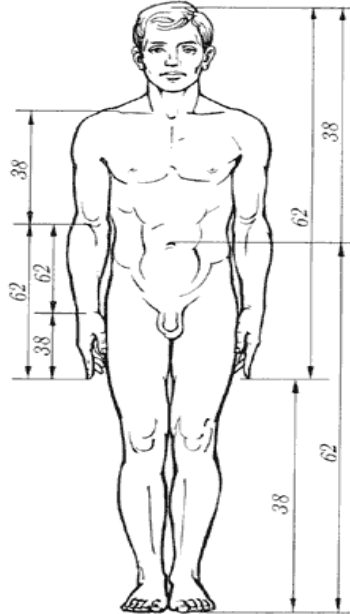
Figura 6.4.4 – Sequência de Fibonacci no abacaxi



Fonte: Disponível em: <<https://www.hortifruti.com.br/abacaxi-organico-unidade/p>> (Adaptado). Acesso em: 26/nov./2024.

Neste sentido, se uma pessoa de tamanho considerado médio, dividir a sua altura pela distância entre seu umbigo e sua cabeça, o resultado dessa divisão será em torno de 1,618, o nosso número áureo (Figura 6.4.6).

Figura 6.4.6 – Sequência de Fibonacci e o corpo humano

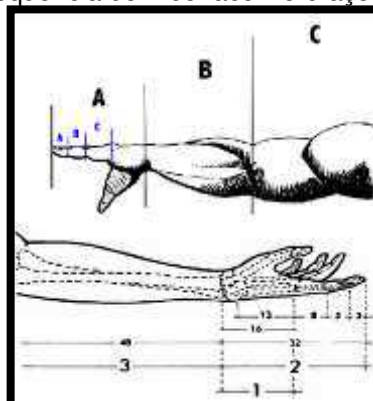


Fonte: Disponível em: <<http://www.amtrader.com.br/artigos/fibonacci-e-suas-aplicacoes-praticas/>>. Acesso em: 30/nov./2024.

Ao dividirmos 1,83m (altura total C) por 1,131m (distância da sola dos pés ao umbigo U), obteremos como razão, o número de ouro. Também obteremos esse número dividindo a distância da testa ao queixo (X), pela distância da orelha ao queixo (Y). Assim também acontecerá, ao relacionarmos o comprimento total do braço (B) com a distância do cotovelo à ponta do dedo médio (D). (FERRER, 2024).

Outra forma de encontrar tal proporção seria ao medir o braço inteiro de um indivíduo dividindo do comprimento do cotovelo ao dedo (Figura 6.4.7).

Figura 6.4.7 – Demonstração da sequência de Fibonacci no braço humano.

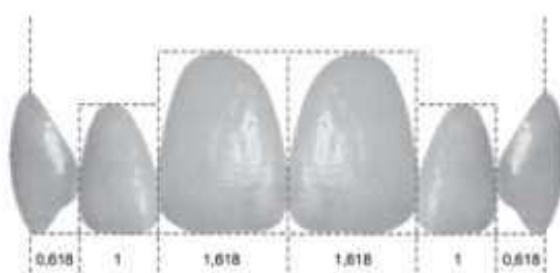


Fonte: Disponível em: <<https://www.raciociniocristao.com.br/2014/05/digitais-criador/>>. Acesso em: 30/nov./2024.

Da mesma forma, se observarmos o formato dos dentes humanos vistos de frente podemos perceber que também são proporcionais (Figura 6.4.8).

Os dentes vistos frontalmente, [...], estão na proporção áurea um em relação ao outro. Por exemplo, a largura do incisivo central está proporcional à largura do incisivo lateral, assim como o incisivo lateral está proporcional ao canino, e o canino ao primeiro pré-molar. O segmento “incisivo central até o primeiro pré-molar” se encontra na proporção áurea em relação ao canto da boca. A altura do incisivo central está na proporção áurea em relação à largura dos dois dentes centrais (retângulo de ouro). (RODRIGUES, 2008)

Figura 6.4.8 – Os dentes e a proporção áurea



Fonte: Disponível em: <<https://www.ortoblog.com/o-numero-de-ouro-a-proporcao-aurea-o-segredo-da-beleza-mito-ou-verdade/>>. Acesso em: 30/nov./2024.

6.6 O número áureo na arte

Sendo a sequência de Fibonacci vista como um padrão que representa beleza e perfeição, é de esperar que artistas dos mais diversos segmentos quisessem e tentassem utilizá-la para a sua produção artística, uma vez que ela pode conter as propriedades estéticas necessárias para tornar uma obra de arte visualmente perfeita.

6.6.1 O número áureo na pintura

Podemos notar a utilização do número áureo em várias obras de artistas como Piet Mondrian, Candido Portinari, Michelangelo, Salvador Dalí, Albrech Dürer, Leonardo da Vinci, Sandro Botticelli, Joaquín Torres-García, entre outros. Ressaltaremos aqui algumas obras de da Vinci, Botticelli e Joaquín Torres-García que têm como característica a utilização de conceitos matemáticos para a confecção de suas obras.

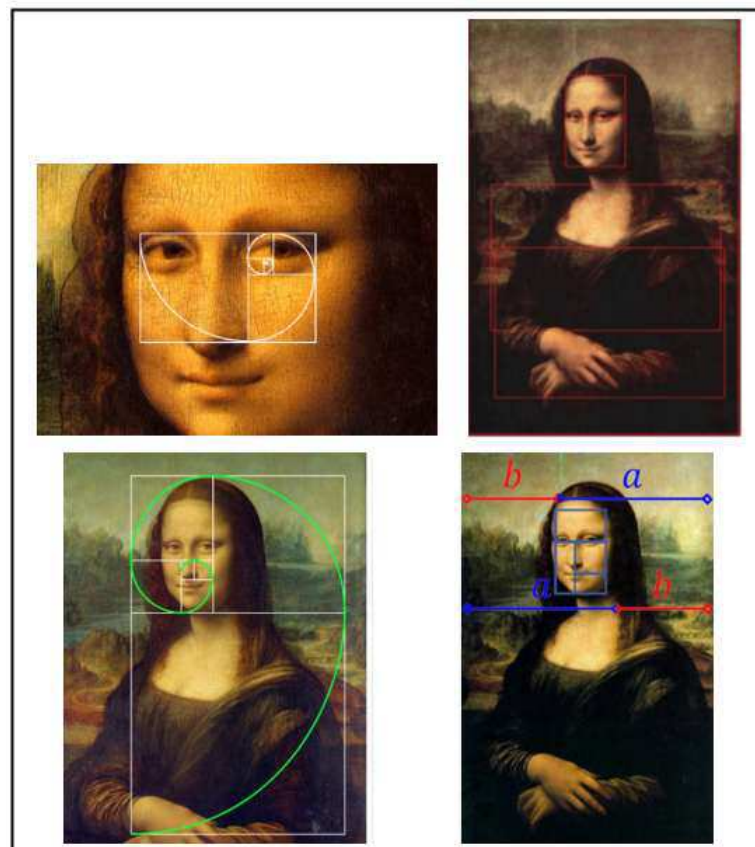
Leonardo da Vinci é conhecido por ser um gênio nas mais diversas áreas à qual se dedicou durante o Renascimento obtendo grande destaque pela produção

de suas telas ao utilizar estruturas proporcionais. Não se sabe ao certo se ele tinha realmente o conhecimento ou estudo a respeito do número áureo e as propriedades do retângulo áureo, acredita-se que ele apenas observava e colocava em prática o que queria pintar.

Entre seus ilustres trabalhos estão o Homem Vitruviano já citado neste artigo, e também seu mais famoso quadro a Mona Lisa (Figura 6.6.1.1), retratada entre os anos de 1503 e 1506, pintados a óleo sobre madeira de álamo, em exposição no Museu do Louvre em Paris na França.

Objetivando sempre a perfeição em seus quadros, da Vinci utiliza retângulos áureos como uma forma de garantir simetria e equilíbrio. O rosto retratado na pintura possui um enquadramento perfeito causando a impressão de que ela está nos observando, não importa por qual lado se olhe a pintura. Nota-se que a Mona Lisa está diretamente ligada à sequência de Fibonacci, onde nas próprias dimensões do quadro é formado um retângulo áureo.

Figura 6.6.1.1 – A proporção áurea na obra A Mona Lisa de Leonardo da Vinci



Fonte: Disponível em: <<https://aledesigner.com.br/os-mitos-da-proporcao-aurea/>>. Acesso em: 30/nov./2024.

Em muitas outras obras deste artista pode ser encontrada a utilização de proporções áureas para a sua composição, como é o caso das obras A Última Ceia, A Anunciação, A Virgem dos Rochedos, Uma Cabeça de Ancião e muitas outras.

Figura 6.6.1.2 – A proporção áurea na obra de Leonardo da Vinci



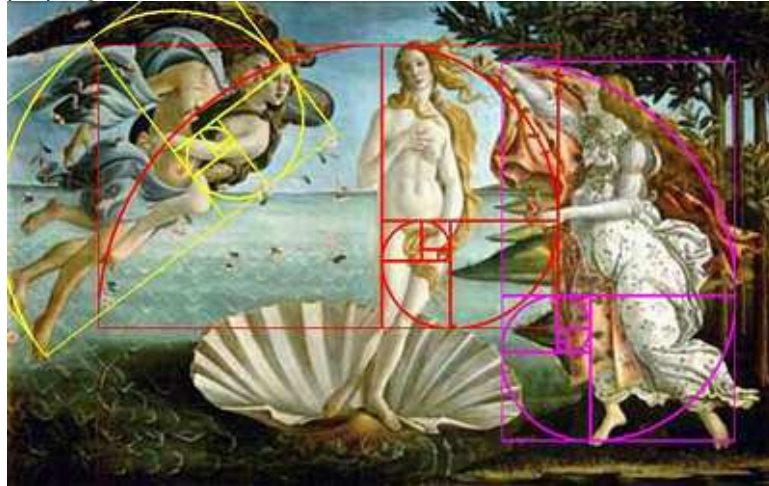
Fonte: Disponível em: <<https://pt.slideshare.net/slideshow/leonardo-da-vinci-proporo-urea-presentation/794954#9>> (Adaptado). Acesso em: 30/nov./2024.

Sobre a composição da obra Uma Cabeça de Ancião, Lívio (2006) conclui que:

(...) Embora a grade superposta deixe muito poucas dúvidas de que Leonardo estava realmente interessado nas várias proporções da face, é muito difícil extrair qualquer conclusão definitiva desse estudo. O retângulo no meio, à esquerda, por exemplo, é aproximadamente um retângulo áureo, mas as linhas estão desenhadas de modo tão grosseiro, que não podemos ter certeza.

Assim como Leonardo da Vinci, outros artistas também lançaram mão da proporção áurea como um recurso que atribuísse harmonia às suas composições artísticas. É o caso de Sandro Botticelli com sua obra chamada “O Nascimento de Vênus” (Figura 6.6.1.3) que foi produzida entre os anos de 1484 e 1486, onde vemos que foi utilizada o retângulo áureo para posicionar os personagens em perfeita harmonia.

Figura 6.6.1.3 – A proporção áurea na obra O Nascimento de Vênus de Sandro Botticelli



Fonte: Disponível em: < <https://sophiaofnature.wordpress.com/2014/01/07/a-mitologia-e-a-verdade-da-razao-de-ouro/>>. Acesso em: 20/nov./2024.

Outro grande nome no mundo da arte por utilizar a proporção áurea é o artista uruguaio Joaquín Torres-García, considerado um dos mais importantes artistas modernistas da América do Sul.

Torres fazia uso da geometria em basicamente todas as suas obras (Figura 6.6.1.4).

Sua arte explora o valor simbólico da forma, buscando ainda estabelecer a harmonia e o equilíbrio universal entre o tempo, o espaço e o ser humano. Não é à toa que ele utiliza a proporção áurea em seus trabalhos. A ambição de Torres García era encontrar o eterno da arte (CORDEIRO, 2017).

Figura 6.6.1.4 – Obras de Joaquín Torres García



Fonte: Disponível em: <<http://www.pigmum.com/blog/torresgarcia>>. Acesso em: 20/Nov./2024.

6.6.2 O número áureo na música

Na Grécia antiga a música era considerada uma parte da matemática, uma vez que, até o fim da Idade Média, era uma das quatro partes nas quais se dividiam os estudos matemáticos. Durante o Renascimento, apesar de tornar-se independente dos estudos matemáticos, sua relação com esta área de conhecimento ainda era muito grande e resultando em um grande número de matemáticos que se dedicaram também ao estudo da música como é o caso de René Descartes e de Marín Mersenne.

A matemática pode ser utilizada como uma forma de facilitar os estudos a respeito da estrutura musical. A teoria dos conjuntos, a álgebra abstrata e a teoria dos números, a proporção áurea e o número de Fibonacci estão presentes na estrutura musical e em algumas composições. (OLIVEIRA e FALCÃO, 2019).

Um dos melhores instrumentos de cordas já criados é o violino Stradivarius. Esse instrumento foi projetado por, Antonio Stradivari, um dos mais importantes fabricantes deste instrumento. Os Violinos Stradivarius se caracterizam e possuem um alto valor no mercado devido ao fato de possuírem um som com qualidade superior aos violinos comuns e isso se dá devido à estrutura com a qual o instrumento foi construído. Como pode-se perceber na Figura 6.6.2.1 o violino construído por Stradivari tem a proporção áurea como base para as suas dimensões.

Figura 6.6.2.1 – A proporção áurea no violino Stradivarius.



Fonte: Disponível em: <<https://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/>>. Acesso em: 20/Nov./2024.

Assim como Stradivari, Jody Espina desenvolveu um instrumento que pudesse transmitir qualidade através do som. Para tanto, ele utiliza a razão áurea para construir o bocal de saxofone JodyJazz DV no qual utiliza a proporção áurea nas suas

medidas que vão “desde o comprimento do furo, largura das paredes da haste, a profundidade do furo e outros aspectos importantes do bocal” (OLIVEIRA e FALCÃO, 2019).

Figura 6.6.2.2 – Bocal para saxofone alto projetado por Jody Espina.



Fonte: Disponível em: <<https://jodyjazz.com/dvny-metal-sax-mouthpieces/>>. Acesso em: 20/nov./2024.

O brasileiro Fernando Fonterrada presenteou o baixista do Cirque du Soleil Nathan Lerohl com um contrabaixo em formato de gota em 2013. Segundo Dourado (2015), Fonterrada teria escolhido este formato de uma gota d'água por se tratar de “uma forma da natureza que segue a proporção áurea e a sequência de Fibonacci”.

Ao desenvolver esse baixo, Fonterrada tinha como objetivo que o instrumento propagasse o som de forma suave e harmônica, que fosse de fácil transporte, baixo peso e que não houvesse distorções quando o som fosse amplificado e, para isso, ele fez uso de fórmulas matemáticas.

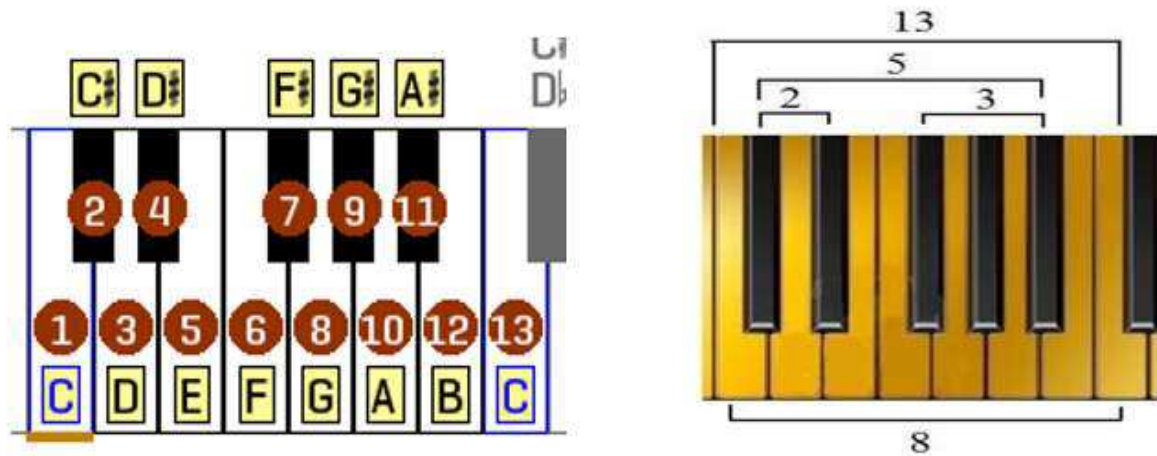
Figura 6.6.2.3 – Baixo gota de Fernando Fonterrada.



Fonte: Disponível em: <https://www.facebook.com/Fonterrada/?locale=pt_BR>. Acesso em: 20/nov./2024.

O piano é mais um instrumento que utiliza os números de Fibonacci como uma forma de obter qualidade sonora e harmônica com base na sua construção. Na organização do teclado de piano é possível encontrar os números de Fibonacci. São 13 teclas no total, 8 teclas brancas, 5 teclas pretas dispostas em dois grupos, um com 2 teclas e outro com 3 teclas.

Figura 6.6.2.4 – Sequência de Fibonacci e as teclas de um piano



Fonte: Disponível em: <<https://noize.com.br/fibonacci-na-musica-e-na-natureza/>>. Acesso em: 20/nov./2024.

Porém a utilização da sequência de Fibonacci na música não se resume apenas à construção e engenharia dos instrumentos, mas também está presente na composição de musical, pois, para montar qualquer acorde musical é necessário que se faça a combinação de três notas: a primeira, a terceira e a quinta nota de qualquer escala, ou seja, 1, 3 e 5, números de Fibonacci.

A utilização de números de Fibonacci e o número áureo nas composições musicais é algo muito frequente e datam de vários séculos. Não se sabe se a utilização pelos compositores era proposital ou não. Clássicos como a Prelude in C major de Mozart, Choro nº 5 de Villa-Lobos e a 5ª sinfonia de Beethoven, utilizam os números de Fibonacci e o número de ouro na divisão de compassos e na inserção de novos instrumentos musicais ou na criação do clímax da música. (OLIVEIRA e FALCÃO, 2019).

7 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

O processo educacional tem sofrido grandes transformações que vão desde o comportamento dos alunos às formas de ministrar e recepção de conhecimento. Todas essas mudanças têm gerado um grande desafio no processo de ensino e aprendizagem de todas as disciplinas, uma vez que o professor deve renovar seus recursos e seus métodos com o objetivo de obter resultados positivos em sala de aula.

Grande parte dessas mudanças se dá devido à ascensão dos meios tecnológicos e ao acesso das pessoas a esses mais diversos recursos. Além da influência dos meios tecnológicos na vida dos alunos, não se pode negar também a dificuldade em aprender Matemática para grande parte desses discentes que, segundo Roratto, Nogueira e Kato (2010) se dá devido a um distanciamento entre a forma como é produzida e a forma como é ensinada essa ciência.

A utilização de diversas metodologias e modalidade didáticas mostra-se como uma estratégia válida e promissora na tentativa de atender as diferenças individuais dos alunos no que se refere à maneira como eles aprendem e se apropriam dos conteúdos abordados (TAXINI et al., 2012).

Devido a isso, especialmente com os estudantes do Ensino Médio, faz-se necessário a adoção de medidas e o desenvolvimento de estratégias pedagógicas que levem este aluno a tornar-se um indivíduo crítico, apto a pensar, questionar e criar suas próprias ideias e conceitos que irão se desenvolver em sala de aula, mas que devem ser levadas para a sua realidade cotidiana.

Neste sentido, Babinski (2017) ressalta a necessidade de que o ensino de matemática esteja interligado e contextualizado às outras áreas do conhecimento, criando, assim, um paralelo com a realidade e as práticas cotidianas dos alunos.

Assim sendo, a sequência didática surge como uma importante aliada do professor uma vez que consiste em uma série de atividades que podem facilitar e/ou tornar atrativo o ensino de matemática, pois, trata-se de “um conjunto de atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar um conteúdo, etapa por etapa, sendo organizadas de acordo com os

objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos” (BARBOSA, 2002).

Ao adotar o uso de uma sequência didática o professor traça uma espécie de roteiro no qual se inicia com o conhecimento prévio do aluno e, à medida em que as etapas avançam aumenta-se o grau de dificuldade, possibilitando uma evolução gradual do conhecimento e a expansão dos conhecimentos dos discentes.

De acordo com Giordan, Guimarães e Massi (2011), a construção da sequência didática deve ocorrer segundo passos específicos, tais como:

- a) apresentação da situação, definição e formulação da tarefa;
- b) produção inicial, estabelece o primeiro contato entre o aluno e o gênero textual proposto;
- c) módulos de atividade, atividades preparadas pelo professor de observação e análise;
- d) produção final, destinado à prática de elaboração textual.

Observa-se, portanto, que na sequência didática o professor exerce um papel de mediador desse processo ao apresentar os conceitos, exemplos e orientações para a aplicação prática do conhecimento a ser construído seguindo uma ordem que possibilite a construção do conhecimento pelo próprio aluno. No entanto, ao final do processo, o aluno deve ser capaz de utilizar este conhecimento de forma prática ao construir o seu próprio texto tendo como base de tudo o que foi aprendido.

Dessa forma, a sequência didática surge como um auxílio ao professor e ao aluno no processo de construção do conhecimento, possibilitando que o aluno desenvolva, num primeiro momento, uma resposta baseada num conhecimento prévio, que seja estabelecido um diálogo reflexivo por parte desse aluno, e que, ao fim do processo, este seja capaz de se apossar do conhecimento e transformar as informações absorvidas em ferramentas e conceitos a serem adotados em sua prática cotidiana.

Assim sendo, apontamos aqui dois modelos de sequência de didática que tem como tema a razão áurea, a sequência de Fibonacci e progressão geométrica voltadas para alunos de 9º ano do Ensino Fundamental maior e 2º ano do Ensino Médio, respectivamente, ambas com o tempo previsto de 200 minutos com o intuito de apontar uma das inúmeras possibilidades de trabalhar

esses temas em sala de aula e de facilitar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo proposto.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Plano de Aula 1: Razão áurea (100 minutos)

Turma: 9º ano ensino fundamental

Duração: 100 minutos

Tema: Retângulo áureo

Objetivos:

- Identificar a presença da matemática em situações e coisas do cotidiano
- Reconhecer a proporção áurea na arte e na arquitetura
- Demonstrar relações métricas do retângulo áureo.
- Construir o retângulo áureo

Etapas e Distribuição do Tempo

1. Abertura e Contextualização (20 minutos)

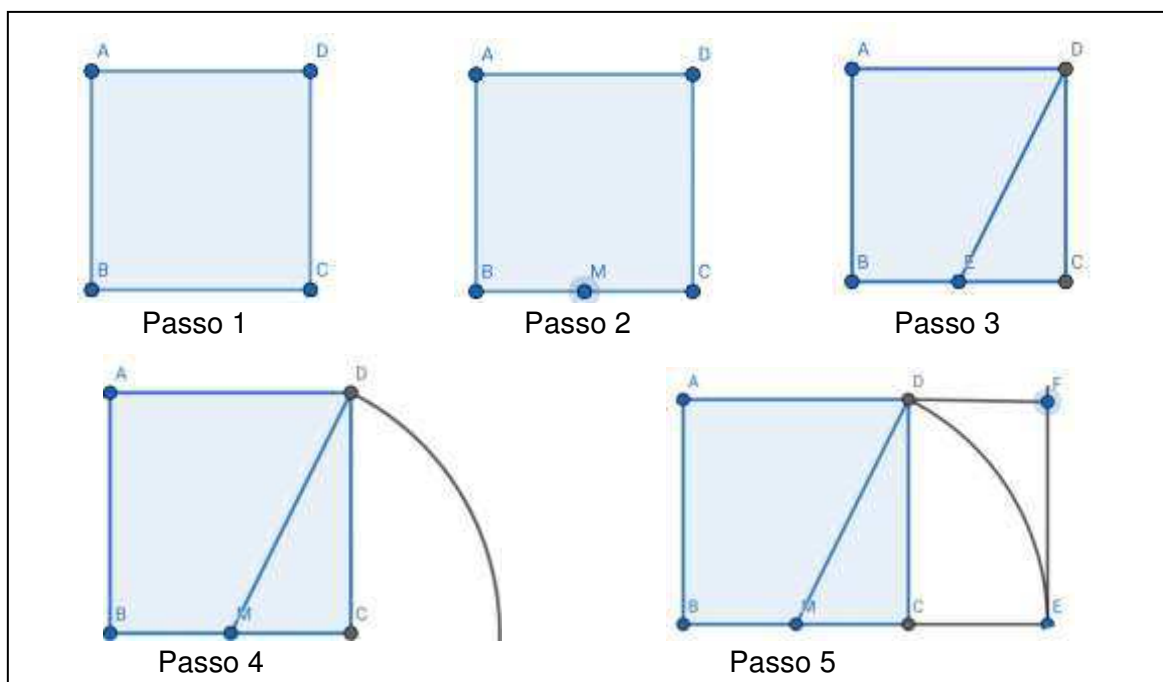
- **Atividades:**
 - Explanar sobre a biografia de Euclides de Alexandria e a média e extrema razão.
 - Executar o vídeo “Donald no País da matemágica” no intervalo de 7min e 19 s aos 13 min e 19 s o qual mostra a aplicação do retângulo de ouro na arquitetura e na arte. O vídeo pode ser encontrado em <https://www.youtube.com/watch?v=wbftu093Yqk>.
- **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos, projetor multimídia, notebook.
- **Objetivo:** Perceber a presença da razão áurea em situações do dia-a-dia despertando, assim, a curiosidade por conhecê-la.

2. Construção do retângulo de ouro (30 minutos)

- **Atividades:**
 - Construção do retângulo de ouro juntamente com os alunos seguindo o seguinte procedimento.
 1. Construir um quadrado ABCD
 2. Determinar o ponto médio M do segmento AC
 3. A partir do ponto M, traçar um segmento até o ponto D

4. Com a ajuda de um compasso, colocar a ponta sobre o ponto M, partindo do ponto D, construir um arco λ .
5. Partindo do ponto C, construir um segmento paralelo a BC formando o ponto E, intersecção com o arco λ . Partindo do ponto C Construir uma semirreta paralela a CD. Partindo do ponto D construir uma semirreta paralela a AD, encontrando, assim, o ponto F que é intersecção das duas semirretas. Assim, O retângulo ABEF é um retângulo áureo.

Figura 1 - Construindo o retângulo áureo



Fonte: O autor, 2024.

- **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros, compasso, régua.
- **Objetivo:** Construir o retângulo de ouro a partir das orientações e da observação da figura 1.

3. Construção do retângulo áureo no geogebra (25 minutos)

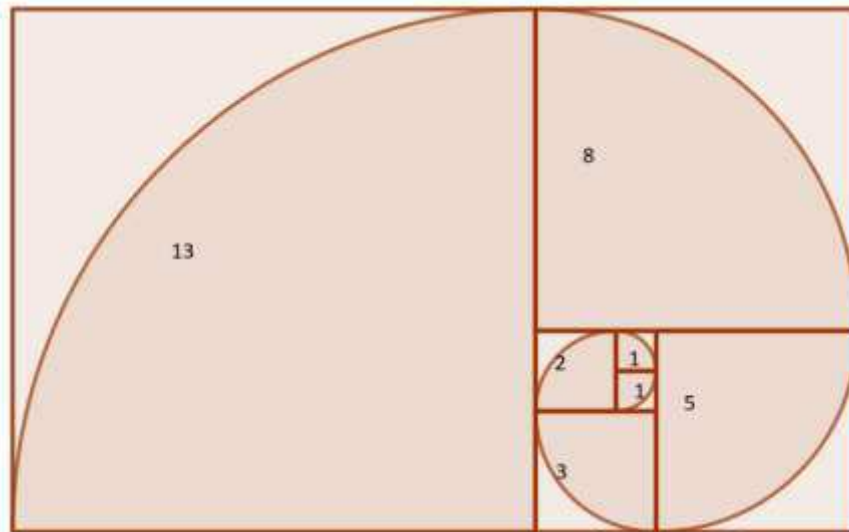
- **Atividades:**
 - Mostrar algumas ferramentas do software geogebra.
 - Construir o retângulo áureo no geogebra.
- **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos.

- **Objetivo:** Utilizar a tecnologia aliada aos estudos da matemática e despertar o interesse para o estudo da razão áurea.

4. Construção da espiral de Fibonacci (20 minutos)

- **Atividades:**
 - Construir uma sequência de quadrados no interior do retângulo de ouro com dimensões $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3, 5 \times 5, \dots$, a qual é chamada de sequência de Fibonacci
 - Construir arcos que formam a espiral de Fibonacci.

Figura 2 - Espiral de Fibonacci



- **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos, compasso, régua.
- **Objetivo:** Promover a construção da espiral de Fibonacci tendo por base as orientações e observação da Figura 2.

Avaliação

- **CrITÉrios de Avaliação:**
 - Participação ativa do aluno durante a aula.
 - Desempenho nas construções propostas.

Encerramento

- **SÍntese (5 minutos):**
 - Recapitular um pouco da história e pontos importantes da aula.

- Sugerir aos alunos uma leitura sobre o número de ouro, a sequência de Fibonacci e outros assuntos abordados durante a aula.

Plano de Aula 2: O número φ (100 minutos)

- **Turma:** 9º ano do ensino fundamental

Duração: 100 minutos

Tema: O número φ

Objetivos:

- Revisar definições abordadas na aula sobre o retângulo áureo.
- Dividir um seguimento em extrema e média razão.
- Calcular o valor de φ

Etapas e Distribuição do Tempo

1. Abertura e Motivação (20 minutos)

- **Ações:**
 - Revisar sobre Euclides de Alexandria e o retângulo de ouro.
 - Definir seguimento cortado em média e extrema razão
- **Recursos:** Datashow, quadro branco, pincel, apagador, livros.
- **Objetivo:** Revisar a biografia de Euclides e mostrar a razão áurea no seguimento.

2. Cortar um seguimento é média e extrema razão (30 minutos)

- **Atividades:**
 - Dividir, juntos aos alunos, um seguimento AB em média e extrema razão seguindo os passos a usados por Euclides resumidos a seguir.
 - Construa sobre o seguimento AB um quadrado $ABHC$.
 - Construa um paralelogramo $CGDF$ onde o seguimento AC esteja contido em CG de tal forma que a área de $CGDF$ seja igual a área do quadrado $ABHC$ e que $AEDG$ seja um quadrado. E ainda o ponto F pertence ao seguimento CH e o seguimento DF corta o seguimento AB no ponto E .
 - Observar que, como $CGDF$ e $ABHC$ tem áreas iguais, subtraindo o retângulo $AEFC$, então o quadrado $AEDG$ tem área igual ao retângulo $EBHF$ e como os ângulos são iguais, os lados são inversamente proporcionais. Por tanto

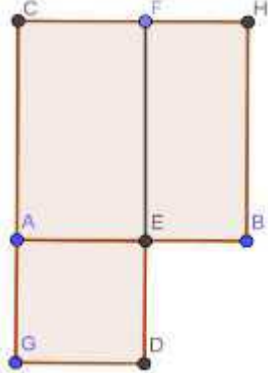
$$\frac{FE}{AD} = \frac{AE}{EB}$$

mas $FE = AB$ e $ED = AE$, assim

$$\frac{BA}{AE} = \frac{AE}{EB}$$

e como AB é maior que AE , então AE é maior que EB . Logo, AB foi cortada em média e extrema razão onde AE é o maior segmento.

Figura 3 - Segmento cortado em extrema e média razão



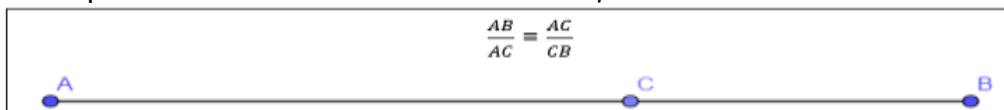
- **Recursos:** Quadro branco, pincel, apagador, livros, notebook, projetor multimídia.
- **Objetivo:** Desenvolver a habilidade de cortar um seguimento em média e extrema razão.

3. Resolução de equação do segundo grau e proporção (25 minutos)

- Revisar a resolução de equação do segundo grau e seguimentos proporcionais.
- Propor atividades sobre os assuntos abordados.
- **Recursos:** Quadro branco, pincel, apagador, livros.
- **Objetivo:** Desenvolver a capacidade de calcular o número φ .

4. Determinar o número φ (20 minutos)

- **Atividades:**
- Propor aos alunos calculem o valor de φ utilizando a média e extrema razão,



Onde $AB = a$ e $AC = x$

- **Recursos:** Quadro branco, pincel, apagador, livros.
- **Objetivo:** Calcular o valor da razão entre maior seguimento e o menor seguimento.

Avaliação

- **Crerérios de Avaliação:**
 - Participação ativa durante as aulas.
 - Observação no desenvolvimento dos cculos e resolução dos exercícios propostos.
-

Encerramento (5 minutos)

- **Síntese:** Revisar e importância da razão urea.
- Instigar a curiosidade dos alunos para continuar os estudos sobre a razão urea.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Plano de Aula 1: Progressão Geométrica (100 minutos)

Turma: 2^a série do Ensino Médio

Duração: 100 minutos

Tema: Progressões Geométricas

Objetivos:

- Identificar sequências que formam progressões geométricas.
 - Determinar o termo geral de uma progressão geométrica.
 - Calcular a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica.
 - Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
-

Etapas e Distribuição do Tempo

1. Abertura e Contextualização (20 minutos)

- **Ações:**
 - Apresentar algumas sequências numéricas.
 - Definir sequências que formam progressões geométricas.
 - Identificar a conexão entre progressão geométrica e função exponencial.
- **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos.
- **Objetivo:** Compreender a definição de progressão geométrica associada a noção de função.

2. Termo geral de uma Progressão Geométrica (25 minutos)

- **Atividades:**
 - Demonstração da fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.
 - Resolução de situações problema para calcular o termo geral de uma progressão geométrica.
 - **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos.
 - **Objetivo:** Resolver problemas que envolvam termos geral de uma progressão aritmética.
-

3. Soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica (25 minutos)

- **Atividades:**
 - Demonstração da fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica finita.
 - Demonstrar exemplos de situações problemas que envolvem a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
 - **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos.
 - **Objetivo:** Preparar os alunos para solucionar questões relacionadas soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
-

4. Soma dos termos de uma progressão geométrica infinita (20 minutos)

- **Atividades:**
 - Demonstrar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.
 - Resolver problemas que envolvem a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.
 - **Recursos:** Quadro, apagador, pincel, livros didáticos.
 - **Objetivo:** Possibilitar o desenvolvimento de habilidades relativas ao a resolução de questões relacionadas com a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.
-

Avaliação

- **Critérios de Avaliação:**

- Participação ativa do aluno durante a aula.
 - Desempenho na resolução dos exercícios propostos.
-

Encerramento

- **Síntese (5 minutos):**
 - Identificar o nível de compreensão das definições expostas e discutidas.
 - Solicitar aos alunos uma pesquisa bibliográfica em fontes diversificadas para identificar situações do cotidiano nas quais podem ser identificadas sequência de Fibonacci

Plano de Aula 2: Sequência de Fibonacci (100 minutos)

- **Turma:** 2ª série do Ensino Médio
Duração: 100 minutos
Tema: Sequência de Fibonacci
Objetivos:
 - Revisar definições abordadas na aula de Progressão Geométrica.
 - Apresentar um pouco da Biografia de Leonardo Fibonacci.
 - Introduzir a definição da sequência de Fibonacci.
-

Etapas e Distribuição do Tempo

1. Abertura e Motivação (20 minutos)

- **Ações:**
 - Revisar as definições abordadas na aula sobre progressão geométrica.
 - Realizar uma pesquisa bibliográfica relativa a vida e obra do matemático Leonardo Fibonacci
 - Identificar de acordo com a definição, uma sequência de Fibonacci
 - **Recursos:** Datashow, quadro branco, pincel, apagador, livros.
-

2. Revisão de Progressão Geométrica (20 minutos)

- **Atividades:**
 - Identificar os termos da fórmula do termo geral e da soma dos n primeiros termos de progressões geométricas e da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

- Analisar alguns exemplos práticos.
 - Propor a identificação e seleção de situações problemas contextualizadas para discussão e resolução.
 - **Recursos:** Quadro branco, pincel, apagador, livros, exercícios impressos.
 - **Objetivo:** Fixar as ideias de progressões a partir da identificação e resolução de situações problemas.
-

3. Sequência de Fibonacci (20 minutos)

- Identificar os números de Fibonacci através do problema dos coelhos.
 - Definir a sequência de Fibonacci recursivamente ($f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$).
 - **Recursos:** Datashow, quadro branco, pincel, apagador, livros.
 - **Objetivo:** Identificar a relação entre a sequência de Fibonacci e progressão geométrica.
-

4. Relação da sequência de Fibonacci e progressão geométrica (35 minutos)

- **Atividades:**
 - Encontrar até o quinto termos da sequência $f_n = q^n$, onde $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $n \geq 2$.
 - Mostrar que quando $q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a progressão geométrica $f_n = q^n$ é uma sequência de Fibonacci para todo $n \geq 2$.
 - **Recursos:** Datashow, quadro branco, pincel, apagador, livros.
 - **Objetivo:** Relacionar a sequência de Fibonacci e progressões geométrica.
-

Avaliação

- **CrITÉrios de Avaliação:**
 - Bom desempenho e participação nas tarefas propostas durante as aulas.
 - Interesse e pontualidade ao resolver as tarefas de aprendizagem propostas
-

Encerramento (5 minutos)

- **Síntese:**

- Revisar os conceitos relativos aos conteúdos abordados na aula.
- Incentivar os alunos a prosseguirem estudos sobre a sequência de Fibonacci

8 CONCLUSÃO

Diversos estudos realizados sobre o número áureo concluíram que ele é utilizado para explicar padrões existentes na natureza, para conferir qualidade estética e arquitetônica a construções e obras de arte e, inclusive, harmonia musical em várias produções realizadas no decorrer a história. Assim, muitos estudiosos concluíram que o número áureo representa a perfeição no sentido criacionista, estético e matemático.

Trata-se de um padrão numérico que, seja no crescimento de uma planta, na reprodução de alguns animais, na proporção das medidas do corpo humano, em construções históricas, na música ou em obras de arte, desenvolve um papel importante para o estabelecimento de conceitos de durabilidade, qualidade, harmonia e beleza.

Neste sentido, abordamos neste trabalho o número áureo e suas aplicações matemáticas, artísticas e biológicas, levando em consideração sua descoberta, seus primeiros usos e os estudos relacionados à sua aplicação. Para tanto, partimos de um conceito histórico abordando a sua concepção mais básica e os diversos estudos realizados sobre ele através do tempo.

A partir daí, passou-se ao estudo da comprovação de sua aplicação matemática na construção de proporções geométricas, como no triângulo, no pentágono, no decágono, no círculo e no retângulo. Abordamos ainda a relação existente entre o número de ouro e a sequência de Leonardo Fibonacci a partir do problema da reprodução dos coelhos. Tendo como base os estudos de Fibonacci pudemos trabalhar, também, as possibilidades deste número por meio da potência e da comprovação de como a razão entre termos consecutivos de Fibonacci tendem para o número phi.

Tendo em vista as muitas possibilidades de aplicação e utilização deste número foi possível perceber a sua relação com a trigonometria, com os números complexos e com as progressões geométricas, podendo, deste ser utilizado por arquitetos e engenheiros visando a durabilidade e resistência de suas obras.

Ressaltamos também a sua presença nos seres vivos, como animais, plantas, frutas, vegetais e leguminosas. Esta percepção amplia a sua utilização por engenheiros agrônomos, botânicos, cientistas, médicos (dentistas, ortopedistas, cirurgiões plásticos,...), biólogos, uma vez que estes profissionais podem utilizar esse

conhecimento para garantir maior produtividade, resistência, beleza e qualidade de vida a esses seres vivos.

Por fim, apontamos a sua utilização por artistas que, tendo em vista a relevância desse número para a harmonia almejada em suas obras, o utilizaram como recurso estético e poético.

Concluindo, apresentamos dois modelos de sequência didática que devem ser utilizados como norteadores para o trabalho desses conteúdos em salas de aula, especialmente em turmas de Ensino Médio, uma vez que se trata de um conhecimento que está presente na realidade e no cotidiano das pessoas e pode ser considerado relevante em diversas atividades do dia-a-dia.

Com tudo o que foi exposto pudemos concluir que os conhecimentos relacionados à proporção áurea e a sequência de Fibonacci são de grande relevância em diversas áreas, tais como: agricultura, arquitetura, engenharia, artes, música, medicina, entre outras. Tanto é importante que vem sendo utilizado desde os tempos antigos como um recurso que garanta durabilidade, qualidade, harmonia e beleza e pode ser encontrado em produções que vão desde a Grécia antiga até a atualidade.

Concluimos também que trata-se de um conhecimento rico e que nos permite várias aplicações práticas em situações presentes no cotidiano uma vez que que se baseia em coisas da própria natureza como frutas, plantas e animais, possibilitando que seja um conteúdo de fácil abordagem e de fácil compreensão como demonstrado a partir das sequências didáticas propostas neste trabalho.

Por fim, é importante ressaltar que as sequências didáticas aqui apresentadas devem ser utilizados como orientações e modelos de abordagem desses conteúdos de forma lúdica e que possibilite que os alunos possam detectá-lo em situações de sua realidade bem como utilizá-lo em mais diversas situações do seu cotidiano dentro e fora do ambiente escolar.

REFERÊNCIAS

- BABINSKI, Adriano Luís. **Sequência Didática (SD):** experiência da matemática. 89 fls. 2017. (Dissertação Mestrado). Universidade do Estado de Mato Grosso, 2017.
- BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a geometria fractal:** para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática.** [trad.] Elza F. Gomide. São Paulo : Universidade de São Paulo, 1974.
- CANEIRO, Míriam S.; NOBOKITE, Karen E.; FERNANDES, Marco Antonio de A. Três diferentes provas de que as razões entre números consecutivos de Fibonacci convergem para o Número de Ouro. **Revista Professor de Matemática.** v.11, n.2, 2023. Disponível em: <art11_Vol11_SBM_PMO_2023.pdf>. Acesso em: 18/nov./2024.
- CORDEIRO, Renato Medeiros. **O universalismo construtivo de Torres García em 20 imagens.** Pigmum. [Online] 08/Maio/2017. Disponível em: <<http://www.pigmum.com/blog/torresgarcia>>. Acesso em: 20/Nov./2024.
- DOURADO, C. **Baixo Gota.** Criador e criatura, BassPlayer Brasil, vol. 40, no 4, 2015, pp. 20-21.
- EUCLIDES. **Os elementos.** Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.
- FERRER, Joseane Vieira. **O NÚMERO DE OURO NA ARTE, ARQUITETURA E NATUREZA: BELEZA E HARMONIA.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf>. Acesso em: 06/nov./2024.
- GIORDAN, Marcelo; GUIMARÃES, Yara AF; MASSI, Luciana. Uma análise das abordagens investigativas de trabalhos sobre sequências didáticas: tendências no ensino de ciências. **Anais do VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 5, 2011.
- HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** 3. ed. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.
- HUNTLEY, H. E. **A divina proporção.** [trad.] Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília : Universidade de Brasília, 1985.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise.** v. 1, 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- LIVIO, Mario. **Razão áurea:** a história de Φ , um número surpreendente. [trad.] Marco Shinobu. Rio de Janeiro : Record, 2006.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo César Pinto. **Matemática discreta**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

OLIVEIRA, Clarice Augusta Rezende de; FALCÃO, Ricardo. **Composição musical e Fibonacci**: a utilização da música como forma lúdica de aprendizagem. Universidade Federal de São João del-Rei – UFSJ. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 2019. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat_cap/CLARICE_AUGUSTA_REZENDE_DE_OLIVEIRA.pdf>. Acesso em: 06/nov./2024.

REVISTA MITO + GRAPHOS. **Shamash**. Disponível em: <<http://mitographos.blogspot.com/2013/01/shamash.htm>>. Em: 16/jan./2013. Acesso em: 06/nov./2024.

REVISTA ARTE NA REDE. **A Matemática da Beleza**: O Homem Vitruviano e o Número Phi. Disponível em: <<http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/>>. Acesso em: 06/nov./2024.

RODRIGUES, Melissa da Silva. O número Φ . **FAMAT em Revista**. ed. 11, 2008.

RORATTO, Cauê; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; KATO, Lílian Akemi. Indícios de aprendizagem significativa mediante o uso de uma sequência didática fundamentada na história das funções. **V Colóquio de História e Tecnologia no ensino da Matemática**, Recife, Brasil, 2010.

RUTHERFORD, Ward. **Pitágoras**: amante da sabedoria. São Paulo: Mercuryo, 1991.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a Matemática do Número Φ , o Número de Ouro**. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Câmpus de Rio Claro, 2013.

SILVA, Allan Kenedy Santos. Determinação de uma fórmula para calcular os termos de uma sequência de Fibonacci por meio de progressões geométricas e espaços vetoriais. **REMAT – Revista Eletrônica da Matemática**. Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 4, n. 2, p. 87-97, dez./2018. Disponível em: <<https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3082>> . Acesso em: 07/dez./2024.

TAXINI, Camila Linhares *et al.* Proposta de uma sequência didática para o ensino do tema "Estações do Ano" no Ensino Fundamental. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 14, n. 1, p. 81-97, 2012.

TODÃO, Jefferson. **Os Papiros da Matemática Egípcia - O Papiro de Rhind ou Ahmes**. Disponível em: <<https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>>. Acesso em: 06/nov./2024.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2011.