

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE CAXIAS
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

FERNANDO PEREIRA DE ANDRADE

**MÉTODO DE EULER PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS**

CAXIAS – MA

2021

FERNANDO PEREIRA DE ANDRADE

**MÉTODO DE EULER PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura do Centro de Estudos Superiores de Caxias, da Universidade Estadual do Maranhão – CESC/UEMA como requisito para obtenção do título de Licenciando em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos

CAXIAS – MA

2021

A553m Andrade, Fernando Pereira de

Método de Euler para resolução de equações diferenciais ordinárias / Fernando Pereira de Andrade. __Caxias: CESC/UEMA, 2021.

46f.

Orientador: Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos.

Monografia (Graduação) – Centro de Estudo de Estudos Superiores de Caxias, Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Equações diferenciais. 2. Método Euler. 3. Runge-Kutta. 4. Valor inicial - Problema. I. Título.

CDU 517.9

FERNANDO PEREIRA DE ANDRADE

**MÉTODO DE EULER PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura do Centro de Estudos Superiores de Caxias, da Universidade Estadual do Maranhão – CESC/UEMA como requisito para obtenção do título de Licenciando em Matemática.

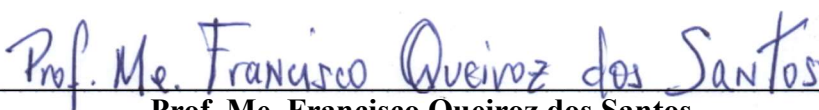
Orientador: Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos

Aprovado em: 17/08/2021.

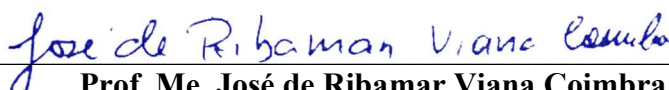
BANCA EXAMINADORA



Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos (Orientador)
CESC-UEMA



Prof. Me. Francisco Queiroz dos Santos
CESC-UEMA



Prof. Me. José de Ribamar Viana Coimbra
CESC-UEMA

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me permitir alcançar meus objetivos.

Agradeço a minha mãe, Nazaré, que sempre esteve ao meu lado sempre me apoiando e me dando forças para prosseguir. A minha avó Emília e minha irmã Fernanda e a todos os meus familiares que me incentivaram a continuar nessa jornada.

Meus sinceros agradecimentos ao professor Franjossan, por sua paciência na orientação deste trabalho. E por todo o apoio e dedicação ao longo do curso.

E também não poderia deixar de agradecer aos professores que tive durante o curso, em especial, Coimbra, Queiroz, Lidinalva, Celina, Lélia, Portela, Josué, Fernando Berrig e Raimundo Nonato. Cada uma de suas contribuições foram de grande valor para a minha formação.

Presto meus agradecimentos aos meus amigos, Mateus e Liomar, com quem compartilhei muitos momentos durante este curso

Também não poderia deixar de agradecer os meus colegas de turma, Erik, Joseanne, Ingrid, Carla, René, Geyceane, Walisson, Ana, Lucas, Victor, Amanda, Maycon e Jefferson.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram para a minha formação, direta ou indiretamente.

RESUMO

O presente trabalho tem como finalidade empregar o método de Euler na aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias com problema de valor inicial, assim como introduzir alguns conceitos de equações diferenciais e descrever o método de Euler. A realização deste trabalho se deu por revisão bibliográfica através de livros, monografias, artigos e teses de mestrado e de doutorado. O método de Euler utiliza o conceito de curva tangente para encontrar os resultados e é preciso conhecer uma das soluções do problema, ou seja, um ponto na curva solução, para encontrar o próximo. E por se usar uma reta tangente, é de se esperar que o valor encontrado não será igual a solução exata. Nesse sentido, no decorrer deste trabalho são encontrados teoremas relacionados a existência e unicidade das equações diferenciais, bem como melhorias para o método de Euler. Ao final deste estudo concluiu-se que o método de Euler e seus aprimoramentos conseguem atingir uma boa aproximação para as soluções de problemas de valor inicial, considerando a consistência do problema em questão e os erros gerados durante os cálculos.

Palavras-chave: Equações diferenciais. Método de Euler. Runge-Kutta. Problema de valor inicial.

ABSTRACT

The present work aims to employ the Euler's method in the approximation of solutions of ordinary differential equations with initial value problem, as well as to introduce some concepts of differential equations and describe the Euler's method. This work was carried out by bibliographic review through books, monographs, articles and theses of master's and doctorate. Euler's method uses the concept of tangent curve to find the results and one of the solutions to the problem, that is, a point in the solution curve, to find the next one. And by using a tangent line, it is to be expected that the value found will not be equal to the exact solution. In this sense, in the course of this work are found theorems related to the existence and uniqueness of differential equations, as well as improvements to the Euler's method. At the end of this study it was concluded that the Euler's method and its improvements can achieve a good approximation for the solutions of problems of initial value, considering the consistency of the problem in question and the errors generated during the calculations.

Keywords: Differential equations. Euler method. Runge-Kutta. Initial value problem.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Retrato de Sir Isaac Newton por Godfrey knelier.	11
Figura 2 - Retrato de Euler desenhado por Jakob Emanuel Handmann.	12
Figura 3 - Campo de direção para $dy/dx = -3y$	14
Figura 4 - Layout para o teorema de existência e unicidade.	15
Figura 5 - Gráfico de $T[g]$	18
Figura 6 - Campos de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$ com algumas curvas solução desenhadas.	20
Figura 7 - Uma aproximação de $y' = f(t, y)$ pela reta tangente em t_0, y_0	22
Figura 8 - Aproximação por um retângulo.	24
Figura 9 - A dependência do erro de truncamento En , do erro de arredondamento Rn e do erro total $En + Rn$ em relação ao tamanho de passo h	27
Figura 10 - Aproximação por um trapézio.	30
Figura 11-Consistência do método de Euler para $dpdt = p^2 - p$	37
Figura 12 - Tanque.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Solução exata e aproximação pelo método de Euler e erros absoluto e relativo para a EDO $dy/dx = x - y + 2$	22
Tabela 2 - Ordem de convergência.....	35
Tabela 3 - Soluções aproximadas e exatas para $dp/dt = p^2 - p$ com $p(0) = 1$	36
Tabela 4 - Comparação entre soluções exatas e numéricas para $dy/dx = ex$, $y_0 = 1$	38
Tabela 5 - Resultados das iterações para $dy/dx = 2y - 3x$, $y_0 = 1$	39
Tabela 6 - Valores de x_n , y_n , solução exata e erro para $dy/dx = y^3 - xy$, $y_1 = 4,5$	40
Tabela 7 - Método de Euler aprimorado para $dy/dx = y^3 - xy$, $y_1 = 4,5$	41
Tabela 8 - Método de Runge-Kutta de ordem 4 para $dy/dx = y(3 - xy)$, $y(1) = 4,5$	41
Tabela 9 - Resultados das iterações.....	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	9
2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	11
2.1	NOTA HISTÓRICA	11
2.2	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM	13
2.2.1	Campos de direções.....	14
2.3	EXISTÊNCIA E UNICIDADE	15
3	MÉTODO DE EULER.....	21
3.1	VARIAÇÃO NO TAMANHO DE PASSO	23
3.2	DEDUÇÃO DO MÉTODO DE EULER POR INTEGRAL	24
3.3	FÓRMULA DE TAYLOR	25
3.4	ERROS DE APROXIMAÇÃO	25
3.4.1	Erro de truncamento global <i>En</i> :.....	26
3.4.2	Erro de truncamento local.....	26
3.4.3	Erro de arredondamento	26
3.4.4	Valor absoluto do erro total	27
3.4.5	Erro de truncamento local para o Método de Euler	28
3.5	MÉTODO DE EULER MELHORADO.....	29
3.6	MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA	30
3.6.1	Runge-Kutta de segunda ordem	31
3.6.2	Runge-Kutta de terceira ordem.....	33
3.6.3	Runge-Kutta de quarta ordem.....	34
3.7	CONVERGÊNCIA E CONSISTÊNCIA PARA MÉTODOS NUMÉRICOS	35
4	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	38
4.1	COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE EULER CLÁSSICO E APRIMORADO	39
4.2	AVALIAÇÃO DA PRECISÃO DOS MÉTODOS DE EULER, EULER MELHORADO E RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM.	40
4.3	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE EULER E RUNGE-KUTTA EM PROBLEMAS DE MISTURAS	42
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	44
	REFERÊNCIAS	45

1 INTRODUÇÃO

As equações diferenciais são uma das ferramentas mais poderosas para calcular, prever e compreender vários comportamentos e fenômenos da natureza, sociedade, engenharia, música, computação e de diversas outras áreas. Elas permitem modelar fenômenos de modo a oferecer uma melhor compreensão e até mesmo prever possíveis eventos subsequentes. Existem vários métodos analíticos para se resolver equações deste tipo, porém em muitos casos eles se mostram insuficientes, obrigando a recorrer a métodos numéricos para encontrar resultados aproximados.

Métodos numéricos vem sendo desenvolvidos ao longo da história para as mais diversas finalidades. São necessários sempre que não se pode resolver algum problema pelos meios analíticos já conhecidos. Estas situações são muito comuns em equações diferenciais, principalmente quando são aplicadas em situações em que grandes quantidades de dados fazem parte do problema.

Os métodos numéricos podem fornecer resultados e aproximações satisfatórios, mas demandam cálculos exaustivos. O advento da informática possibilitou a automatização destes cálculos com computadores com cada vez mais capacidade de processamento e armazenamento de informações, é possível criar modelos matemáticos sofisticados para os mais diversos fins, como controle de tráfego aéreo e espacial, análises climáticas ou até mesmo o direcionamento de publicidade.

Muitas vezes quando se modela fenômenos da natureza ou situações que envolvem a sociedade, recai-se em problemas envolvendo equações diferenciais. Quando estas equações não podem ser resolvidas analiticamente, procura-se métodos numéricos afim de aproximar os resultados. Entre os métodos existentes mais conhecidos, está o método de Euler, que permite encontrar soluções aproximadas de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira Ordem a partir de um problema de valor inicial.

Considerando os erros de aproximação gerado por métodos numéricos surge a seguinte indagação: Na impossibilidade de se resolver equações diferenciais de primeira ordem por métodos analíticos, seria o método de Euler capaz de aproximar o seu resultado de forma satisfatória?

Tendo como base a problemática levantada, este trabalho tem como objetivo empregar o método de Euler na aproximação de soluções de equações diferenciais ordinárias com

problema de valor inicial, assim como introduzir alguns conceitos de equações diferenciais e descrever o método de Euler.

Neste sentido, temos como intuito introduzir a temática sobre o método de Euler para aproximação de equações diferenciais como forma de instigar os acadêmicos do curso de matemática a observar a importância dos modelos matemáticos para resolução de problemas.

2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

2.1 NOTA HISTÓRICA

O estudo do cálculo por Isaac Newton (1643-1727) (Figura 1) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), durante o século XVII deu origem às equações diferenciais.

As descobertas de Newton sobre o Cálculo e as leis fundamentais da mecânica foram publicadas em 1687, em seu livro mais famoso *Philosophiae Naturalis Principia mathematica*. Suas descobertas do cálculo serviram de base para as equações diferenciais e suas aplicações, principalmente por Leonard Euler. (BOYCE; DIPRIMA, MEADE, 2020, P. 5).

Figura 1 - Retrato de Sir Isaac Newton por Godfrey knelier.



Fonte: www.biography.com

Leibniz chegou aos mesmos resultados sobre o cálculo de forma independente tempos depois de Newton, mas os publicou antes, em 1684. também foi responsável pela notação dy/dx para derivadas e pelo símbolo da integral. Em 1691, descobriu o método de separação de variáveis e de redução de equações homogêneas a separáveis e em 1694, o procedimento para resolução de equações lineares de primeira ordem (BOYCE; DIPRIMA, MEADE, 2020, P. 5).

Brook Taylor (1685-1731), matemático inglês e membro da Royal Society, é conhecido por desenvolver o processo de expansão de funções em séries infinitas. Embora séries infinitas já tivessem aparecido antes, ele desenvolveu a sua de forma independente e a explicitou de

forma geral, o que levou outros a adaptarem estas séries para diversas finalidades. Entre estes, destacamos Euler, que desenvolveu um método para aproximar resultados de equações diferenciais a partir de um resultado já conhecido.

Leonhard Paul Euler nasceu na Basileia, Suíça, em 15 de abril de 1707. Matemático e físico, foi um dos fundadores da matemática pura, com grandes contribuições na formalização da geometria, cálculo, mecânica e teoria dos números. Ele também desenvolveu trabalhos em astronomia e assuntos públicos.

Suas habilidades matemáticas lhe renderam admiração de Johann Bernoulli e seus filhos, Daniel e Nicolau. Em 1726 morreu Nicolau, de apendicite. Daniel, ao assumir o cargo do irmão na divisão de matemática e física da Academia Russa de Ciências, indicou Euler para a vaga em filosofia, que tinha acabado de desocupar. Euler então se mudou para São Petersburgo.

Figura 2 - Retrato de Euler desenhado por Jakob Emanuel Handmann.



Fonte: Retirada da Wikipédia.

Em 1733, sucedeu a Daniel Bernoulli para a cadeira de matemática e física e em torno de 1735 perdeu a visão do olho direito (Figura 1). Em 1741, a convite de Frederico II da Prússia, tornou-se membro da Academia de Berlim, onde por 25 anos produziu mais de 380 publicações.

Entre seus trabalhos publicados, destacam-se *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução à análise do infinito) e *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos de Cálculo

Diferencial). Entre os livros textos também pode-se mencionar *Institutiones calculi differentialis* e *Institutiones calculi integralis* que serviram como modelo para os livros de cálculo atuais. Muitas das notações contidas neles foram idealizadas pelo próprio Euler e continuam sendo utilizadas (BOYER, 1986, p. 571).

Ao final do século XVIII, vários métodos para resolução de equações diferenciais ordinárias já tinham sido desenvolvidos, fazendo mudar o interesse para questões teóricas sobre a existência e unicidade entre outras questões analíticas culminando no desenvolvimento da teoria das funções analíticas e complexas. Iniciou-se também um estudo mais intenso das equações diferenciais parciais.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma equação que envolve derivadas comuns com relação a uma única variável independente é chamada de equação diferencial ordinária. A ordem de uma equação diferencial é a ordem das derivadas de mais alta ordem nela presente (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2012, p. 3-4). Assim, uma Equação Diferencial Ordinária(EDO) de Primeira Ordem é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

onde $f(x, y)$ é uma função definida em um aberto Ω do $\mathbb{R}^2$. Uma função $y = y(x)$ definida em um intervalo aberto I é uma solução dessa equação se, para todo x em I ,

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Resolver uma equação diferencial consiste em determinar $y = y(x)$ de tal maneira que y seja diferenciável e além disso $y'(x) = f(x, y(x))$, com $x \in [a, b]$. Quando se associa uma condição inicial à equação diferencial, então constitui-se um problema de valor inicial. (CARREIRA, p. 6).

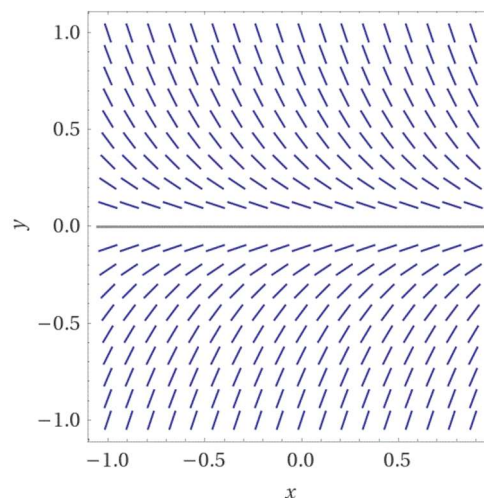
Nem sempre é possível encontrar a solução de uma EDO de forma analítica. Por outro lado, existem vários métodos numéricos capazes de encontrar soluções aproximadas para tais problemas, como os métodos de Euler e Runge-Kutta.

2.2.1 Campos de direções

Existem diversas maneiras de se enxergar as soluções de uma equação diferencial e uma dessas maneiras é através de campos de direções. Segundo Nagle, Saff e Snider (2012, p. 13), “Os campos de direções permitem a visualização gráfica das soluções para uma equação diferencial de primeira ordem”. Por meio dessas representações gráficas é possível ter uma ideia ampla do comportamento da equação.

Campo de direção pode ser definido como “um gráfico dos segmentos de linha curtos desenhados em diversos pontos no plano xy mostrando a inclinação da curva de seleção. Mostra o “fluxo de soluções” facilitando assim o desenho de qualquer solução em particular, como soluções de diferentes problemas de valor inicial (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2012, p. 13). Na Figura 3 temos o campo de direções para $dy/dx = -3y$.

Figura 3 - Campo de direção para $dy/dx = -3y$.



Fonte: Produzido pelo autor.

Como é possível observar, todas as soluções para a equação diferencial tendem ao eixo x , na medida que x aumenta.

Segundo Stewart (2013, p. 529), “geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0) ”. A visualização fornecida pelo campo de direções permite observar tanto o comportamento da curva escolhida assim como como as soluções para outras condições iniciais na região plotada.

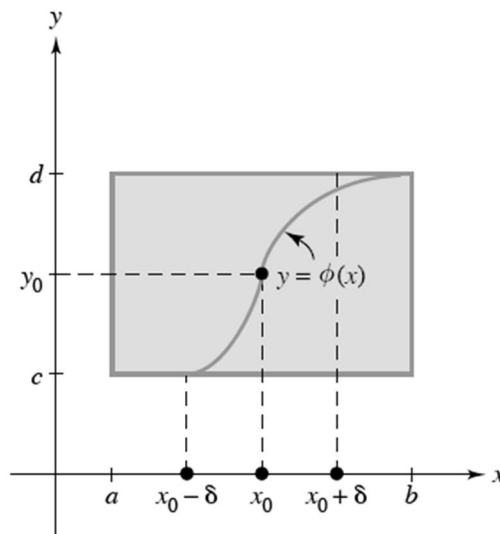
2.3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Antes de começar a resolver uma equação diferencial ordinária envolvendo problema de valor inicial, é importante se certificar se ela realmente existe e se é única. Para que isto ocorra, deve satisfazer determinadas condições estabelecidas pelo teorema de Picard. Consideremos o problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

De acordo com Nagle, Saff e Snider (, 2012, p.10), a função $f(x, y)$ é bem definida no valor inicial para $x = x_0$ e $y(x_0) = y_0$, como se pode observar graficamente na figura abaixo. As funções f e $\partial f / \partial y$ devem ser contínuas para x em um intervalo $a < x < b$ contendo x_0 , e y em $c < y < d$. O conjunto de pontos que satisfazem essas condições constituem um *retângulo*.

Figura 4 - Layout para o teorema de existência e unicidade.



Fonte: (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2012, p.10)

O teorema estabelece condições suficientes, mas não necessárias, para a existência de soluções locais para o P.V.I. De acordo com Boyce, Diprima e Meade (2020, p.37) “a existência de uma solução (mas não sua unicidade), pode ser estabelecida supondo-se apenas a continuidade de f ”.

Definição 1. Uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$, diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, é possível obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ou simbolicamente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Diz-se que uma função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua quando f é contínua em todos os pontos $a \in X$.

Exemplo: Prove que a função $f(x) = 6x + 6$ é contínua em $x = 1$.

Solução:

Primeiramente, temos que $f(1) = 12$. Logo, devemos mostrar que $\lim_{x \rightarrow 1} (6x + 6) = f(1) = 12$. Pela definição de continuidade, dado $\varepsilon > 0$, temos que encontrar um $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D_f, |x - 1| < \delta \rightarrow |6x + 6 - 12| = |6x - 6| = 6|x - 1|$.

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{6} > 0$, temos que $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{6} \rightarrow |f(x) - f(1)| < 6 * \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$.

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} (6x + 6) = 12$. ■

De maneira geral, uma função ser contínua não garante que o P.V.I. tenha apenas uma solução. Contudo, é possível atestar a existência e unicidade do PVI através do teorema de Picard.

Antes de discorrermos o teorema de Picard, devemos apresentar a condição de Lipschitz e o teorema de Banach, que auxiliarão na sua demonstração.

Definição 2. Seja $f: X \rightarrow R$ uma função definida em um conjunto $X \subset R^2$. Dizemos que f satisfaz a Condição de Lipschitz na variável y , com que f é lipschitziana em relação a variável y , se existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x, y) - f(x, t)| \leq k|y - t|,$$

para quaisquer $(x, y), (x, t) \in X$.

Lema 1. (Condição de Lipschitz na variável y). Seja $f: \Omega \rightarrow R$ definida em um aberto $\Omega \subset R^2$ com derivada parcial $f_y: \Omega \rightarrow R$ contínua. Dado retângulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|,$$

para todos $(x, y_1), (x, y_2) \in R$.

Demonstração:

Dados $(x, y_1), (x, y_2) \in R$, o segmento de reta $[x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2], 0 \leq \lambda \leq 1$, está contido em R . Desta maneira, pelo teorema do valor médio

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1 - y_2),$$

com $\xi \in [y_1, y_2]$, (supondo, sem perda de generalidade, que $y_1 \leq y_2$). Sendo R um conjunto compacto e f_y uma função contínua, tomamos

$$|f_y(x, y)|; (x, y) \in R\}.$$

Assim, obtemos:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \xi)| |y_1 - y_2| \leq K |y_1 - y_2| \quad \blacksquare$$

Teorema 1. (Ponto fixo de Banach para operadores). Seja S o conjunto de funções contínuas em $[a, b]$ dentro de uma distância α de uma dada função y_0 , isto é,

$$S = \{y \in C[a, b]: |y - y_0| \leq \alpha\}.$$

Suponha que G seja um operador mapeando de S em S e que G seja uma contração em S no sentido que exista uma constante $K, 0 \leq K \leq 1$, tal que

$$|G[w] - G[z]| \leq K |w - z|$$

para todo w, z em S .

Então a equação $y = G[y]$ tem uma única solução em S . Além disso, a sequência de aproximações sucessivas é definida por

$$y_{n+1} = G[y_n], \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e converge uniformemente para a solução para qualquer escolha da função y_0 em S .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2014, p.786). O teorema de Banach será importante para demonstrar a existência e unicidade da solução do problema de valor inicial.

Teorema 2: (Existência e unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias). Seja as funções f e $\partial f / \partial y$ contínuas em algum retângulo $R = a < x < b, c < y < d$ contendo o ponto (x_0, y_0) . Então, em algum intervalo $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ contido em $a < x < b$, há apenas uma única solução $y = \phi(x)$ para o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Prova:

Para o teorema de Banach ao operador T em, $y = T[y]$ deve-se mostrar que existe um intervalo $I := [x_0 - h, x_0 + h]$ e uma constante positiva α tal que T mapeie o conjunto

$$S := \{g \in C(I): |g - y_0|_I \leq \alpha\}$$

e T seja uma contração de S .

Primeiro escolhamos constantes positivas h_1 e α_1 de forma que

$$R_1 = \{(x, y): |x - x_0| \leq h_1, \quad |y - y_0| \leq \alpha_1\} \subset R.$$

Seja R_1 um retângulo fechado e f e $\partial f / \partial y$ contínuas em R_1 , existem constantes $M > 0$ e $L > 0$ de forma que para todo (x, y) em R_1 ,

$$|f(x, y)| \leq M$$

e

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq L.$$

Seja g uma função contínua em $I_1 = [x_0 - h_1, x_0 + h_1]$ satisfazendo $|g(x) - y_0| \leq \alpha_1$ para x em I_1 . Para um determinado g , temos

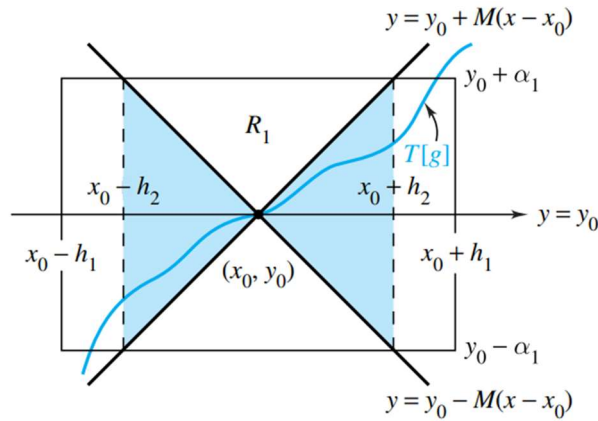
$$T[g](x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt.$$

Consequentemente, para $|x - x_0| \leq h_1$,

$$|T[g](x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, g(t))| dt \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| = M|x - x_0|.$$

Isso mostra que se uma função g satisfaz $|g(x) - y_0| \leq \alpha_1$, então o gráfico da função $T[g]$ deve estar limitado por $y = y_0 \pm M(x - x_0)$, como mostra a Figura 5

Figura 5 - Gráfico de $T[g]$



Fonte: (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2014. P.793)

Agora vamos mostrar que T é uma contração de S . Seja u e v funções em S . Temos em R_1 que

$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$. Portanto, usando o teorema do valor médio,

$$|T[u](x) - T[v](x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \{f[t, u(t)] - f[t, v(t)]\} dt \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{x_0}^x \frac{\partial f}{\partial y}[t, z(t)][u(t) - v(t)] dt \right| \\
&= L \left| \int_{x_0}^x |u(t) - v(t)| dt \right| \\
&= L \|u - v\|_I |x - x_0| \leq Lh \|u - v\|_I,
\end{aligned}$$

onde $z(t)$ é uma função entre $u(t)$ e $v(t)$.

Tomando $K = Lh$, mostramos que

$$\|T[u] - T[v]\|_I \leq \|u - v\|_I,$$

e assumindo que $h < \frac{1}{L}$, temos que $k < 1$. Consequentemente, T é uma contração.

Segue do teorema de Banach para o ponto fixo que T tem um único ponto fixo em S , então o problema de valor inicial tem uma única solução em S .

Para concluir a demonstração, deve-se mostrar que a solução do PVI deve estar em S . Para isto, suponha que $u(x)$ é uma solução para o PVI no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ e seja f limitada por M no retângulo R_1 para x próximo de x_0 . Para esses dados valores de x , temos

$$|f(x, u(x))| \leq M.$$

Portanto,

$$|u'(x)| = |f(x, u(x))| \leq M.$$

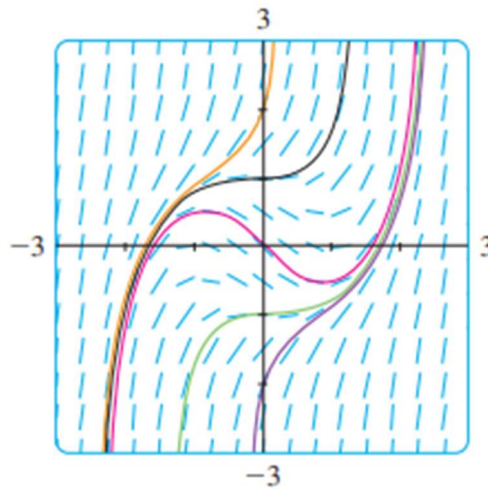
Ou seja, para x próximo de x_0 , o gráfico de $u = T[u]$ deve estar na região hachurada, como na Figura 5.

De fato, o gráfico de u não pode sair desta região no intervalo $|x - x_0| \leq h$ ($\leq h_2$) por que seria preciso que $|u'(x)| = |f(x, u(x))| > M$ em algum ponto da região. Por isso, $|u(x) - y_0| \leq \alpha_1$ para todo $|x - x_0| \leq h$, ou seja, $u \in S$. ■

Nagle, Saff e Snider (2012, p.10) reforçam que “a existência e a unicidade da solução se mantêm somente em alguma vizinhança $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Infelizmente, o teorema não nos informa a amplitude (2δ) dessa vizinhança (diz apenas que ela não é zero)”.

Ao representar as curvas soluções de um problema para diferentes condições iniciais em um campo de direções, pode-se ter uma ideia melhor sobre o comportamento na região. Na Figura 6, temos o campo de direções para a equação $y' = x^2 + y^2 - 1$ com algumas curvas solução desenhadas.

Figura 6 - Campos de direções para a equação diferencial $y' = x^2 + y^2 - 1$ com algumas curvas solução desenhadas.



Fonte: (STEWART, 2013, p.532)

Uma das características que podemos observar é que as suas curvas solução não se cruzam. Por meios analíticos torna-se simples encontrar cada curva solução exata. Mas quando não se conhece sua solução geral, pode-se utilizar métodos numéricos para encontrar soluções aproximadas.

3 MÉTODO DE EULER

O método de Euler é considerado um dos primeiros métodos numéricos avançados para a aproximação de equações diferenciais. Também chamado de método da reta tangente, possibilita aproximar soluções para equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

dado valor inicial

$$y(x_0) = y_0.$$

Se o problema de valor inicial atender as condições dadas no Teorema 2, então terá solução e esta será única. Mas ainda segundo Nagle, Saff e Snider (2012):

Como δ não é conhecido à priori, não existe garantia de que a solução existirá em determinado ponto $x (= x_0)$, mesmo que x esteja no intervalo (a, b) . Porém, se $\partial f / \partial y$ é contínuo e limitado na faixa vertical $S := \{(x, y): a < x < b, -\infty < y < \infty\}$, então acontece que o p.v.i. tem uma solução única no intervalo inteiro (a, b) .(p,93)

Consideremos que o P.V.I. possua uma solução única $\phi(x_n)$ em algum intervalo centrado em x_0 . Seja h um número positivo fixo, chamado *tamanho de passo*, considerando os pontos igualmente espaçados

$$x_n := x_0 + nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vamos então encontrar uma aproximação para y .

A ideia do método de Euler é usar uma equação da reta tangente à curva em (x_0, y_0) para obter uma aproximação para (x_1, y_1) e repetir o processo até chegar ao valor desejado. Escrevamos, então, uma equação à curva em (x_0, y_0) :

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

É importante que x_1 esteja próximo de x_0 . Desta maneira pode-se encontrar uma aproximação para $\phi(x_1)$ pelo valor y_1 .

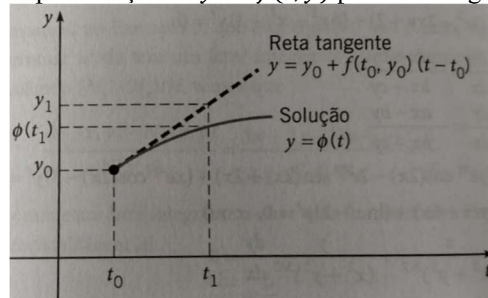
$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

ou

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

De acordo com Boyce, Diprima e Meade (2020, P. 54), a reta tangente é uma boa aproximação para a curva em intervalos suficientemente pequenos a ponto de a solução não mudar, especialmente para o valor inicial $y(x_0) = y_0$, ocorrendo naturalmente $y_0 = \phi(x_0)$ como é possível ver na Figura 7.

Figura 7 - Uma aproximação de $y' = f(t, y)$ pela reta tangente em (t_0, y_0) .



Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, MEADE, 2020, p. 54).

Descoberto o valor de y_1 , podemos repetir o processo para y_2 . Como não sabemos se o valor de $\phi(x_1)$ é de fato igual a y_1 , vamos considerá-lo um valor aproximado para a solução no ponto x_1 :

$$\phi(x_1) \approx y_1 := y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

Repetindo o processo para y_2 , desta vez para $x_2 = x_1 + h$, encontra-se

$$\phi(x_2) \approx y_2 := y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Se continuar a repetir esse processo pode-se observar o padrão

$$\phi(x_3) \approx y_3 := y_2 + f(x_2, y_2)(x_3 - x_2),$$

$$\phi(x_4) \approx y_4 := y_3 + f(x_3, y_3)(x_4 - x_3),$$

$\vdots$

$$\phi(x_{n+1}) \approx y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Exemplo 1: Ao aplicar o método de Euler para a equação $dy/dx = x - y + 2$, com condição inicial $y(0) = 2$, no intervalo $[0, 1]$ com $h = 0,2$, com quatro casas decimais, foram obtidos os seguintes resultados:

Tabela 1 - Solução exata e aproximação pelo método de Euler e erros absoluto e relativo para a EDO $dy/dx = x - y + 2$.

x	Solução exata	Método de Euler	Erro absoluto	Erro relativo
0,0	2,0000	2,0000	0,0000	0,0000
0,2	2,0187	2,0400	0,0213	0,0106

0,4	2,0703	2,1120	0,0417	0,0201
0,6	2,1488	2,2096	0,0608	0,0283
0,8	2,2493	2,3277	0,0784	0,0349
1,0	2,3679	2,4621	0,0942	0,0398

Fonte: Adaptado de (DE MENDONÇA, 2018, p.2)

Analisando os dados da tabela, especialmente os erros absoluto e relativo, é possível perceber que os resultados começam a se distanciar a medida que x aumenta. Segundo Cunha e Castro (2010),

Os dados e parâmetros de um problema real são frequentemente resultados de medidas experimentais de quantidades físicas, de pesquisas ou de levantamentos e, portanto, são sujeitos a incertezas ou imprecisões próprias dos equipamentos de medições, dos instrumentos de pesquisas ou mesmo de ações humanas. (p.16)

Para evitar que o erro se propague, pode-se diminuir o tamanho de passo h . Porém, esta ação aumentará o esforço necessário para se obter os resultados. Por isso de acordo com Ramos (2017, p.13), deve-se questionar o quão pequeno deve ser h para que se obtenha precisão desejada.

3.1 VARIAÇÃO NO TAMANHO DE PASSO

Pode-se determinar uma tolerância para o erro durante o procedimento com o objetivo de não se usar mais passos que o necessário de forma que se mantenha os resultados aproximados.

Em primeiro momento, adotamos uma tolerância ε para o erro de truncamento local. Supondo que se obteve o ponto (x_n, y_n) depois de n passos. Com um determinado tamanho de passo h calculamos y_{n+1} . Se não se conhece o resultado exato o melhor a fazer é refazer os cálculos com um método mais preciso a partir do ponto (x_n, y_n) e então calcular a diferença entre esses dois resultados. Chamaremos essa diferença de estimativa e_{n+1}^{est} do erro do método originalmente usado. Caso o erro seja maior que ε , então o tamanho de passo deverá ser ajustado e o cálculo refeito.

Por exemplo, para o método de Euler, o erro de truncamento local é proporcional a h^2 , então para diminuir o erro estimado em relação a ε pode-se multiplicar o tamanho h inicial por $\sqrt{\frac{\varepsilon}{e_{n+1}^{est}}}$ e usar o resultado como novo tamanho de passo, mantendo, desta forma, o erro de truncamento local estável ao longo do procedimento.

3.2 DEDUÇÃO DO MÉTODO DE EULER POR INTEGRAL

Existem outras maneiras de deduzir o método de Euler. Uma abordagem é integrar ambos os lados da Equação diferencial $y' = f(x, y)$ no intervalo de x_0 para x_{n+1} obtendo

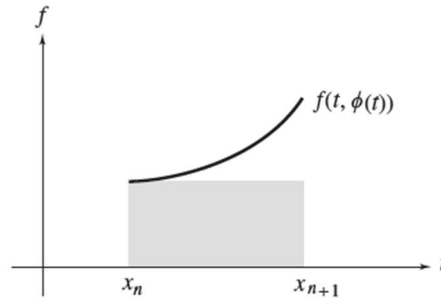
$$\Phi(x_{n+1}) - \Phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi'(t_n) dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \Phi(t)) dt,$$

substituindo y por $\Phi(x)$.

Resolvendo para $\Phi(x_{n+1})$, obtém-se

$$\Phi(x_{n+1}) = \Phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \Phi(t)) dt.$$

Figura 8 - Aproximação por um retângulo.



Fonte: (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2012, p. 94)

Como não se conhece $\Phi(t)$, não se pode integrar $f(t, \Phi(t))$. Assim, deve-se aproximar a integral no segundo membro da última equação. Tendo encontrado $y_n \approx \Phi(x_n)$, a maneira mais simples é encontrar a área do retângulo (Figura 8) com base $[x_n, x_{n+1}]$ e altura $f(x_n, \Phi(x_n))$, assim obtendo

$$\phi(x_{n+1}) \approx \Phi(x_n) + f(x_n, \Phi(x_n))(x_{n+1} - x_n).$$

Substituindo $\Phi(x_n)$ pela aproximação y_n e $x_{n+1} - x_n$ por h , temos

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Este último resultado é o método de Euler.

3.3 FÓRMULA DE TAYLOR

O método de Euler converge lentamente, por ser de ordem 1. Por outro lado, existem procedimentos que possuem convergência mais rápida, como o polinômio de Taylor, que pode ser visto como extensão natural do método de Euler.

Dado o problema de valor inicial

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x_n, \phi(x_n)), \quad \phi(x_n) = y_n.$$

Para este problema assumiremos que f e $\partial y/\partial x$ sejam contínuos e limitados na faixa vertical $\{(x, y): a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ e que f seja derivável tantas vezes quantas forem necessárias.

Supondo que a solução $y = \phi(x)$ tenha uma série de Taylor em torno do ponto x_n , a expansão de $\phi(x_n + h)$ em série de Taylor:

$$\phi(x_n + h) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(x_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(x_n) + \dots$$

Ou

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(x_n) + \frac{h^3}{3!}\phi'''(x_n) + \dots$$

Truncando a série logo após a segunda parcela, e substituindo $\phi(x_n)$ e $\phi(x_{n+1})$ por suas aproximações y_n e y_{n+1} , se obtém novamente a fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Uma das vantagens da série de Taylor é que se for usada com resto, pode-se estimar o tamanho do erro na fórmula. Mas por outro lado, ela se torna mais trabalhosa pois é preciso resolver várias derivadas.

3.4 ERROS DE APROXIMAÇÃO

Erros são inevitáveis ao se usar métodos numéricos para aproximar soluções. Ocorrem pelos mais diversos motivos, seja pelo método escolhido, quantidade de casas decimais, arredondamentos feitos durante o processo ou falhas na modelagem do problema. De acordo com Cunha e Castro (2010, p.18), “a informação sobre o erro que acompanha uma aproximação

para a solução de um problema é fundamental para se conhecer a qualidade da aproximação e para termos uma noção mais clara sobre o valor exato da solução”.

Por isso é necessário verificar o tamanho do erro e avaliar a necessidade de diminuir o tamanho de passo h , com o objetivo de aumentar a precisão, levando em conta o esforço computacional. Na resolução de um P.V.I. por meios numéricos podem aparecer vários tipos de erro, como erro de arredondamento e os erros de truncamento.

3.4.1 Erro de truncamento global E_n :

O erro de truncamento global E_n é a diferença entre a solução exata $\phi(t_n)$ do problema de valor inicial e seu valor numérico y_n , com todas as casas decimais, dado por:

$$E_n = \phi(t_n) - y_n.$$

Para calcular este erro é necessário conhecer a solução exata e ainda não ter casas decimais arredondadas. Pode ser causado por dois motivos: Primeiro, por ser feito o uso de uma fórmula aproximada em cada passo para determinar x_{n+1} ; ou então por os dados de entrada em cada etapa estarem aproximadamente corretos, já que, em geral, $\phi(t_n)$ não é igual a y_n .

3.4.2 Erro de truncamento local

O erro de truncamento local e_n se difere do global pois neste caso os valores de $\phi(t_n)$ e y_n são arredondados com um número finito de casas decimais. Este erro é o mais viável quando se sabe a solução exata, assim:

$$e_n = \phi(t_n) - y_n.$$

3.4.3 Erro de arredondamento

Como em todas as iterações temos um número finito de casas decimais, em certos momentos ocorrerão arredondamentos feitos pelos computadores. Se y_n for o valor numérico de fato, como todas as casas decimais, e Y_n for o valor com arredondamento, o erro de arredondamento R_n será dado por:

$$R_n = y_n - Y_n,$$

Este erro depende da ordem em que os cálculos são executados, do computador utilizado, o método de arredondamento e assim por diante.

3.4.4 Valor absoluto do erro total

O valor absoluto do erro total ao calcular $\phi(t_n)$ é dado por:

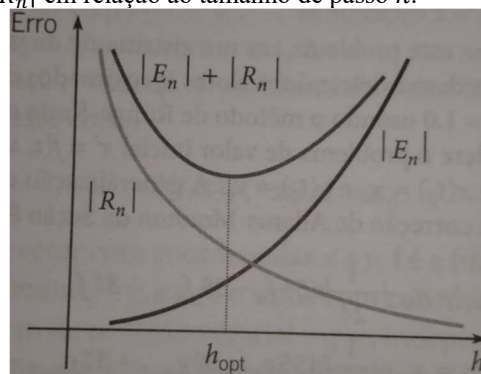
$$|\phi(t_n) - Y_n| = |\phi(t_n) - y_n + y_n - Y_n|.$$

Fazendo uso da desigualdade triangular, $|a + b| \leq |a| + |b|$, encontramos

$$|\phi(t_n) - Y_n| \leq |\phi(t_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \leq |E_n| + |R_n|.$$

Assim, o erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento e de arredondamento. Pelo método de Euler é possível observar que quanto maior for o tamanho de passo h maior será o erro de truncamento, mas, ao mesmo tempo, serão necessários menos passos, resultando em um erro de arredondamento menor. Da mesma forma, quanto menor for h , menor será E_n , porém com maior número de iterações resultando em um erro de arredondamento maior. O gráfico a seguir ilustra essa conclusão.

Figura 9 - A dependência do erro de truncamento $|E_n|$, do erro de arredondamento $|R_n|$ e do erro total $|E_n| + |R_n|$ em relação ao tamanho de passo h .



Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, MEADE, 2020, p.254).

3.4.5 Erro de truncamento local para o Método de Euler

Supondo que a solução do problema de valor inicial possua derivada segunda contínua em determinado intervalo. Supondo f , f_t e f_y contínuas e seja ϕ uma solução do PVI, então

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)).$$

Pela regra da cadeia,

$$\phi''(t) = f_t(t, \phi(t)) + f_y(t, \phi(t))\phi'(t) = f_t(t, \phi(t)) + f_y(t, \phi(t))f(t, \phi(t)).$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade nessa equação é contínua, ϕ'' também é contínua.

Expandindo ϕ em torno de t_n usando um polinômio de Taylor com resto, resulta

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2,$$

com $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$.

Como $\phi(t_n + h) = \phi(t_{n+1})$ e $\phi'(t_n) = f(t_n, \phi(t_n))$, pode-se reescrever a equação como

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + hf(t_n, \phi(t_n)) + \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2.$$

Usando a fórmula de Euler para calcular $\phi(t_{n+1})$ conhecendo o valor exato de y_n em t_n , isto é, $y_n = \phi(t_n)$, encontramos

$$y_{n+1}^* = \phi(t_n) + hf(t_n, \phi(t_n)),$$

com o asterisco (*) designando o valor hipotético aproximado de $\phi(t_{n+1})$.

Subtraindo y_{n+1}^* de $\phi(t_{n+1})$, encontramos o erro de truncamento local para o $(n + 1)$ -ésimo passo no ME:

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1}^* = \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2, \quad (1)$$

em que $t_n < \bar{t}_n < t_{n+1}$. Observe que o erro de truncamento local é proporcional ao quadrado do tamanho de passo h e depende da derivada segunda da solução exata.

Geralmente o valor de $\bar{t}_n$ na equação (1) é desconhecido, então o erro não pode ser calculado. Contudo, pode-se determinar o limite superior para o módulo do erro. Como $\phi(t)$ possui derivada segunda em $[t_n, t_{n+1}]$, existe o máximo M de $\phi''(t)$ no intervalo, ou seja,

$$M = \max|\phi''(t)|, \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Assim, se estivermos calculando o valor da solução em um intervalo limitado, teremos uma cota uniforme,

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2} M h^2,$$

que pode ser usada para estimar um intervalo de tolerância para h , uma vez que considera o maior valor possível de $|\phi''(t)|$. Uma de suas utilidades é encontrar um tamanho de passo h que gere erros que não extrapolem um nível de tolerância dado. Assim, por exemplo, se foi estipulado que o tamanho do erro não ultrapasse ϵ , então teremos

$$h \leq \sqrt{\frac{2\epsilon}{M}}.$$

3.5 MÉTODO DE EULER MELHORADO

O método de Euler se mostra trabalhoso para muitos problemas, pois para aumentar sua precisão precisa diminuir o tamanho de passo, o que conseqüentemente cria mais etapas para o procedimento. Felizmente foram feitas melhorias na fórmula. Uma das mais importantes é a que ficou conhecida como fórmula de Heun¹ ou fórmula de Euler aprimorada.

Anteriormente, para o problema de valor inicial,

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

foi obtida a seguinte equação

$$\Phi(x_{n+1}) = \Phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt \quad (2)$$

cujo integrando foi aproximado à área sob $f(t, \phi(t))dt$ por um retângulo, de acordo com a Figura 8.

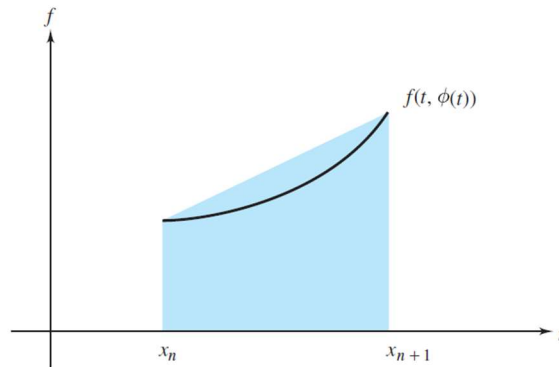
Segundo Boyce, Diprima e Meade (2020, p. 243), “uma fórmula de aproximação melhor pode ser obtida se a integral definida em (2) for aproximada de modo mais preciso. Um modo de fazer isso é aproximar o integrando pela média de seus valores nas duas extremidades, a saber, $\frac{1}{2} (f(t_n, \phi(t_n)) + f(t_{n+1}, \phi(t_{n+1})))$ ”. Isto é, aproximar a integral aplicando a regra do trapezoide, resultando

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, \phi(t)) dt = \frac{h}{2} (f(x_n, \phi(x_n)) + f(x_{n+1}, \phi(x_{n+1}))).$$

¹ Karl Heun (1859-1929) foi um matemático alemão e professor na Technische Hochschule Karlsruhe.

O que equivale a aproximar a área embaixo da curva entre $x = x_n$ e $x = x_{n+1}$ pela área do trapézio (Figura 10).

Figura 10 - Aproximação por um trapézio.



Fonte: (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2014, p. 125)

Segundo Cunha e Castro (2010, p.137), “em geral, a regra dos trapézios oferece uma aproximação equivalente àquela obtida pela soma de Riemann com ponto médio, mas tem vantagem sobre as outras escolhas de pontos, especialmente em funções de crescimento acentuado”.

Quando substituída na equação (2) com os valores aproximados y_n e y_{n+1} leva ao esquema numérico

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} h, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

que é um método implícito, onde y_{n+1} tem apenas uma fórmula implícita, pois aparece como argumento de f .

O método de Euler aprimorado pode ser resolvido em duas etapas. Primeiro, pode-se usar o método de Euler para se obter uma aproximação para y_{n+1} , chamemos, y_{n+1}^* . E em seguida substituir esse valor no lado direito do esquema numérico, obtendo

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))}{2} h.$$

3.6 MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Os métodos de Runge-Kutta surgem do método de Euler, sendo esse chamado de Runge-Kutta de primeira ordem. O método de Euler melhorado, por sua vez, é o Runge-Kutta de

segunda ordem. Trataremos aqui também os métodos de terceira e quarta ordem. Cada um desses métodos é uma comparação com um polinômio de Taylor adequado, de onde vem o termo ordem de seus nomes.

A fórmula de Runge-Kutta envolvendo a média ponderada dos valores de $f(x, y)$ ao longo do intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ pode ser escrita de forma generalizada como

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^m b_i k_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

com

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2), \\ &\vdots \\ k_m &= f(x_n + c_m h, y_n + a_{m1} h k_1 + a_{m2} h k_2 + \dots + a_{m, m-1} h k_{m-1}). \end{aligned}$$

Com os valores b_i sendo pesos, e i e m , constantes satisfazendo

$$\sum_{i=1}^m b_i = 1.$$

3.6.1 Runge-Kutta de segunda ordem

Para o método de Runge-Kutta de segunda ordem, consideremos o polinômio de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange, temos

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(x_n) + \frac{h^3}{3!}\phi^{(3)}(\xi), \quad \xi \in (x_n, x_{n+1}).$$

Com $m=2$ em (3), temos

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2). \quad (4)$$

Considerando $k_1 = f(x_n, y_n)$ e $k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))$, vamos encontrar b_1 e b_2 , α e β de forma que (4) seja igual ao polinômio de Taylor de grau 2.

Expandindo k_2 em uma série de Taylor de duas variáveis em torno de (x_n, y_n) ignorando-se os termos a partir do termo em h^2 , temos,

$$k_2 = f(x_n, y_n) + \alpha h \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + \beta h f(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} + O(h^2). \quad (5)$$

Desprezando o resto $O(h^2)$, supondo que ele seja suficientemente pequeno, e substituindo (5) em (4), obtém-se

$$y_{n+1} = y_n + h[(b_1 + b_2)f(x_n, y_n)] + h^2 \left[b_2 \alpha \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + b_2 \beta f(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} \right]. \quad (6)$$

Agora, expandindo $\phi(x)$ em torno de x_n até o termo em h^2 , temos

$$\phi(x_n + h) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + \frac{h^2}{2!} \phi''(x_n).$$

Como

$$\phi'(x_n) = f(x_n, \phi(x_n))$$

e

$$\phi''(x_n) = \frac{\partial f(x_n, \phi(x_n))}{\partial x} + f(x_n, \phi(x_n)) \frac{\partial f(x_n, \phi(x_n))}{\partial y},$$

então

$$\begin{aligned} \phi(x_n + h) &= \phi(x_n) + hf(x_n, \phi(x_n)) \\ &+ \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial f(x_n, \phi(x_n))}{\partial x} + f(x_n, \phi(x_n)) \frac{\partial f(x_n, \phi(x_n))}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Como $x_n + h = x_{n+1}$, fazendo $\phi(x_n) = y_n$ em (7) podemos igualar as equações (6) e (7), ou seja

$$f(x_n, y_n) = (b_1 + b_2)f(x_n, y_n)$$

e

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + f(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} \right] \\ &= \left[b_2 \alpha \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x} + b_2 \beta f(x_n, y_n) \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

A igualdade acima é verdadeira se

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1 \\ b_2 \alpha = \frac{1}{2} \\ b_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (9)$$

O sistema acima tem infinitas soluções. Consideremos a solução $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ e $\alpha = \beta = 1$. Temos então, por (4)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

Como $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h f(x_n, y_n))$ e $x_n + h = x_{n+1}$, obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^*)], \quad (10)$$

que é a fórmula do método Euler melhorado.

3.6.2 Runge-Kutta de terceira ordem

Os métodos de Runge-Kutta de ordens mais elevadas podem ser obtidos de maneira semelhante ao de segunda ordem. No caso da terceira ordem, basta fazer $m = 3$ em (3). Assim, encontramos

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + b_3 k_3),$$

em que k_1 , k_2 e k_3 aproximam derivadas em pontos no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, sendo

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_2 + (\alpha_2 - \beta_2) h k_1).$$

De maneira análoga ao método anterior, encontraremos um sistema, com mais incógnitas do que equações, tendo conseqüentemente infinitos resultados. A resolução completa pode ser encontrada em Butcher² e Griffiths³. O método de Runge-Kutta de terceira ordem possui erro de truncamento local $O(h^4)$ a solução mais conhecida pode ser escrita como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} [k_1 + k_2 + k_3], \quad (11)$$

com

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1\right),$$

$$k_3 = f(x_n + h, y_n + 2h k_2 - h k_1).$$

² BUTCHER, J. C. **Numerical Methods for Ordinary Differential Equations**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2008.

³ GRIFFITHS, David F.; HIGHAM, Desmond J. **Numerical methods for ordinary differential equations: initial value problems**. Springer Science & Business Media, 2010.

3.6.3 Runge-Kutta de quarta ordem

Atualmente chamado de *método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem em quatro estágios*, este método possui um erro de truncamento local proporcional a h^5 , ou seja, é duas ordens de grandezas mais preciso que o método de Euler aprimorado é três ordens de grandezas a mais que o método clássico de Euler. É um método de passo simples, pois precisa-se conhecer apenas x_n e y_n para determinar y_{n+1} .

O método de Runge-Kutta de quarta ordem é o mais utilizado e preciso. Nagle, Saff e Snider (2012, p. 105) pontuam que “de modo geral, ele produz aproximações muito precisas mesmo quando o número de iterações é razoavelmente pequeno”.

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + \frac{h^2}{2!}\phi''(x_n) + \frac{h^3}{3!}\phi^{(3)}(x_n) + \frac{h^4}{4!}\phi^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}\phi^{(5)}(\xi),$$

com $\xi \in (x_n, x_{n+1})$.

Para o método, é estabelecida uma equação da forma

$$y_{n+1} = y_n + h(ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4).$$

As constantes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 são dadas por

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1), \\ k_3 &= f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2), \\ k_4 &= f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3). \end{aligned}$$

Uma das soluções mais conhecidas para este método é dada por:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (12)$$

em que

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + h k_3). \end{aligned}$$

A equação solução envolve uma média ponderada dos valores de $f(x, y)$ em quatro pontos diferentes no intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$.

3.7 CONVERGÊNCIA E CONSISTÊNCIA PARA MÉTODOS NUMÉRICOS

Ao utilizar métodos numéricos, uma das principais características a se observar é a sua precisão. No caso dos *métodos de passo* para problemas de valor inicial, é importante determinar se a cada etapa do cálculo obtemos resultados que se aproximam da solução exata. Por isso deve-se observar a sua convergência.

Definição 3. (Convergência) Um método numérico é dito convergente se, para todo $x \in [a, b]$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y_n - \phi(x)| = 0,$$

com $nh = x - a$, onde y_n é a solução obtida pelo método e $\phi(x)$ é a solução da equação diferencial ordinária.

Exemplo. Valores estimados para a solução $\phi(x)$ para o problema de valor inicial⁴

$$\frac{dy}{dx} = x^3 + e^x, \quad y(0) = 1,$$

quando $x = 1$ utilizando os métodos de Euler e Euler melhorado para tamanhos de passo h diferentes.

Tabela 2 - Ordem de convergência.					
h	n	Euler	Euler melhorado	Erro Euler	Erro EM
0,5	2	2,3869	30664	0,5814	0,0981
0,25	4	2,6531	2,9928	0,3152	0,0246
0,1	10	2,8363	2,9722	0,1320	0,0039
0,05	20	2,9013	2,9692	0,0670	0,0009

Fonte: Adaptado pelo próprio autor.

Observe na Tabela 2 que à medida que o tamanho de passo h diminui se obtém aproximações melhores. Outro detalhe importante é que os métodos apresentados encontraram resultados diferentes para as mesmas quantidades de passos. Isso se dá pela sua ordem de convergência.

Definição 4. (Ordem de convergência) Considere a solução de uma equação diferencial no ponto $x = x_n$ e a solução aproximada y_n pelo método neste ponto. Dizemos que a ordem de convergência é p se existir uma constante C tal que:

$$|y_n - \phi(x_n)| < Ch^p.$$

⁴ Solução geral: $y(x) = \frac{x^4}{4} + e^x + c_1$; $\phi(1) = 2,96828182845905$.

A ordem de convergência define o quão rápido um método encontra soluções numéricas aproximadas da exata.

“Conforme h tende a zero, o termo $O(h^p)$, que na verdade é o erro de truncamento local, tende a zero com a mesma rapidez que h^p ”(Maioli, 35).

Note que para aplicar a definição de convergência é necessário conhecer a solução exata do PVI, o que nem sempre é possível.

Definição 5. (Consistência) Um método de passo único é dito consistente se o erro de truncamento local e_n tende a zero conforme $h \rightarrow 0$ para todos os passos de tempo. Ou seja:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |e_n| = 0,$$

onde N é o número total de iterações.

Segundo afirma (FONTANA, 2018, p.39), “Dessa forma, um método consistente possui a propriedade de que as equações obtidas para cada passo se aproximam da própria equação diferencial conforme o passo de tempo tende a zero, de modo que o erro de truncamento local também tende a zero”.

Ou seja, um método consistente tende a encontrar soluções cada vez mais próximas das soluções exatas a medida que as iterações são feitas para cada passo. Esse comportamento pode ser facilmente visto em situações em que o campo de direções da equação geral apresenta soluções assintóticas, como no caso do exemplo a seguir:

Exemplo: A equação logística para a população p (em milhares) no instante t de uma certa espécie é dada por:

$$\frac{dp}{dt} = p(2 - p).$$

Seja a população inicial 1000 (ou seja, $p(0) = 1$), então, sob as condições ideais, pode-se encontrar as seguintes soluções para a equação logística, com $h = 0,5$:

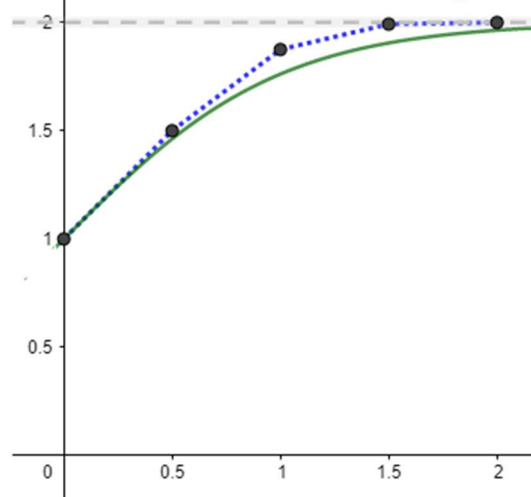
Tabela 3 - Soluções aproximadas e exatas para $\frac{dp}{dt} = p(2 - p)$ com $p(0) = 1$.

t_n	y_n (Euler)	Solução exata	Erro de truncamento local
0,0	1,0000	1,0000	0,0000
0,5	1,5000	1,4621	0,0379
1,0	1,8750	1,7616	0,1134
1,5	1,9922	1,9051	0,0871
2,0	1,9999	1,9950	0,0049

Fonte: Adaptado pelo próprio autor de (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2012, p.15).

Pela Tabela 3, temos que o erro de truncamento local tende a diminuir quando t se aproxima de 2. Na Figura 11, podemos observar que os pontos encontrados pelo método de Euler começam a se aproximar da solução exata na medida que t aumenta. Se considerarmos a solução constante $p(t) = 2$, de acordo com o teorema da unicidade, este problema de valor inicial em questão não poderá atingir $p = 2$ ou valores maiores.

Figura 11-Consistência do método de Euler para $\frac{dp}{dt} = p(2 - p)$.



Fonte: Adaptado de (NAGLE, SAFF, SNIDER, 2012, p.15) pelo próprio autor.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para melhor observar o método de Euler, iniciaremos com umas das equações diferenciais mais simples, $y'(x) = e^x$. Sua solução geral pode ser encontrada facilmente integrando ambos os lados, o que será útil para estimar o erro do método de Euler.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^x \\ dy &= e^x dx \\ \int dy &= \int e^x dx \\ y &= e^x + c_1,\end{aligned}$$

onde c_1 é uma constante arbitrária.

Agora, a fim de comparação, vamos encontrar seus valores numéricos. Para tal, precisamos definir um tamanho de passo que permita uma aproximação razoável, mas que não exija muitos cálculos.

Por exemplo, para encontrar o valor aproximado de y para $x = 1$ sabendo que $y(0) = 1$ com 10 passos, precisamos calcular o tamanho do passo h :

Como $x_n = x_0 + h$, então

$$h = \frac{x_n - x_0}{n}.$$

Para n igual a 10, temos

$$h = \frac{1 - 0}{10} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

Assim, em cada passo o valor de x será aumentado em 0,1.

Pelo método de Euler, $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$, encontramos os seguintes resultados:

Tabela 4 - Comparação entre soluções exatas e numéricas para $\frac{dy}{dx} = e^x$, $y(0) = 1$.

n	x_n	y_n	Solução exata	Erro de truncamento local
0	0	1,000000	1,000000	0,000000
1	0,1	1,100000	1,105171	0,005171
2	0,2	1,210517	1,221403	0,010886
3	0,3	1,332657	1,349859	0,017201
4	0,4	1,467643	1,491825	0,024181
5	0,5	1,616826	1,648721	0,031896
6	0,6	1,781698	1,822119	0,040421
7	0,7	1,963910	2,013753	0,049843

8	0,8	2,165285	2,225541	0,060256
9	0,9	2,387839	2,459603	0,071764
10	1	2,633799	2,718282	0,084482

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Pelos resultados obtidos na Tabela 4, comparando com as soluções exatas, é possível observar que o erro vai se propagando gradativamente. Para este exemplo, sempre serão encontrados y_{n+1} menores que solução exata pois, geometricamente, a curva solução para este problema de valor inicial cresce exponencialmente.

4.1 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE EULER CLÁSSICO E APRIMORADO

Como visto no exemplo anterior, o método de Euler clássico pode perder sua precisão gradativamente. Para contornar isso, pode-se optar por diminuir o tamanho de passo ou usar o método melhorado. A princípio de comparação, vamos calcular⁵ o valor numérico de $\frac{dy}{dx} = 2y - 3x$ em $x = 1$ para a condição inicial $y(0) = 1$ com os tamanhos de passo diferentes.

Tabela 5 - Resultados das iterações para $\frac{dy}{dx} = 2y - 3x, y(0) = 1$.

h	n	Euler Clássico	Euler aprimorado	Erro E.C.	Erro E.A.
0,5	2	3,2500	3,8125	0,8473	0,2848
0,25	4	3,5156	3,9933	0,5816	0,1040
0,1	10	3,7980	4,0761	0,2993	0,0211
0,05	20	3,9319	4,0916	0,1654	0,0057

Fonte: Adaptado de (BOYCE, DIPRIMA, MEADE, 2020, p. 241) pelo próprio autor.

Pela Tabela 5, observamos que o método de Euler aprimorado oferece uma maior precisão, especialmente para os tamanhos de passo $h = 0,5$ e $h = 0,25$, obtendo aproximações melhores que o método clássico com $h = 0,1$ e $h = 0,05$.

⁵ Solução geral: $\phi(x) = \frac{1}{4}(6x + e^{2x} + 3)$; $\phi(1) \approx 4,0973$

4.2 AVALIAÇÃO DA PRECISÃO DOS MÉTODOS DE EULER, EULER MELHORADO E RUNGE-KUTTA DE 4ª ORDEM.

Como dito anteriormente, diminuir o tamanho de passo as vezes pode não ser vantajoso por acarretar em maior custo computacional, principalmente quando os valores iniciais e o resultado desejados estão distantes ou o processo for feito manualmente. Neste caso seria melhor optar por métodos mais precisos.

Nesta subseção iremos comparar os resultados de um mesmo problema calculados com os métodos de Euler, Euler melhorado e Runge-Kutta de terceira e quarta ordem. O problema em questão é o seguinte:

Dada a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y(3 - xy)$ com condição inicial $y(1) = 4,5$, encontre $y(2)$.

Obviamente com o auxílio de um computador é possível experimentar vários tamanhos de passo e observar como os resultados se comportam. Mas por questões de organização vamos estabelecer o tamanho de passo $h = 0,2$.

Primeiro: Para o método de Euler clássico, temos que

$$y_1 = 4,5 + 0,2 * [4,5 * (3 - 1 * 4,5)] = 3,15$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,2 = 1,2.$$

$$y_2 = 3,15 + 0,2 * [3,15 * (3 - 1,2 * 3,15)] = 2,6586$$

$$x_2 = x_1 + h = 1,2 + 0,2 = 1,4$$

$$y_3 = 2,6586 + 0,2 * [2,6586 * (3 - 1,4 * 2,6586)] = 2,2747$$

$$x_3 = x_2 + h = 1,4 + 0,2 = 1,6$$

$$y_4 = 2,2747 + 0,2 * [2,2747 * (3 - 1,6 * 2,2747)] = 1,9838$$

$$x_4 = x_3 + h = 1,6 + 0,2 = 1,8$$

$$y_5 = 1,9838 + 0,2 * [1,9838 * (3 - 1,8 * 1,9838)] = 1,7573$$

$$x_5 = 1,8 + 0,2 = 2,0.$$

Na Tabela 6 são exibidos os resultados da iteração, a solução exata para a equação em cada x_n e o erro máximo dos resultados das iterações.

Tabela 6 - Valores de x_n , y_n , solução exata e erro para $dy/dx = y(3 - xy)$, $y(1) = 4,5$.			
x_n	y_n	Solução exata	Erro máximo
1,2	3,1500	3,4615	0,3115
1,4	2,6586	2,8125	0,1539

1,6	2,2747	2,3684	0,0937
1,8	1,9838	2,0455	0,0617
2,0	1,7573	1,8000	0,0427

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Nestes resultados, podemos perceber que a solução numérica se distancia da solução exata obtendo um resultado final com erro de 0,0427.

Segundo: Para o método de Euler melhorado (ou Runge-Kutta de Ordem 2), (Equação (10)), temos:

$$y_1^* = 4,5 + 0,2 * [4,5 * (3 - 1 * 4,5)] = 3,15.$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0,2 = 1,2,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} [f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*)] = 4,5 + \frac{0,2}{2} \{-6,75 + [3,15 * (3 - 1,2 * 3,15)]\} \\ = 3,5793.$$

Este processo se repete com os novos valores de x e y até que sejam encontrados x_5 e y_5 .

Com os resultados exibidos na Tabela 7, podemos perceber que o erro diminuiu consideravelmente pouco se comparado aos resultados do método anterior.

Tabela 7 - Método de Euler aprimorado para $dy/dx = y(3 - xy)$, $y(1) = 4,5$.

x_n	y_n^*	y	Solução exata	Erro máximo
1,2	3,1500	3,5793	3,4615	0,1178
1,4	2,6521	2,9263	2,8125	0,1138
1,6	2,2844	2,4545	2,3684	0,0861
1,8	1,9994	2,1056	2,0455	0,0602
2,0	1,7730	1,8410	1,8000	0,0410

Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

Neste caso, é preferível avançar para o método de Runge-Kutta de ordem 4.

O método de quarta ordem é bastante trabalhoso para ser executado, tendo em vista a quantidade de elementos a serem definidos em cada passo. No entanto, geralmente oferece resultados melhores que os anteriores. Vejamos os resultados obtidos na Tabela 8.

Tabela 8 - Método de Runge-Kutta de ordem 4 para $dy/dx = y(3 - xy)$, $y(1) = 4,5$.

x_n	y_n	Solução exata	Erro máximo
1,2	3,4674	3,4615	0,0059

1,4	2,8170	2,8125	0,0045
1,6	2,3713	2,3684	0,0029
1,8	2,0473	2,0455	0,0018
2,0	1,8011	1,8000	0,0011

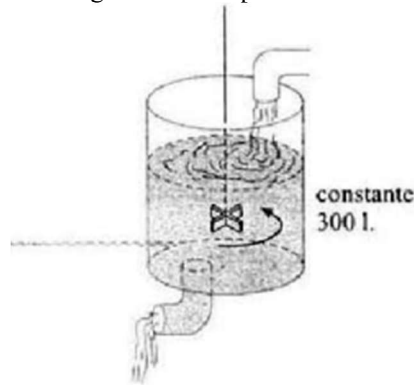
Fonte: Tabela elaborada pelo autor.

De fato, ao comparar os resultados com a solução exata, observou-se que eles chegam a ser muito mais precisos que os métodos anteriormente vistos, com erro 0,0011 para (x_5, y_5) .

4.3 APLICAÇÃO DO MÉTODO DE EULER E RUNGE-KUTTA EM PROBLEMAS DE MISTURAS

Inicialmente, 50 gramas de sal são dissolvidos em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto, e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. Veja a Figura 12. Se a concentração da solução que entra é 2 gramas por litro, determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante. Quantos gramas de sal estão presentes após 50 minutos? E depois de 400 minutos?

Figura 12 - Tanque.



Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 110).

Solução:

Seja $A(t)$ a quantidade de sal, medida em gramas, no tanque no instante t . Como a solução será bombeada para o tanque e logo depois drenada, temos que a taxa de variação de $A(t)$ é dada por

$$\frac{dA}{dt} = (\text{taxa de entrada}) - (\text{taxa de saída}) = R_1 - R_2. \quad (13)$$

Para a taxa de entrada, temos

$$R_1 = (3l/min) * (2g/l) = 6g/min.$$

e para a saída,

$$R_2 = 3l/min = \left(\frac{A}{300}l/g\right) = \frac{A}{100}l/min.$$

Substituindo em (13), temos

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100}.$$

Considerando a condição inicial dada, $A(0) = 50$, podemos aproximar os resultados pelos métodos de Euler e Runge-Kutta. Se aproximarmos esses resultados com um tamanho de passo h igual a 50 precisaremos de oito etapas para concluir o processo. Resolvendo para os métodos de Euler, Euler aprimorado e Runge-Kutta de ordens 3 e 4 teremos os seguintes resultados:

Tabela 9 - Resultados das iterações.

$t(\text{minutos})$	$A(t)$ – Euler	$A(t)$ -E aprimorado	Runge-Kutta de ordem 3	Runge-Kutta de ordem 4	Solução exata
50	325,0000	256,2500	267,7083	266,2760	266,4081
100	462,5000	385,1563	399,2405	397,5060	397,6663
150	531,2500	465,7227	478,7078	477,1326	477,2784
200	565,6250	516,0767	526,7193	525,4476	525,5656
250	582,8125	547,5479	555,7262	554,7638	554,8533
300	591,4062	567,2174	573,2513	572,5520	572,6171
350	595,7031	579,5109	583,8393	583,3453	583,3914
400	597,8516	587,1943	590,2362	589,8944	589,9264

Fonte: Adaptado de (ZILL, CULLEN, 2001, p.111) pelo autor.

Observando os resultados na Tabela 9, podemos perceber que, para este problema, os métodos de Euler clássico e aprimorado obtêm resultados bem diferentes da solução exata, especialmente para $t = 50$. Já os métodos de Runge-Kutta de ordens 3 e 4 encontraram resultados próximos para $t = 50$. Por outro lado, pode-se observar em todos os métodos testados, que na medida que a quantidade de sal se aproxima do nível de saturação no tanque, sua taxa de crescimento diminui.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como problemática para este trabalho, a pesquisa partiu da hipótese de que muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas por métodos analíticos. Nesse sentido, foi proposto investigar o uso de métodos numéricos na resolução de equações diferenciais ordinária com problema de valor inicial.

Inicialmente foi mostrado um breve resumo da história das equações diferenciais, evidenciando alguns de seus personagens mais importantes e foram introduzidos alguns conceitos matemáticos necessários para a compreensão de algumas terminologias usadas no decorrer deste trabalho. Dentre os conceitos abordados, vimos a necessidade de falar sobre os campos de direções, pois imaginamos que facilitariam a compreensão sobre os conceitos de curva solução e de condição inicial, bem como existência e unicidade.

O método de Euler utiliza o conceito de curva tangente para encontrar os resultados e é preciso conhecer uma das soluções do problema, ou seja, um ponto na curva solução, para encontrar o próximo. E por se usar uma reta tangente, é de se esperar que o valor encontrado não será igual a solução exata. Assim, é preciso diminuir o intervalo entre as etapas, o que faz criar mais etapas para o processo.

Por conta disso, viu-se necessário buscar melhorias para o procedimento, a fim de aumentar a precisão dos resultados e eventualmente diminuir a quantidade de etapas. O método de Euler pode ser visto também como um polinômio de Taylor truncado. O polinômio de Taylor oferece soluções muito precisas para os problemas, mas tem o inconveniente de ter que resolver várias derivadas. Uma forma de contornar esse inconveniente é encontrar polinômios de Taylor adequados. Uma destas abordagens são os métodos de Runge-Kutta, que são aprimoramentos do método de Euler.

Acreditamos que tenhamos atingido os objetivos deste trabalho, levando em conta que o método de Euler e seus aprimoramentos conseguem atingir uma boa aproximação para as soluções de problemas de valor inicial, considerando os tamanhos de passos utilizados e alguns outros fatores, como a consistência do problema em questão e os erros gerados durante os cálculos. Por fim, esperamos que este trabalho colabore de forma a instigar os acadêmicos do curso de matemática a investigar com maior aprofundamento a utilização de modelos matemáticos, bem como os benefícios que possam levar para sala de aula.

REFERÊNCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 11ª Ed., Rio de Janeiro: LTC, 2020.

BOYER, Carl B. **Historia de la matemática**. Madrid: Alianza editorial, 1986. Disponível em: https://www.academia.edu/41341372/Historia_de_la_matematica_Carl_Boyer. Acesso em: 17 maio 2021.

BRITANNICA, The Editors of Encyclopaedia. **Brook Taylor**. Encyclopedia Britannica, 25 Dec. 2020. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Brook-Taylor>. Acesso em 2 jul. 2021.

CARREIRA, B. L.; BRANDI, A. C. Método de Euler aperfeiçoado e modificado para solução de equações diferenciais ordinárias. **C. Q. D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 7, p. 4-11, dez. 2016. Edição ERMAC Iniciação Científica. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v07a01-ic-metodos-de-euler.pdf>. Acesso em 17 de maio de 2021.

CUNHA, Francisco Gêvane Muniz; CASTRO, Jânio Kléo Sousa de. **Cálculo Numérico**, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Fortaleza, 20 de nov. de 2018. Disponível em: <http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/430185>. Acesso em 19 de maio de 2021.

DE MENDONÇA, Pedro Thiago Vilela et al. **Comparativo dos Métodos de Euler e Heun na resolução de equações diferenciais de primeira ordem**. Volume 6, n. 1, 2018. Disponível em: <https://proceedings.sbmec.org.br/sbmec/article/view/1757>. Acesso em 18 de maio de 2021.

FARRER, Harry et al. **Algoritmos estruturados**. Rio de Janeiro: LTC, v. 8, 1999.

FONTANA, Éliton. **Métodos Numéricos Aplicados à Engenharia Química**. Universidade Federal do Paraná – UFPR, 2018. Disponível em: https://fontana.paginas.ufsc.br/files/2018/03/parteI_metNum.pdf. Acesso em 19 de jul. de 2021.

GUIDORIZZI, Hamilton. **Um curso de Cálculo**. Volume 4. 5.ed. [Reimpr.] - Rio de Janeiro: LTC, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**. Vol. 1, 8 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LOOK, B. C.; BELAVAL, Yvon. **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Encyclopedia Britannica. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/Gottfried-Wilhelm-Leibniz>. Acesso em 2 jul. 2021.

NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. **Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems**. Pearson, 2014.

NAGLE, R. Kent; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur David. **Equações diferenciais**, 8ª Ed., Pearson, 2012.

RAMOS, Manoel Wallace Alves. **Métodos de Euler e Runge-Kutta: uma análise utilizando o Geogebra**. 2017. Disponível em:
<https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/9381>. Acessado em 19 de maio de 2021.

STEWART, James. **Cálculo Volume 2**: Tradução Da 7ª. Edição Norte-Americana. Cengage Learning Edições Ltda., 2013. Disponível em:
<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbmhzYW5kc mFtYXJpYXVmYWJfGd4OjE0NTYyODhkMjUzY2I4Nzg>. Acesso em 20 maio 2021.

RETIRADA da página Biography. **Isaac Newton - Quotes, Facts & Laws**. Ilustração. Disponível em: <https://www.biography.com/scientist/isaac-newton>. Acesso em 5 jul. 2021.

RETIRADA da Wikipédia. **Leonhard Euler**. Disponível em:
https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler. Acesso em 16 maio 2021.