UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE CAXIAS - CESC
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E FÍSICA
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

JOSEANNE MACHADO DA SILVA

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO E SUAS APLICAÇÕES NA ARTE E ARQUITETURA

CAXIAS – MA
2021

JOSEANNE MACHADO DA SILVA

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO E SUAS APLICAÇÕES NA ARTE E ARQUITETURA

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Licenciatura, do Centro de Estudos Superiores de Caxias, da Universidade Estadual do Maranhão CESC/UEMA, como requisito básico para conclusão do Curso.

Orientador: Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos

CAXIAS-MA

2021

S586s Silva, Joseanne Machado da

A sequência de fibonacci e o número de ouro e suas aplicações na arte e arquitetura / Joseanne Machado da Silva.__Caxias: CESC/UEMA, 2021.

51f.
Orientador: Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos.

Monografia (Graduação) – Centro de Estudo de Estudos Superiores de Caxias, Curso de Licenciatura em Matemática.

1. Fibonacci – Sequência. 2. Razão Áurea. 3. Ouro - Número. 4. Aplicação. I. Título.

CDU 511.13

Elaborada pelo bibliotecário Wilberth Santos Raiol CRB 13/608.

JOSEANNE MACHADO DA SILVA

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO E SUAS APLICAÇÕES NA ARTE E ARQUITETURA

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Licenciatura, do Centro de Estudos Superiores de Caxias, da Universidade Estadual do Maranhão CESC/UEMA, como requisito básico para conclusão do Curso.

Orientador: Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos

Aprovado em: 17/08/2021

BANCA EXAMINADORA

Franjossan Gomes dos Santos

Prof. Me. Franjossan Gomes dos Santos (Orientador)

CESC-UEMA

Francisco Queiroz dos Santos

Prof. Me. Francisco Queiroz dos Santos

CESC-UEMA

José de Ribamar Viana Coimbra

Prof. Me. José de Ribamar Viana Coimbra

CESC-UEMA

Dedico este trabalho a Deus que me deu forças para não desistir, a minha família pelo apoio e suporte ao longo da graduação e ao meu namorado Romulo que esteve comigo nos momentos finais e decisivos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelos aprendizados ao longo do curso e que esteve presente em todos os momentos, especialmente nos que mais precisamos nos dando a força necessária para vencermos todos os obstáculos.

Agradeço aos meus pais, José e Josélia, pela minha criação, educação e por todo o apoio recebido. Vocês serão sempre a minha base para a vida e exemplos de força e superação.

As minhas duas irmãs, Josanne e Julianne que sempre estiveram ao meu lado durante esse percurso, e estarão por todo o restante de minha vida. A minha avó Benedita (in memória) pelos ensinamentos e a todos os familiares que me deram incentivos para seguir em frente na busca pelos meus objetivos.

Agradeço as minhas amigas de infância Rayza e Raiane e aos que conheci na universidade, em especial ao meu melhor amigo e padrinho Domingos e ao meu namorado Romulo, por cada conselho, abraço e apoio nos meus momentos que mais precisei. Aos meus colegas de turma, Amanda, Geyce, Jefferson, Carla, Ingrid, Liomar, Erik, José Mateus, Maycon, Ana Clara, Lucas, Victor, Fernando e Walisson, principalmente pela amizade de cada um, pelas conversas, trabalhos, apoio e auxílio nas resoluções dos exercícios, festas e partilhas de vida durante toda essa trajetória acadêmica. Quero destacar também, aos acadêmicos de Matemática que tive um enorme prazer em conhecer na instituição e não quero perder a amizade de vocês: Naftali, Sarah, Gerciane, Benedito e tantos outros.

Agradeço aos excelentes professores que tive no Campus-Caxias, CESC-UEMA, que sem sombras de dúvidas contribuíram para minha formação. Em especial, as professoras Celina e Lélia, por todos os ensinamentos aprendidos para minha formação pessoal e profissional, saibam que sempre serei grata por tudo. Quero agradecer ao professor Fernando Berrig, pela ajuda nesse trabalho, por toda paciência com as minhas dúvidas e pela amizade.

Não poderia deixar de agradecer ao meu orientador Franjossan Gomes dos Santos, por todo apoio durante o curso, pela orientação na elaboração desse trabalho, pelos conselhos, puxões de orelha quando precisei, enfim, pela amizade que foi construída durante esse período na universidade.

Por fim, agradeço a todos vocês que contribuíram para a realização deste trabalho.

“A Matemática, senhora que ensina o homem a ser simples e modesto, é à base de todas as ciências e de todas as artes”.

(Malba Tahan)

RESUMO

O presente trabalho tem como finalidade o estudo da sequência de Fibonacci e o número de ouro e sua aplicação no campo das artes e da arquitetura. A justificativa da escolha do tema se dá pela contribuição à Álgebra e por ter diversas aplicações de sua teoria em vários campos, como o foco do nosso trabalho na Arte e na Arquitetura, de modo que aprendam a teoria e a sua aplicação prática. Desse modo, procurou-se responder a seguinte pergunta: Quais as aplicações da sequência de Fibonacci relacionada com o número de ouro, usados em obras de artes e em construções?. Descrevemos a história de Fibonacci e o problema no qual solucionou sobre a reprodução de coelhos, dando origem aos números e a sequência de Fibonacci. Apresentamos as demonstrações das propriedades da sequência e as potências do número de ouro. Mostramos as definições da razão áurea e as construções geométricas do retângulo áureo e o triângulo áureo até formar a espiral áurea, conhecida como espiral de Fibonacci, definirmos também o pentágono regular e o pentagrama. Trata-se de uma pesquisa bibliográfica de materiais como: livros, artigos, monografias e dissertações. Analisando as aplicações em projetos arquitetônicos desde a antiguidade até os dias atuais, nas pinturas de grandes artistas, presente na música e em fotografias.

Palavra chave: Sequência de Fibonacci. Razão Áurea. Número de ouro. Demonstração. Aplicação.

ABSTRACT

The present work has as purpose the study of the Fibonacci sequence and the golden number and its application in the field of arts and architecture. The justification for choosing this topic is due to its contribution to Algebra and for having several applications of its theory in various fields, such as the focus of our work in Art and Architecture, so that they learn the theory and its practical application. Thus, we sought to answer the following question: What are the applications of the Fibonacci sequence related to the golden number, used in works of art and construction? We described the history of Fibonacci and the problem he solved about the reproduction of rabbits, giving rise to the Fibonacci numbers and sequence. We present the demonstrations of the properties of the sequence and the powers of the golden number. We show the definitions of the golden ratio and the geometric constructions of the golden rectangle and the golden triangle until it forms the golden spiral, known as the Fibonacci spiral, and we also define the regular pentagon and the pentagram. This is bibliographic research of materials such as books, articles, monographs, and dissertations. Analyzing the applications in architectural projects from antiquity to the present day, in the paintings of great artists, present in music and photographs.

Keyword: Fibonacci Sequence. Golden Ratio. Golden Number. Demonstration. Application.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\approx$ – Quase igual

$\sim$ – Semelhante

$P \Rightarrow Q$ – Implica; se P então Q

$P \Leftrightarrow Q$ – Equivalente; P, se, e somente se, Q

∞ – Infinito

$a|b$ – a divide b

$\forall$ – Para todo

$\in$ – Pertence

φ – Phi; número de ouro

AB – Segmento AB

$\overline{AB}$ – Medida do segmento AB

ΔABC – Triângulo ABC

$A\hat{B}C$ – Ângulo ou medida do ângulo

Σ – Somatório

$\lim_x a$ – Limite quando o x tende a a

f_n – Sequência de Fibonacci

$\mathbb{N}$ – Conjuntos dos naturais

$\mathbb{Q}$ – Conjuntos dos racionais

$\mathbb{R}$ – Conjuntos dos reais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história muitas contribuições para o estudo da Álgebra ocorreram com a busca de matemáticos em demonstrar as proporções existentes dessa famosa sequência. A relação entre os conteúdos abordados foram fundamentais para despertar a curiosidade no universo da arte ao descobrir a proporção áurea, sendo usados por artistas e arquitetos nas suas criações com o conceito de beleza e harmonia.

Quanta matemática está escondida em busca da perfeição, presentes na arte e na arquitetura. Muitas associações entre uma pintura e uma construção têm em comum com uma sequência relacionada com o número de ouro de forma multidisciplinar. Tendo seu maior destaque no século I a. C., quando a Razão Áurea passou a fazer parte dessas áreas e não só apenas na Matemática, depois do livro de Vitrúvio. Por apresentar razões áureas entre partes do corpo humano, mostraremos de que formas foram exploradas essas razões na Arquitetura e na Arte e sendo defendida por pintores e arquitetos.

Partindo dessa elucidação, este trabalho levanta o seguinte problema: levando em consideração a relação entre a Matemática no universo das Artes e da Arquitetura. Quais as aplicações da sequência de Fibonacci relacionada com o número de ouro, usados em obras de artes, na música e em construções?

Portanto, como objetivo geral, o presente trabalho visa demonstrar as propriedades da sequência de Fibonacci, a relação com o número de ouro e suas aplicações em obras de arte e na arquitetura.

A ação requer demonstração da estruturação da sequência e a verificação das possíveis aplicações de seu uso, mediante a execução dos objetivos específicos: descrever a teoria do surgimento com a reprodução de coelhos e as propriedades da sequência, compreender a ligação entre a sequência e o número de ouro ao longo da história, definir o retângulo áureo, o triângulo áureo e a espiral de Fibonacci usando construções geométricas, bem como o pentágono regular e o pentagrama, examinar o uso desses padrões em obras de arte, na música e em construções.

O estudo será desenvolvido através de uma pesquisa bibliográfica e análise de aplicações realizadas ao longo do desenvolvimento da temática no campo da arte e da arquitetura, que poderão contribuir para levar um olhar matemático, de modo que analise algumas fórmulas e propriedades da sequência, relacionado com o número de ouro e sua aplicação em pinturas, na fotografia, na música, em esculturas e construções usando a sequência de Fibonacci.

2 A DESCOBERTA DA SEQUÊNCIA

Leonardo Fibonacci foi conceituado na Idade Média como o primeiro grande matemático europeu, conhecido também como Leonardo de Pisa, Leonardo Pisando ou Leonardo Bigollo. A data do seu nascimento é discordante, nasceu na Itália por volta de 1175, na cidade de Pisa. Filho de Guiliermo Bonnacci, por isso o nome Fibonacci, que é o diminutivo de "Fillius Bonacci" que significa "filho de Bonaccio". Seu pai, era um mercador do norte da África, foi através do trabalho do pai que conheceu o sistema decimal hindu-árabe, durante várias viagens que fez pelo Mediterrâneo.

Figura 1: Leonardo Fibonacci, o célebre matemático da Idade Média.

Fonte: Dias (2015, p. 02).

Os talentos de Fibonacci chamou a atenção do imperador Frederico II, de acordo com Zahn (2011, p. 02):

> O imperador Frederico II convidou a participar de um torneio matemático em sua corte, promovido por João Palermo, membro da corte. Fibonacci aceitou o convite e foram apresentados a ele três problemas, os quais resolveu. Um deles, era encontrar $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 - 5$ e $x^2 + 5$ fossem também racionais. Fibonacci apresentou a resposta, que é $x = \frac{41}{12}$. Esse mesmo problema, posteriormente, Fibonacci acrescentou em sua obra Practica Geometriae. Outro problema a ele consistia em achar uma solução para a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Leonardo mostrou que nenhuma solução pode ser expressa irracionalmente sob a forma $\sqrt{a + \sqrt{b}}$. Obteve, então, uma resposta aproximada, $x = 1{,}3688081075$, correta em até nove dígitos. Posteriormente, ele incorporou esse problema no seu livro Flos. O terceiro problema encontra-se na lista de exercícios a seguir. (ZAHN, 2011, p. 02).

Escreveu muitas obras, sendo quatro livros e uma carta, o primeiro livro com título Liber Abaci (Livro do Ábaco) escrito em 1202, que trata sobre o problema da reprodução dos coelhos e falou pela primeira vez dos algarismos indo-arábicos. O segundo livro Practica geometriae (1220), que representa os conhecimentos aprendidos por Leonardo sobre

Geometria e Trigonometria, já o terceiro dos livros apresenta as soluções dos três problemas do imperador Frederico II, chamado Flos feito em 1225. Por conseguinte o quarto e último dos livros escrito por Fibonacci, de acordo com Ferreira (2007, p. 10), "Liber quadratorum (1225): É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal".

Figura 2: Imagem da abertura do Liber Abaci de Fibonacci (1202).

Incipit primum capitulum

Nouem figure indorum he sunt

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Cym bis itaque nouem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appelatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.

[Estes são os nove algarismos indianos

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Com esses nove algarismos, e com o sinal 0, que os árabes chamam de *zephirum*, pode-se escrever qualquer número, como se demonstrará a seguir.]

Fonte: Eves (2011, p. 294).

Segundo Dias (2015, p. 11), "O problema muito provavelmente originou-se do papiro de Rhind, e consta no livro Liber Abaci de Leonardo, no capítulo 12 (De solutionibus multarum positariumquestionum quas erraticas appellamus)" o que levou a motivar Fibonacci na criação da sequência. O problema da reprodução dos coelhos, que busca saber quantos pares de coelhos pode ser produzido durante um ano, a partir de um casal que depois de dois meses torna-se fértil, sendo que cada novo par gera um novo casal de coelhos, a partir do segundo mês?

De acordo com as soluções do problema, no primeiro mês com apenas um casal de coelhos, dois meses é o tempo que o casal atinge a fertilidade. No terceiro mês haverá o casal original e um casal de filhote. No quarto mês mais um casal de filhotes, totalizando três casais, o casal original, o primeiro casal filhote já fértil e mais um casal de filhote infértil. No quinto mês, os primeiros casais estão férteis e cada um gera um novo par e um não fértil, ficando cinco casais. E assim por diante, considerando que os coelhos nunca morrem. Conforme a tabela abaixo:

Quadro 1: O problema da reprodução dos coelhos e os números de Fibonacci.

Mês	Casais adultos	Casais novos	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1

3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
⋮	⋮	⋮	⋮

Fonte: Elaborada pela autora.

Dessa forma, resulta assim a sequência de Fibonacci, que os dois primeiros números é 1 e os demais valores é dada pela soma dos dois números anteriores, obtemos: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... Motivando Leonardo a definir a sequência do problema dado, que ficou conhecida como a *sequência de Fibonacci* e os seus termos de *números de Fibonacci*.

2.1 SEQUÊNCIA DE NÚMEROS REAIS

Antes de apresentarmos a definição da sequência de Fibonacci, vamos apresentar a seguir a definição de sequência numérica e seus limites. O texto aqui apresentado se baseia no livro Curso de Análise Real, do Cassio Neri.

Definição 1: Uma *sequência de números reais* é uma função x: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ para a qual denotamos o valor de x em n por x_n em vez de $x(n)$.

Geralmente usamos a notação $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para representar uma sequência x: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Às vezes a denotamos também por $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$. Dizemos que x_n é o *termo de ordem* n, ou que x_n é o n-*ésimo termo* da sequência.

Definição 2: Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita *convergente* se existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n \geq N \text{ implica que } |x_n - x| < \varepsilon$$

Neste caso, escrevemos $x_n \rightarrow x$ e dizemos que x é o *limite* da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou x_n *converge para* (ou *tende a*) x quando n tende a mais infinito ($n \rightarrow +\infty$). Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é convergente, então dizemos que ela é *divergente*.

A seguir, apresentaremos a definição da sequência de Fibonacci e a definição recursiva.

2.2 DEFINIÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Definição 3: Chama-se a *sequência de Fibonacci* a sequência definida por

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...)$$

Onde os seus termos são conhecidos como *números de Fibonacci*.

De acordo com Zahn (2011, p. 06), essa sequência recebeu o nome de Fibonacci pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891), no século XIX. Que posteriormente desenvolveu outra sequência que contem associações com a sequência de Fibonacci, conhecida como *sequência de Lucas.*

Definição 4: Chama-se a definição recursiva da sequência de Fibonacci de ordem *n* e expressa pela função *F:* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por:

$$f_1 = f_2 = 1,$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \forall n \geq 2.$$

3 AS PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA

De acordo com Zahn (2011, p. 07).

Proposição 1: "Seja (f_n) a sequência de Fibonacci. Então, $\forall n \geq 1$, valem as propriedades:"

(a) Soma de números de Fibonacci: $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$.

(b) Soma dos números ímpares da sequência: $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$.

(c) Soma dos números pares da sequência: $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n-1} - 1$.

(d) Soma dos quadrados dos primeiros números da sequência: $\sum_{i=1}^{n} {f_i}^2 = f_n f_{n+1}$.

(e) Identidade entre os números da sequência: $f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}$, $\forall m, n,\ m > 1$.

Demonstrações:

(a) Utilizaremos o Princípio da Indução Finita. Para provar que a soma dos n primeiros números de Fibonacci é dado por:

$$S_n = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1,\ \forall n \geq 1$$

(i) Para $n = 1$, temos que:

$f_1 = f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, com isso, $f_1 = f_{1+2} - 1 = 1$, mostrando que vale a base da indução.

(ii) Suponhamos agora que é verdadeiro para $n = k$, então deve ser verdadeira para $n = k + 1$, sabendo que $k > 1$, ou seja:

$f_1 + f_2 + \cdots + f_{k+1} = f_{k+3} - 1$, assim, somando f_{k+1} em ambos os membros da igualdade e conhecendo que $f_{k+1} + f_{k+2} = f_{k+3}$, logo:

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k + f_{k+1} = f_{k+1} + f_{k+2} - 1 = f_{k+3} - 1.$$

Com isso provamos por indução.

(b) Vamos provar que:

$$S_n = f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n},\ \forall n \geq 1.$$

(i) Primeiro para $n = 1$, substituindo no somatório tem-se:

$f_{2-1} = f_2$, isso implica dizer que $f_1 = f_2 = 1$. Ou seja, é verdadeira a base da indução.

(ii) Vamos mostrar que deve ser válido para $n = k + 1$, sendo $k > 1$, se a fórmula é verdadeira para $n = k$, somando o próximo ímpar em ambos os lados da nossa igualdade, obtemos:

$$f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2k-1} + f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k+1} = f_{2k+2} = f_{2(k+1)}.$$

Provando assim hipótese da indução,

(c) Vamos demonstrar que:

$$S_n = f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1,\ \forall n \geq 1.$$

(i) A igualdade válida para $n = 1$, substituindo temos que:

f_2=$f_{2+1} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, logo é verdadeiro.

(ii) Mostrar que também vale para $n = k + 1$, sendo $k > 1$, supondo que $n = k$ é verdadeiro, somando o próximo par em ambos os lados da equação, obtemos:

$$f_2+f_4+...+f_{2k}+f_{2k+2}=f_{2k+1}+f_{2k+2} - 1 = f_{2k+3} - 1.$$

O que prova nossa hipótese.

(d) Demonstrando a hipótese que:

$$S_n = {f_1}^2+{f_2}^2+{f_3}^2+...+{f_n}^2=f_nf_{n+1}, \forall n \geq 1.$$

(i) Para $n = 1$, por ser f_1=f_2=1, temos ${f_1}^2$=f_1f_2. Resolvendo a igualdade, ${f_1}^2$=1.1=1.

Portanto, é válida a base da indução.

(ii) Suponhamos que $n = k$ é verdadeiro, será mostrado que vale para $n = k + 1$, para $k > 1$. Somando em ambos os lados da igualdade o quadrado dos números da sequência. Obtemos:

$${f_1}^2+{f_2}^2+{f_3}^2+...+{f_k}^2+{f_{k+1}}^2=f_kf_{k+1}+{f_{k+1}}^2$$
$${f_1}^2+{f_2}^2+{f_3}^2+...+{f_k}^2+{f_{k+1}}^2=f_{k+1}.(f_k+f_{k+1})$$
$${f_1}^2+{f_2}^2+{f_3}^2+...+{f_k}^2+{f_{k+1}}^2=f_{k+1}+f_{k+2}$$

Isto prova a indução.

(e) Para prova a identidade entre os números de Fibonacci:

$$f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_mf_{n+1}, \forall m, n,\ m > 1$$

(i) Para $n = 1$, têm-se:

$f_{m+1} = f_{m-1}f_1 + f_mf_2$, como $f_1 = f_2 = 1$, temos que $f_{m+1} = f_{m-1} + f_m$.

(ii) Suponhamos que seja verdadeira para $n = k - 1$. Então temos por hipótese que:

$$f_{m+k} = f_{m-1}f_k + f_mf_{k+1}$$
$$f_{m+(k-1)} = f_{m-1}f_{k-1} + f_mf_k$$

Somando em ambos os lados da equação, obtemos:

$$f_{m+k}+f_{m+(k-1)} = f_{m-1}(f_k + f_{k-1}) + f_m(f_k+f_{k+1})$$

Com efeito, temos:

$$f_{m+(k+1)} = f_{m-1}f_{k+1} + f_mf_{k+2}$$

Provamos que é a equação para $n = k + 1$. Logo, para todos os valores inteiros e positivos de m e n satisfaz a equação.

Conforme Zahn (2011, p.7 e 9):

Proposição 2: "Dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si".

Demonstração: Sejam f_n e f_{n+1} dois números de Fibonacci consecutivos. Devemos mostrar que o m.d.c. (f_n, f_{n+1}) = 1, $\forall n$. Vamos provar por absurdo, supondo que o m.d.c. (f_{n_0}, f_{n_0+1}) = a ≠ 1, para um certo n_0, resulta que $a|f_{n_0}$ e $a|f_{n_0+1}$. Sabendo que $f_{n_0+1} = f_{n_0} + f_{n_0-1}$ e $a|f_{n_0+1}$ e $a|f_{n_0}$, com isso, $a|f_{n_0-1}$.

Mas, se $f_{n_0} = f_{n_0-1} + f_{n_0-2}$ e, da mesma forma dos argumentos acima, seque-se que o $a|f_{n_0-2}$.

Reciprocamente, obtêm-se $a|f_1$ e $a|f_2$, mas $f_1 = f_2 = 1$, o que implica $a|1$, ou seja, $a = 1$. Prova que é absurdo, pois contradiz a hipótese de que a ≠ 1. Portanto, m.d.c. (f_n, f_{n+1}) = 1, $\forall n$.

Proposição 3: "Dado $k, n \in \mathbb{N}$, temos que f_n é múltiplo de f_{kn}".

Demonstração: Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar pelo Princípio da Indução Finita, que $f_n | f_{kn}$.

(i) Para $k = 1$, temos que $f_n | f_n$. Portanto, é válida a base da indução.

(ii) Suponhamos agora que é verdadeiro para $k = m$, então deve ser verdadeiro para $k = m + 1$, ou seja:

$$f_n | f_{(m+1)n}.$$

Aplicando o item (e) da proposição 3.1, temos:

$$f_{(m+1)n} = f_{mn+n} = f_{mn-1} f_n + f_{mn} f_{n+1}.$$

Como $f_n | f_{mn-1}$ e $f_n | f_{mn}$. Então temos por hipótese que $f_n | f_{(m+1)n}$.

Isto prova a proposição.

4 O NÚMERO FI (φ) E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI.

Nessa seção apresentaremos e definiremos a razão áurea e as propriedades do número de ouro, definiremos o retângulo áureo e o triângulo áureo, ambos formam a espiral áurea, o pentágono regular e o pentagrama, bem como, as relações entre o número de ouro e a sequência de Fibonacci.

4.1 O NÚMERO DE OURO

Segundo Silva (2015, p. 27).

Definição 5: **“**O número de ouro, também conhecido como proporção áurea, número áureo, secção áurea, proporção de ouro, é um número irracional representado pela letra grega φ (phi), cujo valor é”:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180339887...$$

Conforme Belini (2015, p. 14), “a letra φ só começou a ser usado no século XX pelo matemático norte-americano Mark Barr, em honra a Phídia, arquiteto do Parthenon”. Muitos termos passaram a ser usados pela primeira vez no século XIX em trabalhos alemães, como as expressões “razão áurea” e “número de ouro”.

Sobre o número de ouro, Livio[1] (2011 apud RAMOS, 2013, p. 31) afirma que:

> Menos conhecido que o Pi é um outro número, o Fi (Φ), que, em muitos aspectos, é ainda mais fascinante. Suponha que eu lhe pergunte: o que o encantador arranjo de pétalas numa rosa vermelha, o famoso quadro “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí, as magníficas conchas espirais de moluscos e a procriação de coelhos têm em comum? É difícil de acreditar, mas esses exemplos bem díspares têm em comum um certo número, ou proporção geométrica, conhecido desde a Antiguidade, um número que no século XIX recebeu o título honorífico de “Número Áureo”, “Razão Áurea” e “Secção Áurea”. Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de “Proporção Divina”.

Definido por Euclides, pela primeira vez em 300 anos a. C. a divisão de um segmento em média e extrema razão, conhecida por razão áurea, obtemos da seguinte forma:

4.2 A RAZÃO ÁUREA

Definição 6: Diz-se que um segmento de reta é dividido em média e extrema razão, quando a razão entre o maior e o menor segmento determina o valor φ, chama-se razão áurea:

Demonstração: Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, seja C um ponto que divide esse segmento, assim chamando $\overline{AB} = a + b$, $\overline{AC} = a > \overline{CB} = b$, temos a figura feita por Silva (2015, p. 31):

[1]LIVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente.** Tradução: Marco Shinobu Matsumura, 6° edição, Rio de Janeiro: Editora Record, 2011.

Figura 3: Divisão do segmento $\overline{\mathbf{AB}}$.

Fonte: Silva (2015, p. 31).

Quer-se obter o valor da razão:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Resolvendo a expressão, temos:

$$a^2 = ab + b^2$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por b^2, encontramos:

$$\frac{a^2}{b^2} = 1 + \frac{a}{b}$$

Chamando $\frac{a}{b} = x$, obtemos:

$$x^2 = 1 + x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Calculando a equação do 2º Grau, teremos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é uma raiz negativa. Tomemos por ser positiva a raiz de $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1,6180339887 \cdots$.

Segundo Zahn (2011, p. 25) “Um dos primeiros registros que se tem conhecimento sobre a razão áurea, data de aproximadamente 1650 a. C.; é no *papiro de Rhind*, um documento no qual constam 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes, de um trabalho mais antigo ainda”. Vejamos na figura 4 o papiro, onde acredita citar uma “razão sagrada” que pode se tratar da razão áurea. Como também na figura 5 na *Tábua de Shamash,* afirma o autor que:

> Os antigos babilônios sabiam como criar o retângulo áureo. Numa escavação feita em Sippar, no sul do Iraque, o arqueólogo assírio Hormuzd Rassam (1826-1910) encontrou uma tábua, com comprimento de 29,21 cm e largura de 17,78 cm, conhecida por *Tábua de Shamash*. Note que as dimensões dessa tábua estão muito próximas da razão áurea (ZAHN, 2011, p. 25).

Figura 4: Papiro de Rhind.

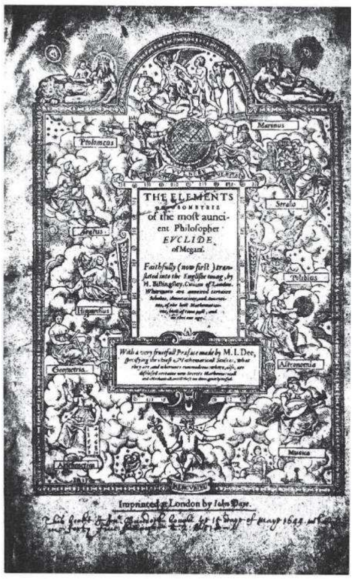
Fonte: Zahn (2011, p. 25).

Figura 5: Tábua de Shamash.

Fonte: Zahn (2011, p. 26).

Muitos autores afirmam que o primeiro registro sobre o número de ouro foi no livro *Os Elementos de Euclides* de 1570. Belini (2015, p. 16) explica que Euclides definiu em seu livro “divisão de um segmento em média e extrema razão como a divisão de um segmento em duas partes desiguais com uma propriedade bem particular: o quociente entre o segmento inteiro e a parte maior é igual ao quociente do segmento maior pelo segmento menor”.

Figura 6: Capa traduzida para o inglês, feito por Billingsley do livro Os Elementos de Euclides.



Fonte: Eves (2011, p. 172).

Conforme Ramos (2013, p. 35)

Proposição 4: “Se fn é um número de Fibonacci, então vale a desigualdade

$$fn \geq \varphi^{n-2}, \forall n \in \mathbb{N}”.$$

Demonstração: Usando o Segundo Princípio da Indução Finita tem:

(i) Para $n = 1$, temos que $\varphi^{1-2} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} < \frac{2}{1+1} = 1$, ou seja, $f_1 = 1$ que $f_1 \geq \varphi^{-1}$.

Para $n = 2$, segue tem-se $f_2 = 1 = \varphi^{2-2} = \varphi^0$. Portanto é válida a base da indução

(ii) Suponhamos que $f_m \geq \varphi^{m-2}$, $\forall m \leq n$. E usando a fórmula recursiva da sequência de Fibonacci, temos:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq \varphi^{n-2} + \varphi^{n-3} = \varphi^{n-3}(\varphi + 1).$$

Como $\varphi^2 = \varphi + 1$, feito da seguinte forma:

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = 1 + \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$$

Então,

$$f_{n+1} \geq \varphi^{n-3}\varphi^2 = \varphi^{n-1}$$

Logo provamos que a proposição é válida.

Corolário 1: Se fn é um número de Fibonacci qualquer, então vale a estimativa que:

$$\varphi^{n-2} \leq f_n \leq \varphi^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Utilizaremos o Segundo Princípio da Indução Finita, para provar que $fn \leq \varphi^n$

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$ é verdadeiro, pois substituindo os valores na desigualdade temos que $f_1 \leq \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $f_2 \leq \varphi^2 = 1 + \varphi$.

(ii) Suponhamos que a desigualdade requerida seja válida para n inteiro tal que $1 \leq n \leq k$, ou seja que vale

$$f_k \leq \varphi^k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Suponhamos que vale para $k - 1$

$$f_{k-1} \leq \varphi^{k-1}$$

Então temos:

$$f_{k+1} = f_k + f_{k-1} \leq \varphi^k + \varphi^{k-1} = \varphi^{k+1}$$

Isto completa a prova da indução.

4.3 AS POTÊNCIAS DO NÚMERO DE OURO

Vamos resolver algumas potências de φ. Lembrando que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que demonstramos acima, com isso, vamos analisar a relação com a sequência de Fibonacci.

- $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+4+1}{4} = 1 + \frac{2+2\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi$;
- $\varphi^3 = \varphi^2\varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$;
- $\varphi^4 = \varphi^3\varphi = (1 + 2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1 + \varphi) = \varphi + 2 + 2\varphi = 2 + 3\varphi$;
- $\varphi^5 = \varphi^4\varphi = (2 + 3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1 + \varphi) = 2\varphi + 3 + 3\varphi = 3 + 5\varphi$;

- $\varphi^6 = \varphi^5\varphi = (3+5\varphi)\varphi = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(1+\varphi) = 3\varphi + 5 + 5\varphi = 5 + 8\varphi$;
- $\varphi^7 = \varphi^6\varphi = (5+8\varphi)\varphi = 5\varphi + 8\varphi^2 = 5\varphi + 8(1+\varphi) = 5\varphi + 8 + 8\varphi = 8 + 13\varphi$;

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

- $\varphi^n = f_{n-1} + f_{n\cdot\varphi}$, $\forall n \geq 1$.

Como mostra Dias (2015, p. 19):

Proposição 5: “Para qualquer natural $n \geq 1$, vale a igualdade

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_{n\cdot\varphi},$$

Onde f_j, j = 1, 2, 3,... , são os números de Fibonacci e f_0 = 0”.

Demonstração: Vamos provar essa proposição por indução matemática:

(i) Para $n = 1$, temos que $\varphi^1 = f_0 + f_\varphi = 0 + \varphi = \varphi$, ou seja, é válida a base da indução.

(ii) Supondo que $n = k$ seja verdadeiro, então deve se válido para $n = k + 1$.

Devemos mostrar que $\varphi^{k+1} = f_k + f_{k+1\cdot\varphi}$.

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k\varphi = (f_{k-1} + f_k.\varphi)\varphi = f_{k-1}\cdot\varphi + f_k\cdot\varphi^2 =$$
$$= f_{k-1}\cdot\varphi + f_k(1+\varphi) = f_{k-1}\cdot\varphi + f_k + f_{k\cdot\varphi} =$$
$$= (f_{k-1} + f_k)\varphi + f_k = f_k + f_{k+1}\cdot\varphi.$$

Concluímos que $\varphi^{k+1} = f_k + f_{k+1\cdot\varphi}$ é válido.

4.4 RELAÇÕES ENTRE OS NÚMEROS DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

Mostraremos que a razão entre $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ aproxima-se do número φ, dada à sequência de Fibonacci:

$$f_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...)$$

Lembramo-nos da sequência recursiva $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, podemos resolver que:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-2} + f_{n-3}}{f_{n-2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-3}}{f_{n-2}}}} = \cdots$$

Desse modo, podemos perceber que o quociente $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ gera uma fração contínua que converge para φ. Temos a seguinte proposição:

Proposição 6: A sequência:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}} \to \varphi, \text{ quando } n \to \infty$$

Dada (x_n) a sequência recursivamente por

$$x_1 = 1, x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \forall n \geq 1.$$

Iremos definir a função $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}.$$

Assim, percebemos que, para os números da sequência (x_n), temos:

$$f(x_1) = \frac{1+1}{1} = 2 = x_2,\ f(x_2) = \frac{2+1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = x_3, \ldots$$

$$f(x_{n-1}) = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-1}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} = x_n, \ldots$$

Portanto temos a conclusão que $f(x_{n-1}) = x_n$.

Demonstramos que f é decrescente, pois de fato, dado $a > b$ temos:

$$f(a) < f(b) \Leftrightarrow \frac{a+1}{a} < \frac{b+1}{b} \Leftrightarrow (a+1)b < (b+1)a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab + b < ab + a \Leftrightarrow a > b.$$

Proposição 7: Considerando a sequência definida (x_n) acima, obtêm uma subsequência a seguir:

$$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots < x_6 < x_4 < x_2.$$

Para "mapear" apenas os termos pares e apenas os ímpares da sequência (x_n), temos que a partir de um termo inicial (x_1 ou x_2), conseguir uma regra que permita "pular" os termos de modo a obter a sequência (x_{2n}) para os termos pares e (x_{2n-1}) para os ímpares (ZAHN, 2011 p. 49).

Seja $g: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(x): (f \circ f)(x),$$

Sendo assim, temos que:

$$g(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{\frac{x+1}{x} + 1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}$$

A partir de x_1 temos:

$$g(x_1) = f\big(f(x_1)\big) = f(x_2) = x_3,$$

$$g(x_3) = f\big(f(x_3)\big) = f(x_4) = x_5, \ldots$$

$$\ldots, g(x_{2n-1}) = f\big(f(x_{2n-1})\big) = f(x_{2n}) = x_{2n+1}, \ldots$$

Desse modo, percebemos que:

$$x_4 = g(x_2), x_6 = g(x_4), \ldots, x_{2n+2} = g(x_{2n}), \ldots$$

Supondo $g(a) < g(b)$ teremos que g é crescente, pois:

$g(a) < g(b) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{a+1} < \frac{2b+1}{b+1} \Leftrightarrow 2ab + 2a + b + 1 < 2ab + 2b + a + 1 \Leftrightarrow a < b.$

Para prova a proposição 7, iremos provas as afirmações a seguir:

Afirmação 1. $x_{2n-1} < x_{2n+1}$, ou seja, a subsequência dos termos ímpares é crescente.

Afirmação 2. $x_{2n} < x_{2n+2}$, ou seja, a subsequência dos termos pares é decrescente.

Afirmação 3. $x_{2n-1} < x_{2n}$, diz que qualquer termo ímpar da sequência (x_n) é menor que o termo par subsequente.

Provaremos por Indução Matemática a afirmação 1.

(i) Para $n = 1$, temos que $x_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ e que $x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 1 = x_1$.

Portanto vale a base da indução.

(ii) Supondo que seja verdadeiro n, vamos provar que também é verdadeiro para $n + 1$, ou seja, mostrar que $x_{2n+1} < x_{2n+3}$.

$$x_{2n-1} < x_{2n+1} \Rightarrow \mathrm{g}(x_{2n-1}) < \mathrm{g}(x_{2n+1}) \Rightarrow x_{2n+1} < x_{2n+3}.$$

As afirmações 2 e 3 são provadas de forma análoga a primeira.

Essas afirmações provam a proposição 7, onde temos a subsequência:

$$x_1 < x_3 < x_5 < \cdots < x_6 < x_4 < x_2.$$

Observa-se que (x_{2n-1}), ou seja, os termos ímpares são crescentes e limitados superiormente por $x_2 = 2$, então existe $L_1 = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1}$.

Da mesma forma, temos (x_{2n}) que é decrescente e limitada inferiormente por $x_1 = 1$, existindo $L_2 = \lim_{n\to\infty} x_{2n}$. E como vimos que:

$$x_{2n+1} = g(x_{2n-1}) = \frac{2_{x_{2n-1}} + 1}{x_{2n-1} + 1}$$

Obtemos passando o limite

$$L_1 = \frac{2L_1 + 1}{L_1 + 1} \Rightarrow {L_1}^2 + L_1 = 2L_1 + 1 \Rightarrow {L_1}^2 - L_1 - 1 = 0$$

Resolvendo essa equação, obtemos a raiz positiva igual a:

$$L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Do mesmo modo,

$$x_{2n+2} = g(x_{2n}) = \frac{2_{x_{2n}} + 1}{x_{2n} + 1}$$

Segue que

$$L_2 = \frac{2L_2 + 1}{L_2 + 1} \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Portanto,

$$L_1 = L_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Chegamos à conclusão que

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n} \to \varphi \end{cases}$$

Ou seja,

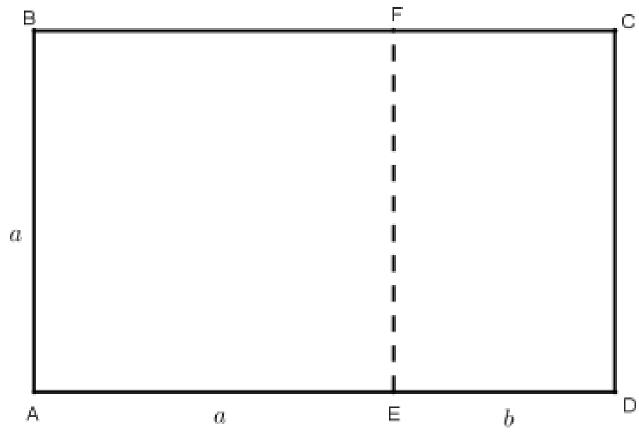
$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}} \to \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Determinamos que a proposição 6 é verdadeira.

4.5 O RETÂNGULO, O TRIÂNGULO E O ESPIRAL ÁUREO

Definição 7: O retângulo áureo é um retângulo no qual a razão entre as medidas de seus lados preserva a razão áurea, tem-se que.

Figura 7: Retângulo áureo.



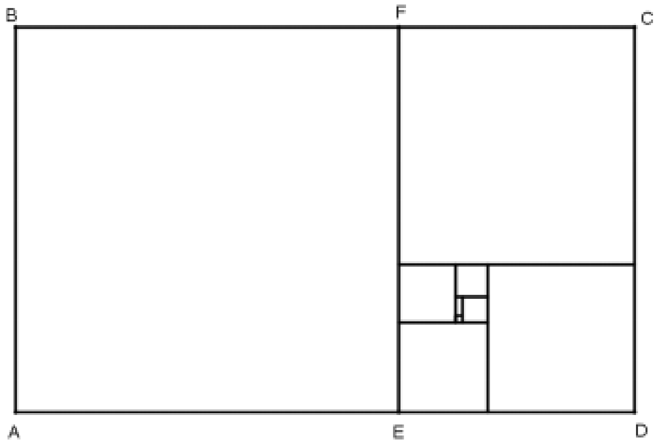
Fonte: Ramos (2013, p. 42).

Observe a figura 5, temos o retângulo áureo $ABCD$, dividido de modo que obtemos um quadrado $ABFE$ e um retângulo semelhante ao original $CDEF$. Temos destacadas as medidas dos lados $\overline{AB} = \overline{AE} = a$ e $\overline{ED} = b$. Por definição, temos que a razão entre os lados do retângulo é o número de ouro, ou seja:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow \frac{a + b}{a} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Essa equação é equivalente à definição 4.2, procedendo então à razão $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \varphi$, da mesma forma que $\frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \varphi$ e, formando um novo retângulo no interior do $CDEF$ também será áureo. Repetindo esse processo com infinitos retângulos sempre formará a mesma proporção áurea, como mostra a figura abaixo:

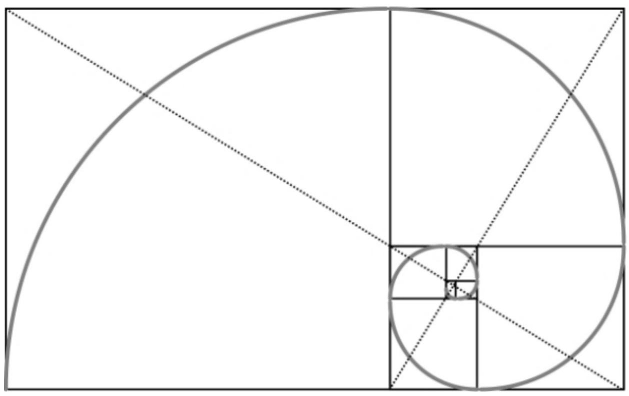
Figura 8: Sequência de retângulos áureos.



Fonte: Ramos (2013, p. 42).

Podemos desenhar a espiral áurea ou espiral de Fibonacci, encontrando as diagonais de sucessivos retângulos áureos em sequência. Desenhando o quarto da circunferência de cada quadrado, obtemos a espiral construída e que cumpre a razão áurea que converge para um ponto chamado pólo da figura, com todas as diagonais perpendiculares entre si encontrando-se no pólo, conhecido também como o "olho de Deus":

Figura 9: Espiral áurea do retângulo.



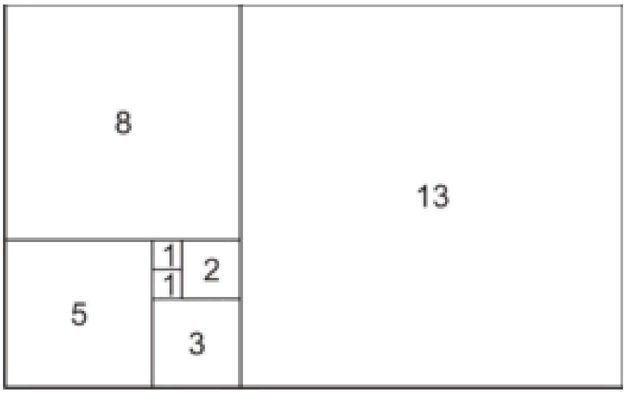
Fonte: Belini (2015, p. 26).

Na sequência de Fibonacci, que podemos representar da seguinte forma:

$$(f_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...)$$

Como mostramos que o quociente entre o sucessor com o antecessor se aproxima do φ, demonstrado anteriormente. Podemos chegar a seguinte conclusão de que podemos formar um retângulo áureo com os termos da sequência, conforme a figura 10:

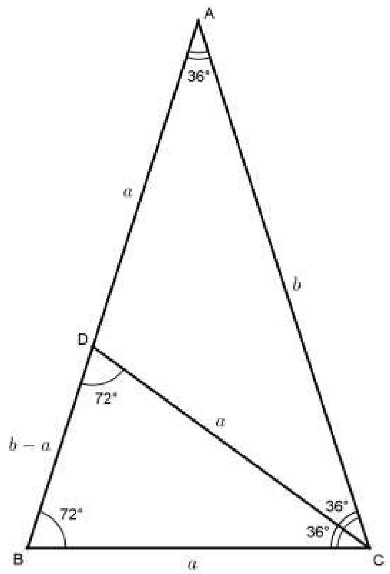
Figura 10: Retângulo áureo construído com os termos da sequência.



Fonte: Zahn (2011, p. 38).

Definição 8: O triângulo áureo é todo triângulo isósceles cujos ângulos internos são 36◦ , 72◦ e 72◦, no qual a razão entre as medidas dos lados congruentes com a base é o número de ouro.

Figura 11: Triângulo áureo.



Fonte: Ramos (2013, p. 43)

Considere ΔABC isóscele, destacados as medidas dos lados $\overline{\text{BC}} = \text{a}$ e $\overline{\text{AB}} = \overline{\text{AC}} = \text{b}$, traçamos a bissetriz de um dos ângulos de 72°, no caso o ângulo $\text{A}\hat{\text{C}}\text{B}$. Notamos que o ΔBCD formado também é isóscele, com seus lados congruentes, ou seja, $\overline{\text{BC}} = \overline{\text{CD}} = \text{a}$. Da mesma forma acontece para o ΔACD isóscele, com $\overline{\text{AD}} = \overline{\text{CD}} = \text{a}$.

Podemos notar que os ΔABC e ΔBCD são semelhantes, pois apresentam lados proporcionais e os três ângulos internos congruentes têm:

$\Delta\text{ABC} \sim \Delta\text{BCD} \Rightarrow \frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{BC}}} = \frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BD}}} = \frac{\overline{\text{AC}}}{\overline{\text{CD}}}$, desse modo:

$$\frac{\overline{\text{AB}}}{\overline{\text{BC}}} = \frac{\overline{\text{BC}}}{\overline{\text{BD}}}$$

Lembrando que $\overline{\text{BC}} = \overline{\text{CD}} = \overline{\text{AD}}$, então:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$$

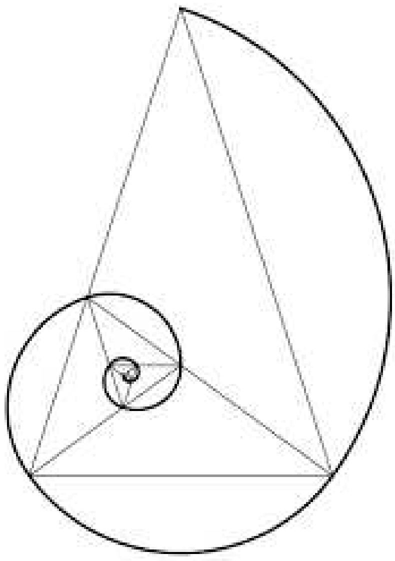
Concluímos que o ponto D divide o lado AB na razão áurea, como $\overline{AD} = \overline{BC}$, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \varphi$$

Portanto provamos que o triângulo ABC é áureo.

Da mesma maneira do retângulo áureo, repetindo a sequência de infinitos triângulos áureos e traçando a bissetriz de um dos ângulos internos das bases, temos a espiral áurea. Ao ligarmos os vértices dos triângulos áureos, através de arcos dos pontos de divide um dos lados na razão áurea. Como mostra a figura 12:

Figura 12: Espiral áurea do triângulo.



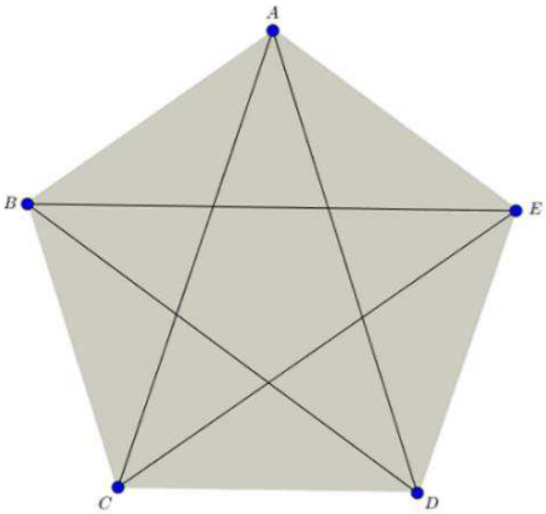
Fonte: Livio (2006, p. 140).

4.6 O PENTÁGONO REGULAR E O PENTAGRAMA

Definição 9: O pentagrama é uma figura geométrica de cinco pontas, obtidas traçando as diagonais de um pentágono regular.

Como mostra a figura abaixo, a estrela de cinco pontas inscrita em um pentágono regular:

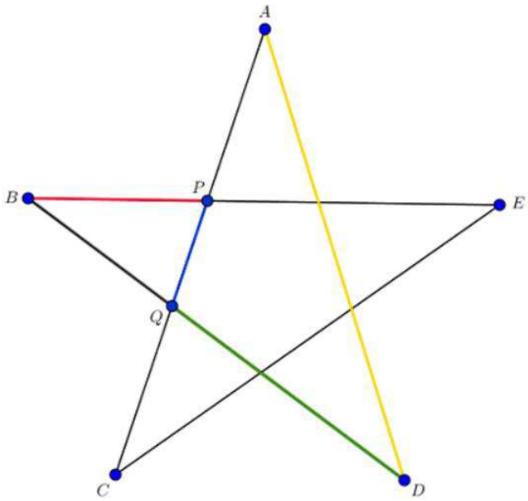
Figura 13: Pentagrama inscrito no pentágono regular.



Fonte: Barbosa (2017, p. 59).

Considerado um dos importantes símbolos pelos pitagóricos. Segundo Barbosa (2017, p. 59), “quando ele descobriu que as proporções do pentagrama eram iguais às da proporção áurea, tornou esse símbolo como a representação da Irmandade”, levando Hípaso a estudar as propriedades dessa figura geométrica. Existem quatro comprimentos diferentes que podemos encontrar nos segmentos de um pentagrama. Observando na figura a seguir, os segmentos do pentagrama que são congruentes, seguem uma ordem crescente de tamanhos PQ, BP, QD e DA, conforme a figura 14:

Figura 14: Pentagrama.



Fonte: Barbosa (2017, p. 60).

Podemos notar que os tamanhos desses segmentos, seguem uma regra equivalente à soma dos termos da sequência de Fibonacci. Ou seja, o tamanho dos segmentos é a soma dos anteriores a ele:

$$\overline{\mathrm{QD}} = \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{BP}} \text{ e } \overline{\mathrm{DA}} = \overline{\mathrm{BP}} + \overline{\mathrm{QD}}$$

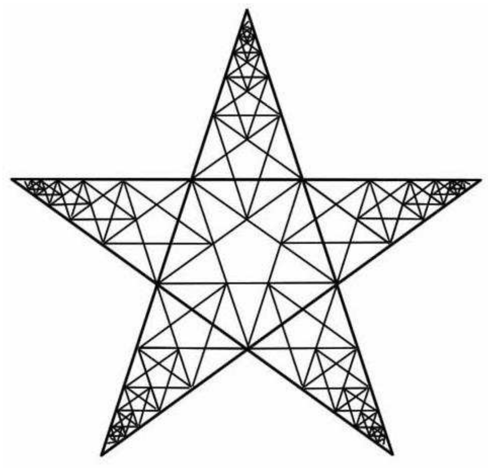
Dessa forma, a razão entre um segmento e outro de tamanho inferior mantém entre si a razão áurea:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{QD}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{PQ}} = \varphi$$

Além disso, na figura 13 temos o triângulo ΔACD é isóscele, semelhante ao triângulo que demonstramos anteriormente, com ângulos internos 36°, 72° e 72°, é um triângulo áureo. E o ΔABE também isóscele e dividindo a base pelo lado, obtemos o φ. Seguindo esta relação entre os triângulos desse pentagrama inscrito no pentágono regular, obteremos o mesmo resultado.

A razão áurea se perpetuará ao repetirmos o mesmo processo e construir uma sequência infinita pentagramas. Podemos encontrar infinitamente no interior de um pentagrama, vários outros pentágonos, triângulos e pentagramas. O resultado é conhecido como "Estrela Pitagórica", como veremos a seguir.

Figura 15: Estrela Pitagórica.



Fonte: Zahn (2011, p. 57).

5 APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O NÚMERO DE OURO

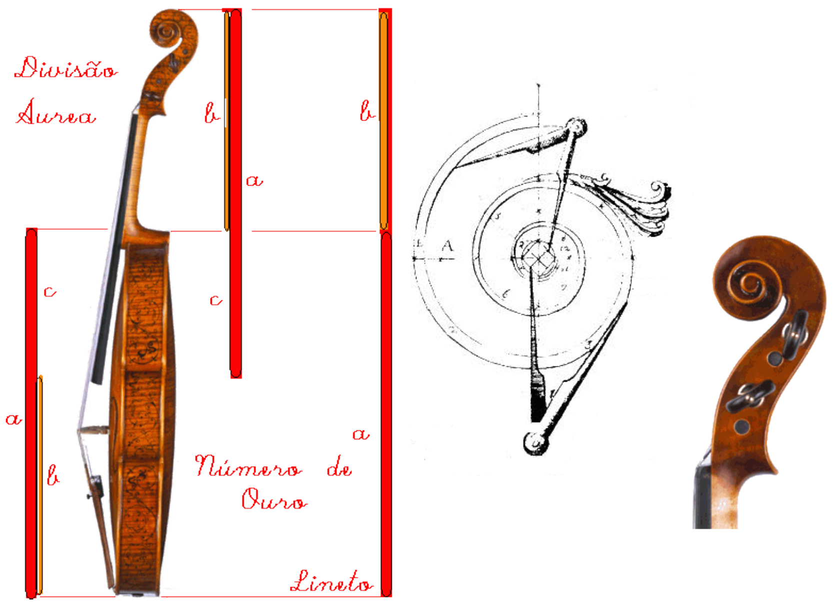
A série de Fibonacci foi descoberta a partir do problema da reprodução dos coelhos, mas é associado em diversos fenômenos como ocorre no comportamento da luz, no crescimento das plantas, na árvore genealógica das abelhas, na bolsa de valores, no formato de vários seres vivos, entre outros.

Nesse capítulo iremos mostrar os números de Fibonacci, e a relação com a Proporção Áurea aplicada na arte e na arquitetura, buscando examinar em pinturas, em fotografias e na música, bem como em construções ao longo da história.

5.1 MÚSICA

"O número áureo está presente na fabricação de instrumentos, no compasso de algumas músicas e até em tons e semitons. A perfeição associada a esse número não iria passar incólume pelos músicos" (HORTA et al. 2020, p. 21). Um exemplo de construção de instrumentos, temos o Violino Stradivarius, feito por Luthier Antonio Stradivari, criado com a estética do número de ouro e causando essa sensação de belo, podemos notar na extremidade do braço, ou seja, na voluta a espiral de Fibonacci, como mostra a figura abaixo:

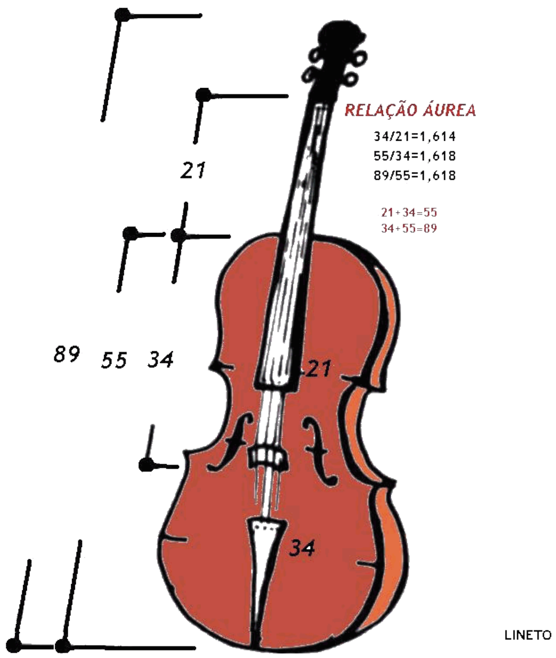
Figura 16: O Violino Stradivarius e a proporção áurea.



Fonte: Oliveira (2010, p. 38).

Podemos encontrar a relação áurea nas medidas do comprimento dividido em partes específicas do instrumento. Acreditam que por esse motivo o som é emitido tão belo, como ilustra a figura 17, onde podemos perceber a relação da sequência de Fibonacci e o número de ouro no violoncelo.

Figura 17: O Violoncelo e a relação com a sequência de Fibonacci e o φ.



Fonte: Silva et al (2019, p. 06)

Existem afirmações de que podemos encontrar relações com a razão áurea em composições de Schubert, Mozart e Beethoven (Quinta Sinfonia).

Segundo Oliveira (2010, p. 38) “Para se formar um acorde maior, necessitamos de uma nota fundamental, no caso o Dó, uma terça Mi e uma quinta Sol, a frequência dessas notas são quase iguais”, ou seja, criam a base do acorde. O Teclado é um dos instrumentos que mais conseguimos ver, há treze notas em cada oitava, sendo 8 brancas e 5 pretas.

Figura 18: O teclado e a razão áurea.

Fonte: Oliveira (2010, p. 38).

As sonatas de Mozart têm bases no fundo de ouro, são compostas por duas partes: a 1ª onde o tema da música é introduzido é “Exposition”; a 2ª o tema é desenvolvido e repetido é “Development and recapitulation”. Ao dividir a 2ª parte com os números de compasso da 1ª parte, temos aproximadamente 0,618, ou seja, o valor do número de ouro.

Como mencionado, Beethoven e a composição da 5ª Sinfonia com relação ao número de ouro, como afirma Silva et al. (2019, p. 08) “ que o mote de abertura ocorre exatamente no compasso 228 de 601, se fizermos a divisão de 372 por 601 o valor obtido será exatamente 0,618”.

Em obras de Bartók e Bach, o analista musical Êrno Lendvai, analisou as peças com o intuito de comprovar a aplicação da sequência de Fibonacci. Como exemplo a obra “Music for strings, percussion and celest, Movement 1, chegando a seguinte análise: “A peça é composta no seu total por 88 compassos; o clímax (momento mais forte da obra) acontece no compasso 55; os violinos deixam de tocar no compasso 34 e recomeçam no compasso 69; a exposição termina no compasso 21”.(SILVA et al, 2019, p. 08).

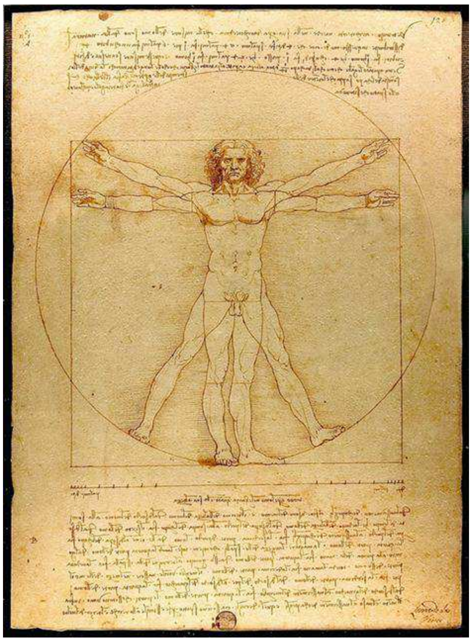
Um exemplo recente é a Banda Tool que tem uma música com a sequência de Fibonacci, chamada de *Lateralus,* diferente das obras anteriores à sequência está presenta na letra e não na estrutura da obra. As sílabas seguem os 7 primeiros termos, da seguinte forma (1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 8, 5), e a introdução da música acaba em 1 minuto e 37 segundos, convertido para minutos temos 1,618 minutos, ou seja o número de ouro, como mostraremos o trecho a seguir:

[1] “Black
[1] Then
[2] White are
[3] All I see
[5] In my infancy
[8] Red and yellow then came to be”
[...]

5.2 OBRAS DE ARTE

Muitos artistas usaram em suas obras a proporção áurea, pois estabelece harmonia e beleza. Primeiramente temos Leonardo da Vinci (1452-1519), como mostra em seu desenho o *homem vitruviano* (1490), depois de ler o livro *De arquitectura*, com proporções áureas do corpo humano cuja razão é áurea, onde a altura do corpo é igual ao comprimento dos braços, que o cotovelo divide o braço em razão áurea e o umbigo que divide a altura do homem é igual ao número de ouro, podemos observar na ilustração a seguir:

Figura 19: O homem vitruviano, Leonardo da Vinci.



Fonte: Oliveira e Ferreira (2010, p. 71).

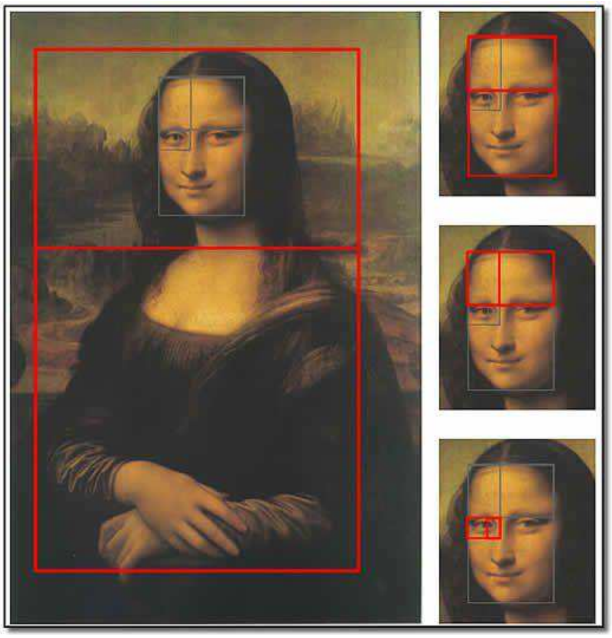
Conforme Ramos (2013, p. 66) "é de consenso, entre os pesquisadores da área, que a partir do livro *De Arquitectura* (Século I a. C.), escrito por Vitrúvio[2], a Razão Áurea deixou de ser apenas um conceito estudado e explorado na Matemática para fazer parte da Arquitetura e da Arte".

Pacioli[3] escreveu um tratado em três volumes, a obra Divina Proportione (A Proporção Divina), publicada em Veneza, no ano de 1509. Sendo o segundo volume baseado no trabalho de Vitrúvio, contendo ilustrações de Leonardo da Vinci, dentre elas o *homem vitruviano*. Destacamos o quadro famoso a *Monalisa* (1507), também de Leonardo da Vinci, medindo 53 cm x 78 cm, obtemos aproximadamente o número de ouro se dividir o lado menor com o maior, podemos perceber o retângulo áureo nas relações entre o tronco e a cabeça, nas dimensões do rosto, como nos olhos e testa, para obter a harmonia na famosa pintura, apesar de muitos especulares se realmente foi feito uso da razão áurea nessa obra, indicamos na figura abaixo:

[2]Marcos Vitrúvio Polião, (viveu no século I, a.C.), arquiteto romano, em sua obra a certas relações ligadas à divisão áurea.

[3]Luca Pacioli (1445-1517), monge franciscano e professor de matemática, sendo considerado o pai da Contabilidade.

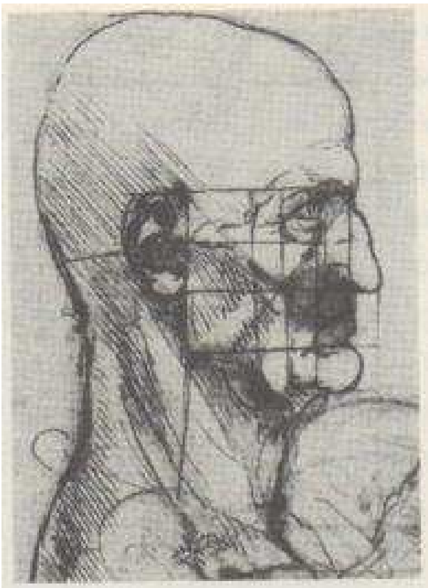
Figura 20: A Monalisa de Leonardo da Vinci.



Fonte: Belini (2015, p. 24).

Um esboço a lápis feito por volta de 1490, também de Leonardo da Vinci chamado de "Uma cabeça de ancião", onde retrata um velho, onde o artista desenhou um quadrado e dividindo em retângulos que se aproximam do retângulo de ouro, podendo ser um dos retângulos da esquerda da imagem.

Figura 21: Uma cabeça de ancião de Leonardo da Vinci.



Fonte: Melo (2017, p. 49).

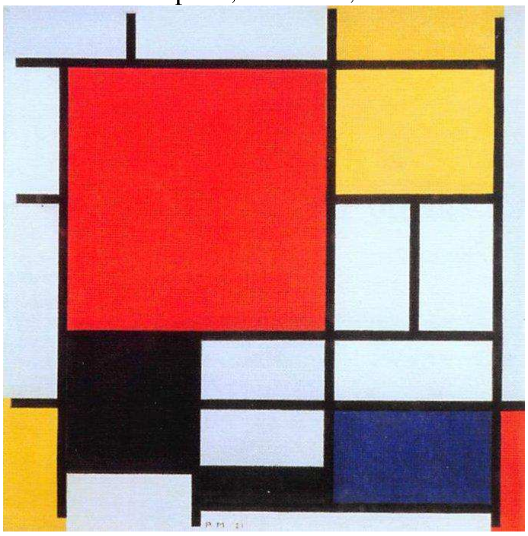
O italiano Alessando di Mariano Filipepi, o famoso Sandro Botticelli (1445-1510), nasceu em Florença. A proporção áurea foi usada na obra "O Nascimento de Vênus", onde temos a Vênus pintada sobre uma concha, simbolizando o nascimento da beleza expressando o nu feminino, com Afrodite encontra-se na proporção áurea.

Figura 22: O Nascimento de Vênus de Sandro Botticelli.

Fonte: Ramos (2013, p. 66)

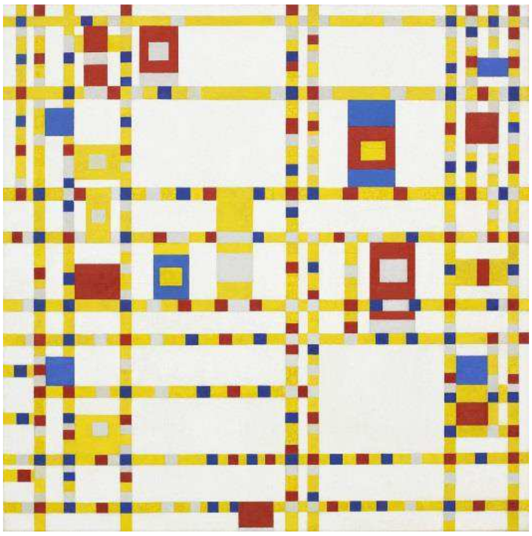
Piet Mondrian (1872-1944). A partir de 1917 inicia sua fase neoplástica e trabalha com linhas paralelas que formam retângulos que se relacionam entre si na razão áurea. Como por exemplo, em obras como a “Composição com vermelho, amarelo, azul e preto” de 1921 e “Broadway Boogie-Woogie” de 1943:

Figura 23: Composição com vermelho, amarelo, azul e preto, Mondrian, 1921.



Fonte: Horta et al (2020, p. 19).

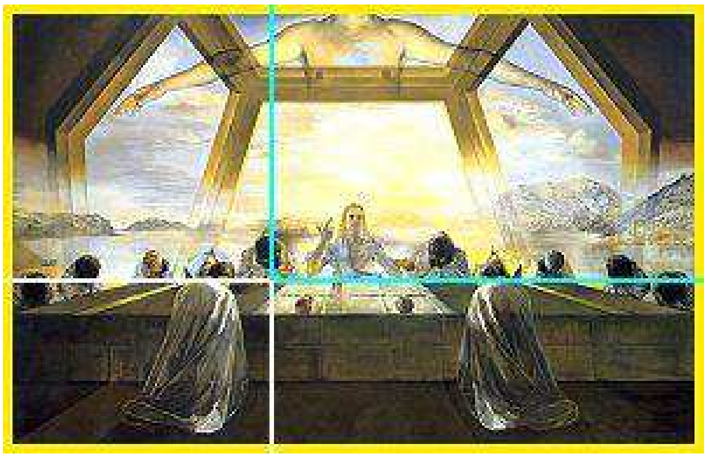
Figura 24: Broadway Boogie-Woogie, Mondrian, 1943.



Fonte: Livio (2006, p. 201).

Salvador Dalí (1904-1989), podemos verificar uso da razão áurea em várias obras do pintor, a sua obra mais famosa é O Sacramento da Última Ceia, feita em um quadro de tamanhos 270 cm x 167 cm, e a razão entre eles gera 1,6180339..., e o foco da foto está no discípulo preferido de Jesus, o João Batista, como mostra a figura.

Figura 25: O Sacramento da Última Ceia de Salvador Dali.



Fonte: Oliveira (2010, p. 33).

No final dos anos 1800, o francês Paul Sérusier (1864–1927), usou a razão áurea em suas obras e se propagou entre os círculos artísticos, em pinturas cubistas, como o espanhol Juan Gris (1887–1927) e o escultor lituano Jacques Lipchitz (1891–1973). “Embora o interesse de Sérusier pela Razão Áurea pareça ter sido mais filosófico do que prático, ele realmente usou essa proporção em algumas de suas obras, principalmente para verificar, e ocasionalmente checar, suas invenções de formas e suas composições” (LIVIO, 2006, p. 193). Lipchitz ajudou Juan Gris na construção da escultura “Arlequin”. Afirma Livio (2006, p. 194-195), que Lipchitz escreveu a seguinte frase:

> Naquele momento, eu estava muito interessado em teorias de proporções matemáticas, como os outros cubistas, e tentei aplicá-las às minhas esculturas. Todos nós tínhamos uma grande curiosidade pela idéia de uma regra áurea ou Seção Áurea, um sistema que se acreditava que condicionava a arte e a arquitetura da antiga Grécia.

Figura 26: A escultura “Arlequin”.

Fonte: Livio (2006, p. 194).

Além disso, temos os brasileiros, Anita Malfatti (1889–1964) com sua obra “A Estudante Russa” (1915) e Cândido Portinari (1903–1962) com as obras: “O Café” (1935) e “O Lavrador de Café” (1939), entre outras obras dos artistas, usaram a proporção áurea. O italiano chamado Gino Severini (1883-1966), buscou a perfeição em suas obras e usou a razão áurea em seus vários desenhos, como por exemplo, temos o desenho “Maternidade”:

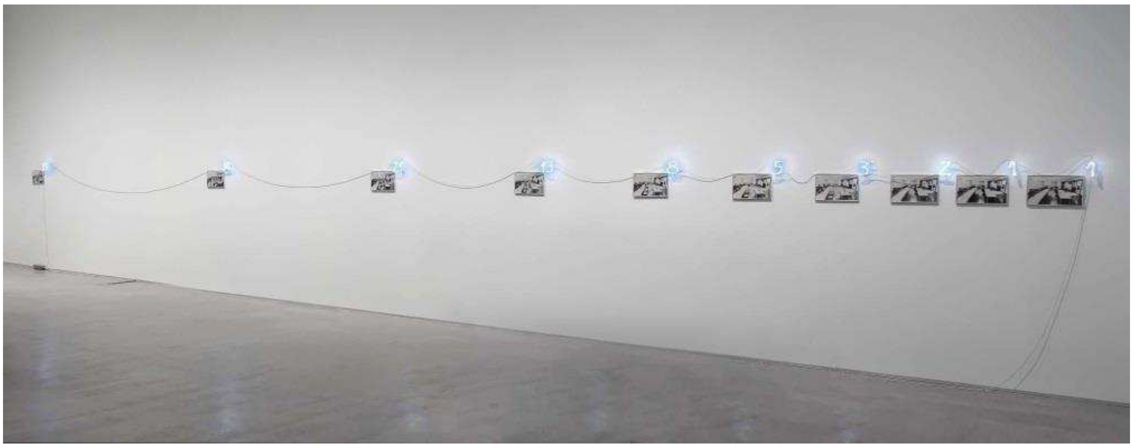
Figura 27: Maternidade de Gino Severini.

Fonte: Livio (2006, p. 195).

A russa Maria Vorobeva (1892–1984), conhecida como Marevna, pintora cubista, escreveu em 1974, o livro *A Vida com os Pintores de La Ruche*, relata a vida e obra de seus amigos, os pintores Picasso, Rivera, Modigliani, Soutine, entre outros no ano 1920, em Paris. Marevna, que dá um exemplo instigante do papel da Razão Áurea na arte cubista. O texto, segundo destaca Livio (2006, p. 196) “insinua que Picasso, Rivera e Gris usaram a Razão Áurea como outra maneira de dividir planos, que é mais complexa e atrai as mentes experientes e inquisitivas”.

O americano Jay Hambidge (1867–1924) é outro artista que se interessou pela razão áurea, que definiu dois tipos de arte moderna: uma baseada em formas geométricas que chamou de Simetria Dinâmica e outra baseada na razão áurea e na espiral áurea. O italiano Mário Merz (1925-1967) na década de 70, “desenvolveu um conjunto de trabalhos, que se integraram em duas linhas temáticas: uma estabeleceu princípios organizativos e compositivos baseados numa interpretação da Sequência de Fibonacci e a outra no igloo como forma de construção” (MELO, 2017, p. 50). Um exemplo é o trabalho “Fibonacci Nápoles”:

Figura 28: Fibonacci Nápoles.



Fonte: Melo (2017, p. 50).

Como mostra a figura acima, trata de um agrupamento com os termos da sequência de Fibonacci, com 10 fotografias de operários de uma Fábrica, onde podemos perceber que cada fotografia está representada com os termos da sequência.

5.3 ARQUITETURA

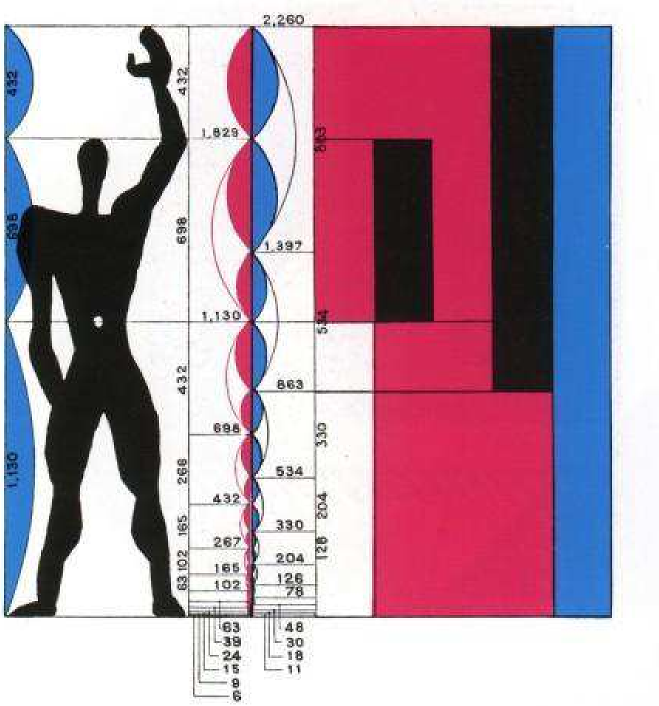
Muitos arquitetos usaram o número de ouro com o intuito de obter beleza, harmonia em suas construções. Segundo Ramos (2013, p. 68), “merece destaque especial, aqui, o famoso arquiteto e pintor suíço-francês Charles Édouard Jeanneret (1887–1965), mais conhecido como Le Corbusier que foi um dos mais importantes defensores da aplicação da Razão Áurea na Arquitetura e na Arte”.

Criou um sistema de medidas denominado de Modulor, que se trata de uma estatura média do corpo humano de 175 cm, depois mudou para 183 cm, por causa da altura dos europeus.

Conforme explica Câmara e Rodrigues (2008, p. 193):

> Podemos observar que a razão entre a altura do homem e a altura do seu umbigo foi escolhida precisamente em uma razão áurea, e que a altura total que vai dos pés até o braço levantado, também está dividida na razão áurea. Estas razões está interligadas com a sequência de Fibonacci, cada número sendo igual a soma dos dois anteriores a ele. Na versão final do Modulor foram introduzidos duas escalas de dimensões de Fibonacci, dando o nome de “série azul” e “série vermelha”, sendo as dimensões da primeira o dobro da segunda. Além disso, as divisões de cada escala estão baseada em proporções dos números de Fibonacci.

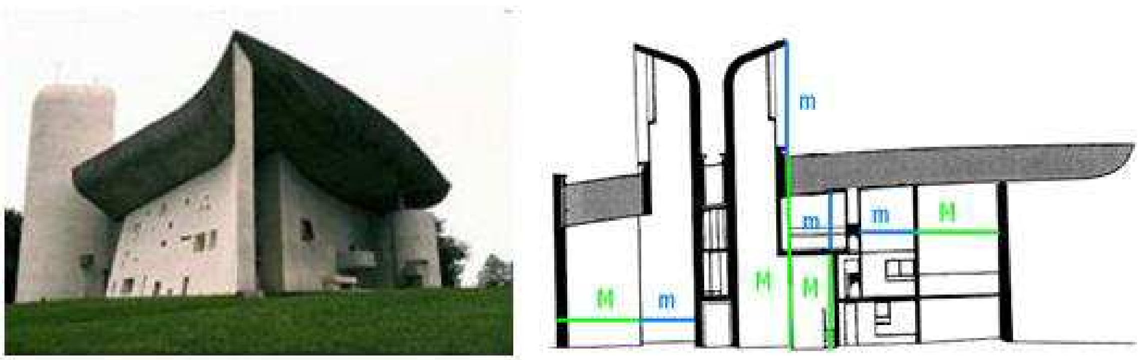
Figura 29: O sistema de medidas Modulor.



Fonte: Livio (2006, p. 198).

Le Corbusier usou essa medida harmônica para escala humana em seus projetos arquitetônicos como sua obra mais conhecida, a Capela de Notre Dame (figura 30) e uma residência no subúrbio de Paris (figura 31), com dimensões de 25 por 15 metros. Conseguindo admiração pelo arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907–2012), criando uma parceria com Le Corbusier de sucesso internacional, um projeto no Rio de Janeiro, a sede do Ministério da Educação e Saúde chamado palácio Gustavo Capanema.

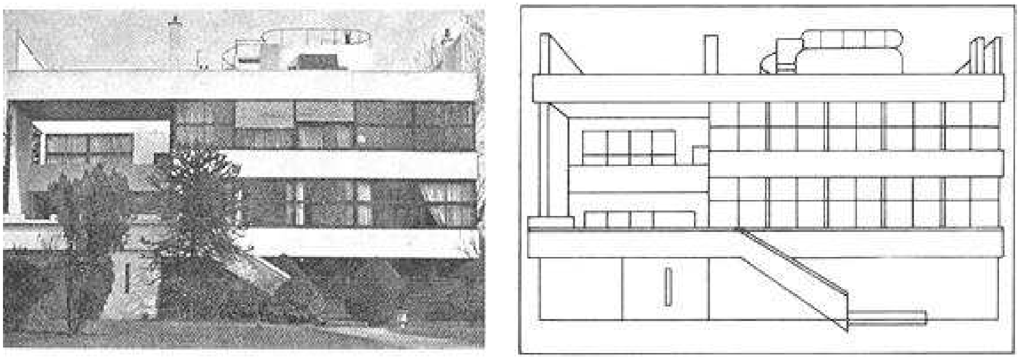
Figura 30: Capela de Notre Dame du Haut de Ronchamp.



Fonte: Ferrer (2005).

Temos a seguinte conclusão de que: $\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} = 1{,}618.$

Figura 31: Residência em Paris projetada por Le Corbusier.

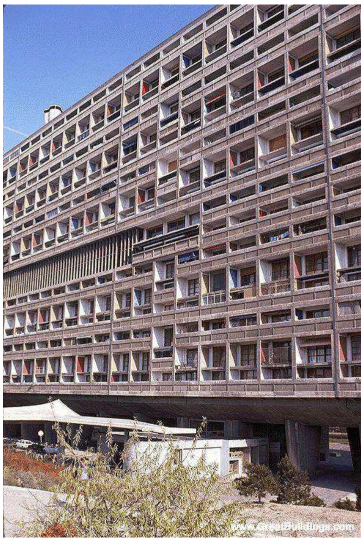


Fonte: Câmara e Rodrigues (2008, p. 168).

Na residência acima, foram usados em sua composição, de modo mais claro no desenho à esquerda, Câmara e Rodrigues (2008, p. 168), explica que “Lê Corbusier projetou dois retângulos áureos, sendo um deles representando “o corpo inteiro da casa” e o outro na vertical representado à esquerda da escada”.

Outro projeto conhecido é a Unidade habitacional de Marselha (1946-1952), na França. Sendo em 2016, declarada a obra como Patrimônio Mundial da UNESCO, podemos ver na figura abaixo. Usou o Modulor, como base dos tamanhos dos escritórios, na altura da tranca das portas, como a altura da própria porta, nas alturas das bancadas, mesas, janelas, cadeiras e etc...

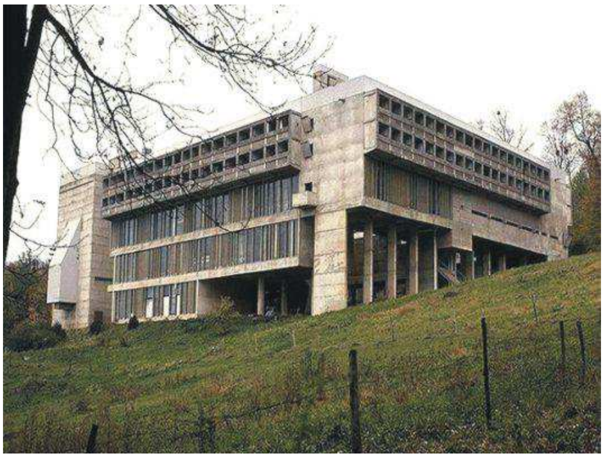
Figura 32: Unidade de habitação, Marselha, França.



Fonte: Câmara e Rodrigues (2008, p. 168).

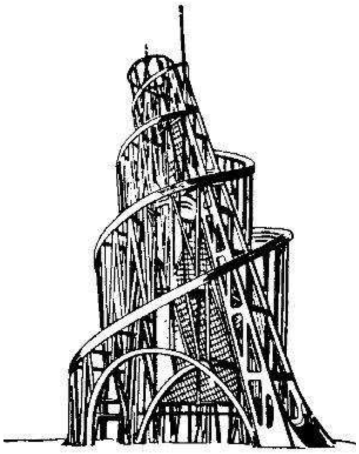
Este sistema de proporção foi usado no Convento de Sainte-Marie de la Tourette (1953-1959), onde muitos afirmam que a planta baixa desse projeto, foram usados vários retângulos áureos em diferentes escalas. Influênciando outros arquitetos, como o do russo Vladimir Tatlin, obtiveram resultados expressivos como o Monumento à Terceira Internacional, conhecida como a Torre de Tatlin.

Figura 33: Convento de Sainte-Marie de la Tourette.



Fonte: Celuque (2004, p. 68).

Figura 34: Monumento de Tatlin.



Fonte: Celuque (2004, p. 69).

O Parthenon (figura 35), construído no século V a. C. na Acrópole de Atenas na Grécia Antiga, tem 69,5 m de altura e 38,8 m de largura, dividindo temos aproximadamente o número de ouro e que podemos encontrar uma quantidade de retângulos áureos em sua fachada. O templo é dedicado à deusa grega Atena. Foi embelezado com o melhor da arquitetura grega, é o renomado dos edifícios remanescentes da Grécia Antiga e o mais conhecido do mundo. Suas esculturas decorativas são conceituadas um dos pontos altos da arte grega e um dos maiores templos culturais da história da humanidade.

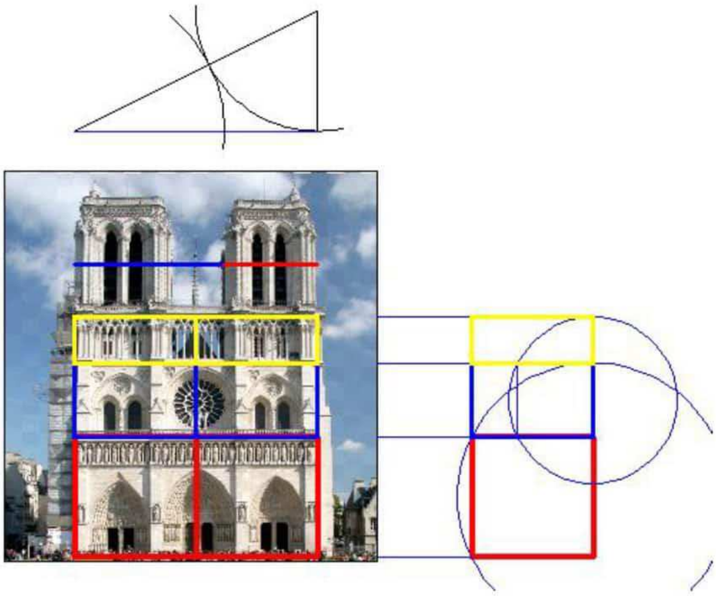
Figura 35: O Templo Parthenon, em Atenas, Grécia.

Fonte: Oliveira (2010, p. 28)

Na Idade Média, temos a Catedral de Notre Dame (1163-1345), na França. Com as medidas da fachada sendo 43,5 m de largura, 45 m de largura até a base das torres e 69 m até o topo das torres, dividindo a altura total com a largura é aproximadamente o φ. Tirando a medida da amurada com aproximadamente 1,5 m, que dá a distinção entre a base 43,5 m e a altura sem a torre de 45 m, formando um quadrado.

A fachada é dividida em três retângulos, onde o retângulo da base é um quadrado duplo e determina a proporção áurea com o lado menor do retângulo do meio na cor azul e este com o retângulo amarelo. Podemos analisar na imagem da parte inferior da fachada:

Figura 36: Catedral de Notre Dame.

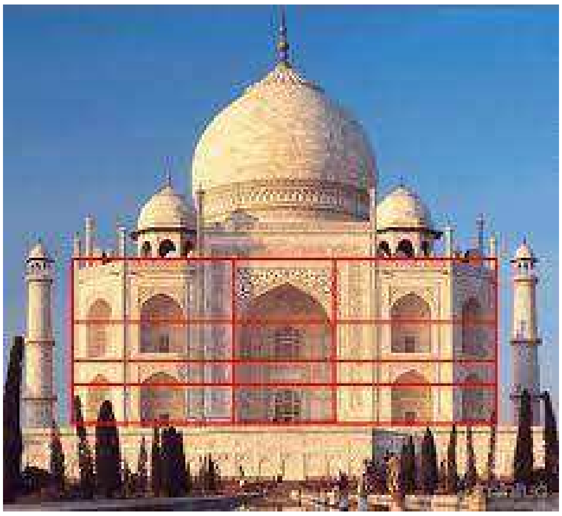


Fonte: Benutti (2011, p. 07).

Assim como o templo de Parthenon, podemos ver a razão áurea na parte frontal do Taj Mahal como mostra na figura. De acordo com Oliveira (2010, p. 29):

> Construído pelo imperador Shah Jahan, entre 1630 e 1652 todo em mármore branco sobre o tumulo de Aryumand Banu Began, a quem chamava de Muntaz Mahal "A jóia do palácio" que faleceu após o parto do se 14º filho, ele ofereceu a ela como prova de amor por ser a esposa mais preferida. Localizado em Agra na Índia, e o maior mausoléu do mundo, foi reconhecido como patrimônio da humanidade pela UNESCO e recentemente reconhecido como uma das sete maravilhas do mundo. Edificação maravilhosa, construída baseada na razão áurea, objeto de estudo de vários cientistas, matemáticos, arquitetos.

Figura 37: Taj Mahal.



Fonte: Oliveira (2010, p. 29).

Uma das contruções atuais é a sede da ONU, em Nova Iorque, nos EUA, feito entre 1949 e 1952, pelo arquiteto Wallace Harrison, baseado-se nos projetos de Oscar Niemeyer e Le Corbusier. Onde também podemos perceber retângulos áureos em sua proporção na fachada do edifício, como mostra em linhas vermelhas na figura abaixo:

Figura 38: Sede da ONU, em Nova Iorque, EUA.

Fonte: Barbosa (2017, p. 69).

6 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO

A sequência de Fibonacci e Razão Áurea são conteúdos matemáticos com uma vasta aplicação de sua teoria. Sabendo que atualmente busca mostrar aos alunos onde se aplica os conteúdos ministrados de Matemática em sala de aula, quebrando paradigmas de que a matemática é apenas números, desse modo, a sequência têm diversas aplicações na odontologia, na botânica, nas medidas do corpo humano, na dança, nas áreas abordadas como, na Arte e na Arquitetura. Tornando uma aula dinâmica, atrativa e que desperta o interesse pela disciplina.

A Base Nacional Comum Curricular - BNCC tem como objetivo modificar as aulas ministradas de forma que os alunos aplicam o que estuda na teoria no seu dia a dia. A terceira competência da BNCC para o ensino fundamental, diz que o ensino de matemática deve:

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p. 267).

A BNCC mostra que deve ser trabalhado a sequência recursiva e sua aplicação, como no caso cita a arte no ensino fundamental nas habilidades no campo da Álgebra, entre outras de acordo com o planejamento da aula, como em destaque a seguinte habilidade: (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

Compreendemos que na Arte e na Arquitetura trabalhamos com os conceitos matemáticos, ligados aos assuntos de Proporção Áurea, Número de Ouro, Sequência de Fibonacci em suas criações. A quinta competência da BNCC para o ensino médio, destinada ao ensino de matemática destaca que deve:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Sob essa perspectiva pode-se observar que o conhecimento matemático e os conteúdos abordados, e a presença dos mesmos em outras áreas, tornando possível a criação de estratégias de ensino dinâmicas e interativas, que estimulam o interesse pelo conteúdo abordado em sala, com observações dos padrões encontrados em outros campos visando desenvolver no aluno um olhar investigativo.

7 CONCLUSÃO

Nesse trabalho foi apresentada a definição da sequência de Fibonacci e a definição da sequência recursiva, a partir de um problema da reprodução dos coelhos. Apresentamos as demonstrações das propriedades envolvendo essa sequência famosa no campo da Matemática, bem como a relação com o a razão áurea, com isso podemos formar o retângulo áureo e o triângulo áureo, obtendo a espiral de Fibonacci, como também podemos encontrar o número de ouro nas figuras geométricas como o pentágono regular e o pentagrama. Finalizamos o trabalho mostrando onde está presente na Música, em Obras de Arte e na Arquitetura.

O estudo investiga quais as aplicações da Sequência de Fibonacci relacionada com o número de ouro, buscando visualizar a relação de ambos os assuntos com a Arte e a Arquitetura, visando despertar o interesse pelos conteúdos abordados através dos padrões encontrados. A pesquisa abordou a aplicação da sequência e um dos grandes defensores do uso da Razão Áurea na Arte e na Arquitetura, o pintor e arquiteto suíço Le Corbusier, criador do sistema de medidas harmônicas da estatura média humana, o Modulor, aplicado em objetos e nas medidas dos espaços das construções, trazendo um novo olhar em seus projetos arquitetônicos. Buscando a beleza harmônica em obras de arte, vários artistas renomados citados como Leonardo da Vinci com o homem vitruviano, Salvador Dalí, os brasileiros Anita Malfatti e Cândido Portinari, em esculturas por Juan Gris e presente nos trabalhos fotográficos de Mário Merz, entre outros.

Da mesma maneira, foi possível analisar aplicações na música, como na construção de violinos e violoncelos, e nas notas do teclado, como na base do acorde, nas composições de Schubert, Mozart e Beethoven (Quinta Sinfonia), exemplificadas no trabalho. De uma forma diferente das composições anteriores, temos nas sílabas da música Lateralus, da Banda Tool.

Os objetivos traçados no início desse trabalho foram alcançados, considerando as propriedades, as demonstrações e contextualizações históricas sobre a Sequência de Fibonacci e o Número de ouro e as aplicações na Arte e Arquitetura. Procuramos colocar somente o essencial para não fugir da problemática.

Relacionar Matemática, Arte e Arquitetura, áreas que são próximas e a minha convivência e o gosto por ambas, foram motivos essenciais para a pesquisa permitindo compreender a Matemática de forma interdisciplinar. O tema é bastante amplo e o foco do trabalho foi apresentar as aplicações na arte: pintura, escultura, fotografia e música, e na arquitetura: templos, monumentos e edifícios, buscando instigar outros trabalhos sobre o assunto.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Fábio Alves. **Proposta de abordagem da Sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio: teoria e aplicações.** 2017. 83 f., il Dissertação (Mestrado) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2017. Disponível em: https://repositorio.unb.br/handle/10482/31430. Acesso em 07 de abr. 2021.

BELINI, Marcelo Manechine. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci.** 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-06012016-161056/publico/MarceloManechineBelini_dissertacao_revisada.pdf. Acesso em 12 de ago. 2020.

BENUTTI, Maria Antonia. **A geometria das catedrais góticas e neogóticas.** 2011. UNESP – FAAC, Departamento de Artes e Representação Gráfica. Disponível em: https://1library.org/document/q7oroeoy-a-geometria-das-catedrais-goticas-e-neogoticas.html. Acesso em 23 de jul. de 2021.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em 19 de jul. 2021

CÂMARA, Marcos Antônio da; RODRIGUES, Melissa da Silva. **O Número Φ.** – FAMAT em Revista, nº 11, p. 81-184, 2008. Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/read/12545941/famat-em-revista-faculdade-de-matematica-universidade-. Acesso em:

CELUQUE, Leonardo. **A Série de Fibonacci: Um Estudo um estudo das relações entre as ciências da complexidade e as artes**. Salvador: Ufba, 2004. 99p. Disponível em: https://docplayer.com.br/23892932-A-serie-de-fibonacci-um-estudo-das-relacoes-entre-as-ciencias-da-complexidade-e-as-artes.html. Acesso em 13 de mai. 2021.

DIAS, Alberto Faustino. **A sequência de Fibonacci e o número de ouro: modelos variacionais.** Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, São Paulo, 2015. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/306455. Acesso em: 07 de dez. 2020.

EVES, Howard. Introdução a história da Matemática; tradução Hygino Domingues. São Paulo: Unicamp, 2011.

FERRER, Joseane Vieira. **O Número de Ouro na Arte, Arquitetura e Natureza: beleza e harmonia**. Brasília, 2005. Disponível em: http://goo.gl/yS2vEL . Acesso em:

HORTA, Deborah Alves et al. **O número de ouro e a proporção áurea: harmonia e beleza na matemática da vida**. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v. 6, n. 5, may. 2020 Disponível em: https://doi.org/10.34117/bjdv6n5-517. Acesso em: 07 de jun. 2021.

LIVIO, Mario. Razão Áurea-A História do Número Fi, um Número Surpreendente. Tradução de Matsuama, M. S., Rio de Janeiro, Editora Record, 2006.

MELO, Maria Afonso Isabel. **Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/33080/33080.PDF. Acesso em 14 de jun. 2021.

MOREIRA, Renata Lúcia Sá, SANTOS, Dr. Givaldo Oliveira dos. **A sequência de Fibonacci e a razão áurea**. Fortaleza, Ceará, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/enalic/2018/443-55247-25112018-153746.pdf. Acesso em: 10 de jan. 2021.

NERI, Cassio. **Curso de Análise Real**. Rio de Janeiro: UFRJ 2006.

OLIVEIRA, Cristiano Barreto. **Razão Áurea: Suas aplicações e importância no Ensino de Matemática**. Aparecida de Goiânia, 2010. Disponível em: https://docplayer.com.br/23047162-Razao-aurea-suas-aplicacoes-e-importancia-no-ensino-de-matematica.html. Acesso em: 07 de jun. 2021.

OLIVEIRA, Edson de; FERREIRA, Thiago Emanuel. **O Número de Ouro e suas manifestações na natureza e na arte**. Revista Complexus: Instituto Superior de Engenharia Arquitetura e Design, CEUNSP, Salto-SP, p.64-81, 1 set. 2010. Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/view/12930232/ano-n-revista-complexus. Acesso em: 06 de jun. 2021.

RAMOS, Marcos Gertrudes Oliveira. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.** 2013. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Santa Cruz. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/201160277D.pdf. Acesso em: 12 de mai. 2021.

SILVA, Diogo et al. **O número de ouro na música.** 2019. Disponível em: https://issuu.com/leonorribeiro3/docs/o_n_mero_de_ouro_2a2202494d578b. Acesso em 11 de jun. 2021.

SILVA, Gustavo Henrique da. **Sequência de Fibonacci: propostas de atividades para o ensino básico contemplando habilidades da BNCC.** Universidade Federal do Triângulo Mineiro, 2020. Disponível em: https://www.atenaeditora.com.br/post-artigo/38909 . Acesso em 08 de jul. 2021.

SILVA**,** Reginaldo Leoncio**. A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro: Contexto histórico, propriedades, aplicações e propostas de atividades didáticas para alunos do primeiro ano do Ensino Médio**. Universidade Estadual do Sudeste da Bahia, 2015. Disponível em: http://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_REGINALDO_LEONCIO_SILVA.pdf. Acesso em: 11 de dez. 2020.

ZAHN, Maurício. **Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.