UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA
CAMPUS BALSAS
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

JAQUELINE MARTINS DA SILVA

BASE NO CONTEXTO DA ÁLGEBRA LINEAR: conceitos e métodos que melhor contribuem para sua compreensão

Balsas – MA
2022

JAQUELINE MARTINS DA SILVA

BASE NO CONTEXTO DA ALGEBRA LINEAR: conceitos e métodos que melhor contribuem para sua compreensão

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão – UEMA Campus Balsas para obtenção de grau de Licenciatura em Matemática.

Orientador (a): Professor Me. Olívio Crispim De Medeiros

Balsas – MA

2022

S586b

Silva, Jaqueline Martins da.

Base no contexto da Álgebra Linear: conceitos e métodos que melhor contribuem para sua compreensão / Jaqueline Martins da Silva. – Balsas, 2022.

41 f.

Monografia (Graduação em Matemática) Universidade Estadual do Maranhão – UEMA / Balsas, 2022.

Orientador: Prof. Olívio Crispim de Medeiros

1. Base. 2. Álgebra Linear. 3. Melhor Compreensão. I. Título.

CDU: 371.3

Elaborado pela bibliotecária Maria da Consolação Coelho Rocha CRB 13/604

JAQUELINE MARTINS DA SILVA

BASE NO CONTEXTO DA ALGEBRA LINEAR: conceitos e métodos que melhor contribuem para sua compreensão

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão – UEMA Campus Balsas para obtenção de grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em: 09 / 01 / 2023

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Olívio Crispim De Medeiros (Orientador)

Mestre em Matemática

Universidade Estadual do Maranhão

Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa

Doutor em Física e Astronomia

Universidade Estadual do Maranhão

Juliana Ferreira Costa

Profa. Esp. Juliana Ferreira Costa

Especialista em Informática da Educação

Universidade Estadual do Maranhão

Dedico este trabalho a Deus e, em especial, em memória de minha mãe Luiza Martins Da Silva, que sempre me apoiou independente das dificuldades, e a quem tenho profundas saudades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, que nos presenteia com força e coragem todos os dias, para que possamos sempre, com dedicação, buscarmos nossos objetivos.

A minha mãe Luiza Martins, que não esta mais entre nós, mas que foi e ainda é muito importante em minha vida, pelo seu apoio, encorajamento nas horas de cansaço e amor incondicional e a meu pai Rubens da Silva pelo seu incentivo, carinho, ajuda e apoio em todos os momentos.

A meu orientador Prof. Me. Olívio Crispim de Medeiros que não mediu esforços com suas orientações e direcionamentos durante toda realização deste trabalho.

Sou grata a meu marido Jefferson Bringel, pelo seu amor, dedicação e companheirismo. Obrigado pela sua compreensão e gentileza mesmo com minha ausência em muitos momentos.

Agradeço a minhas irmãs Joyce Martins e Jordânia Martins, pelo carinho, pelas conversas de incentivo e por sempre estarem ao meu lado.

A minha cunhada Helmorane Bringel, pelos incentivos, conselhos e por sempre estar disposta a me orientar em momentos de dúvidas.

Agradeço também as minhas amigas mais queridas Auriana França, Carina Botelho e Jádia Barros, amigas que a faculdade me presenteou para toda vida, companheiras de trabalhos e que foram muito importantes nessa jornada acadêmica e também em muitos momentos de nossa trajetória.

E a meus amigos e companheiros de estudo Antônio José Maciel, Lucas Purificação, Kalisson Miranda, Nilvan Ferreira e Douglas Carvalho, amizades que foram se criando com conversas e brincadeiras e que puderam ajudar a esquecer das dificuldades.

Sou grata por todo o departamento de Matemática da Universidade Estadual do Maranhão- UEMA, Campus Balsas e a todos os professores que contribuíram para a minha formação acadêmica.

E por fim, agradeço a todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação.

“A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo.”

Galileu Galilei

RESUMO

O presente trabalho tem como tema principal a Base no contexto da Álgebra Linear. A principal motivação para sua elaboração foi a dificuldade de alguns alunos de Licenciatura em Matemática da UEMA Campus Balsas na compreensão de Base e de outros conteúdos relacionados ao tema. O público alvo desta pesquisa são estudantes da área de exatas que tem dificuldade na compreensão de tal assunto. O objetivo fundamental é buscar métodos, conceitos e exemplos que melhor possibilitem a sua compreensão. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica onde foram levantados definições de conteúdos prévios, o conceito de Base no rigor da Álgebra Linear e também foram expostos exemplos e conceitos que pudessem facilitar o entendimento sobre a temática abordada. Foi tomado como principais autores: HOWARD ANTON; CHRIS RORRES (2012), ALFRED STEINBRUUCH; PAULO WINTERLE (1987), DAVID POOLE (2017) e ANTÔNIO SILVA (2007), entre outros autores que abordam o tema. A comparação com exemplos práticos do cotidiano e modos de verificação mais simplificados foi algo que chamou atenção, como conceitos positivos que pudessem facilitar a abordagem do tema, possibilitando assim, um avanço para que estudantes melhor compreendam um conteúdo abstrato como algo que pode ser percebido, verificado e comparado com conceitos vivenciados no cotidiano.

Palavra-chave: Base, Álgebra Linear, melhor compreensão.

ABSTRAT

The main theme of this work is the Basis in the context of Linear Algebra. The main motivation for its elaboration was the difficulty of some Mathematics Degree students at UEMA Campus Balsas in understanding Base and other contents related to the theme. The target audience of this research are students in the area of exact sciences who have difficulty understanding this subject. The fundamental objective is to seek methods, concepts and examples that better enable its understanding. For this, a bibliographical research was carried out where definitions of previous contents were raised, the concept of Base in the rigor of Linear Algebra and examples and concepts that could facilitate the understanding of the theme addressed were also exposed. It was taken as main authors: HOWARD ANTON; CHRIS RORRES (2012), ALFRED STEINBRUUCH; PAULO WINTERLE (1987), DAVID POOLE (2017) and ANTÔNIO SILVA (2007), among other authors who address the subject. The comparison with practical everyday examples and more simplified verification methods was something that drew attention, such as positive concepts that could facilitate the approach to the theme, thus enabling a breakthrough for students to better understand an abstract content as something that can be perceived, checked and compared with concepts experienced in everyday life.

Keywords: Base, Linear Algebra, better understanding.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SÍMBOLOS

$+$	- mais
$-$	- menos
$\times$	- multiplicação
$\cdot$	- multiplicação
$\mathbb{N}$	- conjunto dos números Naturais
$\mathbb{N}^*$	- conjunto dos números Naturais não nulos
$\mathbb{R}$	- conjunto dos números Reais
$=$	- igual a
$\neq$	- diferente
$\Leftrightarrow$	- Bi condicional, equivale, se e somente se
$\sum$	- somatório
$\forall$	- para todo
$\leq$	- menor que ou igual
$\geq$	- maior que ou igual
$\in$	- pertence
$\blacksquare$	- final da prova

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Não é de hoje que muitos alunos de cursos de exatas encontram dificuldades em conteúdos e conceitos relacionados à Álgebra Linear, que é uma área da Matemática que tem grande valor para a sociedade, tendo inúmeras aplicações e tornando-se muito importante para setores como medicina e economia. Considerada um segmento que cada vez mais ganha destaque no meio acadêmico, com muitas aplicações e diversas possibilidades em diferentes áreas das Ciências e na Matemática, sendo uma disciplina comum à maioria das grades curriculares da área das Ciências Exatas.

Nos cursos de exatas tem grande destaque e em alguns casos pode gerar dificuldades para vários discentes. De fato, a Álgebra Linear conta com conceitos que muitas vezes envolvem muito o imaginário e a criatividade dos alunos, para que se tenha sucesso no processo de aprendizagem. Em vários momentos, conceitos não entendidos, de início, podem influenciar negativamente o entendimento de outros conceitos relacionados, o que pode prejudicar o desempenho dos estudantes.

A experiência em algumas disciplinas relacionadas à Álgebra Linear e a observação da dificuldade de alguns alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UEMA Campus Balsas, na compreensão de alguns conteúdos que envolvem o conceito de Base na Álgebra Linear, motivou a presente pesquisa. Foi levado em consideração que muitos discentes tinham dificuldades em compreender conteúdos que tinham como eixo principal a necessidade da compreensão de Base e também que a literatura disponibiliza explicações consideradas limitadas sobre o próprio conceito.

A pesquisa tem como objetivo geral: identificar quais aspectos pode favorecer a melhor compreensão do conceito de Base no contexto da Álgebra Linear. E como objetivos específicos: analisar materiais bibliográficos sobre conceitos gerais da Álgebra Linear e definições de Base no contexto da mesma, compreender os principais conceitos dentro da Álgebra Linear sobre o tema, bem como sua representação no espaço de várias dimensões e determinar aspectos que possam favorecer a compreensão de Base no contexto da Álgebra Linear com facilidade. Podendo assim, favorecer aos leitores meios para que possam compreender o assunto abordado de forma direta, rápida e eficiente, bem como formas de verificação mais simplificadas.

A pesquisa é de caráter bibliográfico, utilizando como metodologia principal a realização de levantamento sobre o tema. Foi feita a organização de dados, mais especificamente, a organização de definições prévias importantes para a compreensão do assunto e a exposição de Base no rigor da Álgebra Linear, finalizando com a exposição de conceitos, exemplos, e métodos que possam auxiliar o aprendizado de discentes em relação ao tema em questão.

2 DEFINIÇÕES

Antes de falar sobre Base propriamente dita, será necessário expor algumas definições e conceitos da Álgebra Linear, muito utilizados não só no conceito de Base, mas também em outros conteúdos. Tais conceitos são de grande importância para o entendimento de Base e para isso vamos explorá-los para que possamos chegar ao objetivo principal que é identificar quais aspectos podem favorecer a melhor compreensão do tema abordado. Esses conceitos e definições serão de grande importância para a compressão de Base e são considerados como pré-requisitos para que se fale sobre o referido tema.

2.1 Matrizes

As matrizes são um tipo de tabela formado por n linhas e m colunas em que os seus elementos são números. Diz-se que a matriz tem ordem $m \times n$ (lê-se: m por n), em que $m \geq 1$ e $n \geq 1$.

2.1.1 Notação geral de uma matriz

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

A matriz A representa uma matriz qualquer de ordem $m \times n$. Um modo simplificado de fazer a representação é:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}, sendo\ m, n \in \mathbb{N}^*$$

Onde:

- a_{ij}: elemento da matriz, sendo que os índices i e j do elemento indicam a posição do elemento na matriz.
- O índice i representa a linha, em que $1 \leq i \leq m$
- O índice j representa a coluna, em que $1 \leq j \leq n$

Exemplos:

O elemento a_{12} (lê-se: a um dois) ocupa a primeira linha e a segunda coluna.

O elemento a_{43} (lê-se: a quatro três) ocupa a quarta linha e a terceira coluna.

2.1.2 Matriz transposta

Dada B uma matriz $m \times n$. A transposta de B é a matriz com notação B^T, $n \times m$, tal que $B_{ij}^T = B_{ji}$. Então:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \rightarrow B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

2.2 Determinantes

Determinante de uma matriz quadrada é um número real associado a essa matriz segundo alguma regras.

Matriz quadrada é a matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas.

Sendo a matriz B = $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, o seu determinante é indicado como:

$$\det B = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

2.2.1 Determinante de matriz de 1ª ordem

Em uma matriz de 1ª ordem (matriz que possui uma linha e uma coluna) o determinante é igual ao número que a forma.

2.2.2 Determinante de matriz de 2ª ordem

Em uma matriz de 2ª ordem (matriz que possui duas linhas e duas colunas) o determinante é definido através do produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o determinante da matriz será definido como:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2.2.3 Determinante de matriz de 3ª ordem

O determinante de uma matriz de 3ª ordem (matriz que possui três linhas e três colunas) pode ser obtido através de uma regra intitulada ***Regra de Sarrus***.

Consideremos a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Passo 1: reescreva a matriz repetindo a 1° e 2° coluna logo à direita da ultima coluna:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{matrix}$$

Passo 2: efetue a soma dos produtos dos elementos das diagonais principais menos a soma dos produtos das diagonais secundárias (diagonais principais indicadas pelas setas vermelhas e diagonais secundárias indicadas pelas setas azuis):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{23} \end{matrix}$$

det A $= [(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}) + (a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}) + (a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{23})] - [(a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) + (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}) + (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})]$

2.2.4 Determinante de matriz de 4ª ou mais ordens

2.2.4.1 O Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada de ordem $n (n \geq 2)$ é obtida pela soma dos produtos dos elementos de qualquer linha ou coluna pelos respectivos cofatores, em que o cofator de um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada será o resultado do produto $(-1)^{i+j}$ pelo determinante D_{ij}, conseguido pela eliminação da linha e da coluna do elemento a_{ij}:

$$cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Dada a matriz A de 4° ordem, observe o determinante da matriz obtido através do teorema de Laplace:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

tomando os elementos da primeira linha, teremos:

$$\det(A) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Logo o determinante da matriz A será dado por:

$$\det(A) = a_{11} \cdot cof(a_{11}) + a_{12} \cdot cof(a_{12}) + a_{13} \cdot cof(a_{13}) + a_{14} \cdot cof(a_{14})$$

2.2.5 Propriedades dos determinantes

I) "O determinante de uma matriz A não se altera quando se trocam as linhas pelas colunas." (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.433).

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

II) "Se a matriz A possui uma linha (ou coluna) constituída de elementos todos nulos, o determinante é nulo." (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.434).

Exemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

III) "Se a matriz A tem duas linhas (ou duas colunas) iguais, o determinante é nulo." (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.434).

Exemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

IV) "Se na matriz A duas linhas (ou colunas) têm seus elementos correspondentes proporcionais, o determinante é nulo." (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.435).

Exemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{12} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$$

V) "Se na matriz A cada elemento de uma linha (ou coluna) é uma soma de das parcelas, o determinante de A pode ser expresso sobre a forma de uma dos determinantes de duas matrizes, a saber." (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.435).

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

VI) “O determinante de uma matriz diagonal A (superior ou inferior) é igual ao termo principal, isto é, é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.436).

Exemplo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

VII) “Trocando-se entre si duas linhas (ou colunas) na matriz A, o determinante muda de sinal, isto é, fica multiplicado por -1.” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.438).

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

VIII) “Quando se multiplicam por um número real todos os elementos de uma linha (ou de uma coluna) da matriz A, o determinante fica multiplicado por esse número.” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.440).

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ ka_{12} & ka_{22} & ka_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

IX) “Um determinante não se altera quando se somam aos elementos de uma linha (coluna) da matriz A os elementos correspondentes de outra linha (coluna) previamente e multiplicados por um número real diferente de zero.” (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987, p.444).

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} + ka_{11} & a_{22} + ka_{21} & a_{32} + ka_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Demonstração apenas do item **I**:

Se A é uma matriz de ordem n e A^T sua transposta, então $\det A^T = \det A$.

Prova. Utilizando o método de indução finita temos que:

Para $n = 1$, a propriedade é válida.

Suponha que a propriedade também é válida para a matriz de ordem $n-1$ e provemos que será válida também para determinante de ordem n. Temos:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Em que $a_{ij} = \ b_{ji}$, $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}\ e\ \forall j \in \{1,2,\dots,n\}$.

$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \cdots + a_{n1} \cdot A_{n1}$ (pela 1° linha)

$\det A^T = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} + b_{13} \cdot B_{13} + \cdots + b_{1n} \cdot B_{1n}$ (pela 1° linha)

Mas, por definição de matriz transposta, temos:

$$a_{11} = b_{11}, a_{21} = b_{12}, a_{31} = b_{13}, \dots, a_{n1} = b_{1n}$$

E pela hipótese de indução temos:

$$A_{11} = B_{11}, A_{21} = B_{12}, A_{31} = B_{13}, \dots, A_{n1} = B_{1n}.$$

Logo $\det A^T = \det A$. Portanto, a propriedade é válida para matrizes de ordem $n, \forall n \geq 1$. ∎

2.3 Sistemas Lineares

Segundo Filho e Silva (2000, p. 352) “chama-se de Sistema Linear a n incógnitas um conjunto de duas ou mais equações lineares com n incógnitas.”.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 5x + y = 0 \\ -x + y = 12 \end{cases}$

Sistema linear de duas equações e duas incógnitas, onde x e y são incógnitas e $0\ e\ 12$ são os termos independentes.

b) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -5 \\ 4x - y - z = \ -1 \end{cases}$

Sistema linear de três equações e três incógnitas, onde x, y e z são incógnitas e $0, -5\ e\ -1$ são os termos independentes.

2.3.1 Solução de um sistema linear

“Umas solução de um sistema linear é um conjunto de valores que satisfazem ao mesmo tempo todas as equações do sistema.” (FILHO e SILVA, 2000, p. 362)

Exemplo:

Para o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Os valores que satisfaz as equações ao mesmo tempo são $x = 2$ e $y = 1$.

Logo, a solução do sistema de equações é o par ordenado $(2, 1)$.

2.3.2 Número de soluções de um sistema linear

Teorema 1: "Um sistemas de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções." (ANTON; RORRES, 2012, p.60)

Prova. Se $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das afirmações: (a) o sistema não tem solução, (b) o sistema tem exatamente uma solução ou (c) o sistema tem mais de uma solução. A prova estará completa se conseguirmos mostrar que o sistema tem uma infinidade de soluções, no caso (c).

Suponha que $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tenha mais de uma solução e seja $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$, onde $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são duas soluções distintas qualquer. Como $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são distintas, a matriz $\boldsymbol{x}_0$ é não nula; além disso,

$$A\boldsymbol{x}_0 = A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = A\boldsymbol{x}_1 - A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

Se k for um escalar, então:

$$A(\boldsymbol{x}_1 - k\boldsymbol{x}_0) = A\boldsymbol{x}_1 - A(k\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_1 - k(A\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{b} - k\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}$$

No entanto, isso significa que $\boldsymbol{x}_1 - k\boldsymbol{x}_0$ é solução $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Como $\boldsymbol{x}_0$ é não nula e existe uma infinidade de escolhas para k, o sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem uma infinidade de soluções.

■

(ANTON; RORRES, 2012, p.60)

Sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas são referentes à comparação entre a posição de duas retas.

Assim podemos destacar três possíveis situações:

1. As retas podem ser distintas e paralelas, neste caso não haverá interseção entre elas, portanto, não existe solução. Esse tipo de sistema é denominado **Sistema Impossível** (SI) e seu determinante é igual a 0.
2. As retas podem se interceptar em um único ponto, nesse caso o sistema possui precisamente uma única solução. Esse tipo de sistema é denominado **Sistema Possível e Determinado** (SPD) e seu determinante é diferente de 0.
3. As retas sendo coincidentes, existe uma infinidade de pontos que se interceptam e, como resultado, o sistema possui infinitas soluções. Esse tipo de sistema é denominado **Sistema Possível e Indeterminado** (SPI) e seu determinante é igual a 0.

Anton e Rorres destacam ainda que em sistemas lineares com três equações e três incógnitas os gráficos das equações são planos. As soluções do sistema, caso existam, correspondem aos pontos de interseção entre os três planos, em que também haverá três possíveis situações: nenhuma solução, uma solução e infinitas soluções.

2.3.3 Resolvendo sistemas lineares por inversão matricial

O teorema a seguir garante, com eficiência, uma fórmula para solucionar um sistema linear com n incógnitas e n equações nos casos em que a matriz organizada com os coeficientes for invertível.

Teorema 2: "Se A for uma matriz invertível $n \times 1$, então para cada matriz $\mathbf{b}$ de tamanho $n \times 1$, o sistema de equações $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ tem exatamente uma solução, a saber, $x = A^{-1}\boldsymbol{b}$." (ANTON; RORRES, 2012, p.60)

Prova. Como $A(A^{-1}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}$, segue que $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ é solução de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Para mostrar que essa é a única solução, vamos supor que $\boldsymbol{x}_0$ seja uma solução arbitrária e mostrar que, necessariamente, $\boldsymbol{x}_0$ é a solução $A^{-1}\boldsymbol{b}$.

Se $\boldsymbol{x}_0$ for uma solução qualquer, então $A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$. Multiplicando ambos os lados dessa equação por A^{-1}, obtemos $x_0 = A^{-1}\boldsymbol{b}$. ■

(ANTON; RORRES, 2012, p.60)

2.3.4 Sistema linear homogêneo

"É todo sistema linear em que os coeficientes independentes são todos nulos. Ele sempre admite pelo menos a solução trivial $(0, 0, \ldots, 0)$." (FILHO e SILVA , 2000, p. 362)

Exemplo:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Qualquer sistema homogêneo admite ao menos a solução nula (0, 0, 0,...,0), também chamada de ***solução trivial***. Além da solução trivial, um sistema homogêneo pode admitir também, outras soluções, chamadas de ***não triviais***.

2.3.5 Escalonamento de sistemas

O escalonamento de sistema linear é um método muito utilizado na resolução de sistemas lineares e também para classificação do mesmo. Escalonar um sistema linear é alterar seus termos e equações de uma forma que podemos obter um novo sistema equivalente ao inicial, escalonado, e que possuem a mesma solução.

Um sistema de equações está escalonado quando:

- As incógnitas das equações estão todas escritas na mesma ordem;
- O primeiro elemento diferente de 0 de uma equação, está a esquerda do primeiro elemento diferente de 0 da equação seguinte;
- Caso haja uma linha nula (com todos os elementos nulos), ele deve estar abaixo de todas as outras.

É importante ressaltar, que na presente pesquisa, será utilizado o escalonamento com a associação de um sistema linear com uma matriz, onde os coeficientes das equações do sistema podem ser organizados em uma matriz na forma de linhas ou de colunas.

2.3.6 Regra de Cramer

Teorema 3: Regra de Cramer : "Se $Ax = b$ for um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, então o sistema tem uma única solução. Essa solução é

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

em que A_1 é a matriz obtida substituindo as entradas j-ésima coluna se A pelas entradas da matriz $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$." (ANTON; RORRES, 2012, p.113)

Prova. Se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível e, pelo Teorema 2, $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ é a única solução de $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Tomando a inversa da matriz A utilizando a sua adjunta $\left(A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\right)$ temos,

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)\boldsymbol{b} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Multiplicamos as matrizes, resulta

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \dots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \dots + b_nC_{n2} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ b_nC_{1n} + b_2C_{2n} + \dots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

Portanto, a entrada na j-ésima linha de $\boldsymbol{x}$ é:

$$\boldsymbol{x} = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{\det(A)} \tag{1}$$

Seja, agora,

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & 1_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj-1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Como A_j difere de A j-ésima coluna, segue que os cofatores das entradas $b_1, b_2, \dots,\ b_n$ de A_j coincidem com os cofatores das entradas correspondentes da j-ésima coluna de A. A expansão em cofatores de $det(A)$ ao longo da j-ésima coluna é, portanto,

$$\det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}$$

Substituindo esse resultado em (1), obtemos:

$$\boldsymbol{x_j} = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

■

(ANTON; RORRES, 2012, p.113)

2.4 Espaço Vetorial

Para Espaço Vetorial Poole define que:

Seja V um conjunto onde duas operações, denominadas *adição* e *multiplicação por escalar,* estão estabelecidas. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ estão em V, a soma de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ é simbolizada por $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, e se a é um escalar, o múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$ por a é simbolizado por $a\boldsymbol{v}$**.** Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ em V e para todos os escaleres a e b, V é conhecido como ***espaço vetorial*** e seus elementos são chamados ***vetores.***

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ está em V. Fechamento em relação à adição
2. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ Comutatividade
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ Associatividade
4. Existe um elemento **0** em V, chamado ***vetor nulo***, tal que $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$.
5. Para cada u em V, existe um elemento $-\boldsymbol{u}$ em V tal que $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.
6. $a\boldsymbol{u}$ está em V. Fechamento em relação á multiplicação por escalar
7. $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$ Distributividade
8. $(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$ Distributividade
9. $a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}$
10. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

(POOLE , 2017, p.429)

2.4.1 Subespaços

Poole (2017, p.434) define subespaços como "um subconjunto W de um espaço vetorial V é chamado subespaço de V se W é um espaço vetorial com os mesmos escalares, a mesma adição e a mesma multiplicação por escalar que V.".

Em $\mathbb{R}^n$, verificar se um subconjunto W é um subespaço do espaço vetorial envolve verificar apenas dois de dez dos axiomas do espaço vetorial. Nesse caso Poole (2017, p.434) destaca um teorema que enuncia que se assim sendo um espaço vetorial V e um subconjunto W de V não vazio, então W será um subespaço de V se, e somente se, forem verificadas as seguintes condições:

a. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ estão em W, $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ está em W.

b. Se $\boldsymbol{u}$ está em W e a é um escalar, $a\boldsymbol{u}$ está em W.

2.5 Combinação Linear

Steinbruch e Winterle (1987, p. 39) descrevem e exemplificam **Combinação Linear** da seguinte forma: "Sejam os vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ do espaço vetorial V e os escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$. Qualquer vetor $v \in V. v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ é um combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$"

Exemplo: No espaço vetorial P_2 dos polinômios de grau ≤ 2, o polinômio $v = 7x^2 + 11x - 26$ é uma combinação linear dos polinômios:

$$v_1 = 5x^2 - 3x + 2 \; e \; v_2 = -2x^2 + 5x - 8$$

De fato

$$v = 3v_1 + 4v_2$$

isto é:

$$7x^2 + 11x - 26 = 3(5x^2 - 3x + 2) + 4(-2x^2 + 5x - 8)$$

$$7x^2 + 11x - 26 = 15x^2 - 9x + 6 - 8x^2 + 20x - 32$$

$$7x^2 + 11x - 26 = 7x^2 + 11x - 26$$

2.5.1 Conjunto Gerador

A percepção de conjunto gerador de vetores se confere com facilidade de $\mathbb{R}^n$ a espaços vetoriais em geral. Poole (2017, p.438) define que "se $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ é um conjunto de vetores em um espaço vetorial V, o conjunto de todas as combinações lineares de

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k$ é chamado ***conjunto gerador*** por $ger(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k)$ ou $ger(S)$, dizemos que S é um ***conjunto gerador*** de V, e que V é ***gerado*** por S."

2.6 Dependência e Independência Linear

De acordo com Anton e Rorres (2012, p.191) se $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{0}$$

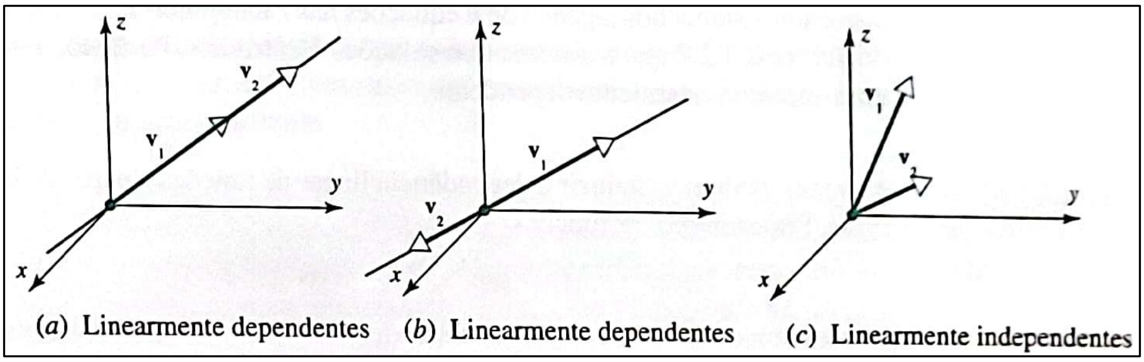
tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0, \qquad k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Dizemos que essa é a solução trivial. Se essa for a única solução, dizemos que S é um ***conjunto linearmente independente***. Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um ***conjunto linearmente dependente***.

Para realizar a verificação, podemos organizar esses vetores em uma matriz na forma de linha ou de coluna, em que se a matriz for $n \times n$ com $n \in \mathbb{N}$, calculado o determinante, se o resultado obtido for 0, significa que o sistema é linearmente dependente, isso quer dizer que se estamos no espaço bidimensional os dois vetores do conjunto tem a mesma inclinação, caso o determinante for diferente de 0 o vetores possuem inclinações diferentes.

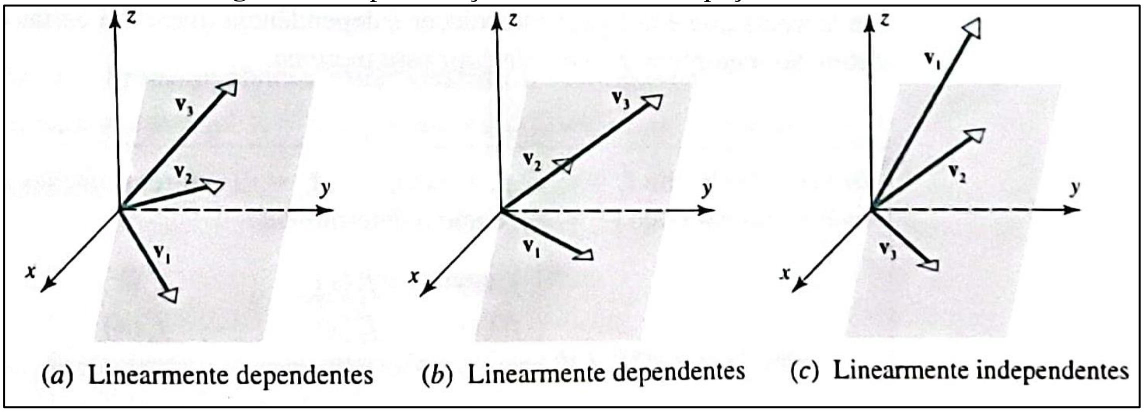
Figura 1 - Representação de vetores do espaço bidimensional



Fonte: Anton e Rorres (2012, p.195)

Caso seja no espaço tridimensional ou mais, com determinante igual a 0, existe vetores que estão no mesmo plano. E se o determinante for diferente de 0, os vetores estão em planos diferentes.

Figura 2 - Representação de vetores do espaço tridimensional



Fonte: Anton e Rorres (2012, p.195)

3 BASE E DIMENSÃO

Como já foi destacado, os alunos da área de cursos de exatas podem encontrar grande dificuldade na compreensão de alguns conteúdos que exijam uma abordagem mais abstrata, na Álgebra Linear não é diferente e mais ainda em relação à Base, conceito muito utilizado em disciplinas como Álgebra Linear e Estruturas Algébricas, disciplinas estas encontradas em cursos de Licenciatura em Matemática, Bacharel em Matemática entre outros.

Quando se fala de Base, é importante que se tenha conhecimento que tal conceito vem atrelado a ideia de dimensão, e que pode se associar ao nosso meio facilmente, quando observamos alguns aspectos geométricos do cotidiano. Quando falamos em uma reta, por exemplo, pensamos nessa reta como sendo unidimensional, um plano como bidimensional e o espaço como tridimensional. A noção intuitiva de dimensão é de muita importância nesse conceito e deve ser relembrada sempre que necessária.

Neste tópico será abordado o conceito de Base no rigor da Álgebra Linear, destacando seus principais Teoremas, Lemas e Corolários, bem como suas respectivas demonstrações, podendo assim observar novos métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que tenham aplicabilidade para a compreensão do tema.

3.1 Base

Anton e Rorres definem Base de um espaço vetorial da seguinte maneira:

"Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** de V, se valerem as duas condições a seguir.

(a) S é linearmente independente.

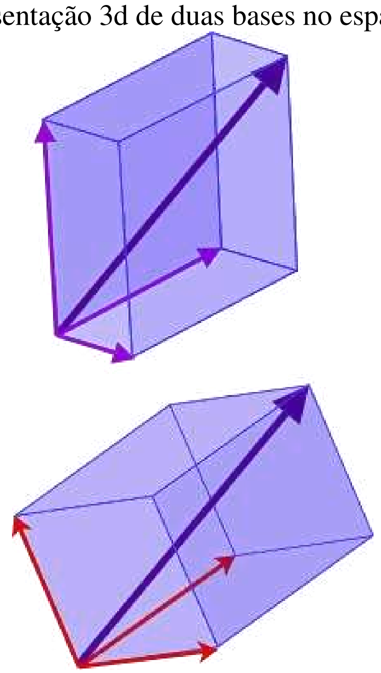
(b) S gera V."

(ANTON; RORRES, 2012, p.201)

Se considerarmos uma base como descrevendo um sistema de coordenadas para um espaço vetorial V, então a condição (a) garante que não há inter-relações entre os vetores de base, e a condição (b) garante que há vetores de base número suficiente para fornecer coordenadas para todos os vetores em V.

Na figura 3 cada vetor de base é multiplicado de forma escalar apropriadamente para que se somem ao vetor. Um vetor (aqui em 3d, mostrado na seta azul) pode ser reproduzido em termos de duas bases diferentes (setas roxas e vermelhas), observe:

Figura 3 - Representação 3d de duas bases no espaço tridimensional



Fonte: Wikimedia Commons

Teorema 4: "Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vetores em V tais que

$$V = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

Então, dentre estes vetores, podemos extrair uma base de V." (SILVA, 2007, p.51).

Prova. Se os vetores $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ são LI, nada há para ser provado. Caso contrário, pelo Teorema 4 temos que um destes vetores é combinação linear dos outros, digamos

$$\boldsymbol{u}_n = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_{n-1}\boldsymbol{u}_{n-1}.$$

Logo,

$$V = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n] = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}].$$

Se os vetores $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ são LI, nada há para ser provado. Caso contrário, pelo Teorema 4,

$$\boldsymbol{u}_{n-1} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_{n-2}\boldsymbol{u}_{n-2}.$$

Logo,

$$V = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-1}] = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-2}].$$

Continuando desta maneira (em no máximo $n-1$ etapas), obtemos uma base de V. ■

(SILVA, 2007, p.51)

Teorema 5: "Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$V = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m].$$

Então todo conjunto com mais de m vetores em V é LD. Assim, todo conjunto de vetores LI em V possui no máximo m vetores." (SILVA, 2007, p.52)

Prova. Como

$$V = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m].$$

Temos pelo Teorema 4, que existe uma base de V dentre os vetores $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$. Logo, reenumerando, se necessário, podemos supor que:

$$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\},$$

com $k \leq m$, seja uma base de V. Seja

$$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$$

Um conjunto de vetores em V com $n > m$. Com $\boldsymbol{v}_j \in V$ e $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$ é uma base de V temos que existe $a_{ij} \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\boldsymbol{v}_j = a_{1j}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_{kj}\boldsymbol{u}_k, j = 1, \dots, n.$$

Agora, com a combinação linear

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{j=1}^{n} x_j\boldsymbol{v}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}\boldsymbol{u}_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_j \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} \right) \boldsymbol{u}_i.$$

Assim,

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, k,$$

ou seja, basta discutir o sistema homogêneo com k equações e n incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, i = 1, \ldots, k.$$

Como $n > m \geq k$ temos que este sistema tem pelo menos uma solução não nula

$$(y_1, \ldots, y_n)$$

Logo,

$$\boldsymbol{y_1 v_1} + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n = \sum_{j=1}^{n} y_j\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}\right)\boldsymbol{u}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} 0\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$$

Portanto, o conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ é LD. ■

(SILVA, 2007, p.52)

Corolário 1: "Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre ℝ. Se

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}\ e\ \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

são duas bases quaisquer de V, então $m = n$." (SILVA, 2007, p.53)

Prova. Como $V = [\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m]\ e\ \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ é um conjunto LI temos, pelo Teorema 5, que $n \leq m$. Por outro lado, como $V = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n]\ e\ \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ é um conjunto LI temos, pelo Teorema 5, que $m \leq n$. Portanto, $m = n$. ■

(SILVA, 2007, p.53)

SILVA (2007, p.54) destaca que:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre ℝ. A dimensão de V é o número de elementos em alguma base de V e será denotada por $dim\, V$ ou $dim_{\mathbb{R}}\, V$. Note, pelo Corolário 1, que esta definição não depende da base de V, isto é, está bem definida. Quando $V = \{\boldsymbol{0}\}$, convencionamos que $dim\, V = 0$.

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}\ e\ \alpha = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ um subconjunto qualquer de vetores V. O ponto de α é definido por:

$$\text{posto}(\alpha) = \dim[\alpha].$$

Lema 1: "Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ um subconjunto LI em V. Então $\boldsymbol{u} \in V - [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m]$ se, somente se, $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}\}$ é um conjunto LI." (SILVA, 2007, p.54)

Prova. Sejam $x_1, \dots, x_m, y$ escalares em $\mathbb{R}$ tais que

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{u}_m + y\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}.$$

Então $y = 0$, pois se $y \neq 0$, então

$$\boldsymbol{u} = \left(-\frac{x_1}{y}\right)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \left(-\frac{x_m}{y}\right)\boldsymbol{u}_m \Rightarrow \boldsymbol{u} \in [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m]$$

O que é impossível. Assim $y = 0$ e

$$x_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + x_m\boldsymbol{u}_m = \boldsymbol{0}.$$

Logo, por hipótese,

$$x_1 = \cdots = x_m = 0.$$

Portanto, $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}\}$ é um conjunto LI. ■

(SILVA, 2007, p.54)

Teorema 6: "Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e W um subespaço de V. Então todo conjunto de vetores LI em W é parte de uma base de W. " (SILVA, 2007, p.54)

Prova. Seja $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m\}$ um conjunto LI em W. Se

$$W = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m],$$

acabou, caso contrário, existe pelo Lema 1

$$\boldsymbol{u}_{m+1} \in W - [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m] \text{ tal que } \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}\}$$

é LI em W. Se

$$W = [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}],$$

acabou. Caso contrário, existe pelo Lema 1

$$\boldsymbol{u}_{m+1} \in W - [\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}] \text{ tal que } \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}, \boldsymbol{u}_{m+2}\}$$

é LI em W. Continuando desta maneira (em no máximo $dim\, V$ etapas), obtemos o conjunto

$$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{u}_{m+1}, \boldsymbol{u}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{u}_n\},$$

que é uma base de W. ■

(SILVA, 2007, p.54)

Corolário 2: "Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Se W é um subespaço próprio de V, então $\dim W \leq \dim V$. Além disso, se $\dim V = n$, então todo conjunto com n vetores LI em V é base de V." (SILVA, 2007, p.55)

Prova. Como $W \neq \{\boldsymbol{0}\}$ temos que existe $\boldsymbol{u}$ em W com $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$. É claro que $\{\boldsymbol{u}\}$ é um conjunto LI em W. Assim, pelo Teorema 6, existe uma base de W contendo $\boldsymbol{u}$ e no máximo

$\dim V$elementos. Logo, $\dim W \leq \dim V$. Com $W \subsetneq V$ temos que existe $\boldsymbol{v} \in V$ tal que $v \notin W$. Assim, acrescentando $\boldsymbol{v}$ a uma base de W, obtemos um conjunto LI para V. Portanto, $\dim W \leq \dim V$. ■

(SILVA, 2007, p.55)

Teorema 7: "Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre ℝ. Se W_1 e W_2 são subespaços de V, então

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$. (SILVA, 2007, p.56)

Prova. Como $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de W_1 e W_2 temos, pelo Teorema 6, que $W_1 \cap W_2$ contém uma base

$$\alpha = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}\}$$

que é parte de uma base

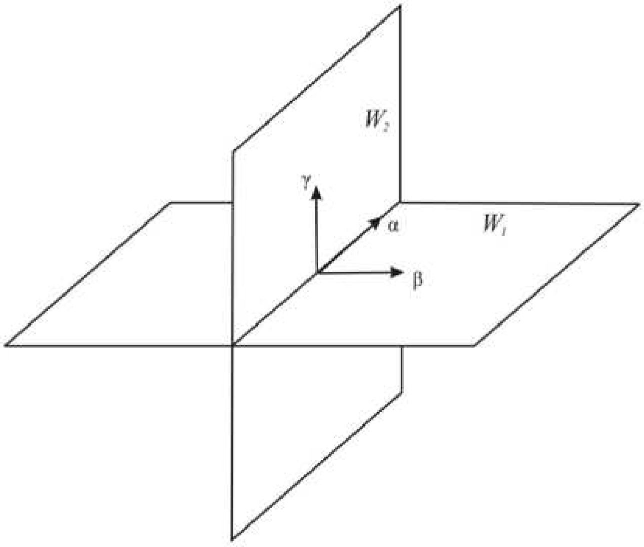
$$\alpha \cup \beta, \text{ onde } \beta = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{m}}\}$$

de W_1 e parte de uma base

$$\alpha \cup \gamma, \text{ onde } \gamma = \{\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_{\boldsymbol{n}}\}$$

de W_2. Note que os conjuntos α, β e γ são dois a dois disjuntos (confira na Figura 4).

Figura 4 - Interseção dos subespaços W_1 e W_2



Fonte: Silva (2007, p.56)

Afirmação. O conjunto $\delta = \alpha \cup \beta \cup \gamma$ é base de $W_1 + W_2$.

De fato, é claro que o conjunto δ gera $W_1 + W_2$. Agora, suponhamos que

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{v}_j + \sum_{l=1}^{n} z_l \boldsymbol{w}_l = \boldsymbol{0}.$$

Então:

$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \boldsymbol{w}_l\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{v}_j \ \in W_1.$$

Logo,

$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \boldsymbol{w}_l\right) \in \ W_1 \cap W_2.$$

Assim, existem $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$-\left(\sum_{l=1}^{n} z_l \boldsymbol{w}_l\right) = t_1 \boldsymbol{u}_1, \dots, t_k \boldsymbol{u}_k,$$

Ou seja,

$$\sum_{i=1}^{k} t_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{l=1}^{n} z_l \boldsymbol{w}_l = \boldsymbol{0}.$$

Como γ é LI temos que $z_1 = \cdots = \ z_n = 0$. Logo,

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}.$$

Como β é LI temos que

$$x_1 = \cdots = x_k = y_1 = \cdots = y_m = 0.$$

Portanto, δ é um conjunto LI. Logo,

$$\begin{aligned} \dim W_1 + \dim W_2 &= (m+k) + (n+k) \\ &= (m+n+k) + k \\ &= \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2). \end{aligned}$$

■

(SILVA, 2007, p.56)

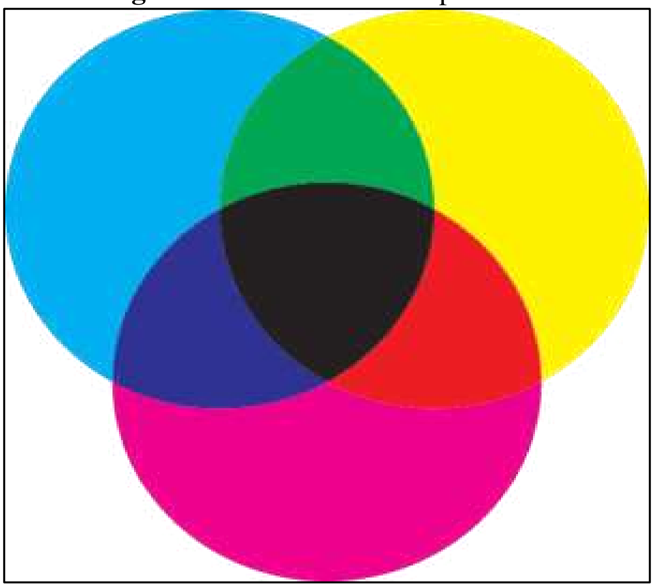
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para se falar de Base é fundamental que se tenha conhecimento do real significado da palavra. De acordo com o dicionário Priberamn a palavra Base é um substantivo feminino e tem alguns significados, entre eles destacam-se os seguintes: "Superfície inferior de um corpo, que geralmente serve de apoio. O que serve de apoio, de principio ou fundamento. [...] Princípio, origem. [...] Linha que sustenta as outras linhas de uma figura. [...] Que serve de referência ou ponto de partida." (PRIBERAMN, 2008-2021). Nos materiais analisados pode-se observar a ausência de tais significados, que podem de certa forma esclarecer um pouco mais sobre a nomenclatura utilizada no tema.

Nesse sentido podemos tomar um exemplo prático do cotidiano para a construção do entendimento de ***Base*** na Álgebra Linear. A ideia prática para se entender o conceito de Base é imaginar nas cores primárias: misturando as cores azul ciano, magenta e amarelo em proporções corretas pode-se criar qualquer cor desejada. Dessa mesma forma, uma Base, permite de maneira singular, combinar linearmente os seus vetores para obter um vetor desejado. Nesse exemplo, podemos comparar a combinação linear, como sendo a mistura de cores, as cores primárias como sendo os vetores da Base e a cor final obtida como sendo o vetor resultado da combinação de vetores da Base.

Observe a figura 5, nela esta representada as cores primárias, a mistura delas e algumas das cores que podem ser obtidas como resultado dessa mistura.

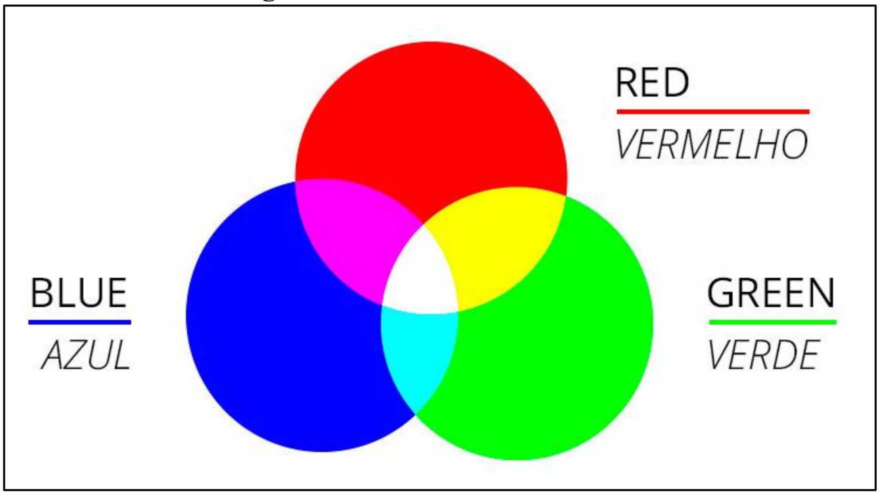
Figura 5 - Mistura de cores primarias



Fonte: Wikipédia

Outro exemplo que pode ser citado é o sistema RGB (a sigla se refere ao sistema de cores aditivas compostas pelos tons de Vermelho (Red), Verde (Green) e Azul (Blue)). O intuito principal do sistema RGB é a reprodução de cores em dispositivos eletrônicos como telas de celulares, monitores de TV, Mídias digitais, entre outros.

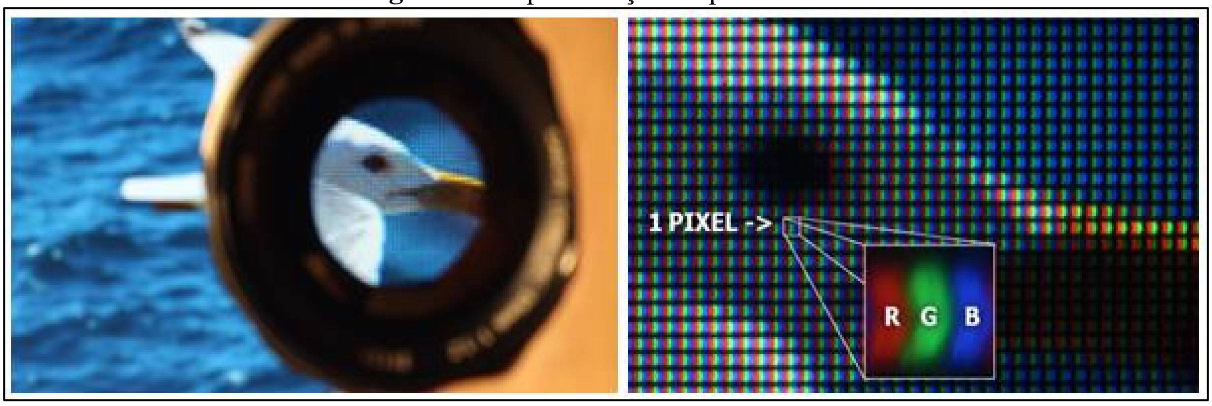
Figura 6 - Sistemas de cores RGB



Fonte: Afixgraf

Particularmente é um padrão de cores que se utiliza de luz para gerar cores, os monitores de TV, por exemplo, são constituídos por diversos pontos e esses pontos são denominados pixels. Cada pixel detém essas três cores, e o cruzamento delas resultam em diversas outras cores, compondo assim as imagens da TV.

Figura 7 - Representação do pixel na TV

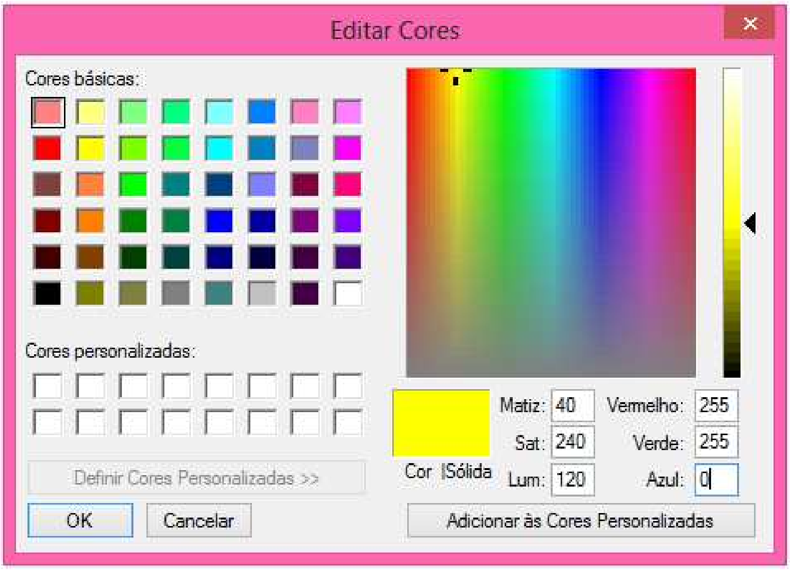


Fonte: apenas imagens

Isso quer dizer que cada cor da tela da TV, que podemos observar, pode ser descrita como uma combinação dessas três cores. Como pode ser analisada na Figura 6, a cor amarela, por exemplo, pode ser obtida pela combinação das cores vermelha e verde e nada da cor azul.

No sistema RGB as cores podem ter uma quantidade que pode ir de 0 a 255, no caso do exemplo da cor amarela, podemos definir que temos 255 de vermelho, 255 de verde e 0 de azul. O editor do programa Paint ilustra bem isso, observe na figura 8.

Figura 8 - Editor de cores do Paint



Fonte: Autora (2022)

Então se criarmos uma dimensão com todas as cores possíveis, e se quisermos pegar o menor número de cores possíveis de forma que pudéssemos criar todas as outras, pegaríamos apenas as cores vermelha, verde e azul. Pois o vermelho, o verde e o azul, são base para todas as cores, não havendo necessidade de considerar outra cor, pois qualquer outra é combinação linear das três que já temos.

Então o que permite que o sistema RGB possa ser a ***Bas*e** do espectro de todas as cores que vemos em telas eletrônicas são dois aspectos: o primeiro é que as três cores que temos como base (vermelha, verde e azul) são independentes entre si, ou seja, não podemos criar o vermelho, por exemplo, como combinação do verde e do azul, independente de qual nível de cor seja colocado. Assim, também não se pode criar a cor verde ou azul como combinação das outras cores, logo, elas são realmente independentes, pois uma não pode ser formada pela combinação das outras. O segundo é que juntas, com diversas combinações diferentes podem gerar todas as outras cores.

E na Álgebra Linear a Base é exatamente isso que acabamos de ver, ou seja, para que um conjunto de vetores seja Base de um espaço vetorial V, eles dever ser LI (linearmente independentes) e dever gerar qualquer vetor de V utilizando os vetores da Base. É o caso do conjunto de vetores $\{(0,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ que é uma base do $\mathbb{R}^3$, também chamada de ***base canônica***, que é dita como a base mais trivial ou simples de ser encontrada que pode gerar um espaço vetorial ou qualquer outra estrutura algébrica, nesse caso essa Base gera qualquer vetor no espaço tridimensional.

Para provarmos que realmente esse conjunto de vetores é Base do $\mathbb{R}^3$ devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1: provar que o conjunto de vetores é LI.

Seja $\alpha, \beta \ e \ \gamma \in \mathbb{R}$, temos o seguinte sistema:

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$$

Nesse caso, para que os três vetores sejam LI, $\alpha, \beta \ e \ \gamma$ devem ser iguais a zero, caso contrário, se a solução do sistema for qualquer outra solução os vetores não são LI. Resolvendo o sistema temos:

$$\alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(\alpha, 0,0) + (0, \beta, 0) + (0,0, \gamma) = (0,0,0)$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$$

Assim, temos que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, logo os vetores são LI.

Passo 2: provar que os vetores podem gerar qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$.

Nesse caso vamos tomar um vetor genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e vamos ver se ele pode ser escrito como combinação linear desses três vetores:

$$(x, y, z) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$
$$(x, y, z) = (a, 0,0) + (0, b, 0) + (0,0, c)$$
$$(x, y, z) = (a, b, c)$$

Isso que dizer que se escrevermos qualquer vetor (x, y, z) como a combinação desses três vetores é só considerar $x = a, y = b \ e \ z = c$. Tomando o vetor $(3, 5, 2)$, como exemplo, temos que:

$$(3, 5, 2) = 3(1,0,0) + 5(0,1,0) + 2(0,0,1)$$

Concluímos que, os conjuntos de vetores $\{(0,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$, pois podemos escrever qualquer vetor do $\mathbb{R}^3$, utilizando simplesmente os valores de $x, y \ e \ z$.

Nos livros e textos analisados pode-se perceber que em geral todos apresentam e expressam o conceito de base de forma sucinta, em que o conceito é trabalhado basicamente na forma de verificação, ou seja, não exemplificam de forma teórica mais abrangente, nem utilizam exemplos que estejam mais próximo da realidade do estudante. Esse modo pode não favorecer o entendimento e faz com que o estudante não consiga assimilar de forma mais ativa. Observou-se que a abordagem é de maneira concisa, em que são dadas as condições para que um conjunto de vetores seja base e em seguida verificadas, e que também uma minoria expressa tal ideia na forma de imagens que possam expressar melhor o conteúdo.

Para demostrar melhor esse aspecto observado, acompanhe o seguinte exemplo:

Dado o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ em que $v_1(1,2,3)$, $v_2(0,1,2)\ e\ v_3(0,0,1)$, para mostrar que o conjunto B é base do $\mathbb{R}^3$, deve-se provar duas condições: primeira que B é LI e a segunda que qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B. Nesse caso a maioria dos livros analisados traz geralmente a seguinte forma de verificação:

Parte 1: Mostrar que B é Linearmente Independente (LI)

Para mostrar que o conjunto é LI deve-se mostrar que

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

Admitindo somente a solução $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Com efeito, temos:

$$a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

E podemos dizer que equivale ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema na forma de matriz coluna, teremos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} l_2 = -2l_1 + l_2 \\ l_3 = -3l_1 + l_3 \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \{l_3 = -2l_2 + l_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Onde $\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$, equivale à $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$

cuja a única solução é somente a trivial:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

Logo B é LI.

Parte 2: Para mostrar que B gera $\mathbb{R}^3$, deve-se mostrar que qualquer vetor $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores de B, ou seja:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$$

Em termos de componentes temos o seguinte:

$$(x, y, z) = a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1)$$

Nesse caso vamos tomar que $a_1 = a, a_2 = b\ e\ a_3 = c$, para facilitar a visualização dos cálculos, assim teremos que:

$$(x,y,z) = a(1,2,3) + b(0,1,2) + c(0,0,1)$$
$$(x,y,z) = (a,2a,3a) + (0,b,2b) + (0,0,c)$$
$$(x,y,z) = (a,2a+b,3a+2b+c)$$

Podemos formar o seguinte sistema

$\begin{cases} a & = x \\ 2a+b & = y \\ 3a+2b+c & = z \end{cases}$, que pode ser representado pela matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 3 & 2 & 1 & z \end{array}\right)$.

Escalonando a matriz obtemos a seguinte matriz equivalente $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & -2x+y \\ 0 & 0 & 1 & x-2y+z \end{array}\right)$

Que equivale dizer $a = x, b = -2x + y$ e $c = x - 2y + z$. Em que podemos escrever qualquer vetor $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ da seguinte forma:

$$(x,y,z) = a(1,2,3) + b(0,1,2) + c(0,0,1)$$
$$(x,y,z) = x(1,2,3) + (-2x+y)(0,1,2) + (x-2y+z)(0,0,1)$$

Logo podemos reescrever qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores de B. Satisfazendo assim, as duas condições de base, mostrando que B é base do $\mathbb{R}^3$.

A partir de mais observações pode-se perceber que pelo o Corolário 2 exposto neste trabalho, existe uma forma mais simplificada de verificar se um conjunto de vetores é base de um espaço vetorial. O Corolário expõe basicamente que se V é um espaço vetorial tal que $\dim V = n$, quaisquer n vetores de V linearmente independentes formam uma base de V.

Em outras palavras, para verificar se um conjunto de vetores é base de um espaço vetorial, basta mostrar que esse conjunto de vetores é linearmente independente, quando a dimensão do espaço vetorial é igual à quantidade de vetores. Nesse caso, a forma mais simples será se organizados os vetores em uma matriz na forma de linhas ou colunas, basta verificar se o determinantes será diferente de 0. Caso isso aconteça o conjunto de vetores será base desse espaço vetorial.

Essa forma de verificação é possível pelo fato de que se o determinante de uma matriz é diferente de 0, o sistema linear tem solução única, e, no caso significa que os vetores organizados na matriz são linearmente independentes, ou seja, admite somente a solução trivial e essa solução existe pelo fato de estarmos trabalhando com sistemas homogêneos e não existe sistema homogêneo impossível. É importante ressaltar também que os vetores podem se organizar na forma de linhas ou de colunas, uma vez que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua matriz transposta, pelas propriedades dos determinantes.

Retomando o exemplo mostrado anteriormente, o conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ com $v_1(1,2,3),\ v_2(0,1,2)\ e\ v_3(0,0,1)$. Para verificar que o conjunto B é base do $\mathbb{R}^3$, basta então organizar os vetores em uma matriz (linha ou coluna) e calcular o determinante, acompanhe:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det B = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1 \neq 0$$

Como $\det(B) \neq 0$, conclui-se que o conjunto de vetores é LI, como temos que $dim\ \mathbb{R}^3 = 3$ e B possui 3 vetores LI , pelo Corolário 2, temos que B é base do $\mathbb{R}^3$.

Podemos destacar a seguinte observação segundo Steinbruch e Winterle (1987, p.73-74):

Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$. Sabemos que o conjunto B é base de um espaço vetorial V se B for LI e se B gera V. No entanto, se soubermos que $\dim V = n$, para obtermos uma base de V basta que apenas uma das condições de base seja satisfeita. A outra condição ocorre naturalmente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi identificar quais aspectos podem favorecer a melhor compreensão do conceito de Base no contexto da Álgebra Linear. Foram Analisados materiais bibliográficos sobre conceitos gerais da Álgebra Linear e definições de base no contexto da mesma, foram analisados também os principais conceitos sobre o tema, bem como sua representação no espaço bi e tridimensional, determinando assim, aspectos que possam favorecer a compreensão de Base com facilidade.

A álgebra linear é um dos instrumentos mais importantes, polivalente e úteis da matemática. Também é apontada como conhecimento fundamental não só para matemáticos, mas para vários profissionais, como: engenheiros, físicos, economistas, cientistas da computação, biólogos, programadores, estatísticos, entre outros. A Base na Álgebra Linear gera muitas dúvidas em alguns estudantes, nesse sentido o tema abordado tem relevância para o entendimento de alguns conceitos da Álgebra Linear como Mudança de Base, Rotação, Ortogonalidade entre outros conceitos, não exposto nesse trabalho, além de ser integrada a outras disciplinas do curso de Matemática e de outros cursos da área de exatas, como cursos de engenharia em geral.

Após as leituras, analise e realizados os devidos registros, observou-se que de modo geral os livros pouco abordam Base de forma mais ilustrativa e simplificada. Apresentam de forma concisa e sem tantos detalhes. Pode-se perceber que não abordam de maneira que possam facilitar o entendimento dos estudantes com exemplos práticos e que se aproximem do cotidiano habitual, visto que o conceito já é considerado bem abstrato. A comparação com exemplos que podem ser percebidos no cotidiano foi algo considerado positivo, pois facilita o entendimento de Base. Além de formas mais práticas de verificação, como verificar um conjunto de vetores a partir do cálculo de determinante de uma matriz formada pelos vetores.

Por fim, é viável considerar que tal tema pode ser compreendido com facilidade com exemplificações práticas, visuais e que se aproximem mais do cotidiano. É importante ressaltar também que é fundamental o estudo das definições prévias, sendo considerada inviável a compreensão de tal tema, sem que se tenha noção de conceitos que o antecedem.

REFERÊNCIAS

ANATOMIA DO PIXEL – LÓGICO E FÍSICO. **Apenas Imagens**, 2022. Disponível em: https://apenasimagens.com/pt/pixel-imagem-digital. Acesso em: 25 de novembro de 2022.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Algebra Linear com aplicaçoes**-10a ediçao. Porto Alegre: Brookman, 2012.

BASE, Dicionário Priberam da Língua Portuguesa, 2008-2021. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/base. Acesso em: 01 de novembro de 2022.

CMYK, Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/CMYK Acesso em: 06 de novembro de 2022.

FILHO, Benigno Barreto, SILVA, Claudio Xavier. **Matemática aula por aula**: volume único: ensino médio – São Paulo: FTD, 2000.

MASCHEN. **3d duas bases mesmo vetor**. 2013. Disponível em: https://pt.frwiki.wiki/wiki/Base_(alg%C3%A8bre_lin%C3%A9aire). Acesso em: 08 de novembro de 2022.

O QUE SIGNIFICA RGB? TUDO SOBRE ESSE SISTEMA DE CORES. Afixgraf, 2022. Disponível em: https://www.afixgraf.com.br/blog/o-que-significa-rgb. Acesso em: 08 de novembro de 2022.

POOLE, David. **Álgebra Linear:** uma introdução moderna. Cengage Learning, 2017.

SILVA, Antônio de Andrade e. **INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA LINEAR**. 1.ed. João Pessoa: Editora Universitária, 2007. 266p. Disponível em: http://www.mat.ufpb.br/jorge/arquivos/disciplinas/listas/LivroIAL. Acesso em: 08 de Outubro de 2022.

STEINBRUCH, Afredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2º Edição, 1987, Makron Books.