
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE EDUCAÇÃO CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Safyra Lourranne Rabelo Matos

SÃO LUÍS - MA

2025

Safyra Lourranne Rabelo Matos

O modelo Lokta-Volterra: sistema presa-predador

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

SÃO LUÍS - MA

2025

Safyra Lourranne Rabelo Matos

O modelo Lokta-Volterra: sistema presa-predador

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr Felix Silva Costa - UEMA (Orientador)

Prof. Me. Ítalo José Lima de Sousa - UEMA

Prof. Me. Renato Rodrigues Luz - UEMA

Matos, Safyra Lourranne Rabelo
O modelo Lotka-Volterra: sistema presa-predador. / Safyra Lourranne
Rabelo Matos, Felix Silva Costa. – São Luis, MA, 2025.
53 f

TCC (Graduação em Matemática Licenciatura) - Universidade Estadual
do Maranhão, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

1.Lotka-Volterra. 2.Presa-Predador. 3.Dinâmica população. I.Costa,
Felix silva. II.Título.

CDU:517.91

“Não basta conquistar a sabedoria, é preciso usá-la.”

(Cícero)

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, que nunca me desamparou durante este processo e esteve ao meu lado desde o início. Agradeço profundamente à minha família, que sempre foi minha base e meu maior incentivo. À minha mãe, que desde o início acreditou que tudo isso era possível, esteve ao meu lado na matrícula e me acompanhou na minha primeira entrada na faculdade. Ao meu papai, que, mesmo sem entender completamente o mundo acadêmico, sempre me chamou com carinho de “minha professorinha”. À minha irmã, Jhenyfer de Cássia, que nunca escondeu o orgulho que sente de mim e, se pudesse, gritaria ao mundo o quanto me admira. Ao meu namorado, Gabriel Arcanjo, que nunca mediu esforços para estar ao meu lado, me ouviu nos momentos difíceis e esteve sempre disposto a me apoiar ao longo dessa caminhada. Sou grata também aos amigos que estiveram comigo nessa trajetória. Agradeço ao meu orientador, Dr. Félix Silva Costa, por sua dedicação, paciência e constante orientação ao longo do desenvolvimento deste trabalho. Sua disponibilidade e confiança foram fundamentais para que este projeto se concretizasse. Estendo meus agradecimento aos membros da banca, Professor Ítalo Sousa e Professor Renato Luz, pelas valiosas correções, considerações e pelo respeito demonstrado ao meu trabalho. Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho — familiares, amigos, colegas e professores — pelo apoio, incentivo e palavras de encorajamento ao longo dessa caminhada. Cada gesto foi fundamental para que esta etapa fosse concluída com êxito.

Resumo

Na presente Monografia, é apresentada um estudo sobre o modelo de Lotka-Volterra, que descreve a dinâmica de populações no sistema presa-predador. Inicialmente, são abordados modelos clássicos de crescimento populacional, como os de Malthus e Verhulst, destacando suas limitações. Em seguida, o modelo de Lotka-Volterra é introduzido para explicar oscilações nas populações de presas e predadores, com base em equações diferenciais. O estudo também analisa modificações no modelo, como o crescimento logístico da presa e o impacto do extrativismo (pesca). Conclui-se que o modelo permite prever variações populacionais e pode ser aplicado em ecologia e gestão de recursos naturais.

Palavras-chave: Lotka-Volterra; Presa-Predador; Dinâmica populacional.

Abstract

In this monograph, a study is presented on the Lotka-Volterra model, which describes population dynamics in a predator-prey system. Initially, classical models of population growth, such as those by Malthus and Verhulst, are discussed, highlighting their limitations. Then, the Lotka-Volterra model is introduced to explain oscillations in prey and predator populations based on differential equations. The study also analyzes modifications to the model, such as logistic growth of the prey and the impact of extractivism (fishing). It is concluded that the model allows for the prediction of population variations and can be applied in ecology and natural resource management.

Keywords: Lotka-Volterra; Predator-Prey; Population Dynamics.

Sumário

Introdução	10
1 Equações Diferenciais e Dinâmica Populacional	13
1.1 Equações Diferenciais Ordinárias	14
1.1.1 Classificação	14
1.1.2 Solução	15
1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de 1 ^a ordem	16
1.2.1 Método de solução: Separação de variáveis	17
1.2.2 EDO Linear de 1 ^a ordem	17
1.3 Dinâmica populacional	19
1.3.1 Modelo de Malthus	20
1.3.2 Modelo de Verhulst	23
2 Modelo de Lotka-Volterra	26
2.1 Sistema de equações diferenciais ordinárias de 1 ^a ordem linear	26
2.1.1 Sistema homogêneo com coeficientes constantes	27
2.2 Sistemas Autônomos no Plano	33

2.2.1	Pontos de Equilíbrio ou Singularidades	33
2.3	O Sistema Linear de ordem 2	34
2.3.1	Casos de Matrizes e Autovalores	37
2.4	Modelo Presa-Predador	42
3	Resultados e Discussão	45
	Considerações Finais	50
	Referências Bibliográficas	51

Introdução

O estudo da dinâmica populacional oferece uma compreensão sobre o desenvolvimento dos modelos matemáticos ao longo do tempo. As primeiras tentativas de descrever matematicamente a dinâmica das populações remontam aos séculos XVIII e XIX. O conceito de crescimento populacional teve início com o economista Thomas Robert Malthus (1766–1834), que publicou a obra *An Essay on the Principle of Population* [13]. Nela, defendia que a taxa de variação do crescimento de uma população é proporcional ao tamanho da própria população em determinado instante. Isso implica que a população cresce de forma exponencial ao longo do tempo.

No modelo de Malthus, a taxa de crescimento populacional é considerada constante. Isso significa que, se essa taxa for positiva, a população tende a crescer de forma ilimitada; por outro lado, se for negativa, a população decresce progressivamente até a extinção. Assim, as previsões baseadas no modelo malthusiano indicavam um crescimento populacional acelerado em curtos intervalos de tempo, sem considerar fatores limitantes como recursos naturais, doenças ou políticas de controle populacional. As previsões baseadas no modelo malthusiano indicavam um crescimento populacional acelerado em curtos intervalos de tempo[2] [12]. Partindo do pressuposto de que o modelo de crescimento de Malthus não era adequado para explicar a expansão demográfica de um país, P. F. Verhulst (1804-1849) elaborou considerações complementares às enunciações propostas por Malthus; Verhulst compreendia que uma população não poderia crescer indefinidamente, uma vez que existem inibições naturais ao seu crescimento, tais como guerras, epidemias, escassez de alimentos, entre outros fatores. Segundo Verhulst, o crescimento populacional possui necessariamente

um limite constante, à medida que o tempo avança. [14][15]

Embora os modelos de Malthus e Verhulst tenham se concentrado exclusivamente na dinâmica de uma única população e seus limites naturais de crescimento, eles não contemplavam as interações entre diferentes espécies. Nesse sentido, as contribuições de A. Lotka (1880–1949) e V. Volterra (1860–1940) surgem como um avanço significativo, ao proporem, de forma independente, um modelo que considera a relação entre presas e predadores. Propuseram, de forma independente, em 1925 e 1926, seus trabalhos introduziram um sistema de equações diferenciais capaz de descrever a dinâmica entre duas populações interdependentes, marcando uma nova etapa nos estudos de ecologia matemática. O modelo de Volterra, em particular, foi inspirado pela observação do comportamento de espécies marinhas no Mar Adriático, durante a Primeira Guerra Mundial. Paralelamente, o químico e matemático A. Lotka desenvolveu um modelo para descrever reações químicas nas quais as concentrações dos elementos oscilavam[16], um processo análogo à dinâmica de populações em interação, como no caso de espécies em competição. Esses modelos, posteriormente denominados modelos de Lotka-Volterra, serviram de base para a formulação de modelos matemáticos aplicados ao estudo da dinâmica de sistemas do tipo predador-presa.

No estudo da dinâmica de populações, destacam-se dois exemplos clássicos de interação entre espécies [1] (I) a competição, na qual duas populações disputam por um recurso comum, geralmente alimento; e (II) a relação do tipo presa-predador, na qual uma espécie atua como predadora, alimentando-se da outra, enquanto a espécie presa consome recursos distintos, geralmente vegetais ou outros alimentos disponíveis no meio. O modelo de Lotka-Volterra, também conhecido como modelo presa-predador, foi desenvolvido especificamente para descrever a dinâmica desse segundo tipo de interação biológica, ou seja, entre predadores e presas. [1] [10]

Uma vez definido o modelo matemático, o passo seguinte consiste em determinar sua solução. Esse processo pode ser realizado por meio de métodos analíticos, numéricos ou computacionais. Neste trabalho, são apresentados os métodos analíticos utilizados para obter a solução das equações diferenciais, nas quais a função incógnita

depende de uma única variável independente; essas equações são denominadas equações diferenciais ordinárias (EDO). Compreender e saber resolver essas equações é fundamental para interpretar corretamente a dinâmica das populações envolvidas, prever comportamentos ao longo do tempo e validar a coerência teórica do modelo diante de situações reais. Assim, este trabalho busca ratificar a relevância da matemática como ferramenta de análise em sistemas ecológicos, promovendo uma compreensão mais profunda das interações entre espécies. O interesse pelo tema surgiu da percepção de que os modelos matemáticos aplicados à biologia não apenas traduzem fenômenos naturais com precisão, mas também permitem prever cenários e embasar decisões nas áreas ambiental, entre outras.

Para facilitar a compreensão, este trabalho foi estruturado em quatro capítulos. No Capítulo 1, são abordadas as equações diferenciais ordinárias (EDOs), incluindo sua classificação, formas de solução e aplicação na dinâmica populacional, com destaque para os modelos de Malthus e Verhulst. O Capítulo 2 trata do modelo de Lotka-Volterra, apresentando o sistema de equações de primeira ordem que descreve a interação entre presas e predadores, bem como suas propriedades dinâmicas e pontos de equilíbrio. O Capítulo 3 traz os resultados e a discussão, apresentando gráficos referentes ao comportamento de presas e predadores. Por fim, são apresentadas as considerações finais, destacando as contribuições do estudo e possíveis extensões futuras.

Capítulo 1

Equações Diferenciais e Dinâmica Populacional

A dinâmica populacional estuda como as populações evoluem ao longo do tempo, analisando os fatores que influenciam seu crescimento, estabilidade ou declínio. Essa área do conhecimento é de fundamental importância, pois permite compreender e prever o comportamento de grupos biológicos, humanos ou animais em diferentes contextos — ambientais, sociais e econômicos [12]. Estudamos a dinâmica populacional porque ela nos ajuda a responder perguntas cruciais: Como será a população de uma cidade nos próximos anos? Em que condições uma espécie pode entrar em extinção? Ao buscar essas respostas, desenvolvemos modelos matemáticos capazes de simular situações reais com base em dados observáveis[12]. Esses modelos, por sua vez, exigem ferramentas matemáticas que descrevam a variação de uma grandeza ao longo do tempo. É nesse ponto que surgem as equações diferenciais ordinárias (EDOs) — expressões fundamentais para representar matematicamente o comportamento dinâmico de sistemas populacionais.

Assim, neste capítulo, introduziremos as equações diferenciais ordinárias, explorando sua definição, classificação e principais métodos de resolução, com base em sua aplicação na modelagem de fenômenos como o crescimento populacional.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são fundamentais para a modelagem e análise de uma vasta variedade de fenômenos naturais e tecnológicos. Estas equações, que estabelecem relações entre funções e suas derivadas, são essenciais para descrever como sistemas evoluem ao longo do tempo ou em relação a outras variáveis. A forma geral de uma EDO pode ser expressa como $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, onde $y^{(n)}$ é a derivada de ordem n da função incógnita de y em relação a x , e f é uma função que relaciona a variável independente x , a função incógnita y e suas derivadas.

Para fundamentar teoricamente o estudo das EDOs ao longo deste trabalho, utilizaremos como principais referências as obras de dois autores amplamente reconhecidos na literatura matemática. A primeira é Dennis G. Zill, com o livro *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications* (10^a ed., 2012)[17], que se destaca por sua abordagem didática e prática. A segunda é a obra clássica de William E. Boyce e Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*[1], que oferece uma abordagem abrangente e rigorosa das EDOs, aliando teoria e métodos de resolução com exemplos aplicados. Essas duas referências serão constantemente utilizadas para embasar os conceitos, classificações e técnicas de resolução apresentados ao longo deste estudo.

1.1.1 Classificação

Dado o papel central das equações diferenciais ordinárias (EDOs) na modelagem de fenômenos dinâmicos, torna-se necessário compreendê-las não apenas em termos de aplicação, mas também em sua estrutura matemática. Dentre as EDOs, é possível estabelecer uma classificação com base em critérios como a ordem da equação e sua linearidade. Essa distinção é essencial tanto para a escolha do método de resolução mais adequado quanto para a compreensão do comportamento das soluções. Neste tópico, serão abordadas duas classificações fundamentais das EDOs: uma referente à sua ordem, e outra relacionada à sua linearidade[17].

i) **Quanto à ordem:** A ordem de uma EDO corresponde à ordem da derivada mais elevada que aparece na equação. Por exemplo, se a derivada de ordem n for a de maior ordem presente, então a EDO é de ordem n .

Exemplo 1.1. $y'' + 3y' + 6y = \text{sen}x$, a equação tem ordem 2.

Exemplo 1.2. $(y'')^3 + 3(y')^{10} + 6y = \text{tg}x$, a equação também tem ordem 2.

ii) **Quanto à linearidade:** Uma equação diferencial ordinária (EDO) é denominada linear quando a função incógnita e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, ou seja, não estão elevadas a potências, multiplicadas entre si ou aplicadas a funções não lineares. Caso contrário, a equação é classificada como não linear. Por exemplo, uma EDO linear de ordem n pode ser representada na forma geral n é:

$$a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \dots + a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} = h(x) \quad (1.1)$$

Exemplo 1.3. $m\frac{d^2y}{dt^2} + y\frac{dy}{dt} + kx = F\cos(wx) \Rightarrow$ Classificada como linear.

Exemplo 1.4. $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{sen}(\theta) = 0 \Rightarrow$ Classificada como não linear.

1.1.2 Solução

A solução de uma equação diferencial é toda função $y = f(x)$ que satisfaz a equação. A solução geral é uma função $y = f(x, C)$ onde C é uma constante arbitrária, que satisfaz a equação diferencial. Uma solução particular da equação é aquela obtida da equação geral, atribuindo um valor para C . Este valor está relacionado com a condição inicial dada. Ou seja, qualquer que seja a condição inicial $y(x_0) = y_0$ encontramos um C tal que $y = f(x, C)$ satisfaz esta condição.

Problema de valor inicial

O problema:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

é chamado de **problema de valor inicial (P.V.I.)**. Sua solução é uma função $y(x)$ definida no intervalo, tal que $y(x_0)$ e sua derivada, também estão definidos nesse intervalo.

Exemplo 1.5. Dada a equação diferencial

$$y' + 2y^2 = 0. \quad (1.3)$$

Podemos observar que $y(x) = \frac{1}{2x}$ satisfaz a equação (1.3).

Exemplo 1.6. Vamos encontrar a solução do P.V.I:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = e^{3x} \\ y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e}{3} \end{cases}$$

A solução geral da equação $\frac{dy}{dx} = e^{3x}$ é o conjunto de todas as primitivas da função $f(x) = e^{3x}$, ou seja,

$$y(x) = \int e^{3x} dx + C = \frac{e^{3x}}{3} + C.$$

Substituindo-se o valor de $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{e}{3}$ na solução geral, obtemos

$$\frac{e}{3} = \frac{e^{3 \cdot \frac{1}{3}}}{3} + C \Rightarrow e = e + C \Rightarrow C = 0.$$

Assim, a solução do P.V.I. é

$$y(x) = \frac{e^{3x}}{3}.$$

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias de 1^a ordem

Definição 1. Uma equação diferencial de primeira ordem contém somente a primeira derivada $y' = \frac{dy}{dx}$ possivelmente y e alguma função de x , isto é, uma equação do tipo:

$$y' = f(x, y). \quad (1.4)$$

1.2.1 Método de solução: Separação de variáveis

Uma EDO de 1ª ordem é dita separável quando for possível escrevê-la nos seguintes casos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \text{com} \quad g(y) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

A fim de resolvê-la, vamos escrever na forma $g(y)dy = f(x)dx$ cuja integração fornece

$$\int g(y)dy = G(y) = \int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1.5)$$

onde C é uma constante de integração. $F(x)$ e $G(y)$ são denominadas primitivas de $f(x)$ e $g(y)$, respectivamente.

Exemplo 1.7. Dada a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \quad (1.6)$$

A equação (1.6) pode ser escrita da forma: $ydy = xdx$. Por integração:

$$\begin{aligned} \int ydy &= \int xdx \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + c_1 \\ y^2 - x^2 &= C. \end{aligned}$$

1.2.2 EDO Linear de 1ª ordem

Definição 2. Considere uma equação diferencial da forma $y' = F(x, y)$. Se a função $f)$ for linear em relação á variável dependente y , então ela pode ser reescrita como:

$$f(x, y) = -p(x)y + q(x),$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas definidas em um intervalo aberto $\alpha < x < \beta$.

Substituindo essa expressão na equação original, temos:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (1.7)$$

equação esta que representa a forma padrão de uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Fator integrante

Por vezes, uma equação diferencial não se apresenta de forma imediatamente resolvível. No entanto, há casos em que é possível transformá-la em uma equação exata, multiplicando todos os seus termos por uma função auxiliar chamada **fator integrante**. Esse método é amplamente utilizado na resolução de equações diferenciais lineares de primeira ordem da forma [1]. A ideia do fator integrante consiste em multiplicar ambos os lados da equação por uma função $\mu(x)$, cuidadosamente escolhida, de forma que o lado esquerdo da equação se transforme na derivada do produto $\mu(x)y(x)$. Ou seja:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x) \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)q(x). \quad (1.9)$$

Com isso, podemos integrar ambos os lados da equação facilmente:

$$\int \frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] dx = \int \mu(x)q(x) dx. \quad (1.10)$$

Vamos considerar equações da forma (1.7).

Seja $u(x) = e^{\int p(x)dx}$. Vamos mostrar que $u(x)$ é um fator integrante: Observe que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= e^{\int p(x)dx} \frac{d}{dx} \left(\int p(x)dx \right) \\ &= e^{\int p(x)dx} p(x) = u(x)p(x), \end{aligned} \quad (1.11)$$

Multiplicando a equação (1.7) por $u(x)$:

$$u(x)\frac{dy}{dx} + u(x)p(x)y = q(x)u(x).$$

Mas como, pela equação (1.11), $u(x)p(x) = \frac{du}{dx}$, temos:

$$u(x)\frac{dy}{dx} + \frac{du}{dx}y = q(x)u(x).$$

Porém, observamos que o lado esquerdo desta equação é a derivada de um produto que pode ser reescrito como:

$$\frac{d}{dx}(u(x)y(x)) = q(x)u(x).$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$u(x)y(x) = \int (q(x).u(x))dx + C.$$

Supondo $u(x) \neq 0$, $y(x)$ pode ser obtido, pela seguinte expressão:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} \left(\int q(x).u(x)dx + C \right) \quad (1.12)$$

Mas como chegamos no fator integrante $u(x)$?

Note que

$$\begin{aligned} y'.u(x) + p(x).u(x).y &= (u(x).y(x))' \\ y'(x).u(x) + p(x).u(x).y(x) &= u'(x).y(x) + u(x).y'(x) \\ \frac{u'(x)}{u(x)} = p(x); \quad u'(x) &= \frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{u(x)} = p(x) \Rightarrow \frac{du}{u(x)} &= p(x)dx \\ \ln(u(x)) &= \int p(x)dx \\ u(x) &= e^{\int p(x)dx}. \end{aligned}$$

1.3 Dinâmica populacional

O estudo da dinâmica populacional analisa a variação na quantidade de indivíduos ao longo do tempo, considerando fatores biológicos, ambientais e sociais.

Aplica-se na compreensão das interações entre espécies, no manejo de populações ameaçadas, no controle de pragas na agricultura e na análise de dados populacionais humanos, auxiliando no planejamento e na tomada de decisões.

Definindo os conceitos da dinâmica populacional.

População: Um agrupamento de indivíduos da mesma espécie.

Taxa de Natalidade: É o valor absoluto de nascimento em uma população, em um determinado intervalo de tempo.

Taxa de Mortalidade: É o valor absoluto de mortes em uma população, em um determinado intervalo de tempo.

Taxa de Crescimento: É o valor dado pela diferença entre a taxa de natalidade e a taxa de mortalidade.

1.3.1 Modelo de Malthus

Agora que compreendemos o conceito de equações diferenciais ordinárias (EDOs) e alguns de seus métodos de resolução, podemos analisar como essas ferramentas matemáticas foram aplicadas em modelos reais. Um exemplo clássico é o modelo proposto por Thomas Malthus desenvolveu um modelo matemático para analisar o crescimento populacional, sendo considerado um dos precursores da demografia — ciência que estuda a dinâmica das populações. O modelo malthusiano baseia-se no princípio de que a taxa de crescimento populacional, em determinado instante, é diretamente proporcional ao tamanho da própria população nesse mesmo momento.

Seja N a variável que indica a quantidade de uma população. Então $N(t)$ é a função que permite calcular o número de indivíduos da população no instante t , $t > 0$. Tem-se ainda $N(0) = N_0$ indicando o ponto de partida para o estudo da população, ou seja, o número de indivíduos no instante em que se começara fazer a análise.

Para o crescimento de uma população têm-se os seguintes fatores:

- A população aumenta devido ao nascimento e diminui devido às mortes;

• A população aumenta quando novos indivíduos chegam (processo de imigração) e diminui quando indivíduos residentes partem (processo de emigração).

Consideremos as variáveis A , D , I e E , onde:

- B é o número de nascimentos;
- D é o número de mortes;
- I é o número de imigrantes;
- E é o número de emigrantes;

Considerando o intervalo de tempo $(t, t + 1)$ e $\Delta N = N(t + 1) - N(t)$, onde ΔN é a variação da população. Então,

$$\Delta N = (B - D) + (I - E) \quad (1.13)$$

Para uma população fechada, isto é, para $I = E = 0$, tem-se:

$$N(t + 1) = N(t) + (B - D). \quad (1.14)$$

Para um tempo t pequeno, a função $N(t)$ é contínua. Então, a taxa de variação instantânea da população é dada por:

$$\frac{dN}{dt} = B - D. \quad (1.15)$$

Fazendo $B = bN$ e $D = dN$, onde b e d são, respectivamente, as taxas instantâneas de nascimento e mortalidade, tem-se:

$$\frac{dN}{dt} = (b - d)N, \quad (1.16)$$

chamando $r = b - d$ segue a equação:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad \text{com } r = b - d, \quad (1.17)$$

Se $r > 0$, então é chamada de taxa de crescimento. Caso $r < 0$, então r será chamado de taxa de declínio. Suponhamos que $r > 0$, de modo que a população está crescendo. Teremos,

Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Resolvendo este PVI usando separação de variáveis, tem-se:

$$\frac{dN}{N} = r dt. \quad (1.19)$$

Integrando em ambos os lados:

$$\int \frac{dN}{N} = \int r dt. \quad (1.20)$$

o que implica em,

$$\ln |N| = rt + k. \quad (1.21)$$

Se $N > 0$,

$$N = e^{rt+k}. \quad (1.22)$$

logo,

$$N = e^{rt} \cdot e^k \quad (1.23)$$

Fazendo $C = e^k$, segue que a solução geral da equação é,

$$N(t) = C e^{rt}. \quad (1.24)$$

Sujeitando a condição inicial $N(0) = N_0$ encontra-se $C = N_0$.

A solução do PVI é,

$$N(t) = N_0 e^{rt}. \quad (1.25)$$

Uma análise da solução de PVI:

- Se $r > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$ ou seja, a população cresce de forma ilimitada;

- Se $r < 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0$ ou seja, a população sofre uma taxa de declínio;
- Se $r = 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = N_0$ ou seja, a população se mantém constante.

Assim, o modelo formulado como um Problema de Valor Inicial (PVI), sob condições ideais, apresenta resultados razoavelmente precisos para diversas populações, pelo menos em intervalos de tempo limitados. Contudo, é evidente que tais condições não se mantêm indefinidamente; inevitavelmente, fatores naturais como a limitação de espaço, a escassez de alimentos ou de outros recursos atuam na redução da taxa de crescimento, interrompendo o padrão de crescimento exponencial ilimitado.

Para um tempo t muito muito grande, tem-se o modelo discreto:

$$\Delta N = r_d N \quad (1.26)$$

onde r_d é a taxa de crescimento populacional discreto.

Logo, chega-se a seguinte equação:

$$N(t+1) = (1 + r_d) \cdot N(t), \quad (1.27)$$

chamamos $\lambda = 1 + r_d$, encontramos a equação,

$$N(t+1) = \lambda \cdot N(t), \quad (1.28)$$

esta equação sujeita à condição inicial $N(0) = N_0$, tem como solução do modelo discreto,

$$N(t) = \lambda^t \cdot N_0. \quad (1.29)$$

1.3.2 Modelo de Verhulst

Verhulst modificou o modelo de Malthus de tal forma que a população cresceria até atingir um limite máximo suportado pelo ambiente, tendendo, assim, à estabilização. Para isso, ele substituiu r na equação (1.17) por uma função h , obtendo:

$$\frac{dN}{dt} = h(N)N. \quad (1.30)$$

A função mais simples que tem a propriedade na qual $h(N) \cong r > 0$ quando N é pequeno. $h(N)$ diminui quando N aumenta e $h(N) < 0$ quando N é suficientemente grande, é dada por [1],

$$h(N) = r - \frac{rN}{K}. \quad (1.31)$$

onde a é uma constante positiva.

Substituindo a equação (1.31) na equação (1.30), obtemos,

$$\frac{dN}{dt} = \left(r - \frac{rN}{K} \right) N. \quad (1.32)$$

Logo a equação (1.31) é conhecida como equação logística.

Reescrevendo a equação, chegamos em:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) \quad (1.33)$$

onde r é chamada de taxa de crescimento intrínseca, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador; e K é o nível de saturação ou capacidade de sustentação ambiental.

Usando a separações de variáveis para resolver a equação, tem-se,

$$\frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K} \right)} = r dt \quad (1.34)$$

$$\int \frac{dx}{\left(1 - \frac{N}{K} \right)} = \int r dt. \quad (1.35)$$

Para resolver a integral presente no lado esquerdo da igualdade, utilizaremos o método de frações parciais. Inicialmente, iremos desenvolver a expressão:

$$\frac{1}{N \left(1 - \frac{N}{K} \right)} = \frac{1}{\left(N - \frac{N^2}{K} \right)} = \frac{1}{\left(\frac{KN - N^2}{K} \right)} = \frac{K}{KN - N^2} = \frac{K}{N(K - N)}, \quad (1.36)$$

e então pelas frações parciais,

$$\frac{K}{N(K - N)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K - N}, \quad (1.37)$$

assim integrando ambos os lados,

$$\int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} \right) dN = \int r dt \quad (1.38)$$

$$\int \frac{1}{N} dN + \int \frac{1}{K-N} dN = \int r dt \quad (1.39)$$

$$\ln |N| + (-\ln |K-N|) = rt + C \quad (1.40)$$

$$\ln |N| - \ln |K-N| = rt + C. \quad (1.41)$$

Utilizando a propriedade de logaritmo,

$$\ln \left| \frac{N}{K-N} \right| = rt + C \quad (1.42)$$

$$\ln \left| \frac{K-N}{N} \right| = -rt - C, \quad (1.43)$$

então pela definição de logaritmo,

$$\left| \frac{K-N}{N} \right| = e^{-rt-C} = e^{-rt} \cdot e^{-C}. \quad (1.44)$$

Explicitando N :

$$\frac{K-N}{N} = \frac{K}{N} + \frac{-N}{N} = \frac{K}{N} - 1 = Ze^{-rt}, \quad (1.45)$$

assim:

$$\frac{K}{N} = Ze^{-rt} + 1, \quad (1.46)$$

e temos a solução geral:

$$X = \frac{K}{Ze^{-rt} + 1}, \quad (1.47)$$

onde $Z = \pm e^{-C}$.

Para achar o valor de Z , lembramos que $N = N_0 = N(0)$ Assim, quando $t = 0$, temos:

$$\frac{K - N_0}{N_0} = Ze^0 = Z, \quad (1.48)$$

então temos como solução geral:

$$N(t) = \frac{K}{\left(\frac{K - N_0}{N_0} \right) e^{-rt} + 1}. \quad (1.49)$$

Como podemos ver, quando t vai para o infinito, a solução geral converge para K .

Capítulo 2

Modelo de Lotka-Volterra

No intuito de entendermos a dinâmica comportamental dada pelo modelo presa-predador, o modelo Lotka-Volterra, precisamos dos conceitos e propriedades de um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. Pois a análise do modelo Lotka-Volterra é baseada no estudo dos modelos lineares. Nesse sentido, é importante observar que, assim como os modelos de Malthus e Verhulst utilizam equações diferenciais de primeira ordem para descrever a evolução temporal de uma única população, o modelo de Lotka-Volterra amplia essa abordagem para considerar a interação entre duas espécies — a presa e o predador. Para tanto, utiliza-se um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

2.1 Sistema de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem linear

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem linear é um sistema da forma:

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x)\end{aligned}$$

onde cada função $a_{ij}(x)$ é conhecida e cada função y_i é uma função incógnita.

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Ou ainda, adotando a notação vetorial, temos:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \text{ e } \frac{d}{dx}Y = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

que nos fornece a seguinte notação vetorial:

$$\frac{d}{dx}Y = AY + F. \quad (2.3)$$

No caso, se $F = 0$, a equação vetorial (2.3) é chamada de sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem linear homogênea, denotado da forma:

$$\frac{d}{dx}Y = AY. \quad (2.4)$$

O caso particular, em que os coeficientes da matriz A são constantes, temos em (1), um sistema de EDO's de primeira ordem linear com coeficientes constantes. Além disso, se $F = 0$ temos que este sistema é homogêneo.

A priori, vamos estudar sistemas de EDO's de primeira ordem, onde os coeficientes da matriz A são constantes. Utilizando a mesma metodologia adotada para EDO's lineares, ou seja, vamos procurar soluções do sistema homogêneo associado, em seguida, encontrar uma solução particular do sistema.

2.1.1 Sistema homogêneo com coeficientes constantes

Um sistema homogêneo com coeficientes constantes é todo sistema da forma,

$$\frac{d}{dx}Y = AY \quad (2.5)$$

onde,

$$\frac{dY}{dx} = \begin{bmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Observamos que uma solução para esse sistema, é a solução trivial,

$$Y = O, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Com o objetivo de obtermos soluções não triviais para o sistema, vamos utilizar as definições e propriedades apresentadas em álgebra linear de autovalores, autovetores e diagonalização de operadores. Entretanto, antes apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1. Dado o sistema de equações diferenciais.

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) + 5y(t), \end{cases}$$

temos que,

$$x(t) = -e^{2t} \text{ e } y(t) = 2e^{2t},$$

correspondem a uma solução do sistema de equações diferenciais. Ou seja,

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix},$$

é vetor solução do sistema de equações diferenciais. Outro vetor solução é:

$$\bar{Y}(t) = \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix},$$

De forma resumida, o sistema linear dado pela equação (2.5), representa uma transformação linear, em que a matriz dessa transformação é definida por A . Por este ponto de vista, o primeiro passo a ser tomado, consiste na diagonalização dessa matriz utilizando a teoria dos autovalores e autovetores.

- Dizemos que uma matriz A de ordem n é diagonalizável, se existem matrizes P e D tais que

$$A = PDP^{-1}, \quad (2.6)$$

em que D é uma matriz diagonal.

- Se a matriz A de ordem n é diagonalizável, então ela possui n autovalores linearmente independentes (LI) V_1, V_2, \dots, V_n , com seus respectivos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, **a recíproca também é verdadeira**. Ainda, P é a matriz que possui suas colunas definidas pelos autovetores, ou seja, $P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n]$ e os elementos da diagonal da matriz D são definidos pelos respectivos autovalores.

Exemplo 2.2. Encontre a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Solução: Inicialmente, vamos calcular os autovalores e autovetores da matriz A .

Cálculo dos autovalores: De modo geral dada a matriz A , o cálculo dos autovetores é dado pela seguinte equação:

$$Au = \lambda u = \lambda Iu, \quad (2.7)$$

podemos reescrever a equação (2.7) da forma a seguir:

$$Au - \lambda Iu = (A - \lambda I)u = O. \quad (2.8)$$

Isso significa que para reescrever a equação matricial (2.7) para equação (2.8), deve-se subtrair o parâmetro λ dos elementos da diagonal da matriz A .

Exemplo 2.3. No nosso exemplo, temos que A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

e a matrix $(A - \lambda I)$, portanto, é da forma:

$$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Como o sistema é homogêneo, ele possui pelo menos uma solução, que é a trivial, como desejamos soluções não triviais, o sistema de equações definido por

$$(A - \lambda I)u = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

deve ser indeterminado, o que é caracterizado pelo determinante da matriz sendo 0, ou seja,

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (2.12)$$

que nos fornece a equação:

$$(1 - \lambda)^2 - 9 = 0, \quad (2.13)$$

conhecida como **polinômio característico**. Portanto, os autovalores são as raízes do polinômio característico.

As raízes da equação (2.13) são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$. Logo, esses são os autovalores da matriz A .

Cálculo dos autovetores da matriz A : Vamos calcular os autovetores associados a $\lambda_1 = -2$. Podemos proceder de dois modos: o primeiro é considerar a equação matricial,

$$Au = \lambda u \Rightarrow Au = -2u. \quad (2.14)$$

O Segundo caso é considerar a equação matricial,

$$(A - \lambda I)u = O \Rightarrow (A + 2I)u = O. \quad (2.15)$$

Para resolução do problema vamos considerar a equação (2.15).

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

que nos fornece a relação $3x(t) + 3y(t) = 0$, o que implica $y(t) = -x(t)$.

Agora, lembramos que o o vetor $u(t)$ é escrito da forma:

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

que corresponde ao autovetor que buscamos.

Vamos calcular o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 4$. Novamente, aplicamos agora o valor de λ_2 , na equação (2.15):

$$(A - \lambda I)v = O \Rightarrow (A - 4I)v = O. \quad (2.18)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 3 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

que nos fornece a relação $-3x(t) + 3y(t) = 0$, o que implica $y(t) = x(t)$.

Novamente o vetor v é escrito da forma:

$$v(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

que corresponde ao segundo autovetor.

Pelo processo de diagonalização, temos que:

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow P^{-1}A = DP^{-1}.$$

Podemos dessa forma escrever o sistema de equações diferenciais do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y &= AY \\ \frac{d}{dt}Y &= PDP^{-1}Y \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$P^{-1} \frac{d}{dt}Y = P^{-1}PDP^{-1}Y \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt}P^{-1}Y = DP^{-1}Y \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{Y} = D\bar{Y}. \quad (2.24)$$

onde $\bar{Y} = P^{-1}Y$. A equação (2.24) significa que o sistema de equações diferenciais teve uma mudança de coordenadas, onde obtemos uma “nova” matriz para o sistema de equações, que é definida agora pela matriz diagonal formada pelos autovalores, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Da equação (2.25), obtemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\bar{x}(t) \\ \frac{d}{dt}\bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\bar{x}(t) \\ 4\bar{y}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

de onde obtemos duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = -2\bar{y}(t) \quad (2.27)$$

e

$$\frac{d}{dt}\bar{y}(t) = 4\bar{y}(t), \quad (2.28)$$

cujas soluções gerais são $\bar{x}(t) = c_1e^{-2t}$ e $\bar{y}(t) = c_2e^{4t}$. Apesar de ter encontrado a solução geral do sistema de equações, temos que a solução encontrada é definida no sistema de coordenada novo. Ou seja,

$$\bar{Y}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-2t} \\ c_2e^{4t} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Para voltar ao sistema de coordenadas inicial, usamos a definição anterior:

$$\bar{Y} = P^{-1}Y \Rightarrow P\bar{Y} = PP^{-1}Y \Rightarrow Y = P\bar{Y}.$$

em que P é a matriz dos autovetores encontrados. Portanto, a solução geral é dada por:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{-2t} \\ c_2e^{4t} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Essa equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1c_1e^{-2t} + 1c_2e^{4t} \\ -1c_1e^{-2t} + 1c_2e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1c_1e^{-2t} \\ -1c_1e^{-2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1c_2e^{4t} \\ 1c_2e^{4t} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

2.2 Sistemas Autônomos no Plano

Abordamos a análise qualitativa de sistemas dinâmicos autônomos no plano, com ênfase no estudo do comportamento das soluções sem a necessidade de encontrar expressões explícitas para elas. O objetivo é compreender as propriedades geométricas e dinâmicas das trajetórias por meio das equações que as regem.

Consideramos sistemas diferenciais da forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases} \quad (2.33)$$

Nos quais as funções f e g não dependem explicitamente da variável temporal x e y t , caracterizando um sistema autônomo. As soluções desse sistema correspondem a curvas parametrizadas no plano x, y , chamadas órbitas, que seguem a direção determinada pelo campo vetorial $f(x, y), g(x, y)$. Em outras palavras, as trajetórias são tangentes ao campo vetorial em todos os pontos.

2.2.1 Pontos de Equilíbrio ou Singularidades

Pontos de equilíbrio, também chamados de pontos singulares, são aqueles onde o campo vetorial se anula, ou seja, quando:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y). \end{cases} \quad (2.34)$$

Nesses pontos, as soluções do sistema permanecem constantes no tempo, ou seja, o sistema não evolui. Eles desempenham um papel central na análise qualitativa, sendo os principais candidatos para o estudo de estabilidade local e comportamento assintótico.

Agora, consideraremos a equação não linear de 2º ordem. Com objetivo de

estudar o plano de fase de um sistema dinâmico bidimensional. Para isso, será necessário determinar os pontos de equilíbrio:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 8x \frac{d^2x}{dt^2} = 0. \quad (2.35)$$

Resolvendo,

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (2.36)$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 8xy. \end{cases} \quad (2.37)$$

Sendo assim, para obtermos as soluções de equilíbrio, fazemos:

$$f(x, y) = y = 0 \quad \text{e} \quad g(x, y) = 8xy = 0. \quad (2.38)$$

A solução dessas expressões indica que $x(t)$ constante e $y(t) = 0$ representam as soluções de equilíbrio, ou seja, todos os pontos situados sobre o eixo- x são pontos de equilíbrio do sistema.

Para encontrar as demais soluções, admite-se que a variável $x = x(t)$ seja invertível, possibilitando obter t em função de x , isto é, $t = t(x)$. Assim, deduz-se que:

$$\frac{dy}{dx} = 8x. \quad (2.39)$$

A solução dessa equação diferencial ordinária é:

$$y(x) = 4x^2 + c. \quad (2.40)$$

2.3 O Sistema Linear de ordem 2

Nesta seção vamos apresentar uma análise mais detalhada do sistema linear no caso de ordem 2, para usarmos no modelo presa-predador, que vamos desenvolver adiante. Considere um sistema linear de equações diferenciais ordinárias de primeira

ordem, composto por duas variáveis dependentes, $x(t)$ e $y(t)$. Este sistema descreve a variação conjunta dessas variáveis ao longo do tempo e é amplamente utilizado na modelagem de fenômenos físicos, biológicos, econômicos e de engenharia. A forma geral desse sistema pode ser expressa por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by, \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \quad (2.41)$$

O que equivale a dizer que $ad - bc \neq 0$. Para simplificar a notação, introduzimos o vetor X e a matriz A :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Assim, o sistema pode ser reescrito na forma matricial:

$$\frac{dX}{dt} = AX. \quad (2.43)$$

Esse sistema remete à equação diferencial linear do tipo:

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (2.44)$$

cuja solução geral é conhecida:

$$x(t) = ce^{at}. \quad (2.45)$$

Inspirando-se nessa solução, propõe-se buscar uma solução para o sistema na forma:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t}, \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t}, \end{cases} \quad \text{ou, de modo equivalente,} \quad X(t) = C e^{\lambda t}. \quad (2.46)$$

Substituindo essa solução na equação $\frac{dX}{dt} = AX$, obtemos:

$$\lambda C e^{\lambda t} = A C e^{\lambda t} \Rightarrow (A - \lambda I)C = 0. \quad (2.47)$$

Ou seja, temos um sistema homogêneo:

$$\begin{cases} (a - \lambda)c_1 + bc_2 = 0, \\ cc_1 + (d - \lambda)c_2 = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Para que existam soluções não triviais ($c_1, c_2 \neq 0$), o determinante da matriz dos coeficientes deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.49)$$

O que resulta no polinômio característico:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (2.50)$$

As raízes desse polinômio, ou seja, os valores de λ , são os autovalores da matriz A . Com isso, a análise qualitativa do sistema pode ser conduzida a partir da natureza desses autovalores.

Dependendo do discriminante:

$$\Delta = (a - d)^2 + 4bc, \quad (2.51)$$

a matriz pode ser transformada, por meio de uma mudança de variáveis, em uma das seguintes formas canônicas (Forma de Jordan para matrizes 2×2).

2.3.1 Casos de Matrizes e Autovalores

Caso 1: Com dois autovalores reais distintos:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \lambda \neq \mu. \quad (2.52)$$

Caso 2: Com autovalor real duplo e matriz diagonalizável:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Caso 3: Com autovalor real duplo e matriz não diagonalizável:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

Caso 4: Com autovalores complexos conjugados:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

A Álgebra Linear garante que, com uma matriz de mudança de base Q , existe uma matriz B tal que

$$B = QAQ^{-1}, \quad (2.56)$$

e, assim, o sistema pode ser reescrito como

$$\frac{dY}{dt} = Q \frac{dX}{dt} = QAX = QAQ^{-1}Y = BY. \quad (2.57)$$

Com isso, o estudo da dinâmica do sistema se reduz à análise da matriz B , que pode assumir os casos citados acima.

Apresentamos, inicialmente, o **Caso 1**, no qual a matriz B é diagonal, com autovalores reais e distintos. Nesse caso, o sistema se reduz a,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x, \\ \frac{dy}{dt} = \mu y, \end{cases} \quad (2.58)$$

cuja solução geral é:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t}, \\ y(t) = c_2 e^{\mu t}, \end{cases} \quad (2.59)$$

em que c_1 e c_2 são constantes reais arbitrárias.

Considerando $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $x > 0$, é possível eliminar o parâmetro t e obter a equação da órbita no plano de fase:

$$c_1^\mu x^\mu = c_2^\lambda y^\lambda \quad \Rightarrow \quad y = c x^{\mu/\lambda}, \quad (2.60)$$

em que c é uma constante positiva.

Essa equação define uma família de curvas que dependem da razão μ/λ . As figuras a seguir ilustram as diferentes configurações dessas órbitas no plano de fase, de acordo com os valores dessa razão.

Além da forma das órbitas, a orientação das trajetórias no plano de fase depende dos sinais dos autovalores λ e μ . De acordo com os sinais desses parâmetros, temos os seguintes casos:

- **Ambos negativos** ($\lambda < 0$ e $\mu < 0$):

As soluções convergem para a origem à medida que $t \rightarrow +\infty$. A origem se comporta como um *ponto nodal estável* (ou atrator).

- **Ambos positivos** ($\lambda > 0$ e $\mu > 0$):

As soluções se afastam da origem com o tempo. A origem é um *ponto nodal*

instável (ou repulsor).

- **Sinais opostos** ($\lambda \cdot \mu < 0$):

Parte das trajetórias é atraída enquanto outra parte é repelida pela origem.

Nesse caso, temos um *ponto de sela*, caracterizado por instabilidade direcional.

Apresentamos, a seguir, o **Caso 2**, em que a matriz B possui um autovalor real duplo e é diagonalizável. Nesse contexto, o sistema linear pode ser representado por Eliminando o parâmetro t , obtemos a equação da órbita no plano de fase:

$$\frac{x}{c_1} = \frac{y}{c_2} \quad \Rightarrow \quad y = kx, \quad (2.61)$$

em que $k = \frac{c_2}{c_1}$ é uma constante real.

Portanto, as órbitas são representadas por retas que passam pela origem, cuja inclinação depende da razão entre as constantes c_2 e c_1 .

As curvas solução variam de acordo com o sinal do autovalor λ , sendo possível destacar três comportamentos principais:

- Se $\lambda > 0$, a origem é um **nó instável**. As soluções se afastam da origem ao longo das retas determinadas pela razão $\frac{y}{x}$.
- Se $\lambda < 0$, a origem é um **nó estável**. As soluções tendem à origem ao longo dessas mesmas retas.
- Se $\lambda = 0$, o sistema apresenta um **equilíbrio degenerado**. As soluções são pontos fixos no plano, ou seja, o sistema não evolui no tempo.

No **Caso 3**, consideramos a situação em que a matriz B possui um autovalor real duplo, porém não é diagonalizável. Nesse caso, o sistema linear assume a forma

$$\frac{dX}{dt} = BX, \quad \text{com} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

O sistema, escrito na forma de equações diferenciais escalares, é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x + y, \\ \frac{dy}{dt} = \lambda y. \end{cases} \quad (2.63)$$

A solução geral desse sistema é

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t}, \end{cases} \quad (2.64)$$

em que c_1 e c_2 são constantes determinadas pelas condições iniciais.

- Se $\lambda < 0$, a origem é um **nó estável não diagonalizável**. Todas as trajetórias convergem para a origem, com algumas se aproximando ao longo do eixo x (quando $c_2 = 0$) e outras seguindo trajetórias curvas com componente logarítmica (quando $c_2 \neq 0$).
- Se $\lambda > 0$, a origem é um **nó instável não diagonalizável**. As trajetórias se afastam da origem, com comportamento semelhante: algumas ao longo do eixo x e outras em direções curvas.
- Se $\lambda = 0$, o sistema apresenta um **equilíbrio degenerado com crescimento linear**. A solução cresce linearmente no tempo na direção do vetor generalizado.

No **Caso 4**, analisamos a situação em que a matriz B possui autovalores complexos conjugados. O sistema linear, nesse caso, é representado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y, \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y, \end{cases} \quad (2.68)$$

em que α e β são números reais e $\beta \neq 0$.

Para este tipo de sistema, é mais conveniente adotar coordenadas polares, por meio da seguinte mudança de variáveis:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (2.69)$$

em que r representa a distância até a origem e θ é o ângulo formado com o eixo x .

Calculando as derivadas em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad (2.70)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.71)$$

De onde se segue:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \theta + \frac{dy}{dt} \sin \theta, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \left(\frac{dy}{dt} \cos \theta - \frac{dx}{dt} \sin \theta \right). \quad (2.72)$$

A partir da conversão das equações diferenciais do sistema para coordenadas polares, obtêm-se expressões para as derivadas de r e θ , que descrevem, respectivamente, a variação da distância ao centro e do ângulo polar ao longo do tempo. As equações resultantes são:

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \beta, \quad (2.73)$$

cuja solução geral é dada por:

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0. \quad (2.74)$$

Essas expressões representam a órbita da solução em coordenadas polares, com o ponto inicial (r_0, θ_0) quando $t = 0$.

A forma da trajetória depende dos parâmetros α e β :

- Quando $\alpha = 0$, o raio permanece constante, resultando em uma trajetória circular.
- Quando $\alpha \neq 0$, a órbita assume a forma de uma espiral logarítmica. Se $\alpha < 0$, o movimento tende para a origem, caracterizando um comportamento atrator.

- O sinal de β determina o sentido de rotação: se $\beta > 0$, a espiral é sinistrógira (sentido anti-horário); se $\beta < 0$, a espiral é dextrógira (sentido horário).

2.4 Modelo Presa-Predador

O modelo teve origem na década de 1920, a partir dos estudos do biólogo marinho italiano Umberto D’Ancona. Ele realizou uma análise estatística com base em dados da comercialização de peixes nos mercados das cidades de Trieste, Fiume e Veneza, entre os anos de 1910 e 1923. Durante a Primeira Guerra Mundial (1914–1918), a atividade pesqueira foi parcialmente interrompida em regiões do Mar Adriático. A partir disso, D’Ancona observou alterações nas populações de peixes: algumas espécies apresentaram aumento em sua frequência relativa, enquanto outras sofreram redução[16]. Esses dados contribuíram significativamente para o desenvolvimento de modelos ecológicos e para a compreensão das dinâmicas populacionais. [9]

Os dados indicavam que a frequência de predadores, como os tubarões, aumentara durante os anos de guerra, reduzindo-se posteriormente com a intensificação da pesca. A abundância relativa das presas, por outro lado, apresentou um comportamento inverso. Na ocasião, U. D’Ancona, ecologista e noivo de L. Volterra — filha do renomado matemático Vito Volterra —, levou essa questão ao futuro sogro. Como resposta, V. Volterra formulou um par de equações diferenciais para descrever matematicamente o sistema predador-presa.[9]

Em 1926, V. Volterra propôs pela primeira vez um modelo simples para a predação de uma espécie por outra explicar os níveis oscilatórios de certas capturas de peixes no Adriático[16]. Se $N(t)$ é a presa população e $P(t)$ a do predador no momento t , então o modelo de V. Volterra é:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP). \quad (2.75)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cN - r). \quad (2.76)$$

onde a, b , e c são constantes positivas e $N(t)$ e $P(t)$ são respectivamente presas e predadores no tempo t .

As suposições no modelo são: (I) a presa na ausência de qualquer predação cresce sem limites de uma maneira malthusiana; esse é o termo aN na Eq.(1). (II) O efeito de predação é reduzir a taxa de crescimento per capita da presa em um prazo proporcional a populações de presas e predadores; este é o termo $-bNP$. (III) Na ausência de presas para o sustento, a taxa de mortalidade do predador resulta em decaimento exponencial, isto é, o $-rP$ termo na Eq.(2). (IV) A contribuição da presa para a taxa de crescimento dos predadores é cNP .

A determinação dos pontos de equilíbrio é dada por:

$$\begin{aligned} N(a - bP) &= 0 & a - bP &= 0 \\ N &= 0 & P &= \frac{a}{b} \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} P(cN - r) &= 0 & cN - r &= 0 \\ P &= 0 & N &= \frac{r}{c} \end{aligned} \tag{2.78}$$

Temos:

$$(N, P) = (0, 0) \text{ Trivial,}$$

$$(N^*, P^*) = \left(\frac{r}{c}, \frac{a}{b} \right).$$

Aparentemente os resultados para os pontos de equilíbrio são perceptivos, uma vez que o estado estacionário para as presas $\left(\frac{a}{b}\right)$ depende de parâmetros relativos aos predadores e o estado estacionário para os predadores $\left(\frac{r}{c}\right)$ depende de parâmetros relativos às presas.

- Quando há presas ($n \neq 0$), os predadores as mantêm sob controle quando a taxa de crescimento de presas (a) é igual à taxa de mortalidade por predação (rP);

- De modo análogo, quando há predadores ($P \neq 0$), o número de presas deve ser suficiente para fazer com que a taxa de crescimento devido à predação, (cN), seja igual à mortalidade d dos predadores, fazendo com que a população de predadores persista.

A matriz jacobiana é:

$$\begin{bmatrix} a - bP & -bN \\ cP & cN - r \end{bmatrix};$$

O Jacobiano no ponto de equilíbrio é:

$$\mathbf{J}\left(\frac{r}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} a - b\left(\frac{a}{b}\right) & -b\left(\frac{r}{c}\right) \\ c\left(\frac{a}{b}\right) & c\left(\frac{r}{c}\right) - r \end{bmatrix}; \quad (2.79)$$

$$\mathbf{J}\left(\frac{r}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} a - a & -\frac{br}{c} \\ \frac{ca}{b} & r - r \end{bmatrix}; \quad (2.80)$$

$$\mathbf{J}\left(\frac{r}{c}, \frac{a}{b}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{br}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.81)$$

Calculando os autovalores por $\det(J - \lambda I)$:

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{br}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{br}{c} \\ \frac{ca}{b} & -\lambda \end{pmatrix}; \quad (2.82)$$

$$\det(J - \lambda I) = 0; \quad (2.83)$$

$$\lambda^2 + ar = 0; \quad (2.84)$$

$$\lambda^2 = -ar; \quad (2.85)$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-ar}. \quad (2.86)$$

Como os autovalores são números imaginários conjugados, o ponto de equilíbrio é classificado como um centro. Isso significa que as trajetórias das soluções são curvas fechadas, descrevendo elipses ao redor do ponto de equilíbrio.

Capítulo 3

Resultados e Discussão

Os modelos matemáticos apresentados para a dinâmica populacional permitiram observar a evolução das populações de presas e predadores ao longo do tempo. O modelo de Lotka-Volterra foi desenvolvido analiticamente, demonstrando a existência de pontos de equilíbrio e sua estabilidade. Ao longo deste trabalho, foram realizadas simulações computacionais do modelo de Lotka-Volterra com diferentes parâmetros e populações iniciais. Esses parâmetros foram escolhidos a título de observação, com o objetivo de analisar como pequenas alterações influenciam diretamente no comportamento das populações de presas e predadores ao longo do tempo. A seguir, discutimos os resultados de cada simulação:

Gráfico 1 — Modelo Presa-Predador

- População inicial de presa: 60
- População inicial de predador: 9
- Parâmetros do modelo:

$$a = 0,1; \quad b = 0,005; \quad c = 0,003; \quad d = 0,001$$

Neste primeiro cenário, observamos oscilações amplas e bem definidas entre as populações. A taxa de crescimento da presa ($a = 0,1$) é relativamente alta, permitindo

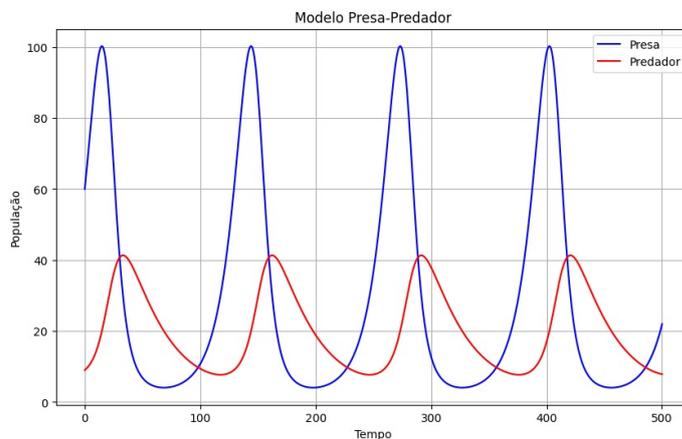


Figura 3.1: Comportamento entre Presas e Predadores.

que sua população cresça rapidamente quando há poucos predadores. Já a taxa de mortalidade do predador é baixa ($d = 0,001$), o que favorece sua persistência no sistema.

Gráfico 2 — Modelo Presa-Predador

- População inicial de presa: 60
- População inicial de predador: 9
- Parâmetros do modelo:

$$a = 0,01; \quad b = 0,005; \quad c = 0,9; \quad d = 0,01$$

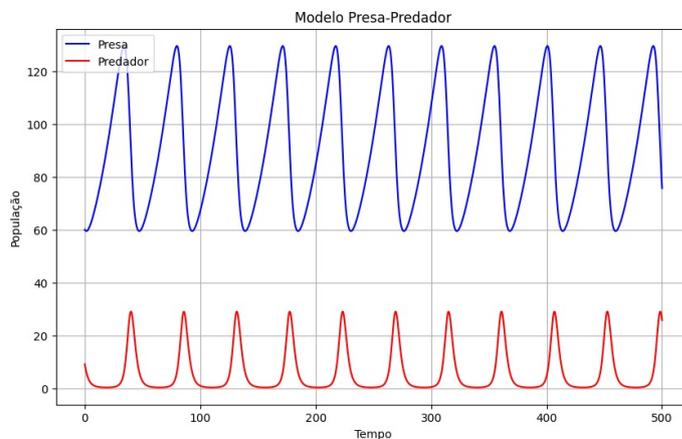


Figura 3.2: Comportamento entre Presas e predadores

Embora os Gráficos 1 e 2 apresentem as mesmas populações iniciais de presas e predadores, os parâmetros utilizados em cada simulação são distintos, o que resulta em dinâmicas populacionais diferenciadas. Neste segundo caso, a taxa de crescimento da presa foi bastante reduzida ($a = 0,01$), enquanto a taxa de conversão do predador ($c = 0,9$) foi significativamente aumentada. Como resultado, a população de presas cresce mais lentamente, e os predadores conseguem se beneficiar intensamente da sua presença.

Gráfico 3 — Modelo Presa-Predador

- População inicial de presa: 100
- População inicial de predador: 80
- Parâmetros do modelo:

$$a = 1; \quad b = 0,005; \quad c = 0,8; \quad d = 0,6$$

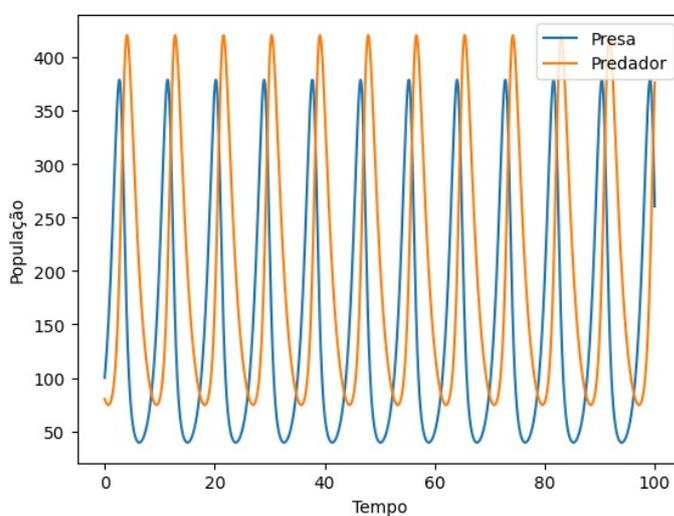


Figura 3.3: Comportamento entre Presas e Predadores

Neste cenário, tanto a taxa de crescimento da presa quanto a taxa de mortalidade do predador são bastante elevadas. Isso torna o sistema mais dinâmico, com oscilações

rápidas e intensas ao longo do tempo. A alta densidade populacional inicial também impacta o padrão observado, favorecendo picos sucessivos de crescimento e declínio.

Gráfico 4 — Modelo Presa-Predador

- População inicial de presa: 100
- População inicial de predador: 80
- Parâmetros do modelo:

$$a = 1; \quad b = 0,005; \quad c = 0,8; \quad d = 0,6$$

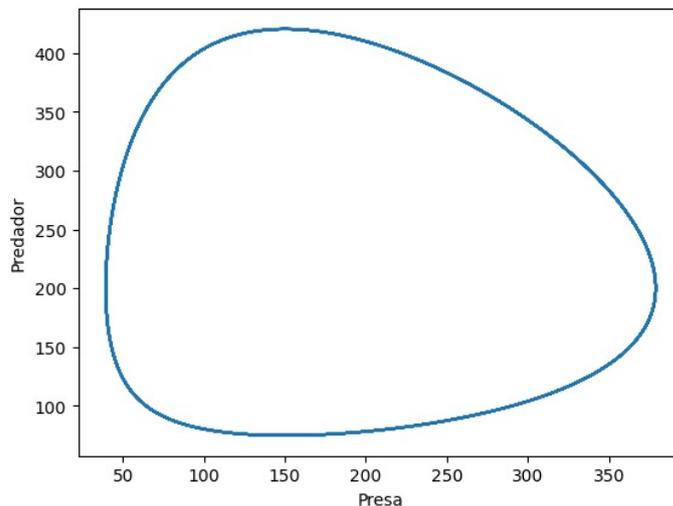


Figura 3.4: Comportamentos entre Presas e Predadores

O gráfico de fase apresenta a trajetória da população de predadores em função da população de presas, utilizando os mesmos parâmetros do gráfico anterior. Nele, observa-se uma órbita fechada no plano de fase — uma característica típica dos sistemas de Lotka-Volterra em equilíbrio dinâmico. Embora baseados nos mesmos dados, os Gráficos 3 e 4 oferecem representações complementares: o Gráfico 3 destaca as oscilações das populações ao longo do tempo, enquanto o Gráfico 4 evidencia a relação cíclica entre as espécies, sem a variável temporal explícita. Essa diferença demonstra a importância de empregar abordagens gráficas variadas na análise de sistemas

dinâmicos, especialmente quando se busca compreender a complexidade das interações no modelo presa-predador.

As soluções obtidas por meio das simulações gráficas confirmam o comportamento cíclico típico das interações predador-presa. Observa-se que, sempre que a população de presas cresce, há um aumento subsequente na população de predadores. Esse crescimento, por sua vez, leva à diminuição das presas, o que posteriormente afeta negativamente os predadores, reiniciando o ciclo. Esse padrão recorrente está claramente evidenciado nos gráficos analisados, em que as oscilações das duas espécies seguem uma dinâmica interdependente. Além disso, os pontos de equilíbrio calculados teoricamente são consistentes com as trajetórias observadas nas simulações. Eles indicam que, em condições ideais e sem interferências externas, as populações tenderiam a se estabilizar. No entanto, a análise da matriz jacobiana revela que esse ponto de equilíbrio é, na verdade, um centro. Isso implica que qualquer pequena perturbação inicial no sistema tende a gerar oscilações contínuas, o que explica os padrões periódicos observados nas representações gráficas. Dessa forma, mesmo em situações em que os valores iniciais das populações são os mesmos, mudanças sutis nas condições de interação são suficientes para alterar a dinâmica e manter o sistema em ciclos constantes.

Considerações Finais

Este trabalho permitiu compreender como a modelagem matemática, por meio das equações diferenciais ordinárias (EDOs), é uma ferramenta essencial para descrever, analisar e prever o comportamento de populações ao longo do tempo. O estudo da dinâmica populacional, inicialmente abordado pelos modelos de Malthus e Verhulst, demonstrou como a matemática pode representar a evolução de uma população sob diferentes condições. Enquanto Malthus propôs um modelo de crescimento exponencial, Verhulst aprimorou essa visão ao considerar as limitações impostas pelo meio ambiente, formulando o modelo logístico.

Entretanto, para descrever interações mais complexas, como aquelas entre duas espécies interdependentes, sendo presas e predadores, foi necessário adotar um modelo mais elaborado. Nesse contexto, o sistema de Lotka-Volterra representa um marco no desenvolvimento da ecologia matemática, ao modelar a dinâmica entre essas duas populações por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. As simulações computacionais e análises qualitativas realizadas ao longo do trabalho evidenciaram a natureza cíclica dessas interações, com variações periódicas nas populações, características fundamentais para entender o comportamento desses sistemas. Frisamos que, a utilização de gráficos se mostrou uma ferramenta crucial para a visualização dos resultados. Eles permitiram interpretar com clareza a evolução temporal das populações e identificar padrões orbitais no plano de fase, facilitando a análise do comportamento do sistema frente a diferentes condições iniciais.

Ao longo do estudo, ficou evidente que compreender e resolver EDOs é fundamental para interpretar corretamente esses modelos e suas implicações. Reforça-se o papel da matemática como ferramenta essencial para compreender, prever e agir de forma responsável em ecologia, biologia e gestão ambiental. Portanto, este estudo destaca a importância das equações diferenciais na modelagem de fenômenos naturais. Elas permitem uma análise precisa das interações entre espécies. Assim, contribuem para compreender melhor as dinâmicas ecológicas do mundo real.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [2] C. F. de Oliveira, *Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: Um olhar à luz da Socioepistemologia*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2011.
- [3] D. A. Vieira Tonidandel **Revista Brasileira de ensino da física** v. 34 n. 02, Belo Horizonte, 2012.
- [4] D. G. Figueiredo e A. F. Neves, **Equações Diferenciais Aplicadas**, Blucher, São Paulo, 2009.
- [5] E. Capelas de Oliveira e J. E. Maiorino, **Introdução aos métodos da matemática aplicada**. Editora Unicamp, São Paulo, 2003.
- [6] E. C. Titchmarsh, **Introduction to the Theory of Fourier Integrals**, Chelsea Publishing Company, 3^a edição 1986.
- [7] F. Diacu, **Introdução a Equações Diferenciais Teoria e Aplicações**, LTC, São Paulo, 2014.
- [8] L. Debnath, D. Bhatta, **Integral Transforms and their Applications**, 2 ed. Edition, Boca Raton, 2007.
- [9] M. Kot, **Elements of Mathematical Ecology**, Cambridge University Press, 2001.

- [10] ODUM, Eugene P.; BARRETT, Gary W. **Fundamentos de ecologia**. 5. ed. São Paulo: Thomson Pioneira, 2007.
- [11] R. F. Camargo e E. C. de Oliveira. **Cálculo Fracionário**. Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- [12] R. C. Bassanezi, *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*, Editora Contexto, São Paulo, 2010.
- [13] T. R. Malthus, *An Essay on the Principle of Population*, J. Johnson, London, 1789.
- [14] P. F. Verhulst, *Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, vol. 20, pp. 1–32, 1847.
- [15] P. F. Verhulst, *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*, *Correspondance Mathématique et Physique*, vol. 10, pp. 113–121, 1838.
- [16] V. Volterra, *Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically*, *Nature*, vol. 118, pp. 558–560, 1926.
- [17] ZILL, Dennis G. **A first course in differential equations with modeling applications**. 10. ed. Boston: Cengage Learning, 2012.