UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO - TCC

O estudo das funções com o apoio do Geogebra

Orientadora: Prof.ª Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Aluno: Elessandro Dutra Sousa

São Luís - MA
2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

O estudo das funções com o apoio do Geogebra

Orientadora: Prof.ª Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Aluno: Elessandro Dutra Sousa

São Luís - MA
2025

Elessandro Dutra Sousa

O estudo das funções com o apoio do Geogebra

Monografia apresentada ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito para obtenção do título de Licenciatura em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

Aprovada em: 14/07/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
SANDRA IMACULADA MOREIRA NETO
Data: 22/07/2025 11:09:23-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto – UEMA

Documento assinado digitalmente
ROBERTO BATISTA DOS SANTOS
Data: 22/07/2025 09:13:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos – UEMA

Documento assinado digitalmente
JACKSON MARTINS REIS
Data: 22/07/2025 09:27:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Me. Jackson Martins Reis – UEMA

Sousa, Elessandro Dutra
O estudo das funções com o apoio do Geogebra. / Elessandro Dutra Sousa, Sandra Imaculada Moreira Neto. – São Luis, MA, 2025.
92 f

TCC (Graduação em Matemática Licenciatura) - Universidade Estadual do Maranhão, 2025.

Orientador: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto

1.Funções elementares. 2.Gráficos de funções. 3.Software Geogebra. I.Moreira Neto, Sandra Imaculada. II.Titulo.

CDU:004.42:51

Elaborado por Cássia Diniz - CRB 13/910

Dedicatória

Dedicamos este trabalho a todas as pessoas que nos acompanharam durante esse percurso e que nos incentivaram na realização dessa conquista, dando apoio, compreensão, paciência e amor.

Epigrafe 1 *"De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de matemática para resolver?"*

(Augustin Louis Cauchy)

Resumo

Neste trabalho apresentamos conceitos importantes de funções. Damos destaque aos gráficos de vários tipos de funções com uso do Geogebra, ressaltando os seus significados e algumas de suas aplicações. O uso do *software* facilita a compreensão e o entendimento para a interpretação gráfica de determinados problemas.

Palavras-Chave: Funções elementares; Gráficos de funções; *Software* Geogebra.

Sumário

Introdução

Desde os primórdios da humanidade, já se havia um pouco de conhecimento sobre as funções, isso porque as pessoas naquela época faziam a contagem dos animais, por meio de uma associação com objetos. Por exemplo, se um pastor fosse contar quantas ovelhas ele tinha, era feito da seguinte forma; uma ovelha, uma pedra... duas ovelhas, duas pedras... três ovelhas, três pedras... e assim sucessivamente. Mas o conceito de função aparece definitivamente em meados do século XVIII, com Leonard Euler, que foi um importante matemático da suíça que escreveu: "Se x é uma quantidade variável, então toda a quantidade que depende de x de qualquer maneira, ou que seja determinada por aquela, chama-se função da dita variável" (Grupo Escolar, 1998). Foi este matemático quem utilizou pela primeira vez a notação $f(x)$.

Posteriormente, foi no século XIX que surgiu uma definição mais branda de função definido por Peter Dirichlet, em 1829, em que ele descrevia uma função como uma relação em que y, sendo a variável dependente, tinha seus valores definidos com base em uma regra que variava conforme os valores atribuídos à variável independente x (Grupo Escolar, 1998).

A definição atual de função foi dada por um grande e importante resultado da investigação da Ciência ao longo dos tempos, por vários matemáticos, dentre eles destacamos Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Nicolas Oresme, Galileu Galilei, dentre muitos outros contribuintes. Diante disso, sabemos que esta construção da noção de função feita ao longo dos séculos é de sua importância no avanço da Ciência (Grupo Escolar, 1998).

Quando trabalhamos com funções e seus respectivos gráficos, podemos envolver um software interativo e danâmico, que é o Geogebra. O Geogebra é uma excelente ferramenta que nos ajuda a visualizar melhor tanto as figuras planas, como também as figuras espaciais, nos ajuda também a fazer uma análise mais completa dos gráficos.

Para Hohenwanter e Hohenwanter (2009, p.6), o GeoGebra é "[...] um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas [...]" Posto isso, essa ferramenta não serve apenas para o ensino de Geometria, mas que pode envolver também outras áreas de conhecimento matemático. Assim, além de ser algo interativo, ele também é visto como um programa didático que pode ser utilizada nas escolas.

Além de sua aplicabilidade no ensino de Geometria, o GeoGebra também pode ser utilizado em outras áreas da matemática, como Álgebra, Funções, Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, entre outras. Assim, o software se apresenta como um recurso didático versátil, que potencializa o ensino-aprendizagem ao permitir que os alunos explorem conceitos de maneira mais visual, prática e investigativa, aproximando-os da linguagem matemática de forma mais acessível e estimulante.

Capítulo 1

Conjuntos numéricos

Neste capítulo trazemos alguns resultados sobre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais.

1.1 Números Naturais

Nesta primeira parte da pesquisa, buscamos definir termos que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho, como indução, reta real, desigualdades, ordens entre os números reais e funções (Lima, 2014).

O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é caracterizado pelos seguintes fatos:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o *sucessor* de n.

2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$) então $X = \mathbb{N}$.

A caracterização dessa simbologia surge na palavra sucessor. Consideravelmente, quando n, $n' \in \mathbb{N}$, dizer que n' é o sucessor de n significa que n' vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. Logicamente, esta explicação apenas substitui sucessor por logo depois, portanto não é uma definição. O termo primitivo sucessor não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos pelas regras 1, 2 e 3, citadas anteriormente, que são chamadas de Axiomas de Peano. Esses axiomas podem ser reformulados do seguinte modo:

$1'$ Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; números diferentes têm sucessores diferentes.

$2'$ Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.

$3'$ Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

O axioma 3 é conhecido como o princípio da indução. A priori, o princípio da indução significa que todo n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante, com um número finito de etapas. O princípio da indução serve de base para um método de demonstração de teoremas sobre números naturais, conhecido como método de indução. Observe que a função sucessor é injetiva. De fato, sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Vamos supor que

$$s(m) = s(n).$$

Como $s(k) = k + 1$, então temos que

$$m + 1 = n + 1.$$

Subtraindo 1 em ambos os lados da equação, obtemos

$$m = n.$$

Portanto, a função sucessor é injetiva.

Teorema 1 ***(Frid, 2010, p. 31) (Princípio da Indução Matemática)*** *Seja P uma proposição acerca dos números naturais. Suponhamos que P seja tal que:*

1. *$P(1)$ vale, isto é, 1 verifica a proposição P;*

2. *Se $P(k)$ vale, então vale $P(k+1)$, isto é, se k verifica a proposição P, então seu sucessor $k+1$ também a verifica.*

Então, P é válida para todos os números naturais.

Demonstração. Seja A o conjunto dos números naturais que satisfazem a propriedade P. Por hipótese, sabemos que $1 \in A$. Além disso, assumimos que sempre que um número natural k pertence a A, então seu sucessor $k+1$ também pertence a A.

Pelo terceiro axioma de Peano, concluímos que A contém todos os números naturais, ou seja, $A = \mathbb{N}$, que é o que queremos demonstrar.

As provas matemáticas em que se aplica o Teorema 1 são chamadas provas por indução. No item 2 do Teorema 1, a hipótese de que $P(k)$ é válida é chamada *hipótese de indução*.

Exemplo 1 *Usando o método de indução, vamos provar que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se que $s(k) \neq k$, ou seja,*

De fato, a propriedade $P(k)$ é $s(k) \neq k$. Com efeito, $1 \neq s(1)$, pois 1 não é sucessor de nenhum número natural; em particular, 1 não é sucessor de si próprio. Logo vale $P(1)$. Além disso, se, para um certo $k \in \mathbb{N}$, vale $s(k) \neq k$, então, pela injetividade da função s, $s(s(k)) \neq s(k)$, isto é, $s(k+1) \neq k+1$, e, portanto, vale $P(k+1)$, o que conclui a prova por indução de que $s(k) \neq k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

■

Exemplo 2 *Prove por indução que $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, para $n \in \mathbb{N}$.*

Queremos provar a validez, para todo número natural n, da propriedade $P(n)$ dada por

$$P(n) : 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

i) (Base) Para $n = 1$, $P(1)$ se resume a afirmar que $1 = 1$. De fato,

$$\begin{aligned} 1^2 &= \frac{1(2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{3} \\ 1 &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3} \\ 1 &= 1 \text{ (Verdadeiro).} \end{aligned}$$

ii) (Hipótese) Vamos supor que $P(k)$ seja verdadeiro para um certo valor de $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}.$$

iii) (Tese) Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeiro a partir da hipótese, ou seja, iremos provar que

$$\underbrace{1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2 + [2 \cdot (k+1) - 1]^2}_{\text{Primeiro membro}} = \underbrace{\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}}_{\text{Segundo membro}}.$$

Para provar isso, são necessárias algumas manipulações para tal resultado. Nesse viés, podemos substituir o valor da expressão dada pela hipótese no lugar da expressão destacada a seguir.

$$\begin{aligned} \underbrace{1^2 + 3^2 + \ldots + (2k-1)^2} + [2 \cdot (k+1) - 1]^2 &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + [2 \cdot (k+1) - 1]^2 \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 \\ &= \frac{k(2k-1)(2k+1) + 3(2k+1)^2}{3} \\ &= \frac{(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)]}{3} \\ &= \frac{(2k+1)(2k^2 + 5k + 3)}{3} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Partimos do primeiro membro para chegarmos ao segundo membro, e concluímos, que de fato a igualdade é verdadeira, logo está provada a tese. Portanto, pelo princípio de indução finita, temos que a expressão $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.1.1 Adição, Multiplicação e ordem entre os Números Naturais

No conjunto dos números naturais estão definidas duas operações fundamentais: a adição, que aos números $n,\ p \in \mathbb{N}$ faz corresponder a soma $n + p$ e a multiplicação, que lhes associa o produto np.

A soma $n + p$ é o número natural obtido a partir de n aplicando-se p vezes seguidas a operação de tomar o sucessor. Em um caso particular, $n + 1$ é o sucessor de n, $n + 2$ é o sucessor do sucessor de n, etc. Exemplo: temos que $3 + 3 = 6$ justamente porque 6 é o suecessor do sucessor do sucessor de 3.

Com relação ao produto, temos que $n \cdot 1 = n$ por definição e, quando $p \neq 1,\ np$ é a soma de p parcelas iguais a n.

Adição: Definida como $n + 1 =$ sucessor de n e $n + (p + 1) = (n + p) + 1$. Esta última igualdade diz que se sabemos somar p a todos os números naturais n, sabemos também somar $p + 1$, ou seja, a soma $n + (p + 1)$ é simplesmente o sucessor $(n + p) + 1$ de $n + p$.

Multiplicação: Definida $n \cdot 1 = n$ e $n(p + 1) = np + n$. Ou seja, multiplicar um número n por 1 não o altera. E se sabemos multiplicar todos os números naturais n por p, sabemos também multiplicá-los por $p + 1$ para isso basta tomar $n(p + 1) = np + n$.

Estas operações gozam das conhecidas propriedades de comutatividade, associatividade e distributividade.

Vejamos:

- **Comutativa**: Sejam x e y dois números naturais. Na adição e multiplicação, a ordem dos números não modificará o resultado, isto é,

$$x + y = y + x;$$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

- **Associativa**: Sejam $x,\ y$ e z números naturais. Na adição e multiplicação, os três números operados são indiferentes à qualquer ordem, isto é,

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

- **Distributiva**: Sejam $x,\ y$ e z números naturais. A propriedade distributiva nos mostra que o produto da soma é igual à soma dos produtos, isto é,

$$z(x + y) = zx + zy.$$

Conforme demonstrado por Lima (2014, p. 27–29), as propriedades comutativa, associativa e distributiva são fundamentais na construção algébrica dos números reais. Outra propriedade interessante, que também pode ser encontrada em (Lima, 2014), é a seguinte

- **Lei de cortes**: Se $n + m = p + m$ então $n = p$ e, se $n \cdot m = p \cdot m$ então $n = p$.

Vejamos agora como se dá a relação de ordem entre os números naturais.

Dizemos que o natural m é menor que o natural n, ou que n é maior que m, e denotamos $m < n$, se existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $m + d = n$. A notação $n > m$ equivale a $m < n$ e a notação $m \leq n$ significa $m < n$ ou $m = n$.

A relação *menor que* tem as propriedades:

1. **(Transitividade)**: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$;

Com efeito, se $m < n$ e $n < p$ então existem $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ tais que $m+d_1 = n$ e $n+d_2 = p$. Decorre daí por substituição que $(m + d_1) + d_2 = p$, isto é, $m + (d_1 + d_2) = p$, portanto, $m < p$.

2. **(Monotonicidade)** Se $m < n$ e $p \in \mathbb{N}$ então $m + p < n + p$;

Com efeito, se $m < n$, então $m+d = n$, para algum $d \in \mathbb{N}$, assim $n+p = (m+d)+p = (m + p) + d$, pela associatividade, e portanto, $m + p < n + p$.

3. **(Tricotomia)** Dados dois números quaisquer $m,\ n \in \mathbb{N}$ vale uma, e somente uma, das seguintes possibilidades: ou $m < n$, ou $m = n$, ou $n < m$.

Suponhamos, por absurdo, que $m < n$ e $m = n$ simultaneamente. Ora, se $m < n$, então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $m + d = n$. E se $m = n$, substituindo temos que

$$n = m \implies m + d = m.$$

Isto significa que

$$d = 0.$$

No entanto, d deve ser um número natural, o que leva a uma contradição. Portanto, $m < n$ é incompatível com $m = n$.

Suponhamos, por absurdo, que $n < m$ e $m = n$ simultaneamente. Ora, se $n < m$, então existe $d \in \mathbb{N}$ tal que $n + d = m$. E se $m = n$, substituindo temos

$$m = n \implies n + d = n.$$

Isto implica que

$$d = 0.$$

Porém, d deve ser um número natural, o que leva a uma contradição. Logo, $n < m$ é incompatível com $m = n$.

Suponhamos, por absurdo, que $m < n$ e $n < m$ simultaneamente. Se $m < n$, então existe $p \in \mathbb{N}$ de modo que $m + p = n$. E se $n < m$, então existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n + q = m$. Dessa forma, substituindo uma expressão na outra, obtemos

$$m + p = n.$$

Isto implica que

$$m + p + q = m \implies p + q = 0.$$

Porém, p e q são números naturais positivos, o que leva a uma contradição. Logo, $m < n$ é incompatível com $n < m$.

Com isso, mostramos que, para quaisquer m e n em $\mathbb{N}$, somente uma das três condições pode ser verdadeira: ou $m < n$, ou $m = n$, ou $n < m$, verificando a propriedade da tricotomia.

1.2 Números Reais

Nesta seção apresentaremos o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, onde faremos uma descrição de suas propriedades e suas consequências, as quais servirão de base para a fundamentação das seções posteriores.

1.2.1 $\mathbb{R}$ é um corpo

Começaremos pelo fato de que o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é um corpo, isto é, estão definidas duas operações: adição e multiplicação, as quais devem cumprir algumas propriedades, as quais listamos abaixo.

Um *corpo* é um conjunto F com duas operações

$$\begin{array}{rcl} F \times F & \longrightarrow & F \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} F \times F & \longrightarrow & F \\ (a,b) & \longmapsto & a \cdot b \end{array},$$

chamadas de adição e multiplicação, tais que as seguintes propriedades (axiomas) são satisfeitas:

Axiomas associados à operação adição:

A1. A adição é comutativa: $a + b = b + a$, para quaisquer $a,\ b \in F$.

A2. A adição é associativa: $a+(b+c) = (a+b)+c = a+b+c$, para quaisquer $a, b, c \in F$.

A3. Elemento neutro da adição: existe um único elemento 0 (zero) em F tal que $a+0 = 0 + a = a$, para qualquer $a \in F$.

A4. Simétrico ou inverso da adição: a cada $a \in F$ corresponde um único elemento $(-a) \in F$, chamado simétrico, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Axiomas associados à operação multiplicação:

M1. A multiplicação é comutativa: $a \cdot b = b \cdot a$, para quaisquer $a,\ b \in F$.

M2. A multiplicação é associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$, para quaisquer $a,\ b,\ c \in F$.

M3. Elemento neutro da multiplicação: existe um único elemento 1 (um) em F tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para qualquer $a \in F$.

M4. Inverso multiplicativo: a cada $a \in F \setminus \{0\}$ corresponde um único elemento a^{-1} ou $\dfrac{1}{a}$ em F, chamado inverso, tal que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

Além dessas propriedades, as operações de multiplicação e adição devem satisfazer a propriedade de distributividade. Em outras palavras, a multiplicação é distributiva em relação à adição, isto é,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{e} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

para quaisquer $a,\ b,\ c \in F$.

Vejamos algumas propriedades do corpo $\mathbb{R}$ que são usadas em diversos cálculos e manipulações algébricas.

Teorema 2 ***(Frid, 2010, p. 74-75)*** *Sejam $a,\ b,\ x \in \mathbb{R}$. Então:*

(i) Se $a + x = a$, então $x = 0$.

(ii) Se $b \neq 0$ e $b \cdot x = b$, então $x = 1$.

(iii) Se $a + b = 0$, então $b = (-a)$.

(iv) Se $a \neq 0$, a equação $a \cdot x = b$ tem uma única solução $x = a^{-1} \cdot b = \dfrac{b}{a}$.

(v) $x \cdot 0 = 0$.

(vi) $-x = (-1) \cdot x$.

Demonstração. (i) Pelo item (A3) das propriedades de corpos, temos $a = a+0 = a+x$, e pelo item (A4) das propriedades de corpos, temos que existe $(-a)$ tal que $a + (-a) = 0$. Somando $(-a)$ em ambos os lados da igualdade $a = a + x$, segue

$$a + (-a) + 0 = a + (-a) + x,$$

logo $0 + 0 = 0 + x$ e $x = 0$.

(ii) Pelo item (M3) das propriedades de corpos, temos $b = b \cdot 1$, e pelo item (M4) das propriedades de corpos, temos que existe (b^{-1}) tal que $b \cdot b^{-1} = 1$. Multiplicando b^{-1} em ambos os lados da igualdade $b = b \cdot x$, segue

$$b \cdot b^{-1} = b \cdot b^{-1} \cdot x,$$

logo $1 = 1 \cdot x$ e $x = 1$.

(iii) Pelo item (A4) das propriedades de corpos, temos $0 = a + (-a)$. Segue

$$a + (-a) = a + b,$$

somando $(-a)$ em ambos os lados da igualdade teremos

$$a + (-a) + (-a) = a + (-a) + b.$$

Pela propriedade associativa de corpos, temos

$$\begin{aligned} [a + (-a)] + (-a) &= [a + (-a)] + b \\ \iff (-a) &= 0 + b \\ \iff (-a) &= b. \end{aligned}$$

(iv) Pelo item (M4) das propriedades de corpos, temos que a cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ corresponde um único elemento a^{-1} ou $\dfrac{1}{a}$ em $\mathbb{R}$, chamado inverso, tal que

$$a \cdot a^{-1} = a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

A partir da igualdade $a \cdot x = b$, pela existência do inverso, multiplicando a^{-1} em ambos os lados, segue

$$a \cdot a^{-1} \cdot x = b \cdot a^{-1}.$$

Pela propriedade associativa de corpos, temos

$$\begin{aligned} [a \cdot a^{-1}] \cdot x &= b \cdot a^{-1} \\ \iff 1 \cdot x &= b \cdot a^{-1}, \end{aligned}$$

logo $x = b \cdot a^{-1} = \dfrac{b}{a}$.

(v) Pelo item (A4) das propriedades de corpos, temos que existe $(-a)$ tal que $a+(-a) = 0$. Com isso, podemos reescrever a igualdade $x \cdot 0 = 0$ como:

$$
\begin{aligned}
x \cdot 0 &= 0 \\
\Longleftrightarrow x \cdot [1 + (-1)] &= 0,
\end{aligned}
$$

pela propriedade distributiva de corpos, segue

$$
\begin{aligned}
x \cdot [1 + (-1)] &= [1 + (-1)] \\
\Longleftrightarrow x + (-x) &= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos $x \cdot 0 = 0$ para todo x.

(vi) Pelo item (A4) das propriedades de corpos, temos

$$x + (-x) = 0.$$

Multiplicando (-1) em ambos os lados dessa igualdade, segue

$$(-1)[x + (-x)] = (-1) \cdot 0.$$

Pela propriedade distributiva de corpos, temos

$$(-1) \cdot x + (-1) \cdot (-x) = 0,$$

onde $(-1) \cdot (-x)$ é o inverso aditivo de $(-x)$. Portanto, pelo existência do simétrico, somando $(-x)$ em ambos os lados dessa igualdade, teremos

$$
\begin{aligned}
(-1) \cdot x + (-1) \cdot (-x) + (-x) &= (-x) \\
\Longleftrightarrow (-1) \cdot x + [(-1) \cdot (-x) + (-x)] &= (-x) \\
\Longleftrightarrow (-1) \cdot x + 0 &= (-x) \\
\Longleftrightarrow (-1) \cdot x &= (-x).
\end{aligned}
$$

■

1.2.2 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado

Definição 1 ***(Frid, 2010, p. 76)*** *Um corpo ordenado é um corpo C, com relação às operações $+$ e $\cdot$ nele definidas, o qual também é um conjunto ordenado, segundo uma relação de ordem $<$ nele definida, tal que:*

(i) se $x, y, z \in C$ e $y < z$ então $x + y < x + z$,

(ii) se $x, y \in C, x > 0$ e $y > 0$, então $xy > 0$.

Se $x > 0$, dizemos que x é positivo, e se $x < 0$, dizemos que x é negativo.

Em $\mathbb{R}$ há um subconjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, formado pelo conjunto dos reais positivos que seguem as seguintes condições:

P_1 : Seja $x, y \in \mathbb{R}$, então $x + y \in \mathbb{R}^+$ e $x \cdot y \in \mathbb{R}^+$.

P_2 : Dado $x \in \mathbb{R}$, temos que ou $x = 0$ ou $x \in \mathbb{R}^+$ ou $-x \in \mathbb{R}^+$.

No subconjunto $\mathbb{R}^+$ podemos definir uma semelhança entre seus elementos, assim, diz-se que $x < y$ quando $y - x \in \mathbb{R}^+$.

Nesse viés, apresentaremos as propriedades da relação de ordem $x < y$ em $\mathbb{R}$, cuja prova pode ser vista em (Lima, 2014).

i) *Transitividade*: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

ii) *Tricotomia*: dados $x, y \in \mathbb{R}$, acontece definitivamente uma das alternativas $x = y$, $x < y$ ou $y < x$.

iii) *Monoticidade da adição*: se $x < y$ então, para todo $z \in \mathbb{R}$, tem-se $x + z < y + z$.

iv) *Monoticidade da multiplicação*:

a) se $x < y$ e $z > 0$, então, $xz < yz$.

b) se $x < y$ e $z < 0$, então, $xz > yz$.

De posse dessas propriedades podemos ainda provar que

1) Se $x \neq 0$ então $x^2 > 0$. (Todo número ao quadrado, exceto 0, é positivo.) Verdadeiramente, se $x > 0$ então $x^2 > 0$ pela propriedade P_2. Mas se $-x > 0$, nesse caso, ainda pela propriedade P_2, $(-x)(-x) > 0$. Porém, $(-x)(-x) = x^2$, assim concluímos $x^2 > 0$ em quaisquer que sejam os casos.

2) Se $0 < x < y$ então $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$. (Quanto maior for um número positivo, menor será seu inverso.) De início, temos que o inverso de qualquer número inteiro e positivo, é igualmente positivo, isso ocorre devido $\frac{1}{x} = x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2$, ou seja, isso representa o produto de dois números positivos. Concluímos que ao multiplicarmos ambos os membros de $x < y$ pelo número positivo $\frac{1}{xy}$, tem-se $\frac{x}{xy} < \frac{y}{xy}$, ou seja, $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

3) Se $x < y$ e z é negativo então $xz > yz$. (Quando se multiplicam os dois membros de uma desigualdade por um número negativo, o sentido dessa desigualdade se inverte.) De fato, temos que o produto dos números positivos $y - x$ e $-z$ resultará em um número positivo, ou seja, $(y-x)(-z) > 0$. Com efeito, resolvendo a multiplicação decorre $xz - yz > 0$, logo $xz > yz$.

1.2.3 $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se limitado superiormente quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma cota superior de X. Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma cota inferior de X. Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto limitado. Isto significa que X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $x \in X \Longrightarrow |x| \leq k$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Mais explicitamente, b é o supremo de X quando cumpre as duas condições:

- S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;

- S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

A condição S2 admite a seguinte reformulação:

- S2'. Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.

Com efeito, S2$'$ diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X. Às vezes se exprime S$'$ assim: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$.

Escreveremos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X. Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se o ínfimo do conjunto X, e escreve-se $a = \inf X$, quando é a maior das cotas inferiores de X. Isto equivale às duas afirmações:

- I1. Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;

- I2. Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$.

A condição I2 pode também ser formulada assim:

- I2'. Se $a < c$ então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

De fato, I2$'$ diz que nenhum número maior do que a é cota inferior de X. Equivalentemente: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.

Diz-se que um número $b \in X$ é o maior elemento (ou elemento máximo) do conjunto X quando $b \geq x$ para todo $x \in X$. Isto quer dizer que b é uma cota superior de X, pertencente a X. Por exemplo, b é o elemento máximo do intervalo fechado $[a, b]$ mas o intervalo $[a, b)$ não possui maior elemento. Evidentemente, se um conjunto X possui elemento máximo este será seu supremo. A noção de supremo serve precisamente para substituir a idéia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. O supremo do conjunto $[a, b)$ é b. Considerações inteiramente análogas podem ser feitas em relação ao ínfimo.

Definição 2 ***(Frid, 2010, p. 65)*** *Dizemos que um conjunto ordenado C tem a propriedade do supremo se para todo conjunto $B \subset C$ tal que B não é vazio e B é limitado superiormente, então existe o* $\sup B$ *em C.*

Definição 3 ***(Frid, 2010, p. 76)*** *Um corpo C que satisfaz a propriedade do supremo é dito um corpo completo.*

Teorema 3 ***(Frid, 2010, p. 76)*** $\mathbb{R}$ *é um corpo ordenado completo.*

Para mais informações sobre esse Teorema, veja (Frid, 2010, p. 76).

Capítulo 2

Funções Reais

Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ dois conjuntos quaisquer e não vazios.

Uma função é uma relação $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ que, a cada elemento $x \in \mathbb{A}$, associa um e somente um elemento $y \in \mathbb{B}$. Assim, consideremos uma função f na qual para todo elemento x de um determinado conjunto $\mathbb{A}$ não vazio, terá como correspondente um elemento $f(x)$ de um conjunto $\mathbb{B}$ também não vazio. Chamamos os elementos do conjunto $\mathbb{A}$ de domínio e os do conjunto $\mathbb{B}$ de contradominío, e seus respectivos valores correspondentes de imagem da função.

Com isso,

- Os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são chamados domínio e contradomínio de f, respectivamente;
- O conjunto $f(\mathbb{A}) = \{y \in \mathbb{B} \mid \exists\ x \in \mathbb{A}, f(x) = y\} \subset \mathbb{B}$ é chamado imagem de f;
- Dado $x \in \mathbb{A}$, o (único) elemento $y = f(x) \in \mathbb{B}$ correspondente é chamado imagem de x.

O conjunto $\mathbb{A}$, de onde partem as relações de uma função, é chamado de **domínio**. Já o conjunto que recebe as "setas" dessas relações é conhecido como **contradomínio**. Representamos esses conjuntos da seguinte forma:

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{A} \quad \text{(Domínio da função } f\text{);}$$

$$\text{CD}(f) = \mathbb{B} \quad \text{(Contradomínio da função } f\text{).}$$

A **imagem** da função é o conjunto formado pelos elementos do contradomínio que estão associados a algum elemento do domínio. Esse conjunto é um subconjunto do contradomínio e é representado por:

$$\text{Im}(f) \quad \text{(Imagem da função } f\text{).}$$

Exemplo 3 *Encontre o domínio, contradomínio e a imagem das funções abaixo.*

a)$f(x) = \sqrt{2x+6}$

Nos números reais, o radicando de uma raíz de índice par não pode ser negativo, isto é,

$$\begin{aligned} 2x+6 &\geq 0 \\ 2x &\geq -6 \\ x &\geq -3. \end{aligned}$$

Logo, $D(f) = \{x \in R|\ x \geq -3\}$.

Sabendo que a função vai de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Então,

$$\text{CD}(f) = \mathbb{R}.$$

(Ademais, nem todos os valores de $\mathbb{R}$ serão atingidos; é por isso que imagem e contradomínio apresentam conceitos distintos.)

Nesse momento, iremos determinar a imagem da função. Sabemos que raiz quadrada só apresenta valores maiores ou igual a zero. Vamos verificar suas extremidades:

Quando $x = -3$, temos que

$$f(-3) = \sqrt{2(-3) + 6} = \sqrt{-6 + 6} = \sqrt{0} = 0.$$

Quando o valor de x cresce, $2x + 6$ cresce também, segue-se então que a raiz também cresce.

Logo, a imagem da função é dada por

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty[.$$

b)$f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

Nesta situação, o denominador não pode ser igual a zero, pois não existe divisibilidade por zero na matemática, logo

$$x + 2 \neq 0,$$

portanto, $D(f) = \{x \in R|\ x \neq -2\}$.

Sabendo que a função vai de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

então,

$$\text{CD}(f) = \mathbb{R}.$$

Agora, vamos determinar a imagem da função. Como o numerador é uma constante (3) e o denominador $x + 2$ tem que ser diferente de zero, segue-se então que o valor da função também nunca será zero. Além disso, a função pode, entretanto, assumir qualquer outro valor real positivo ou negativo.

Logo, a imagem da função é dada por

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

c)$f(x) = \sqrt[3]{2x - 3}$

Nesse caso, a raiz de índice ímpar pode ser um número negativo, nulo ou positivo, ou seja, a expressão $2x - 3$ pode assumir qualquer valor. Com isso,

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Sabendo que a função vai de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

então,

$$\mathrm{CD}(f) = \mathbb{R}.$$

Agora, vamos analisar a imagem da função. Como a raiz cúbica pode receber qualquer número real como entrada, o valor de $2x - 3$ pode ser negativo, zero ou positivo. Além disso, a raiz cúbica de qualquer número real também é um número real. Isso quer dizer que a função pode ter todos os valores reais como resultado.

Logo, a imagem da função é dada por

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

Sejam f e g duas funções reais de variável real. Definimos a **função soma** de f e g, que designamos por $f + g$, e a **função produto** de f e g, que designamos por fg ou $f \cdot g$, como sendo as funções:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)$$
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)$$

Dadas as funções:
a) $f(x) = 3x$, com $x \in R$
b) $g(x) = |4x|$, com $x \in [-2, 2]$
c) $h(x) = 2x^2$, com $x \in (-2, 0)$
Temos que o $Dom(f + g) = Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g) = [-2, 2]$, e

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + |4x|, x \in [-2, 2]$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 12x|x|, x \in [-2, 2].$$

Do mesmo modo, o domínio da soma e do produto das funções g e h é o conjunto $Dom(g) \cap Dom(h) = [-2, 2] \cap (-2, 0)$. Logo:

$$(g + h)(x) = g(x) + h(x) = |4x| + 2x^2, x \in (-2, 0)$$

$$(g \cdot h)(x) = g(x) \cdot h(x) = 8|x| \cdot x^2, x \in (-2, 0).$$

Além disso, temos outras propriedades que estão vinculadas as anteriores. São elas, a **função diferença** e a **função quociente** entre f e g, que podem ser definidas respectivamente das seguintes formas:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),\ x \in Dom(f) \cap Dom(g)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in Dom(f) \cap Dom(g) - \{x | g(x) = 0\}.$$

Exemplo 4 *Dadas as funções* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ *, determine as funções* $f - g$, $\frac{f}{g}$ *e seus respectivos domínios.*

Temos que $D(f) = [0, +\infty]$ e $D(g) = [-3, 3]$. Dessa forma, de acordo com suas definições, temos que

$$(f - g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9 - x^2},$$

com domínio [0,3], e

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{9 - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{9 - x^2}},$$

com domínio $= [0, 3[$, pois 3 anula o denominador $\dfrac{f}{g}$.

Veremos agora um tipo especial de operação, a chamada composição de funções. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ duas funções, tais que $f(A) \subset B$. A função $gof : A \to \mathbb{R}$, definida por $(gof)(x) = g(f(x))$, é chamada a composta de g com f e o símbolo o designa a operação de composição.

Exemplo 5 *Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de modo que $f(x) = 4x$ e $g(x) = 2x^2$. A composição gof (g de f de x) será:*

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= 2 \cdot (4x)^2 \\ &= 2 \cdot 16x^2 \\ &= 32x^2.\end{aligned}$$

Logo, $g(f(x)) = 32x^2$ e seu domínio é $D(g \circ f) = \mathbb{R}$.

Exemplo 6 *Sejam $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \sqrt{x + 1}$, determine a composição $g \circ f$ e $f \circ g$, e o domínio de cada uma delas.*

A composição $g \circ f$ é dada por

$$y = g(f(x)) = g(x^3 - 1) = \sqrt{(x^3 - 1) + 1} = \sqrt{x}.$$

Já a composição $f \circ g$ é dada por

$$y = f(g(x)) = f(\sqrt{x + 1}) = (\sqrt{x + 1})^3.$$

A seguir daremos algumas definições importantes no estudo de função.

Se $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ é uma função real de variável real, então o gráfico de f é o subconjunto do plano formado por todos os pares ordenados da forma $(x, f(x))$, em que $x \in \mathbb{A}$. Isto é,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) | x \in Dom(f) = \mathbb{A}\}.$$

Usamos o gráfico de uma função para extrairmos informações, como por exemplo, analisar o crescimento e o decrescimento das vendas de um produto, estimativas sobre algo, comportamentos, variações e etc.

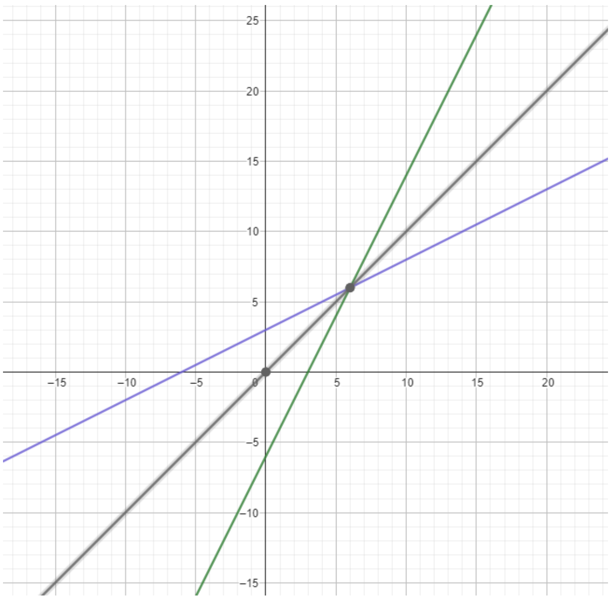
Uma função f é chamada **invertível**, quando existe uma função g, tal que:

$$(gof)(x) = x \text{ e } (fog)(y) = y$$

para todos x e y onde as composições estão definidas. A função g, quando existe, é chamada inversa de f e é designada por f^{-1}.

Veja a seguir na Figura 1, uma representação gráfica da função $f(x) = 2x - 6$ e sua inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + 3$.

FIGURA 1: Gráfico das funções $f(x) = 2x - 6$ e $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + 3$



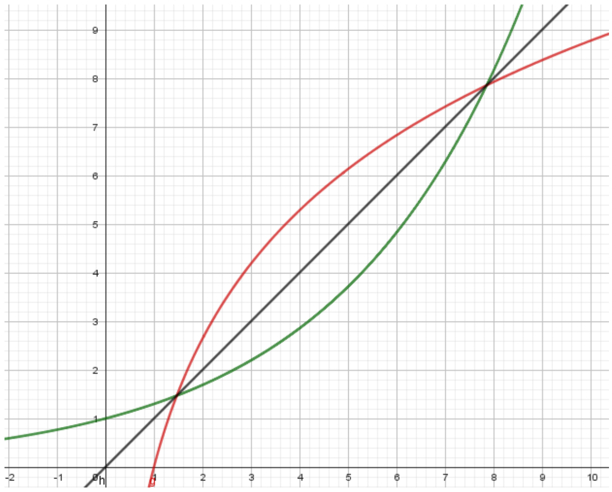
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Perceba que a função $f(x) = 2x - 6$ (reta de cor verde) é simétrica a sua inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{2} + 3$ (reta de cor azul) em relação a reta $f(x) = x$ (reta de cor cinza), isto é, a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Formalmente, dada uma função h invertível, podemos obter o gráfico de sua inversa a partir do gráfico da função h, se o par ordenado (a, b) pertence ao gráfico de uma função h, temos que o par ordenado (b, a) pertence ao gráfico de sua inversa.

Uma **função bijetora** tem como inversa a função que pega elementos do contradomínio e leva no domínio da função (motivo pelo qual elas são simétricas). A função inversa f^{-1}, faz exatamente o inverso da função f. Para que uma função admita um inversa, ela precisa ser bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora ao mesmo tempo. Por este motivo o gráfico da função e de sua inversa são simétricos em relação ao gráfico da identidade. Veja a Figura 2:

FIGURA 2: Simetria entre $f^{-1} : \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ e $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

No gráfico acima, a função f de cor verde é simétrico em relação a reta $y = x$ ao gráfico da função f^{-1} de cor vermelho.

Com base na definição das funções invertíveis, tiramos dela que se f é invertível, então a sua inversa, f^{-1} é também invertível e que a inversa de f^{-1} é a própria f:

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Uma função é **par** se $f(-x) = f(x)$. Isso significa dizer que o valor que a função assume nos pontos x e $-x$ são iguais. Assim, podemos dizer que a função assume valores iguais para valores de x simétricos.

Uma função é **ímpar** quando $f(-x) = -f(x)$. Isto significa que os valores assumidos pela função serão simétricos tanto em relação ao eixo x, quanto em relação ao eixo y.

Em resumo, temos que uma função será

- par, se $f(-x) = f(x), \forall\ x \in D(f)$.
- ímpar, se $f(-x) = -f(x), \forall\ x \in D(f)$.

Existem casos de funções que não é nem par e nem ímpar, por exemplo, consideremos $f(x) = x^2 + x$. Perceba que $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$, segue-se então que $f(-x) \neq f(x)$, e assim a função não é par, e $f(-x) \neq -f(x)$, e também não é ímpar. Ou seja, a função f não é nem par e nem ímpar.

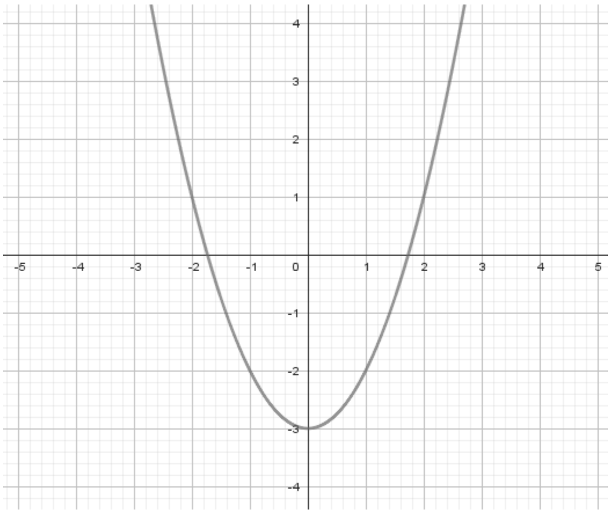
Outro exemplo de função que não é nem par e nem ímpar é $g(x) = x^3 + 1$. De fato, pois considerando $g(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$, segue-se que $g(-x) \neq g(x)$, o que mostra que não é par, e $g(-x) \neq -g(x)$, pois $-g(x) = -(x^3 + 1) = -x^3 - 1$, ou seja, essa função também não é nem par e nem ímpar.

Exemplo 7 *Determine se as funções abaixo são pares ou ímpares;*

a) $f(x) = x^2 - 3$.

Seja $x \in D(f)$, assim $f(-x) = (-x)^2 - 3 = x^2 - 3 = f(x)$. Como, $f(x) = f(-x)$ esta função é par. Observemos que o seu gráfico, ilustrado na Figura 3, é simétrico em relação ao eixo y.

FIGURA 3: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 3$.

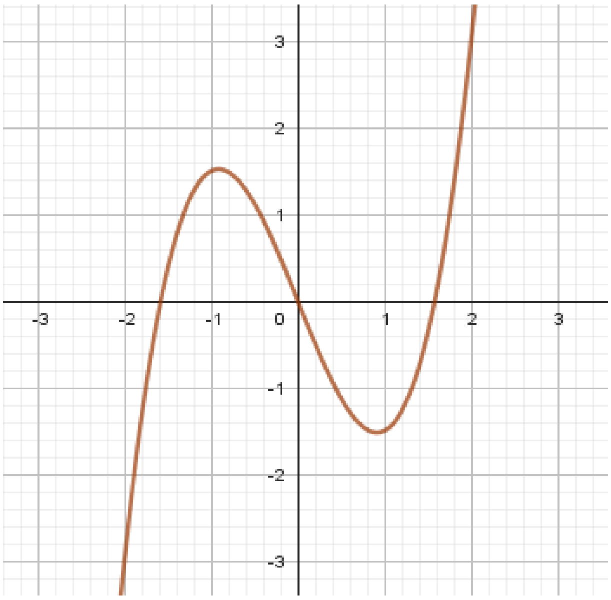


Fonte: Próprio autor da pesquisa

b) $g(x) = x^3 - 2,5x$,

Com $x \in D(f)$ temos $g(-x) = (-x)^3 - 2,\ 5(-x) = -x^3 + 2,\ 5x = -(x^3 - 2,5x) = -g(x)$. Como $g(-x) = -g(x)$ esta função é ímpar. Repare que seu gráfico, mostrado na Figura 4, é simétrico em relação à origem.

FIGURA 4: Gráfico da função $g(x) = x^3 - 2,5x$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Definição 4 ***(Iezzi, 2004) Uma função*** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ ***é periódica*** *se existir um número* $p > 0$ *satisfazendo a condição*

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{A}.$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado período de $\boldsymbol{f}$.

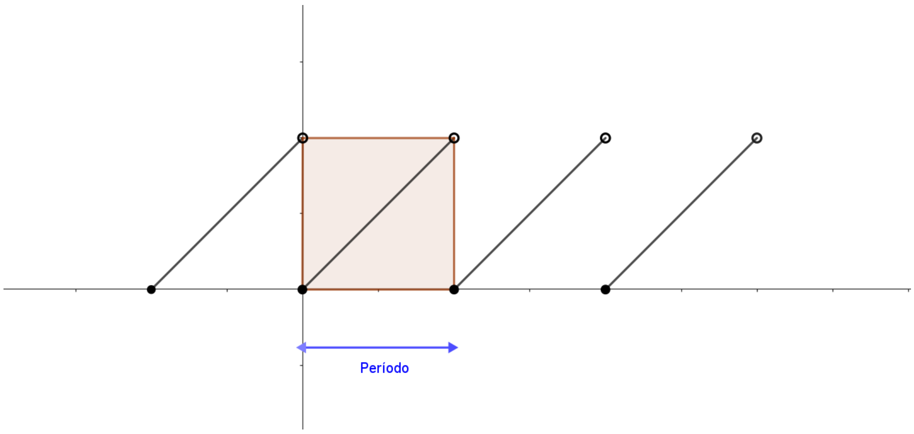
Noutras palavras, uma função é dita periódica quando apresenta um comportamento que se repete em determinados intervalos de tempo. O período representa o menor intervalo necessário para que esse ciclo se repita.

Propriedades 1 ***(Almeida, 2018)*** *Se f é uma função periódica, então*

- $g(x) = f(x) + k$, *em que k é um número real também é periódica de mesmo período de f;*
- $g(x) = a \cdot f(x)$ *em que a é um número real não nulo, é periódica de mesmo período de f;*
- $g(x) = f(x + m)$ *em que m é um número real, é periódica de mesmo período de f;*
- $g(x) = f(b \cdot x)$ *em que b é um número real não nulo é periódica. Porém, o período de g não é o mesmo de f.*

O gráfico de uma função periódica é caracterizado pela repetição de um determinado trecho ao longo do tempo. Isso significa que, para identificá-lo, podemos observar o segmento que se repete e, a partir dele, construir uma sequência que segue um padrão. O período corresponde ao tamanho desse segmento, medido no eixo das abscissas. Essa ideia é vista na Figura 5 a seguir.

FIGURA 5: Função Periódica

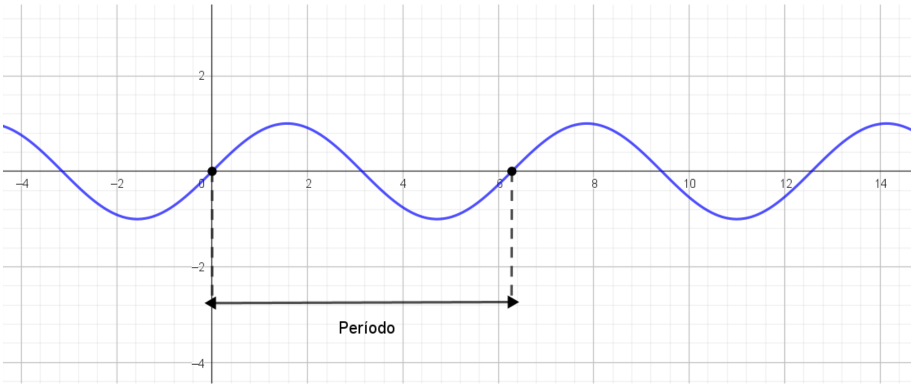


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Existem vários tipos de funções periódicas. Dentre elas, podemos citar as funções trigonométricas, como a função seno, cosseno e tangente.

A **função seno** $f(x) = sen(x)$ é uma função periódica de período 2π. Veja sua representação na Figura 6.

FIGURA 6: Função Seno



Fonte: Próprio autor da pesquisa

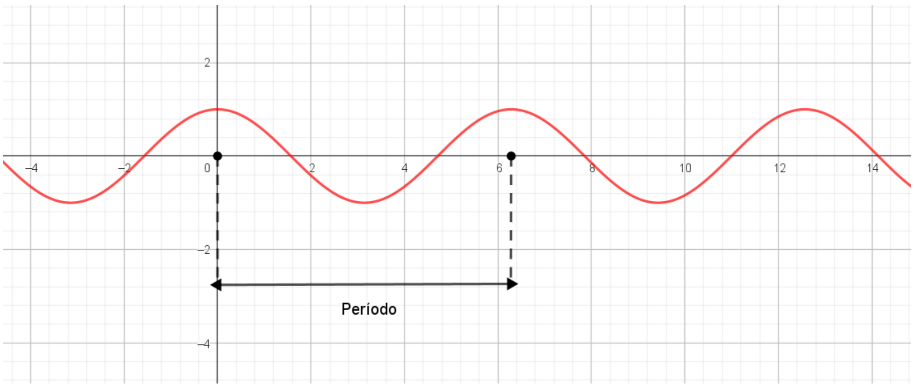
O gráfico da função seno, que está na cor azul, pode ser chamado de **senoide**, pois ele representa como varia a função $f(x) = \ sen(x)$. O domínio da função seno é o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$). Além disso, a sua imagem é dada pelo intervalo $[-1,\ 1]$, ou seja,

$$-1 \leq \ sen(x) \leq 1,$$

pois podemos notar com base na Figura 6 que, de fato, a função seno é limitada por -1 e 1.

A **função cosseno** também é periódica de período de 2π. Ela é representada por $f(x) = \ cos(x)$. Vejamos a sua representação gráfica na Figura 7.

FIGURA 7: Função Cosseno



Fonte: Próprio autor da pesquisa

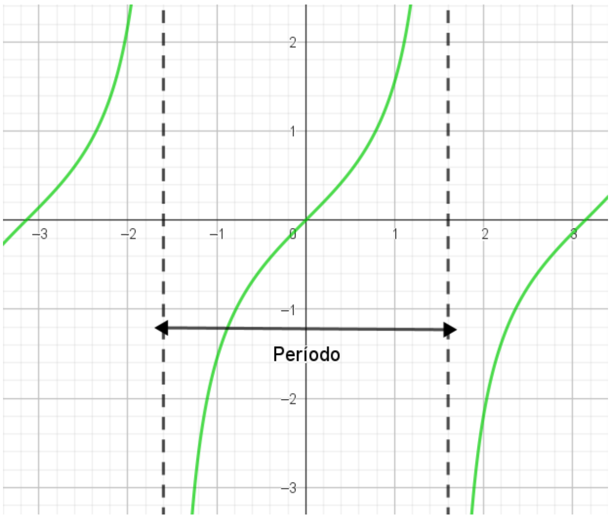
O gráfico da função cosseno, que está na cor vermelha, é denominado de **cossenoide**, pois ele representa como varia a função $f(x) = \ cos(x)$. O domínio da função cosseno, assim como da função seno, é conjunto dos reais ($\mathbb{R}$). Ademais, a sua imagem é dada pelo intervalo $[-1,\ 1]$, isto é,

$$-1 \leq \ cos(x) \leq 1.$$

Observamos então, com base na Figura 7 que a função cosseno é limitada por -1 e 1.

A **função tangente** é periódica de período de π. Ela é expressa por $f(x) = \ tg(x)$. Vejamos a sua representação gráfica na Figura 8.

FIGURA 8: Função Tangente



Fonte: Próprio autor da pesquisa

O esboço gráfico da função tangente, que está na cor verde, é denominado de **tangentoide**, uma vez que ele representa como varia a função $f(x) = tg(x)$. O domínio da função tangente corresponde ao conjunto dos números reais, com exceção dos pontos onde o cosseno é nulo, ou seja,

$$\text{Dom}(\,tg) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

O contradomínio é $\mathbb{R}$, e sua imagem também é o conjunto dos números reais, já que a função tangente não é limitada. Vemos, com base na Figura 8, que seus valores crescem indefinidamente entre as assíntotas verticais.

Mais adiante, abordaremos com mais detalhes as funções trigonométricas.

Uma função f de variável real, é **não-decrescente** em I, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

A função f diz-se crescente em I, se e somente se,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Uma função f de variável real, é **não-crescente** em I, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2).$$

f diz-se decrescente em I, se e somente se,

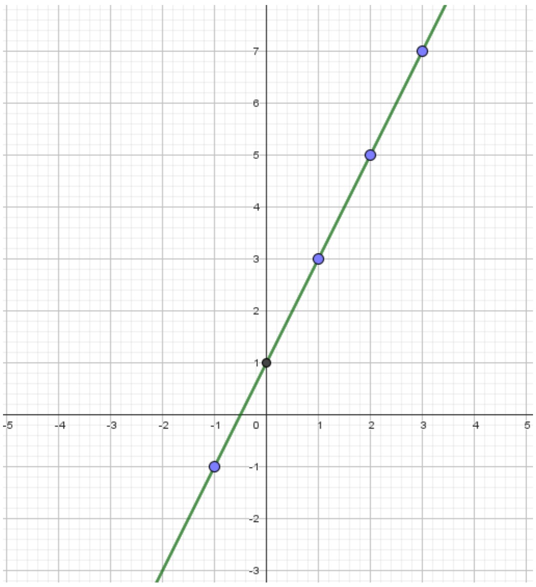
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Assim, uma função crescente é aquela em que y aumenta à medida que x aumenta. Uma função decrescente é aquela em que y diminui quando x é aumentado.

Um exemplo de função crescente é a função $y = 2x + 1$.

Se considerarmos valores para que x seja maior ou igual a 0 ($x \geq 0$) numa razão de 1, notaremos que o valor de y estará aumentando em 2 unidades. Isso significa dizer que a função é crescente. Veja o seu gráfico na Figura 9.

FIGURA 9: Gráfico da função $y = 2x + 1$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Desse modo, como o valor de y aumenta quando aumentamos o valor de x, a função é crescente. Mostre que a função $y = 3x + 2$ é crescente.

Para que possamos provar isso, levamos em consideração a relação

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

De início, multiplica-se ambos os membros da desigualdade pelo valor de a, que é 3.

$$x_2 > x_1$$
$$3x_2 > 3x_1,$$

Somando 2 a ambos os lados

$$3x_2 + 2 > 3x_1 + 2.$$

Logo,

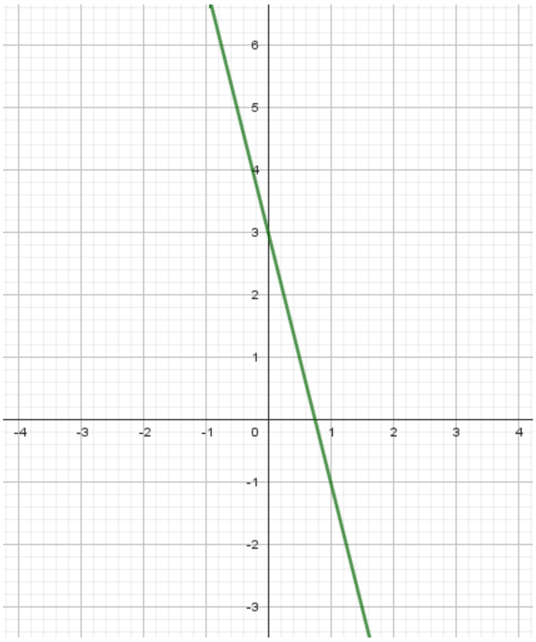
$$f(x_2) > f(x_1).$$

Portanto, a função $y = 3x + 2$ é crescente para todo o seu domínio.

Uma função decrescente é aquela em que o valor da variável y diminui sempre que a variável x aumenta.

Um exemplo de função decrescente é a função $y = -4x + 3$. Isso porque a medida em que vamos aumentando os valores atribuídos a x, os valores encontrados de y vão diminuindo. Assim, quando o valor de x aumenta uma unidade, o valor de y diminiu 4 unidades, ou seja, essa é uma função decrescente. Observe o gráfico decrescente da função $y = -4x + 3$ na Figura 10.

FIGURA 10: Gráfico da função $y = -4x + 3$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Assim, o valor de y diminui quando aumentamos o valor de x, e desse modo, a função é decrescente.

Mostre que a função $y = -5x + 1$ é decrescente.

Para isso, usamos a relação

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$$

Multiplica-se os dois lados pelo valor do coeficiente angular $(a = -5)$

$$x_2 > x_1$$

$$-5x_2 < -5x_1,$$

soma-se 1 dos dois lados

$$-5x_2 + 1 < -5x_1 + 1,$$

por fim,

$$f(x_2) < f(x_1).$$

Logo, a função $y = -5x + 1$ é decrescente para todo o seu domínio.

As funções possuem algumas propriedades que as caracterizam.

Dizemos que uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é **injetora** quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 de $\mathbb{A}$, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Pela contrapositiva, quando $x_1 \neq x_2$, em $\mathbb{A}$, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

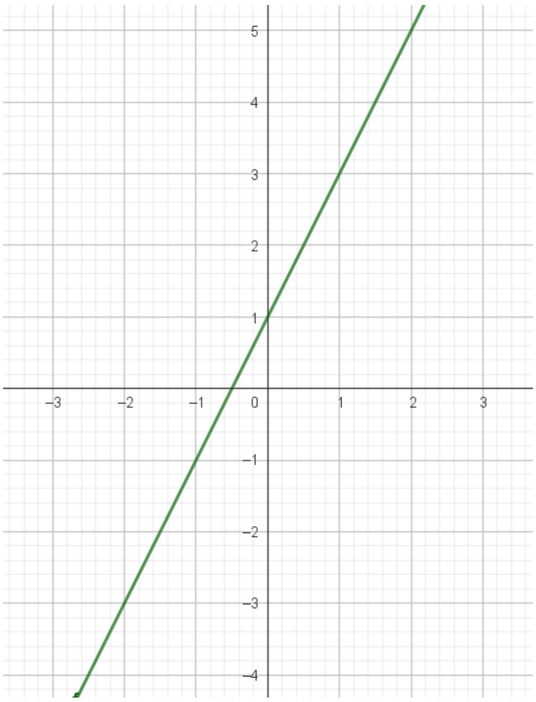
A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = 2x + 1$ é injetora. Pois, para todos x_1 e x_2 em $\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 2x_1 + 1 &= 2x_2 + 1 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ 2 \cdot (x_1 - x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Como $2 \cdot (x_1 - x_2) = 0$, então $(x_1 - x_2) = 0$ e portanto $x_1 = x_2$.

Por exemplo, dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2x + 1$, vejamos o seu gráfico na Figura 11.

FIGURA 11: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Podemos observar que, para cada elemento do domínio, existe uma única imagem distinta no contradomínio. Por exemplo, quando $x = 1$, temos que $f(1) = 3$, e quando $x = 2$, temos $f(2) = 5$. Isso nos mostra que nenhum valor de y se repete para diferentes valores de x, o que caracteriza a função como injetora.

Dizemos que uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é **sobrejetora** quando para todo $y \in \mathbb{B}$, existe pelo menos um $x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = y$. Por exemplo, se temos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = 2x + 1$ ela é sobrejetora.

Verifiquemos que $f(x) = 2x + 1$ é sobrejetora. Seja y um elemento do contradomínio da função, e vejamos se existe alguém no domínio que chega nele. Para isso basta fazer $f(x) = y$, ou seja, $y = 2x + 1$, donde obtemos

$$x = \frac{y - 1}{2}.$$

Agora, faremos a verificação com $x = \dfrac{y-1}{2}$, temos

$$f(x) = f\left(\frac{y-1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y.$$

Assim, dado $y \in \mathbb{B}$, existe $x = \dfrac{y-1}{2}$, tal que, $f\left(\dfrac{y-1}{2}\right) = y$. Logo a função $y = 2x + 1$ é sobrejetora. Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ chama-se **bijetora** (ou bijetiva) quando é injetora e sobrejetora ao mesmo tempo.

Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é bijetora se, e somente se, para todo $b \in \mathbb{B}$, a equação $f(x) = b$ possui uma única solução $a \in \mathbb{A}$. Logo, se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é bijetora se, e somente se, para toda reta $y = b$, $b \in \mathbb{B}$, a intersecção do gráfico de f com essa reta ocorre em um único ponto.

Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e g: $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ são funções bijetoras, então $gof : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ é bijetora.

Na composta de funções injetoras é injetora e que a composta de funções sobrejetoras é sobrejetora; para verificar se essas informações são verdadeiras, faremos a demonstração das duas.

Afirmação da função injetora: Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e se $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ são injetivas, então $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ é injetiva. Demonstração:

$$f \text{ é injetiva} \Leftrightarrow x, y \in \mathbb{A},\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$
$$g \text{ é injetiva} \Leftrightarrow f(x), f(y) \in \mathbb{B},\ g(f(x)) = g(f(y)) \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Temos que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y))$. Mas g é injetiva, logo, $f(x) = f(y)$. Da injetividade de f segue que $x = y$. Portanto, $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ é uma função injetora.

Afirmação da função sobrejetora: Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e se $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ são funções sobrejetoras, então $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ é sobrejetora. Para provar que $g \circ f : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ é sobrejetora, precisamos mostrar que, para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $x \in \mathbb{A}$ tal que

$$(g \circ f)(x) = z$$

Inicialmente consideramos o seguinte:

$$g \text{ sobrejetora} \Rightarrow \text{ dado } z \in \mathbb{C} \text{ existe } y \in \mathbb{B}; g(y) = z.$$
$$f \text{ sobrejetora} \Rightarrow \text{ dado } y \in \mathbb{B} \text{ existe } x \in \mathbb{A}; f(x) = y.$$

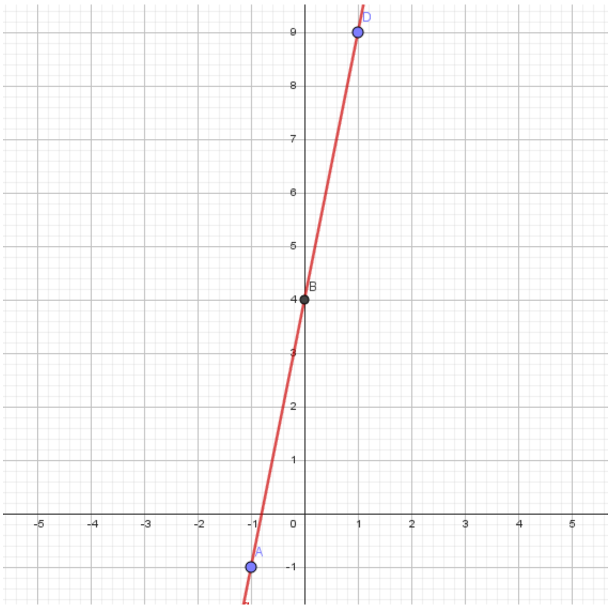
Assim, temos dado $z \in \mathbb{C}$ existe $x \in \mathbb{A}$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Portanto, $g \circ f$ é uma função sobrejetora.

Logo se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e g: $g : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ são funções bijetoras, então $gof : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ é bijetora. A exemplo disso, reparemos o gráfico da função $f(x) = 5x + 4$ na Figura 12 abaixo.

FIGURA 12: Gráfico da função $f(x) = 5x + 4$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

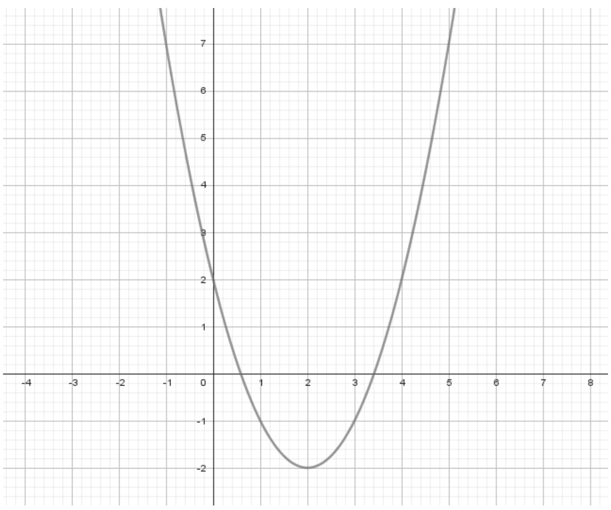
As **transformações em gráficos** de funções podem ser classificadas em translações, reflexões e rotações. Mas neste trabalho iremos nos restringir somente as duas primeiras.

A **translação** nada mais é do que uma denominação usada para mover gráficos. Assim, a translação faz com que um gráfico se desloque de acordo com a movimentação de cada ponto. Trabalharemos dois tipos de translação: A vertical e a horizontal. Desse modo, seguimos como exemplo a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é dada por

$$f(x) = x^2 - 4x + 2.$$

Observe o gráfico na Figura 13.

FIGURA 13: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x + 2$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Na **translação horizontal** há uma movimentação do gráfico horizontalmente, e para que isso ocorra, somamos uma constante k no domínio da função, isto é, $f(x+k)$. Somando um número positivo, movemos a função para esquerda. Podemos perceber isso, fazendo $h(x) = f(x+3)$, com $k = 3$, obtemos

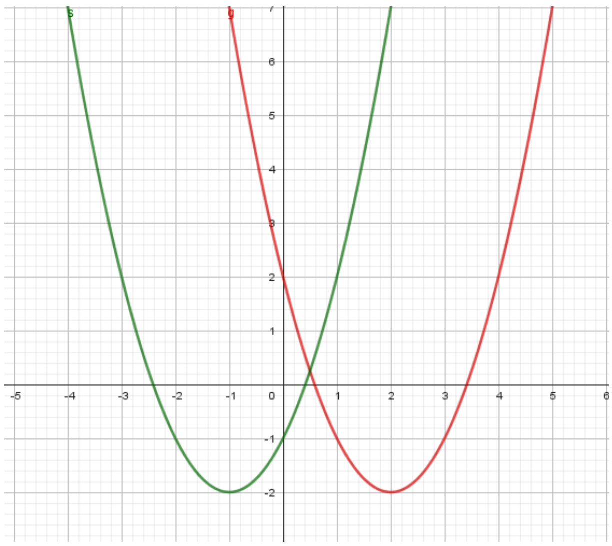
$$h(x) = (x+3)^2 - 4(x+3) + 2 = x^2 + 6x + 9 - 4x - 12 + 2,$$

logo

$$h(x) = x^2 + 2x - 1.$$

Vejamos o esboço do gráfico a função $h(x) = x^2 + 2x - 1$, na Figura 14.

FIGURA 14: Gráfico da função $h(x) = x^2 + 2x - 1$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Comparando as raízes da função h com as raízes da função f percebemos que as raízes de h são as raízes de f deslocadas três unidades para esquerda, e isso se repete em todos os pontos, basta olhar para os gráficos das funções f que está de vermelho e da função h que está em verde.

Como antes, se somarmos um número negativo no domínio da função $f(x) = x^2 - 4x + 2$, o deslocamento do gráfico ocorrerá para a direita. Assim, como exemplo, usamos $k = -3$. Desenvolvendo o $h(x)$, encontramos

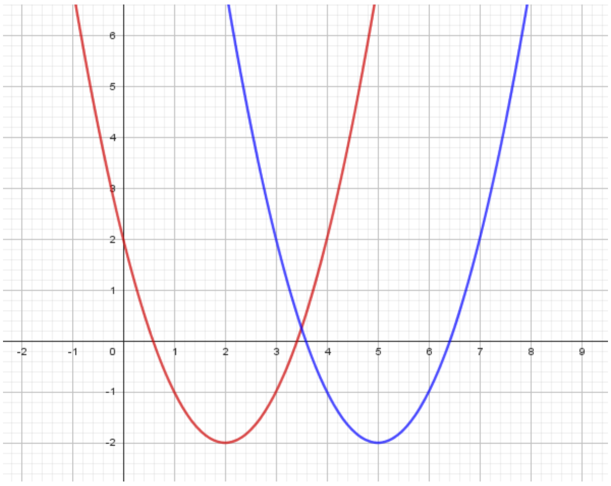
$$h(x) = f(x-3) = (x-3)^2 - 4 \cdot (x-3) + 2 = x^2 - 6x + 9 - 4x + 12 + 2,$$

e portanto,

$$h(x) = x^2 - 10x + 23.$$

Veja o gráfico abaixo que representa essa situação na Figura 15.

FIGURA 15: Gráfico da função $h(x) = x^2 - 10x + 23$.



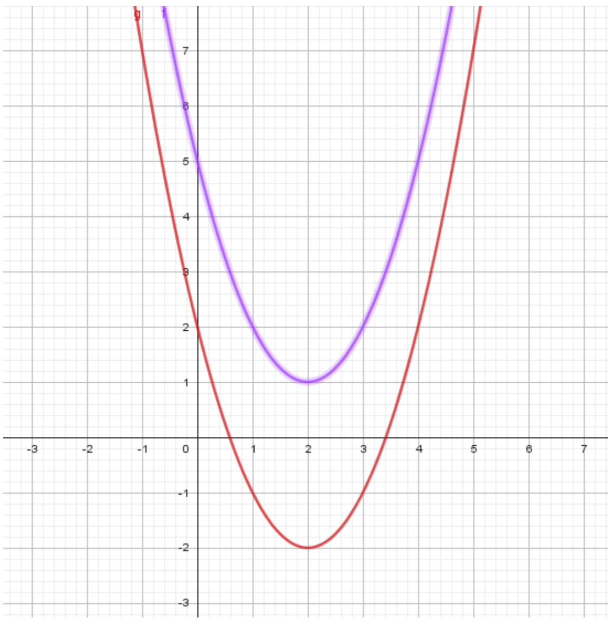
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Comparando as raízes da função h com as raízes da função f percebemos que as raízes de h são as raízes de f deslocadas três unidades para direita, e isso se repete em todos os pontos, basta olhar para os gráficos das funções f que está de vermelho e da função h que está em azul. A **translação vertical** é obtida somando uma constante k à função, isto é, $f(x) + k$. Se $k > 0$, o deslocamento é para cima e, se $k < 0$, o deslocamento é para baixo. Vejamos, como exemplo, a função $g(x) = f(x) + 3$. Assim,

$$g(x) = f(x) + 3 = (x^2 - 4x + 2) + 3,$$

logo $g(x) = x^2 - 4x + 5$. O gráfico da função f que está em vermelho foi movimentado 3 unidades para cima, veja o gráfico em roxo que representa a função g, como vemos na Figura 16 a seguir:

FIGURA 16: Gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x + 5$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Considerando $k < 0$, o deslocamento acontecerá para baixo. Vejamos, como exemplo, a função $g(x) = f(x) - 3$, assim,

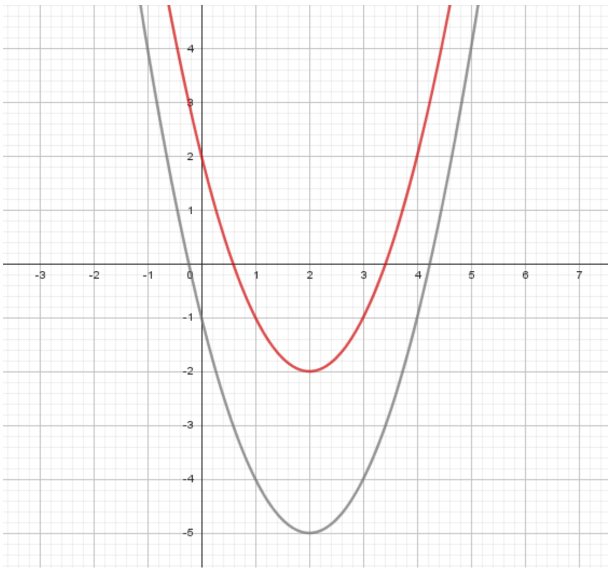
$$g(x) = f(x) - 3 = (x^2 - 4x + 2) - 3,$$

então

$$g(x) = x^2 - 4x - 1.$$

O gráfico foi movimentado 3 unidades para baixo, como vemos na Figura 17

FIGURA 17: Gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x - 1$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

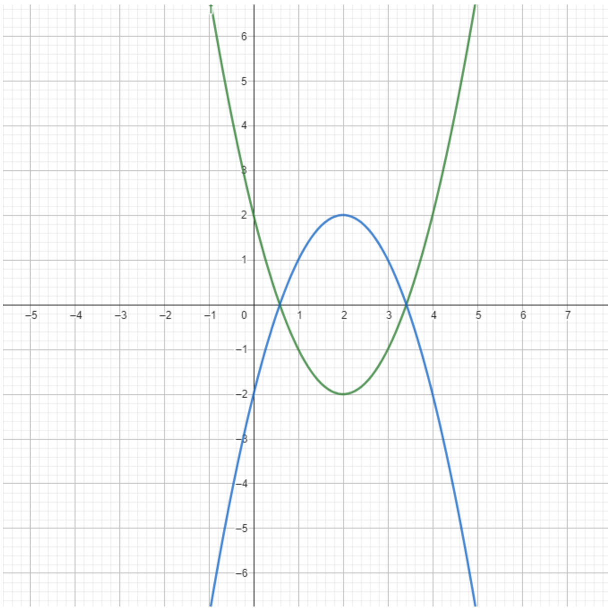
A reflexão de uma função acontece quando seu gráfico é espelhado em relação a um eixo ou a uma reta qualquer, ou seja, os pontos que estão a uma certa distância de um eixo são refletidos para o outro lado desse eixo a uma mesma distância. Visto isso, podemos trabalhar com a reflexão do gráfico de uma função em relação ao eixo y e em relação ao eixo x.

Reflexão em relação ao eixo x: A reflexão de uma função f é feita em relação ao eixo das abscissas, em que uma nova função g é encontrada, por exemplo, por meio da função $f(x) = x^2 - 4x + 2$ na relação: $g(x) = -f(x)$, ou seja,

$$\begin{aligned} g(x) &= -(x^2 - 4x + 2) \\ &= -x^2 + 4x - 2. \end{aligned}$$

Vejamos abaixo a sua representação gráfica na Figura 18.

FIGURA 18: Gráfico da função $g(x) = -x^2 + 4x - 2$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

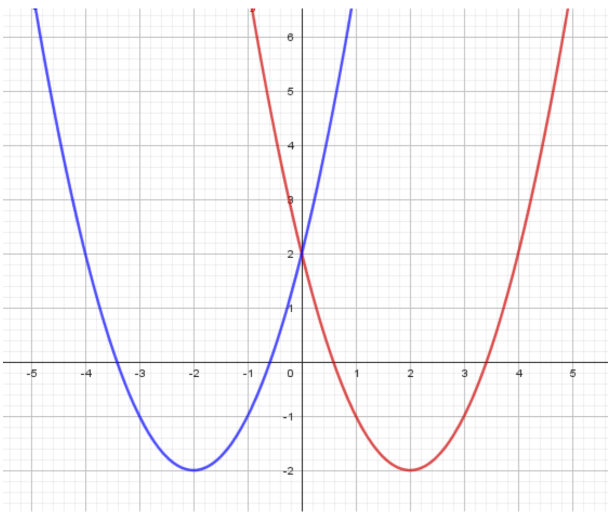
Veja que de fato ocorre uma reflexão entre as funções $f(x) = x^2 - 4x + 2$ (que está de cor verde) e $g(x) = -x^2 + 4x - 2$ (que está de cor azul) em relação ao eixo das abscissas. É importante pontuarmos que ambas as funções possuem as mesmas raízes, pois podemos ver no gráfico que elas cruzam os mesmos pontos no eixo x.

Reflexão em relação ao eixo y: Quando a reflexão de uma função f é feita em relação ao eixo das ordenadas, a função h é obtida mediante a seguinte relação: $h(x) = f(-x)$, para todo x do domínio da f. Vejamos

$$\begin{aligned} h(x) &= (-x)^2 - 4(-x) + 2 \\ &= x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

Observe a seguir o esboço do seu gráfico na Figura 19.

FIGURA 19: Grafico da função $h(x) = x^2 + 4x + 2$.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

O gráfico da função h (que está de cor azul) é uma reflexão da função f (que está de cor vermelha) em relação ao eixo das ordenadas. As raízes de h são $x' = -2 + \sqrt{2}$ e $x'' = -2 - \sqrt{2}$, que são os opostos das raízes de f. Isso acontece de maneira similar em todos os pontos da função.

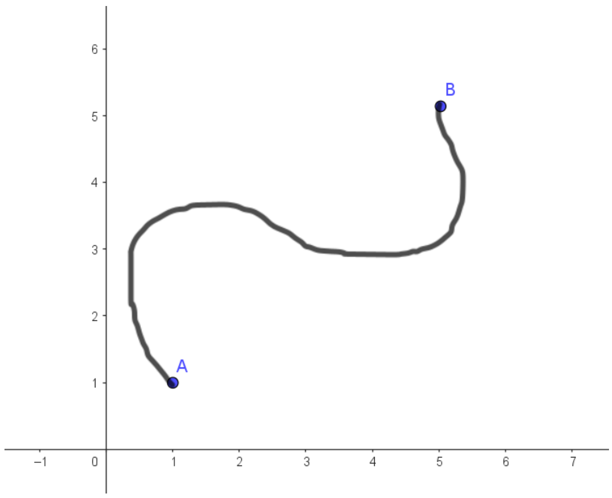
2.1 Função Afim

Definição 5 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com a e b reais, é chamada de função afim.*

Exemplo 8 *A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Além disso, são afins as translações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São também casos particulares de funções afins as funções lineares, $f(x) = ax$, e as funções constantes, $f(x) = b$.*

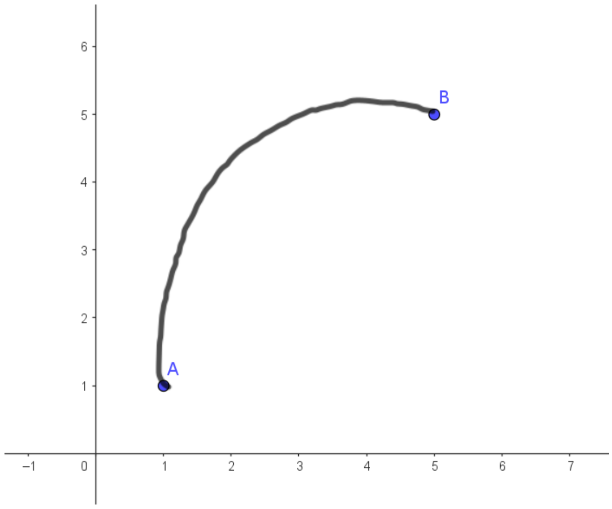
Consideremos a seguinte afirmação: ***"O gráfico G de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma linha reta"*** (Lima, 2016). Mas será que isso é realmente verdade? Será que não poderia existir alguma curva entre os pontos, ao invés de uma linha reta? Para provocar essa reflexão, observe as Figuras 20 e 21 a seguir:

FIGURA 20: Exemplo de curvas ligando dois pontos; A e B



Fonte: Próprio autor da pesquisa

FIGURA 21: Exemplo de curvas ligando dois pontos; A e B.



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Podemos observar, nas Figuras 20 e 21, que é possível ligar dois pontos distintos por meio de diferentes tipos de curvas. Essas representações ilustram a variedade de caminhos possíveis entre pontos em um plano, dependendo da função ou da curva escolhida. No entanto, queremos entender por que, no caso específico de funções afins, o gráfico não envolve curvas; ele é necessariamente uma linha reta.

Estamos acostumados a simplesmente aceitar que o gráfico de uma função afim é uma reta, mas não nos questionamos o porquê. Com base na afirmação dada anteriormente, provaremos como e por que isso acontece. Para demonstrarmos isso, basta considerarmos que dados três pontos quaisquer pertencentes ao gráfico da função,

$$P_1 = (x_1,\ ax_1 + b)$$
$$P_2 = (x_2,\ ax_2 + b)$$
$$P_3 = (x_3,\ ax_3 + b),$$

são colineares. Podemos supor, sem perda de generalidade, que as abscissas $x_1,\ x_2$ e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A desigualdade triangular afirma que

$$d(P_1,\ P_3) \leq d(P_1,\ P_2) + d(P_2,\ P_3),$$

e a igualdade só ocorre em pontos alinhados. Em resumo, precisamos mostrar que a distância do primeiro ponto até o terceiro é igual à soma das distâncias do primeiro até o segundo e do segundo até o terceiro. Usaremos a fórmula da distância entre dois pontos para calcular a distância entre cada um desses pontos dados. Dessa forma, calculemos a distância entre P_1 e P_2 do seguinte modo

$$\begin{aligned} d(P_1,\ P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 - ax_1)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [a(x_2 - x_1)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2(1 + a^2)} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Agora, calculemos a distância entre P_2 e P_3, obtendo

$$\begin{aligned} d(P_2,\ P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2(1 + a^2)} \\ &= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

E por último, a distância entre P_1 e P_3, onde encontramos

$$\begin{aligned} d(P_1,\ P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2(1 + a^2)} \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}. \end{aligned}$$

Com isso, temos que

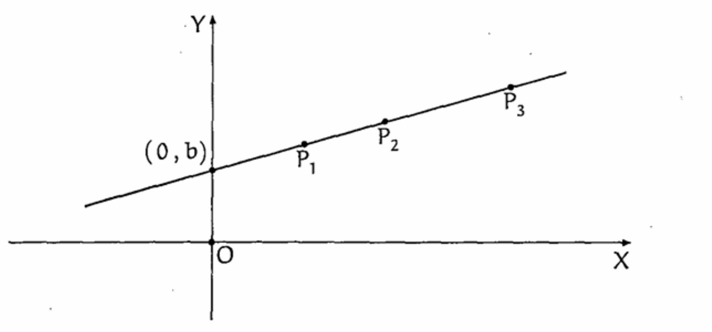
$$d(P_1,\ P_3) = d(P_1,\ P_2) + d(P_2,\ P_3),$$

pois

$$\begin{aligned} (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} &= (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} + (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} \\ &= (\sqrt{1 + a^2})[(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2)] \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \end{aligned}$$

e confirmamos que de fato isso acontece. Veja na Figura 22 uma interpretação geométrica do fato anterior.

FIGURA 22: Gráfico da função $f(x) = ax + b$ contendo os pontos P_1, P_2, P_3



Fonte: (Lima, 2016)

A Figura 22 apresenta o gráfico da função $f(x) = ax + b$, ou seja, de uma função afim. Nesse gráfico, o valor de b representa a ordenada (o valor de y) do ponto onde a reta corta o eixo OY (o eixo vertical). O ponto $(0, b)$, que marca essa interseção com o eixo Y, está destacado na figura. Além disso, observa-se que os pontos P_1, P_2 e P_3 estão alinhados sobre a mesma reta, de modo que a distância de P_1 até P_3 é igual à soma das distâncias de P_1 até P_2 e de P_2 até P_3. Finalizando a nossa prova.

Em uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, os números reais a e b são chamados de coeficiente angular e linear respectivamente, e de acordo com seus valores a função afim recebe algumas classificações. Se $a > 0$, a função é crescente, e se $a < 0$, a função é decrescente.

A função $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente para $a > 0$ e estritamente decrescente para $a < 0$.

Vamos demonstrar que para $a > 0$ a função é crescente. A demonstração para o caso $a < 0$, em que a função é decrescente, é semelhante à que faremos a seguir.

Supondo $a > 0$ e sejam $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R};\ x_1 < x_2$, ou seja,

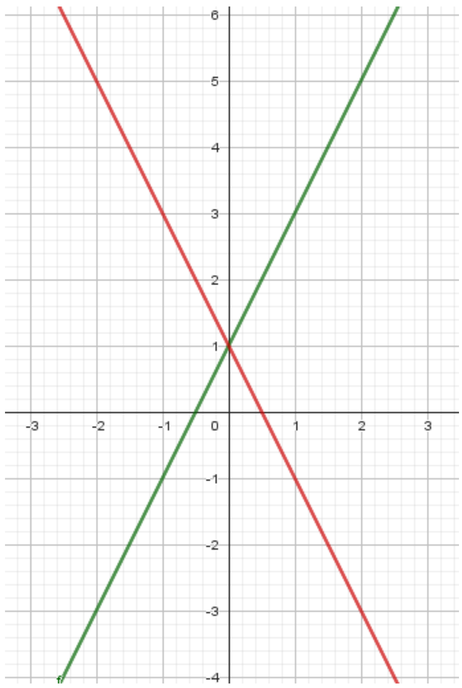
$$x_1 - x_2 < 0. \tag{2.1}$$

Temos que $f(x_1) - f(x_2) = ax_1 + b - ax_2 - b = a \cdot (x_1 - x_2)$. De (2.1) e do fato que $a > 0$, concluímos que

$$f(x_1) - f(x_2) < 0.$$

Como exemplo, observe a Figura 23 a seguir:

FIGURA 23: Gráfico das funções lineares $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = -2x + 1$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Observamos que a função f, que está de cor verde é crescente, enquanto que a função g, que está de vermelho, é decrescente. Notamos ainda que essas duas funções se cruzam no ponto (0,1).

Zero da função: Em uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$, um valor de x pertencente a $\mathbb{A}$, tal que $f(x) = 0$ é chamado zero da função f.

Considerando $f(x) = ax + b$, temos

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a},$$

e x representa o valor onde se toca o eixo das abscissas. Este ponto é importante quando fazemos o estudo do sinal de uma função, isto é, observamos os elementos que fazem parte do seu domínio, de modo que a imagem da função seja um número positivo, negativo ou nulo.

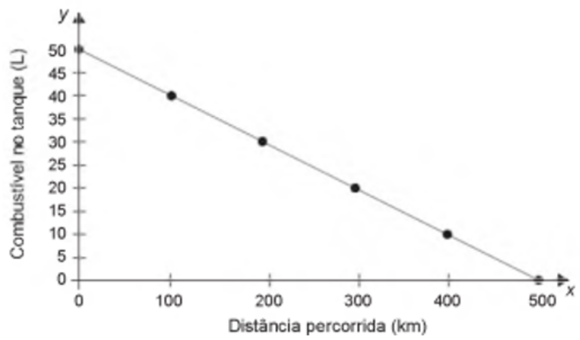
Considerando uma função f, de domínio $D(f)$, temos:

- f é positiva para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) > 0$;
- f é negativa para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) < 0$;
- f é nula para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) = 0$ (zeros da função).

Vejamos uma aplicação de função afim.

Exemplo 9 *Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal). Veja a Figura 24*

FIGURA 24: Quantidade no tanque (y) versus a sua distância percorrida (x)



Fonte: (ENEM, 2018 – PPL)

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:

a) $y = -10x + 500$

b) $y = \dfrac{-x}{10} + 50$

c) $y = \dfrac{-x}{10} + 500$

d) $y = \dfrac{x}{10} + 50$

e) $y = \dfrac{x}{10} + 500$

Solução: Considerando $f(x) = ax + b$ e o ponto $(0,\ 50)$, temos

$$\begin{aligned} f(0) &= 50 \\ 50 &= a \cdot 0 + b \\ b &= 50. \end{aligned}$$

Como $b = 50$, para encontrar o valor de a, pega-se outro ponto do gráfico, assim, considerando $f(x) = ax + b$ e o ponto $(0,\ 500)$, temos

$$\begin{aligned} f(500) &= 0 \\ 50 &= a \cdot 500 + 50 \\ -50 &= a \cdot 500 \\ a &= \frac{-50}{500} \\ a &= \frac{-1}{10}. \end{aligned}$$

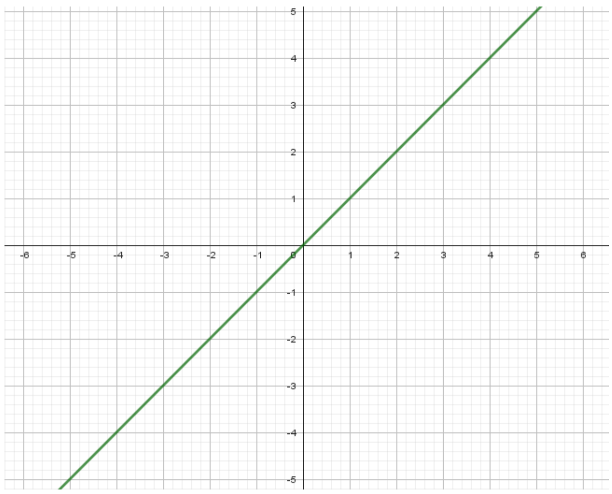
Substituindo os valores em $f(x) = ax + b$:

$$f(x) = \frac{-1}{10}x + 50,$$

logo, a expressão algébrica procurada é $f(x) = \dfrac{-1}{10}x + 50$.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é chamada de **função identidade**. Observe a Figura 25 a seguir.

FIGURA 25: Gráfico da função identidade $f(x) = x$

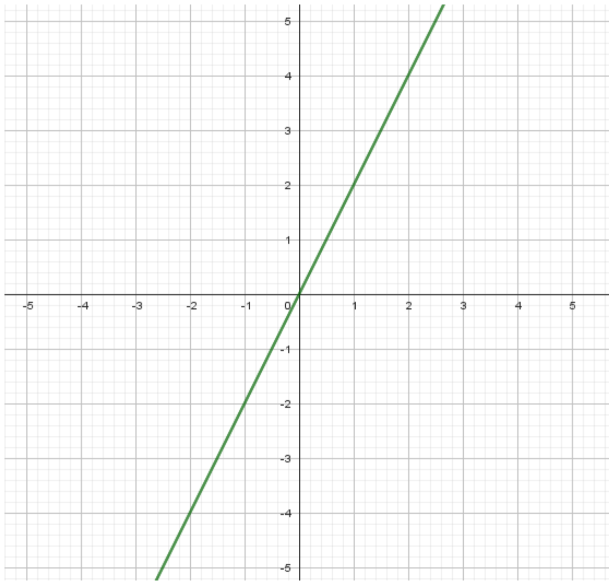


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Notamos que seu gráfico de cor verde é crescente considerando $a = 1$, e ele passa pela origem do gráfico, isso ocorre devido b ser igual a 0.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, com $a \neq 0$ e real, é chamada de **função linear.** Observe como exemplo, o esboço do gráfico da função $f(x) = 2x$ na Figura 26.

FIGURA 26: Gráfico da função linear $f(x) = 2x$

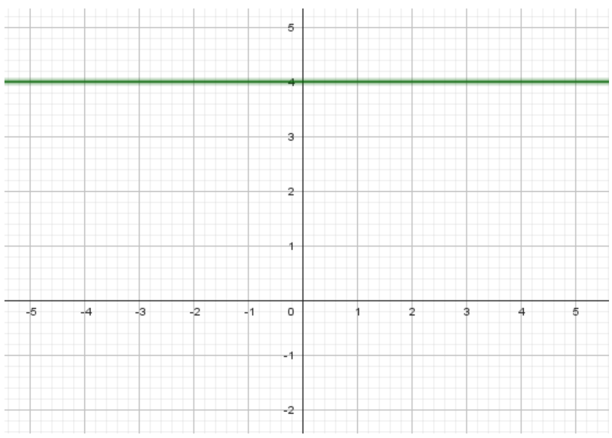


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Perceba que seu gráfico passa pela origem, isso acontece devido o coeficiente linear ser igual a zero. Essa é a principal característica de uma função linear, caso particular da função afim. Além disso, é importante destacarmos aqui que, quanto maior for o valor de a, maior será a inclinação da reta, que representa o coeficiente angular.

A função de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, com b real, é chamada de **função constante.** Veja o gráfico da função constante $f(x) = 4$ na Figura 27.

FIGURA 27: Gráfico da função linear $f(x) = 4$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Nesta figura, a função $f(x) = 4$ é constante, pois o seu gráfico é paralelo ao eixo das abscissas (o eixo x).

2.2 Função Quadrática

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De inicio, destacamos que os coeficientes a, b e c da função quadrática são identificados pelos valores que essa função assume, ou seja, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a', b = b'$ e $c = c'$.

Considerando $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E ao tomarmos $x = 0$, encontramos $c = c'$. Como eles são iguais, podemos usar a lei do cancelamento, obtendo $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Agora, cancelando o x, obtemos $ax + b = a'x + b'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dessa forma, fazendo $x = 1$ e $x = -1$, encontramos respectivamente $a + b = a' + b'$ e $-a' + b'$, concluindo então que $a = b$ e $a' = b'$. Isso significa que uma função quadrática pode ser vista como um trinômio do segundo grau. Um *trinômio do segundo grau* é uma expressão formal do tipo $aX^2 + bX + c$, com $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$. A cada trinômio corresponde a função quadrática definida por $x \mapsto ax^2 + bx + c$. Isso quer dizer que essa correspondência (trinômio $\mapsto$ função quadrática) é biunívoca. (Pela definição de função quadrática, essa correspondência é sobrejetiva.)

O estudo das funções quadráticas surgiu a partir da necessidade de resolver equações do segundo grau. Em textos escritos por babilônios há cerca de quatro mil anos, têm-se, por exemplo, a ideia de encontrar dois números sabendo a sua soma s e o seu produto p. Geometricamente, o problema consiste em encontrar as medidas dos lados de um retângulo, sabendo-se o valor do semi-perímetro s e da área p (Lima, 2016).

2.2.1 A Forma Canônica do Trinômio

Tome o trinômio

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right].$$

Nosso objetivo aqui é reescrever esse trinômio como um quadrado perfeito, o que comumente chamaos de método de completar o quadrado. Mas para isso, vamos focar inicialmente nos dois primeiros termos da expressão dentro do colchete, que queremos escrever como um produto notável. Observe que

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c.
\end{aligned}$$

Fazendo algumas manipulações, temos que

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+c\\
&= a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}+c\\
&= a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}\\
&= a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Assim, podemos reescrever o trinômio ax^2+bx+c do seguinte modo:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Essa forma de escrever o trinômio do segundo grau, que é conhecida como forma canônica, traz algumas consequências importantes. Primeiramente, ela nos permite calcular a fórmula das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$. De fato, sendo $a\neq 0$, temos as seguintes equivalências

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0 && (1)\\
&\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} && (2)\\
&\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} && (3)\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. && (4)
\end{aligned}$$

Observe que, ao passarmos da linha (2) para a linha (3), estamos tirando a raiz quadrada dos dois lados da equação (lembrando que raiz quadradra é injetora) , isto é,

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

Essa operação só acontece no conjunto dos números reais se o valor dentro da raiz, ou seja, o discriminante $\Delta=b^2-4ac$, for maior ou igual a zero. Mas isso só acontece devido a raiz quadrada de um número negativo não está definida nos reais, apenas nos números complexos. Logo, se $\Delta<0$, não podemos seguir com essa igualdade no conjunto $\mathbb{R}$, pois $\sqrt{\Delta}$ seria um número complexo.

Entretanto, quando $\Delta<0$, a linha (1):

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0$$

ainda faz sentido e nos ajuda a compreender o porquê não existe uma solução real. Pois a expressão $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ representa o quadrado de uma número real, e como todo número real ao quadrado é sempre maior ou igual a zero. Logo, se $\Delta < 0$, a equação não admitirá solução dentro do conjunto dos reais.

Em relação a fórmula (4), temos que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é positivo. Além disso, $ax^2 + bx + c = 0$ apresenta duas raízes reais e distintas, que são dadas por

$$\alpha = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$\beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},$$

sabendo que $\alpha < \beta$. Agora calculemos a soma entre essas raízes

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\
&= \frac{-2b}{2a}\\
&= \frac{-b}{a},
\end{aligned}$$

logo

$$s = \alpha+\beta = \frac{-b}{a}.$$

Nesse momento, calculemos o produto entre α e β

$$\begin{aligned}
\alpha\cdot\beta &= \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\\
&= \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}\\
&= \frac{b^2-\Delta}{4a^2}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\Delta = b^2 - 4ac$, então temos que

$$b^2-\Delta = b^2-(b^2-4ac) = 4ac.$$

Portanto,

$$\alpha\cdot\beta = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a},$$

e dessa forma

$$p = \alpha\cdot\beta = \frac{c}{a}.$$

Vamos agora tratar de um ponto muito importante no estudo das funções quadráticas. Suponhamos que $a > 0$ e seja

$$f(x) = ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Sabemos que o primeiro termo dentro do colchete é sempre maior que ou igual a zero e a segunda parcela é uma constante. Sendo assim, o menor valor para a função ocorre quando $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$, ou seja $x=-\dfrac{b}{2a}$. Substituindo essa valor na função, temos

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right)=c-\left(\frac{b^2}{4a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Se $a<0$, o valor $f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)$ é o maior valor que $f(x)$, assume para qualquer $x\in\mathbb{R}$.

A forma canônica ainda nos ajuda a responder a seguinte pergunta: Dada a função quadrática $f(x)=ax^2+bx+c$, para quais valores $x\neq x'$ tem-se $f(x)=f\left(x'\right)$?

Da forma canônica, temos que $f(x)=f\left(x'\right)$ se, e somente se,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(x'+\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Extraindo a raiz dos dois lados temos duas opções $x'+\dfrac{b}{2a}=-\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$, ou $x'+\dfrac{b}{2a}=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$, mas como estamos supondo $x\neq x'$, isto significa que

$$x'+\frac{b}{2a}=-\left(x+\frac{b}{2a}\right),$$

ou seja

$$\frac{x+x'}{2}=\frac{-b}{2a}.$$

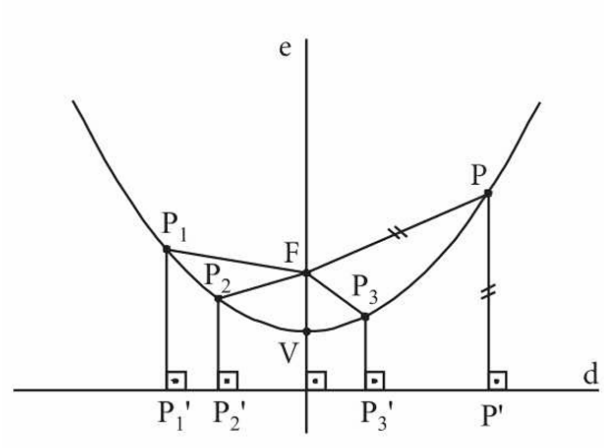
Portanto a função quadrática assume o mesmo valor para $x\neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $\dfrac{-b}{2a}$.

2.2.2 O Gráfico da Função Quadrática

Aprendemos que o gráfico da função quadrática é uma **parábola**. Mas conforme Winterle (2014), uma parábola é o conjunto de todos os pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo e de uma reta fixa desse plano.

Diante disso, consideremos uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Vejamos a Figura 28.

FIGURA 28: Ideia ilustrativa entre a diretriz d e o foco F



Fonte: (Winterle, 2014)

Nessa figura, estão assinalados cinco pontos (P_1, P_2, V, P_3, P) que são equidistantes do ponto F e da reta d. Então, um ponto qualquer P pertence à parábola se, e somente se,

$$d(P, F) = d(P, d),$$

ou, de modo equivalente,

$$d(P, F) = d(P, P').$$

sendo P' o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta d.

Ainda da Figura 28, podemos pontuar alguns elementos importantes. São eles:

- **Foco:** é o ponto F.
- **Diretriz:** é a reta d.
- **Eixo:** é a reta e que passa por F e é perpendicular a d. É fácil ver pela própria definição de parábola que essa curva é simétrica em relação ao seu eixo.
- **Vértice:** é o ponto V de interseção da parábola com o seu eixo.

No exemplo a seguir verificaremos que de fato o gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

Exemplo 10 *Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4a}$.*

A prova deste resultado usa conceitos de Geometria analítica. Segundo ela basta verificarmos que um ponto qualquer $P\,(x, ax^2)$ do gráfico de f deve satisfazer $d(P, F) = d(P, d)$, ou seja,

$$\sqrt{(x-0)^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2} = ax^2 - \left(-\frac{1}{4a}\right).$$

Elevando-se ao quadrado a equação anterior e usando produto notável obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 &= x^2 + a^2x^4 - 2ax^2 \cdot \frac{1}{4a} + \frac{1}{16a^2} \\ &= x^2 + a^2x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \\ &= a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2} \\ &= \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2. \end{aligned}$$

De modo geral, se a parábola tem vértice $V\,(x_0, y_0) \neq (0,0)$, então sua equação é da forma

$$(x - x_0)^2 = 4p\,(y - y_0)\,.$$

Vejamos a validez disso. Desenvolvendo ambos os lados dessa igualdade, e após isso, isolando o y, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_0x + x_0^2 &= 4py - 4py_0, \\ 4py &= x^2 - 2x_0x + x_0^2 + 4py_0 \\ y &= \frac{1}{4p}x^2 - \frac{2x_0}{4p}x + \frac{x_0^2 + 4py_0}{4p} \\ &= \frac{1}{4p}x^2 - \frac{x_0}{2p}x + \frac{x_0^2}{4p} + y_0. \end{aligned}$$

Agora, façamos uma comparação com a função quadrática $ax^2+bx+c = 0$. Onde notamos que

- $a = \dfrac{1}{4p}$ $(p = \dfrac{1}{4a})$;
- $b = -\dfrac{x_0}{2p} = -2ax_0$;
- $c = \dfrac{x_0^2}{4p} + y_0 = ax_0^2 + y_0$.

Temos em mente que o vértice da parábola $y = ax^2+bx+c$ têm as cordenadas $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ e $y_0 = f(x_0) = c - ax_0^2$. Pois,

$$y_0 = c - ax_0^2.$$

Substituindo $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ na fórmula acima, obtemos

$$\begin{aligned} y_0 &= c - a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 \\ &= c - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} \\ &= c - \frac{b^2}{4a} \\ &= \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Onde vemos que x_0 e y_0 são as coordenadas do vértice da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De modo geral a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, tem como gráfico uma parábola no qual

- o foco é $F = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$;
- a diretriz d é $y = \dfrac{4ac - b^2 - 1}{4a}$;
- o vértice é $V = \left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

A prova deste resultado pode ser visto em Lima (2016).

Além da forma do gráfico, outra informação importante em uma função quadrática é o discriminante (visto anteriormente) $\Delta = b^2 - 4ac$, pois ele determina a natureza das raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$. Dependendo do valor de Δ, temos diferentes comportamentos no gráfico da parábola em relação ao eixo x:

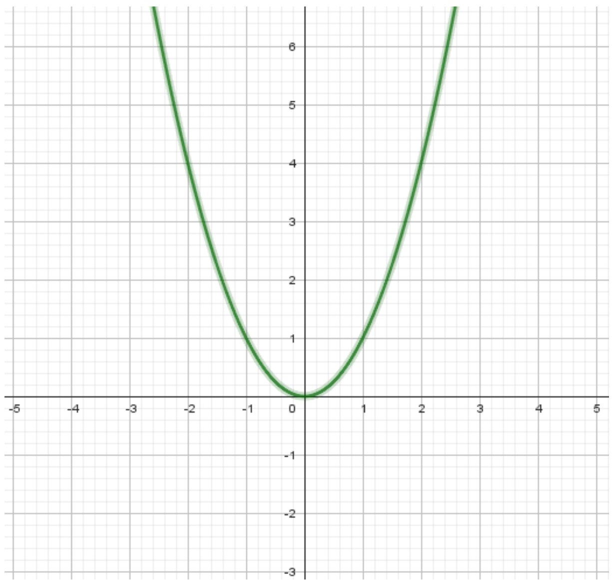
$\Delta > 0$: Duas raízes reais distintas;

$\Delta = 0$: Duas raízes reais iguais;

$\Delta < 0$: Não possui raízes reais.

A concavidade da parábola depende do coeficiente a. Veja o gráfico da função $f(x) = x^2$ na Figura 29.

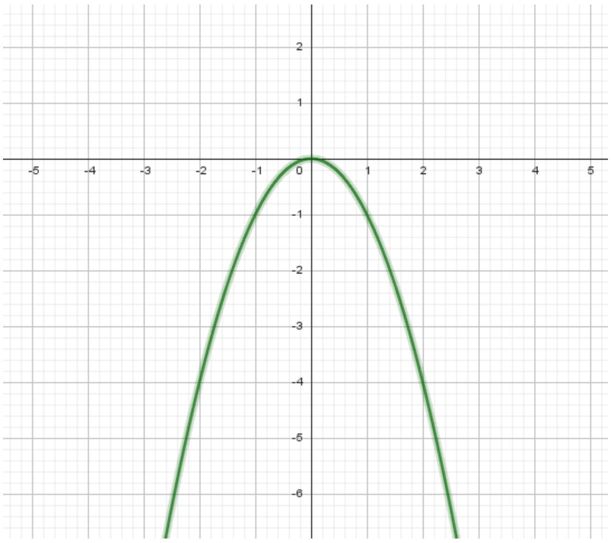
FIGURA 29: Gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Note que a sua concavidade é voltada para cima, isso acontece porque $a > 0$. Além disso, suas raízes são iguais ($x' = 0$ e $x'' = 0$) , pois o $\Delta = 0$, e portanto o seu gráfico toca em cima do eixo das ordenadas. Ademais, podemos observar também o "oposto" desta função, como mostra a Figura 30.

FIGURA 30: Gráfico da função $f(x) = -x^2$



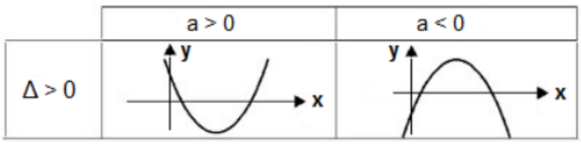
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Perceba que a sua concavidade é voltada para baixo, isto acontece porque o coeficiente de a é menor que zero, ou seja, negativo.

No estudo dos gráficos com relação ao delta (Δ), a parábola pode ser representada de seis maneiras diferentes:

Quando $\Delta > 0$, o gráfico toca o eixo x em dois pontos. Vejamos esta situação na Figura 31.

FIGURA 31: Para $\Delta > 0$

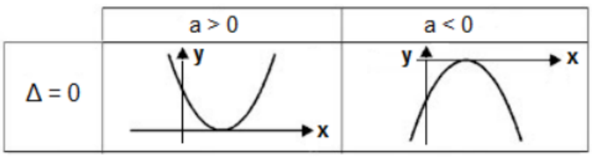


Fonte: (RABELO, 2023)

Isso quer dizer que a função apresenta duas raízes reais e distintas.

Quando $\Delta = 0$, o gráfico toca o eixo x em apenas um ponto. Veja esta ocorrência na Figura 32.

FIGURA 32: Para $\Delta = 0$

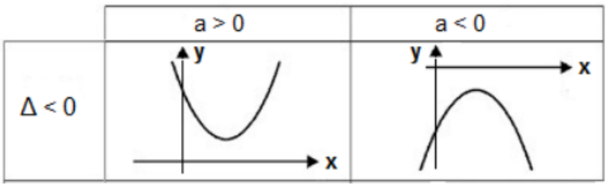


Fonte: (RABELO, 2023)

Nesse caso, a função apresentará duas raízes reais e iguais.

Quando $\Delta < 0$, o gráfico não toca o eixo x. Podemos perceber isso nos gráficos da Figura 33 a seguir.

FIGURA 33: Para $\Delta < 0$

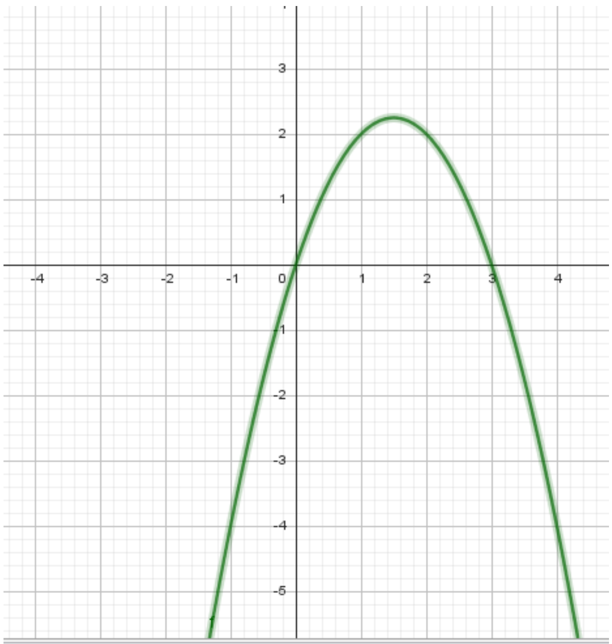


Fonte: (RABELO, 2023)

Quando isso acontece, a função não possui raízes reais.

Quando $c = 0$, o gráfico da função passa pela origem e quando $b = 0$, o gráfico tem uma simetria em relação ao eixo y.

FIGURA 34: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3x$

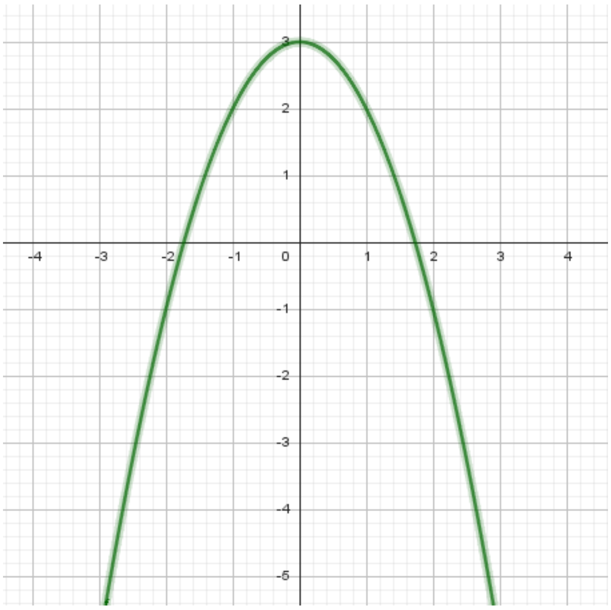


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Como dito anteriormente, se $c = 0$, o gráfico da função passa pela origem. E analisando a função $f(x) = -x^2 + 3x$, observamos que de fato ela passa pela origem, isso porque suas raízes são 0 e 3 nos pontos de coordenadas (0,0) e (0,3), como visto na Figura 34.

Do mesmo modo já citado, se $b = 0$, observamos por exemplo que o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3$, é simétrico em relação ao eixo y, como vemos de maneira bem explicíta no esboço do gráfico na Figura 35.

FIGURA 35: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 3$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

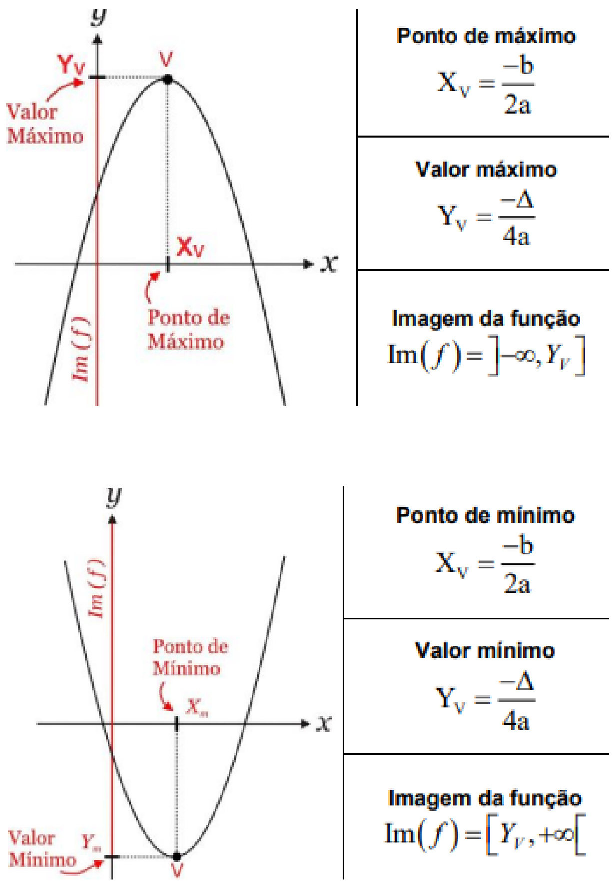
Toda parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui um ponto, chamado de vértice que é o ponto em que a função assume seu valor máximo (quando a parábola possui a concavidade voltada para baixo) ou seu valor mínimo (quando a concavidade é voltada para cima). As coordenadas do vértice V da parábola são:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

A prova deste resultado pode ser encontrada na subseção: A forma canônica do trinômio.

Veja a Figura 36 a seguir que exibe de modo ilustrativo dados sobre o ponto máximo e mínimo.

FIGURA 36: Ponto máximo e ponto mínimo



Fonte: (RABELO, 2023)

Outro fato relevante é sobre o crescimento e decrescimento da função quadrática, podemos observar nos gráficos acima que:

- Para $a > 0$, o intervalo de crescimento é (x_v, ∞) e o de decrescimento $(-\infty, x_v)$.
- Para $a < 0$, o intervalo de crescimento é $(-\infty, x_v)$ e o de decrescimento (x_v, ∞).

Vejamos um exemplo dessa situação, seja $f(x) = x^2$, sabemos que o $x_v = 0$ e assim sejam $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, com $x_2 > x_1$, ou seja ,

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1, x_2 > 0$, temos também que

$$x_1 + x_2 \geq 0.$$

Logo, pela propriedade dos reais

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0,$$

assim, $x_2^2 - x_1^2 > 0$, ou ainda, $x_2^2 > x_1^2$, portanto

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Sendo assim, a função é crescente no intervalo. O caso decrescente é análogo e por isso não será feito.

2.3 A Função Exponencial

Antes de falar sobre função exponencial tratamos de potências nos números reais. Consideremos que a seja um número real positivo. Para qualquer número natural n, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais a a. Isso quer dizer que estamos multiplicando o número a por ele mesmo n vezes. Temos que para $n = 1$, não temos um produto, pois há um único fator. Nesse viés, definimos $a^1 = a$.

A definição de potência pode ser construída passo a passo, de forma indutiva. Vejamos: Iniciamos com $a^1 = a$. Daí, segue-se que $a^{n+1} = a \cdot a^n$, isto é, multiplica-se a por ele mesmo n vezes.

Sejam m e n números naturais, então temos a seguinte propriedade

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Essa igualdade faz sentido pois estamos apenas juntando os dois grupos de multiplicações. Isto é, se multiplicamos a por ele mesmo m vezes e em seguida, por mais n vezes, ou seja, estamos multiplicando a por ele mesmo $m + n$ vezes.

Essa interpretação pode ser expandida para vários expoentes. Segue-se que, para $m_1, m_2, \ldots, m_k$, teremos que

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot \ldots \cdot a^{m_k} = a^{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Em suma, se todos esses expoentes são iguais, isto é, $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = m$, nesse caso estamos multiplicando a^m por ele mesmo k vezes. Dessa forma, têm-se que

$$(a^m)^k = a^{m \cdot k}.$$

Ora, se a base for maior que 1, ou seja $a > 1$, à medida que aumentamos o expoente, a potência cresce, assim

$$a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n < a^{n+1} < \ldots$$

Perceba que essa desigualdade mostra que, para bases maiores que 1, as potências crescem indefinidamente à medida que o expoente aumenta. Ademais, quando $0 < a < 1$, temos a seguinte relação

$$1 > a > a^2 > \cdots > a^n > a^{n+1} > \cdots.$$

Mas isso ocorre pelo fato de multiplicarmos os dois membros da desigualdade $a < 1$ por a^n. Dessa maneira, a sequência cujo termo geral é a^n será crescente quando $a > 1$, e decrescente se $0 < a < 1$. Quando $a = 1$, a sequência se torna constante, uma vez que todos os seus termos serão iguais a 1.

No entanto, se $a > 1$, a sequência formada pelas potências a^n, $n \in \mathbb{N}$, é ilimitada superiormente: isso significa dizer que, dado qualquer número real c, sempre será possível encontrar um número natural n de modo que $a^n > c$. Para provar esse resultado consideremos que $a = 1 + d$, com $d > 0$, tendo em vista, e consideremos um número $c > 0$. Temos pela desigualdade de Bernoulli que

$$(1 + d)^n > 1 + nd.$$

assim,

$$a^n > 1 + nd.$$

Iremos provar que existe n tal que $a^n > c$. Para isso, basta fazer

$$1 + nd > c.$$

Pois, se $a^n > 1 + nd$ e $1 + nd > c$, então

$$a^n > c.$$

Ao subtrairmos 1 em ambos os lados da desiguldade $1 + nd > c$, obtemos

$$\begin{aligned} nd &> c - 1 \\ n &> \frac{c-1}{d}. \end{aligned}$$

Logo, para todo $N > \dfrac{c-1}{d}$ temos que $a^n > c$, para todo $n > N$. Portanto, a sequência a^n não é limitada superiormente. Para dizermos que a sequência (a^n) cresce indefinidamente, utilizamos a seguinte notação

$$\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty.$$

Em suma, essa escrita significa que a^n tende ao infinito à medida que n cresce sem parar, de modo que $a > 1$, por suposição. De modo semelhante, se $0 < a < 1$, as potências $a, a^2, a^3, \ldots$ vão ficando cada vez menores, e se aproximando de zero. Nesse contexto, para qualquer número positivo c, por menor que ele seja, sempre podemos encontrar um valor de n de modo que

$$a^n < c.$$

Noutras palavras, essa sequência vai ficando muito pequena, o que faz com que ela ultrapasse qualquer limite inferior positivo. Indubitavelmente, se $0 < a < 1$, podemos escrever $a = \dfrac{1}{b}$, com $b > 1$. Diante disso,

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n}.$$

Sabemos que, como $b > 1$, a sequência b^n aumenta indefinidamente. Com efeito, para todo número $c > 0$, podemos encontrar um n da mesma maneira que

$$b^n > \frac{1}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b^n} < c \quad \Rightarrow \quad a^n < c.$$

Portanto, essa sequência de fato se aproxima de zero. Temos que, usando a linguagem dos limites

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0 \quad \text{quando } 0 < a < 1.$$

Lê-se: “o limite de a^n, quando n tende ao infinito, é zero.”

Em continuidade ao nosso estudo, iremos compreender como definir potências a^n quando $n \in \mathbb{Z}$, isto é, quando n for negativo, positivo ou zero.

Mas para que isso seja feito, consideraremos a regra fundamental das potências, que é dada por

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Considere o seguinte questionamento: Qual deve ser o valor de a^0 ?

Para que essa propriedade seja válida mesmo quando um dos expoentes for zero, vejamos a seguir a expressão:

$$a^0 \cdot a^1 = a^{0+1} = a^1.$$

Donde obtemos,

$$a^0 \cdot a = a.$$

Mas isso só acontece porque $a^0 = 1$. Logo, essa é a única definição coerente.

Nesse momento, analisemos os expoentes negativos. Se tomarmos um número natural n, a propriedade fundamental impõe que

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1,$$

portanto,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Consequentemente, se quisermos ampliar o conceito de potência para qualquer número real positivo $a > 0$, permitindo expoentes inteiros (sejam positivos, negativos ou zero), e ainda manter válida a propriedade

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

diante disso, definimos

- $a^0 = 1$, e
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ para todo número natural n.

Consideremos a função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(n) = a^n$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Essa função satisfaz a seguinte propriedade

$$f(m+n) = f(m) \cdot f(n),$$

ou seja, ao multiplicarmos potências de mesma base equivale à soma dos expoentes. Ademais, essa função é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Com base nessas informações, podemos concluir, por exemplo, que

- Se $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, então $a^{-n} < 1 < a^n$.
- Se $0 < a < 1$, então $a^n < 1 < a^{-n}$, pois $-n < 0$ e $a^0 = 1$.

Por meio da propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, encontramos

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

mesmo quando m e n são inteiros (positivos ou negativos).

A partir deste momento vamos ampliar a definição de potência para expoentes racionais. Suponhamos que queremos dar sentido a a^r, com $r = \dfrac{m}{n}$, donde $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Queremos que a regra adiante seja válida.

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Mas para isso, é necessário analisarmos o caso $r = \dfrac{m}{n}$. Se multiplicarmos a^r por ele mesmo n vezes, temos que

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r = a^{r+r+\ldots+r} = a^{rn} = a^m.$$

Dessa forma, a^r é o número pertencente aos naturais, no qual a potência de ordem n resulta em a^m. Isso significa dizer que, a^r é a raiz n-ésima de a^m, que podemos escrever como

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Logo, a forma mais coerente de definir a^r, com $r = \dfrac{m}{n}$, é dado por

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Depois de dar esta definição, há alguns detalhes que devem ser examinados. Em primeiro lugar, como se tem $\dfrac{m}{n} = \dfrac{mp}{np}$ para todo $p \in \mathbb{N}$, é preciso mostrar que $\sqrt[n]{m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$ a fim de que a definição não seja ambígua. Em segundo lugar, deve-se mostrar que a definição dada assegura a validez da regra $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ para $r, s \in \mathbb{Q}$. E finalmente, cumpre provar que a função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Agora iremos provar essas afirmações de modo claro e detalhado.

Primeiramente, vamos mostrar a primeira afirmação que diz o seguinte:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \quad \text{quando } \frac{m}{n} = \frac{mp}{np}.$$

Demonstração: Consideremos

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{e} \quad a^{\frac{mp}{np}} = \sqrt[np]{a^{mp}}.$$

Como $\dfrac{m}{n} = \dfrac{mp}{np}$, temos que

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}},$$

então, pela injetividade da função exponencial, segue que

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}},$$

conforme discutido em Lima (2007). Portanto, está provado.

Já na segunda afirmação, vamos demonstrar que

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}, \quad \text{para } r, s \in \mathbb{Q}.$$

Demonstração: Inicialmente, tomemos $r = \dfrac{p}{q}$, $s = \dfrac{u}{v}$. Temos então que

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{u}{v}} = a^{\frac{pv+uq}{qv}} = a^{r+s}.$$

Portanto, $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ foi demonstrada para todos $r, s \in \mathbb{Q}$.

E por fim, na terceira afirmação, vamos mostrar que a função

$$f(r) = a^r \quad \text{é crescente se } a > 1 \quad \text{e decrescente se } 0 < a < 1.$$

Suponhamos que

$$r_1 < r_2 \quad \text{com } r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow r_2 = r_1 + t, \quad \text{com } t > 0.$$

Aqui, estamos querendo comparar:

$$a^{r_1} \quad \text{e} \quad a^{r_2} = a^{r_1+t} = a^{r_1} \cdot a^t.$$

Considerando $a > 1$, então $a^t > 1$. Dessa forma,

$$a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^t > a^{r_1} \quad \Rightarrow \quad a^{r_2} > a^{r_1} \Rightarrow f(r_2) > f(r_1)$$

Portanto, a função é crescente. Agora, se $0 < a < 1$, então temos que $a^t < 1$, e

$$a^{r_2} = a^{r_1} \cdot a^t < a^{r_1} \Rightarrow f(r_2) < f(r_1)$$

Logo, nesse caso a função é decrescente.

A função $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$, não é sobrejetora. Isso quer dizer que, ao fixarmos um valor $a > 0$, nem todo número real positivo pode ser escrito como a^r com r racional. Isso pode ser entendido observando que, como $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, sua imagem sob a função f, isto é, o conjunto dos valores a^r, também é enumerável. Entretanto, $\mathbb{R}^+$, o conjunto dos reais positivos, não é enumerável. Portanto, não é possível que todos os elementos de $\mathbb{R}^+$ sejam da forma a^r com $r \in \mathbb{Q}$.

Ainda assim, as potências a^r, com $r \in \mathbb{Q}$, possuem uma propriedade importante: embora não abranjam todos os números reais positivos, elas estão densamente distribuídas em $\mathbb{R}^+$, desde que $a \neq 1$. Isto é, ainda que não formem o conjunto completo dos reais positivos, esses valores surgem espalhados por toda a parte de $\mathbb{R}^+$. Conforme pode ser visto mo lema abaixo.

Lema 2.3.1 ***(Lima, 2016, p. 177)*** *Fixado o número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência a^r, com $r \in \mathbb{Q}$.*

De posse do lema anterior é possível definir potência com expoentes irracionais. Elas são definidas como aproximações sucessivas de potências com expoentes racionais de mesma base.

Exemplo 11 *Consideremos o número irracional $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$. Note que podemos aproximar $\sqrt{2}$ por falta ou por excesso pelos seguintes números racionais:*

por falta:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1,4 &= \frac{14}{10} \\ 1,41 &= \frac{141}{100} \\ 1,414 &= \frac{1414}{1000} \\ 1,4142 &= \frac{14142}{1000}. \end{aligned}$$

por excesso:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 1,5 &= \frac{15}{10} \\ 1,42 &= \frac{142}{100} \\ 1,415 &= \frac{1415}{1000} \\ 1,4143 &= \frac{14143}{1000}. \end{aligned}$$

Assim podemos definir o valor de $13^{\sqrt{2}}$ *por aproximação por falta ou por excesso de potências de base 13, da seguinte forma:*

por falta:

$$\begin{aligned} 13^{1} &= 13^{1} = 13 \\ 13^{1,4} &= 13^{\frac{14}{10}} = 36,267756667 \\ 13^{1,41} &= 13^{\frac{141}{100}} = 37,210039132 \\ 13^{1,414} &= 13^{\frac{1414}{1000}} = 37,59377174 \\ 13^{1,4142} &= 13^{\frac{41424}{1000}} = 37,613061911. \end{aligned}$$

por excesso:

$$\begin{aligned} 13^{2} &= 13^{2} = 169 \\ 13^{1,5} &= 13^{\frac{15}{10}} = 46,872166581 \\ 13^{1,42} &= 13^{\frac{142}{100}} = 38,176803296 \\ 13^{1,415} &= 13^{\frac{1415}{1000}} = 37,69032163 \\ 13^{1,4143} &= 13^{\frac{14143}{10000}} = 37,622710708. \end{aligned}$$

Portanto $13^{\sqrt{2}} \approx 37,6.$

2.3.1 A Função Exponencial

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{*}_{+}$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer x, $y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$;
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$;

Observações importantes

Temos que se a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que a propriedade dada anteriormente, ou seja, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ não pode assumir o valor zero. Segue-se então que, caso exista algum $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x_0) = 0$, e mediante a isso, teremos que para quaisquer $x \in \mathbb{R}$

$$f(x_0) = f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0.$$

e portanto, f será igual a zero.

Ademais, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a propriedade 1) e não é nula, temos então que $f(x) > 0$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}$. Mas isso acontece porque

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Desse modo, pela propriedade 1), podemos considerar o contradomínio da função como $\mathbb{R}$ ou como $\mathbb{R}^+$. Entretanto, se apropriar $\mathbb{R}^+$ como contradomínio é mais elegante, porque isso nos garante que a função será sobrejetiva. Nesse viés, se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades 1) e 2), então, para todo número natural n, teremos que

$$f(n) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdot f(1) \cdot \ldots \cdot f(1) = a \cdot a \cdots a = a^n.$$

Utilizando mais uma vez a propriedade 1), como visto anteriormente, para todo número racional $r = \dfrac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, devemos ter

$$f(r) = a^r = \sqrt[n]{a^m}.$$

Por conseguinte, a função $f(r) = a^r$ é a única que satisfaz a relação $f(r+s) = f(r) \cdot f(s)$ para quaisquer $r, s \in \mathbb{Q}$, de modo que $f(1) = a$.

A propriedade 3) enuncia que a função exponencial é crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. E a partir dessa situação, podemos concluir que apenas uma forma coerente de definir o valor de $f(x) = a^x$ quando x é irracional.

Para memorizar essas interpretações, consideremos $a > 1$. Sob esta circunstância, a função a^x apresenta a seguinte característica importante

Se $r < x < s$, com $r, s \in \mathbb{Q}$, então temos que

$$a^r < a^x < a^s.$$

Isso quer dizer que, a^x é o número real que pode ser aproximado por potências de expoentes racionais menores e maiores que x. Isto é, suas aproximações por valores inferiores são dadas por a^r, com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e suas aproximações por valores superiores são dadas por a^s, com $x < s$, $s \in \mathbb{Q}$.

É impossível a existência de dois números reais difrentes, digamos $A < B$, que satisfaçam essa condição. Se tais A e B existissem, então haveria números racionais r e s de modo que

$$r < x < s \quad \text{com} \quad r, s \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad a^r < A < B < a^s.$$

Mas nessa situação, o intervalo $[A, B]$ não conteria nenhuma potência de a com expoente racional, havendo uma contradição com o lema citado anteriormente.

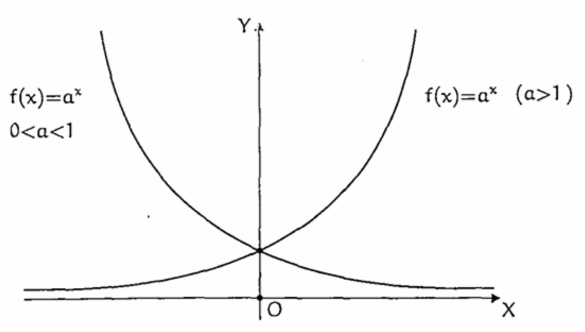
Logo, quando x é irracional, a^x é o único número real que pode ser aproximado por potências do tipo a^r, com r racional menor que x, e também por potências a^s, com s racional maior que x. Ao definirmos a^x para todo $x \in \mathbb{R}$, vemos que as propriedades 1), 2) e 3) continuam válidas, e essa definição se caracteriza a estrutura da função exponencial. Além disso, temos ainda outras propriedades importantes, como

- A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente;
- A função exponecial é contínua;
- A função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é bijetora.

A prova dessas propriedades acima podem ser encontradas em "A Matemática do Ensino Médio", volume 1, conforme LIMA (2016).

Seguindo essa abordagem, temos portanto, que a função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é uma correspondência biunívica entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$ crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Veja como isso acontece na Figura 37.

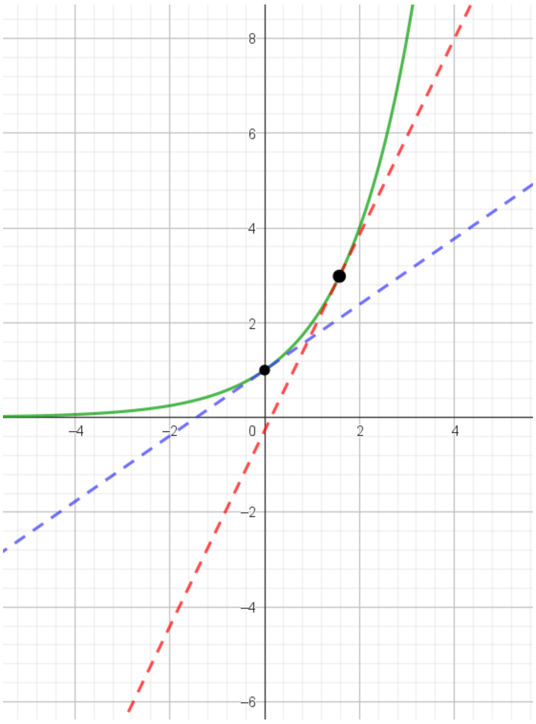
FIGURA 37: Gráfico da função $f(x) = a^x$ nos casos $a > 1$ e $0 < a < 1$



Fonte: (Lima, 2016).

Quando $a > 1$, observa-se que, à medida que x aumenta da esquerda para a direita, a curva da função exponencial $y = a^x$ cresce aos poucos para valores negativos de x. Entretanto, conforme x se aproxima de valores positivos, esse crescimento se acentua progressivamente. Esse comportamento é visto claramente pela inclinação cada vez maior da reta tangente ao gráfico: para valores muito grandes de x, essa tangente se aproxima de uma posição vertical, refletindo no crescimento acentuado da taxa de variação da função. Para ilustrar esse comportamento de forma mais concreta, podemos ver o gráficos da função $f(x) = 2^x$, e suas retas tangentes que estão tracejadas. Observe a Figura 38 a seguir.

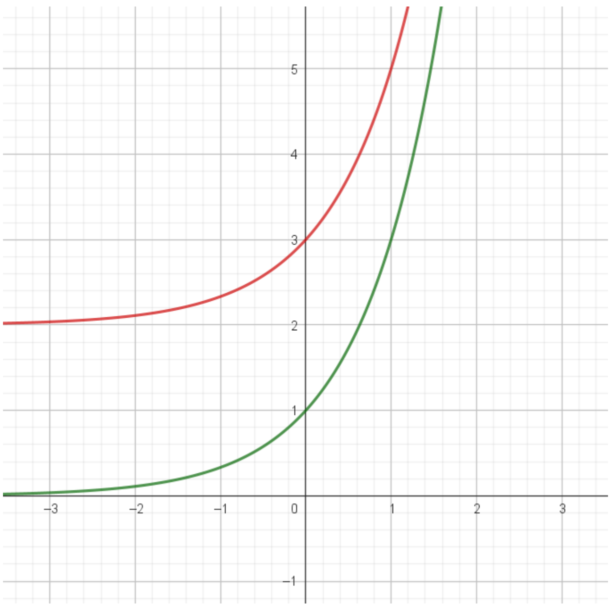
FIGURA 38: Gráfico da função $f(x) = 2^x$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Dentro do estudo das funções exponenciais, também podemos aplicar **transformações** como translações e reflexões no gráfico. A seguir, faremos o esboço gráfico de uma função exponencial com destaque para o seu deslocamento, isto é, sua translação. Veja, na Figura 39, um exemplo de **translação vertical**.

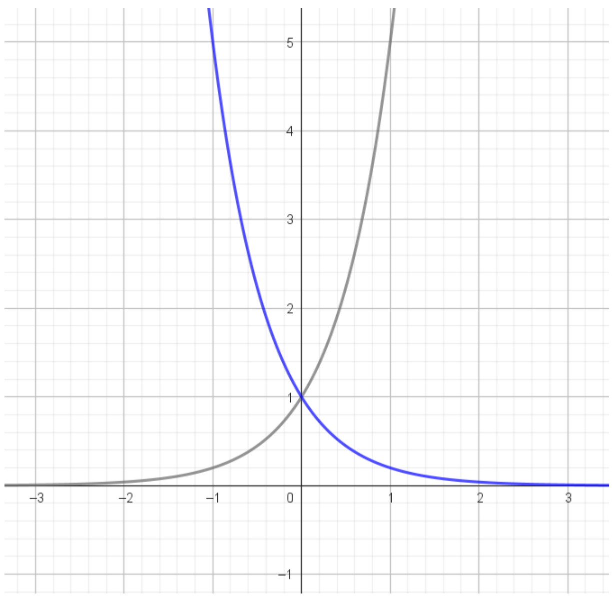
FIGURA 39: Gráfico das funções $f(x) = 3^x$ e $h(x) = 3^x + 2$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

O gráfico da função f, que está na cor verde, foi movimentado 2 unidades para cima. Podemos perceber isso no gráfico da função h, representada pela cor vermelha. Neste momento, aplicaremos as reflexões no contexto das funções exponenciais. Em resumo, a **reflexão** de uma função ocorre quando seu gráfico é espelhado em relação a um eixo ou a uma reta qualquer. Adiante, a Figura 40 apresenta a **reflexão da função** f **em relação ao eixo** y.

FIGURA 40: Gráfico das funções $f(x) = 5^x$ e $h(x) = 5^{-x}$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

O gráfico da função h (representado em azul) é uma reflexão da função f (representada em cinza) em relação ao eixo das ordenadas. Esse tipo de transformação é obtido pela substituição de x por $-x$, ou seja, $h(x) = f(-x)$.

Vejamos agora um exemplo em que se aplica a função exponencial.

Exemplo 12 *(PUC-SP) Numa certa cidade, o número de habitantes, num raio de r km a partir do seu centro é dado por* $P(r) = k \cdot 2^{3r}$*, em que k é constante e* $r > 0$*.*

Se há 98 304 habitantes num raio de 5 km do centro, quantos habitantes há num raio de 3 km do centro?

Resolução:

Com base nos dados da questão, sabemos que $P(5) = 98\ 304$, então queremos obter $P(3)$, isto é, queremos saber o total de habitantes num raio de 3 km. Para isso, primeiramente encontraremos o valor de k por meio da função $P(r) = k \cdot 2^{3r}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} P(r) &= k \cdot 2^{3r} \\ 98304 &= k \cdot 2^{3 \cdot 5} \\ k &= \frac{98304}{2^{15}}. \end{aligned}$$

Agora, iremos calcular o valor de $P(3)$.

$$\begin{aligned} P(3) &= k \cdot 2^{3 \cdot 3} \\ &= k \cdot 2^{9} \\ &= \left(\frac{98\,304}{2^{15}}\right) \cdot 2^{9} \\ &= \frac{98\,304}{2^{6}} = 1\,536. \end{aligned}$$

Portanto, o número de habitantes num raio de 3 km do centro é de 1536.

2.4 Logaritmos

Os logaritmos, durante quase quatro séculos, foram um instrumento fundamental para a simplificação do cálculo aritmético, permitindo que se realizassem, de modo rápido e preciso, operações consideradas complicadas, como, por exemplo, a multiplicação de dois números com muitos algarismos ou a potenciação com expoente fracionário. Com o tempo, perderam esse papel de eficientes calculadores, função que atualmente é desempenhada com grande sucesso pelas maquininhas eletrônicas (Lima, 2007).

Mesmo assim, os logaritmos ainda desempenham um papel relevante no campo da matemática. Essa relevância decorre do fato de que a função logarítmica, juntamente com sua inversa, a função exponencial, proporciona uma forma única de representar, por meio de expressões matemáticas, a variação de uma grandeza cuja taxa de aumento ou diminuição é proporcional à quantidade presente dessa grandeza em um determinado instante (Lima, 2007).

Sejam a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a é o expoente y que deve ser colocado na potência da base a para obter b, ou seja, é a solução da equação exponencial

$$a^{y} = b.$$

Desse modo,

$$log_a b = y, \text{ se, e somente se, } a^{y} = b.$$

Levando em consideração a expressão $log_a b = y$, a representa a base do logaritmo, b chamamos de logaritmando e y o seu logaritmo.

É importante ressaltarmos que quando a base do logaritmo é 10, por exemplo, geralmente esse valor é colocado de maneira implícita na expressão, ou seja, ao invés de escrevermos $log_{10} b = y$, escrevemos $log\ b = y$

Vejamos algumas de suas propriedades se a é um número real maior que zero e diferente de 1:

1. **O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0**, ou seja,

$$log_a 1 = 0.$$

Demonstração: Se o $log_a 1 = y$, decorre daí que $a^{y} = 1 = a^{0}$, portanto $y = 0$, pois a função exponencial é injetora.

2. **O logaritmo da base na própria base é igual a 1**, ou seja,

$$log_a a = 1.$$

Demonstração: A demonstração é semelhante à propriedade 1. Se $log_a a = y$, então $a^y = a = a^1$. Logo, $y = 1$.

3. **A potência de base a e expoente $log_a b$ é igual a b**, ou seja,

$$a^{log_a b} = b.$$

Demonstração: Essa igualdade decorre diretamente da definição de logaritmo.

4. **Logaritmo do produto**: O logaritmo do produto de dois números reais é igual a soma dos logaritmos desses números, isto é,

$$log_a(b \cdot c) = log_a b + log_a c.$$

Demonstração: Seja $log_a b = x$ e $log_a c = y$. Assim, $a^x = b$ e $a^y = c$, portanto:

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c \Rightarrow a^{x+y} = b \cdot c.$$

Logo,

$$log_a(b \cdot c) = x + y = log_a b + log_a c.$$

5. **Logaritmo do quociente**: O logaritmo da divisão de dois números é igual a diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador.

$$log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c.$$

Demonstração: A propriedade do logaritmo do quociente segue da propriedade 4, e desse modo, quando tomamos $\frac{b}{c}$ no lugar de b, temos

$$log_a b = log_a \left(\frac{b}{c} \cdot c\right) = log_a \left(\frac{b}{c}\right) + log_a c$$

Logo,

$$log_a b - log_a c = log_a \left(\frac{b}{c}\right).$$

6. **Logaritmo da potência**: Logaritmo da potência x de base b qualquer é igual ao produto do expoente pelo logaritmo de base da potência, ou seja,

$$log_a b^x = x \cdot log_a b.$$

Demonstração: Essa igualdade decorre diretamente da definição de logaritmo.

7. **Mudança de base**: Nesta propriedade consideremos a, b, e c reais positivos, porém com $a \neq 1$ e $b \neq 1$, como mostramos abaixo

$$log_a c = \frac{log_b c}{log_b a}.$$

Demonstração: Considere $x = log_a c$. Pela definição de logaritmo, temos que

$$a^x = c.$$

Agora vamos aplicar logaritmo de base b em ambos os lados da equação.

$$log_b(a^x) = log_b c.$$

Pela propriedade do logaritmo da potência, temos que

$$\begin{aligned} x \cdot log_b a &= log_b c \\ x &= \frac{log_b c}{log_b a}. \end{aligned}$$

Mas como $x = log_a c$, então

$$log_a c = \frac{log_b c}{log_b a}.$$

2.4.1 Função Logarítmica

Se a é um número real positivo ($a > 0$) e diferente de 1, define-se a função logarítmica de base a sendo a função

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},$$

dada pela lei

$$f(x) = log_a x.$$

Dessa definição, o **domínio** da função logarítmica é o conjunto dos números reais positivos, ou seja, $\mathbb{R}_+^* = (0, +\infty)$, pois o logaritmo só está definido par valores maiores que zero. Assim, a função logarítmica associa a cada número real positivo um único número real, que é o valor do seu logaritmo na base a.

Quanto à **imagem** da função logarítmica, conforme Iezzi *et al.* (2013):

Se $0 < \mathrm{a} \neq 1$, então a função f de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_{\mathrm{a}}\mathrm{x}$ admite a função inversa de g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ definida por $g(x) = a^x$. Logo, f é bijetora e, portanto, a imagem de f é:

$$\mathrm{Im} = \mathbb{R}.$$

São exemplos de funções logarítmicas:

- $f(x) = log_{\frac{1}{2}} x$;
- $g(x) = log_9(x + 4)$.

Uma função logarítmica pode ser classificada como crescente ou decrescente, levando em consideração o valor de a:

- Se $a > 1$, a função $f(x) = log_a x$ será crescente, ou seja, ocorrerá que $x_1 < x_2$, e consequentemente $log_a x_1 < log_a x_2$, para os quais x_1 e x_2 são números reais positivos, isto ocorre pela definição da função logarítmica e das propriedades da função exponencial.

- Se $0 < a < 1$, $f(x) = log_a x$ será decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2$, com efeito teremos que $log_a x_1 > log_a x_2$, para x_1 e x_2 reais e positivos, isto também ocorre pela definição da função logarítmica e das propriedades da função exponencial.

2.4.2 Gráfico da Função Logarítmica

A função logarítmica $f(x) = log_a x$ é a inversa da função exponencial $g(x) = a^x$. Assim, temos

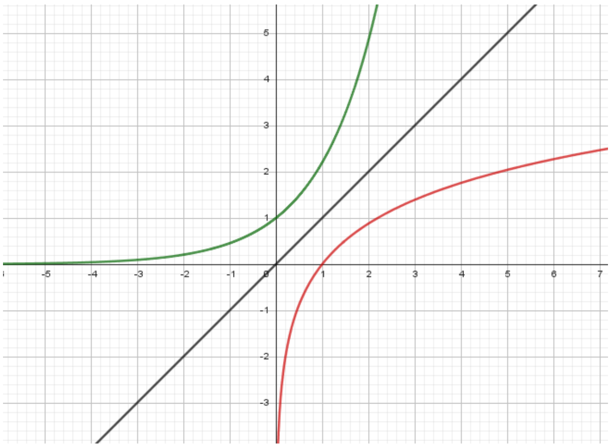
$$f(g(x)) = f(a^x) = log_a(a^x) = x \cdot log_a a = x$$

e

$$g(f(x)) = g(log_a x) = a^{log_a x} = x.$$

Na Figura 41, estão representados os gráficos da função exponencial $g(x) = a^x$ (de verde) e sua inversa $f(x) = log_a x$ (de vermelho), com $a > 1$.

FIGURA 41: Gráfico das funções exponencial e logarítmica

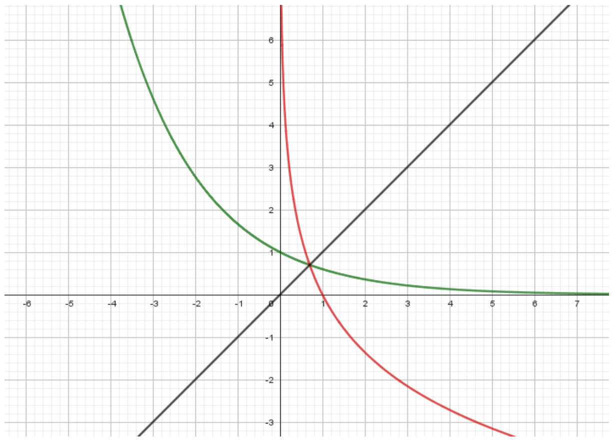


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Notemos que o gráfico das funções logarítmica e exponencial são simétricos com relação a reta $y = x$.

Quando ocorre a situação $0 < a < 1$, as funções $f(x) = log_a x$ e $g(x) = a^x$, do mesmo modo, também são simétricas. Observamos na Figura 42 o gráfico da exponencial $g(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, que está de cor verde e posteriormente sua inversa $f(x) = log_{\frac{1}{a}} x$, de vermelho.

FIGURA 42: Gráfico da função exponencial e logarítmica



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Exemplo 13 *Considerando a função abaixo, determine o seu domínio e a sua imagem.*

a) $h(x) = log_3(4+5x)$

$$\begin{aligned} 4+5x &> 0 \\ 5x &> -4, \end{aligned}$$

logo

$$x > -\frac{4}{5}.$$

E seu domínio é dado por

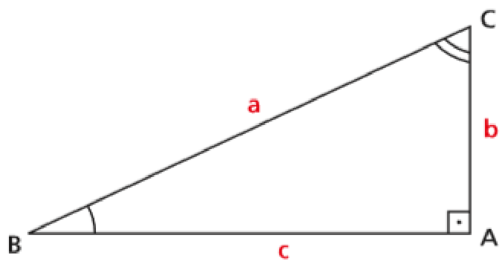
$$Dom(h) = \left(-\frac{4}{5}, +\infty\right).$$

A imagem da função $h(x) = log_3(4+5x)$ é conjunto dos números reais.

2.5 Funções Trigonométricas

Conforme consta na referência Iezzi (2004) iniciamos o estudo das funções trigonométricas a partir das razões trigonométricas. Consideramos o triângulo retângulo da Figura 43, em que fixamos um ângulo $\hat{B}$.

FIGURA 43: Triângulo Retângulo



Fonte: (IEZZI, 2004)

1) O seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa.

$$sen\hat{B} = \frac{b}{a}.$$

2) Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa.

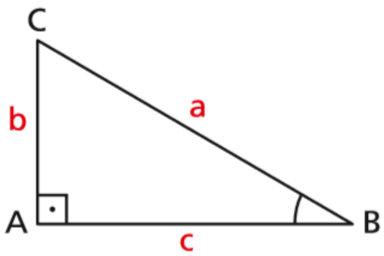
$$cos\hat{B} = \frac{c}{a}.$$

3) Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente ao ângulo.

$$tg\hat{B} = \frac{b}{c}.$$

Observe a Figura 44.

FIGURA 44: Triângulo Retângulo ABC



Fonte: (IEZZI, 2004)

Usando a figura acima temos que o Teorema de Pitágoras é dado por

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

fazendo as substituições adequadas, temos

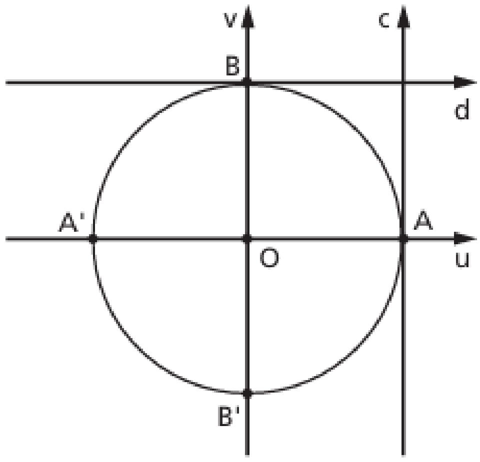
$$(cos\hat{B})^2 + (sen\hat{B})^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

E daí encontramos a relação fundamental da trigonometria

$$cos^2\hat{B} + sen^2\hat{B} = 1.$$

Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A e raio $\overline{\mathrm{OA}}$, em que $\mathrm{OA} = 1$, como mostra a Figura 45.

Figura 45: Ciclo Trigonométrico



Fonte: (IEZZI, 2004)

Para o estudo das razões trigonométricas na circunferência, vamos associar ao ciclo quatro eixos:

- eixo dos cossenos (u)

  direção: $\overline{\mathrm{OA}}$

  sentido positivo: O $\rightarrow$ A

- eixo dos senos (v)

  direção: perpendicular a u, por O

  sentido positivo: O $\rightarrow$ B

  sendo B tal que $\widehat{\mathrm{AB}} = \dfrac{\pi}{2}$

- eixo das tangentes (c)

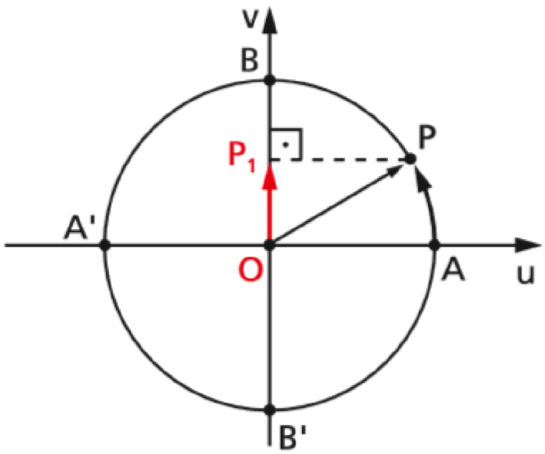
  direção: paralelo a v por A

  sentido positivo: o mesmo de v

Vejamos agora como ficam as definições de seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico.

Seno: Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P essa imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $sen(x)$) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv, como é mostrado na Figura 46.

Figura 46: Representação do $sen(x)$



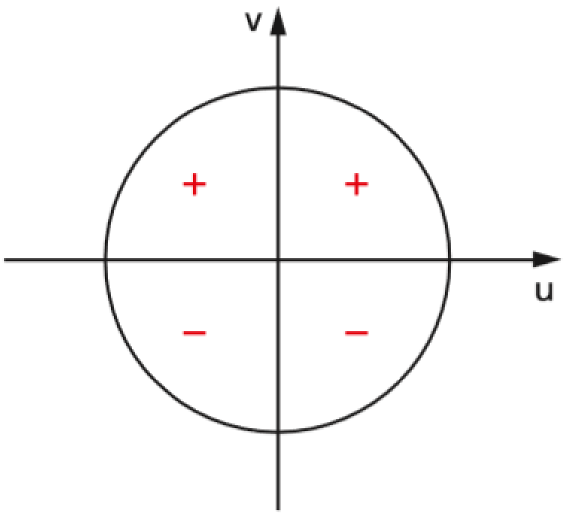
Fonte: (IEZZI, 2004)

Podemos observar na Figura 46, algumas propriedades:

- Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $sen(x)$ é positivo;
- Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $sen(x)$ negativo;
- Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então $sen(x)$ é crescente;
- Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $sen(x)$ é decrescente.

Vejamos o sinal do $sen(x)$ em cada quadrante conforme mostra a Figura 47

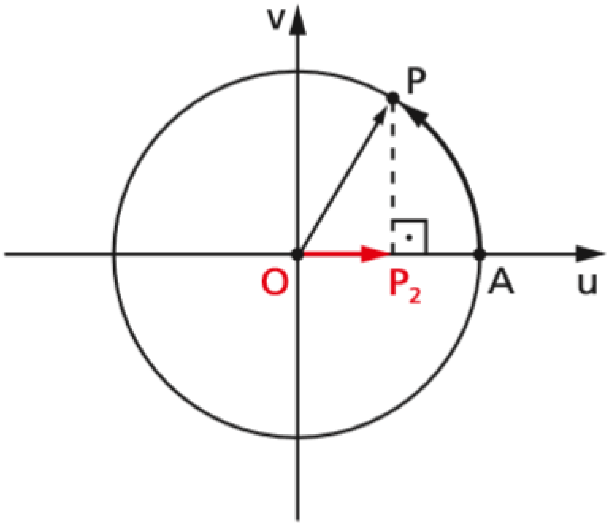
FIGURA 47: Sinal do $sen(x)$



Fonte: (IEZZI, 2004)

Cosseno: Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x a abcissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uoV, como mostra a Figura 48.

FIGURA 48: Representação do $cos(x)$



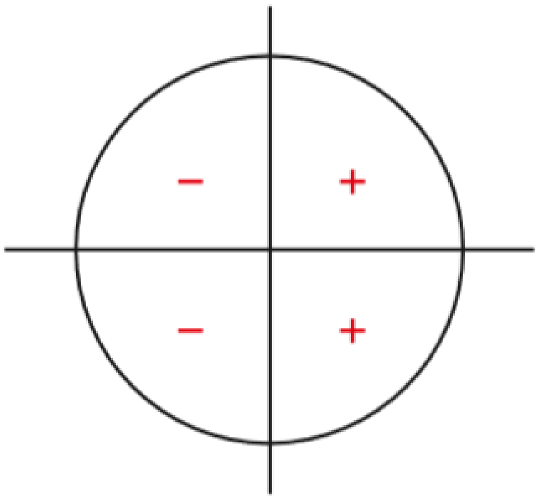
Fonte: (IEZZI, 2004)

De modo análogo, temos as propriedades do cosseno:

- Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $cos(x)$ é positivo;
- Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $cos(x)$ negativo;
- Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $cos(x)$ é decrescente;
- Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $cos(x)$ é crescente.

O sinal do $cos(x)$ pode ser visto na Figura 49.

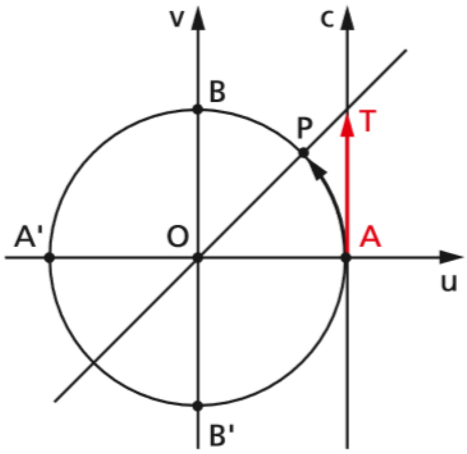
FIGURA 49: Estudo do sinal do $cos(x)$



Fonte: (IEZZI, 2004)

Tangente: Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \dfrac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo. Consideramos a reta OP e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos cosseno de x (e indicamos $tg(x)$) a medida algébrica do segmento AT. Observe esta situação na Figura 50.

FIGURA 50: Representação da $tg(x)$



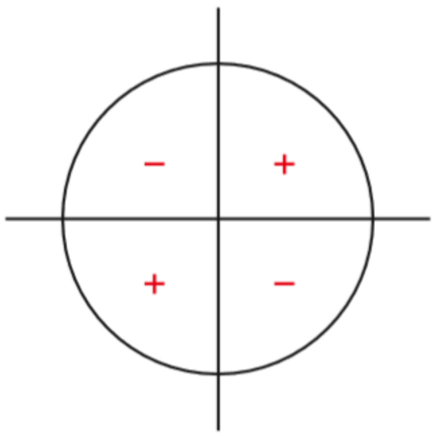
Fonte: (IEZZI, 2004)

Propriedades da tangente:

- Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $tg(x)$ é positivo;
- Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $tg(x)$ é negativo;
- Se x percorre qualquer um dos quadantes, então $tg(x)$ é crescente.

O sinal da $tg(x)$ pode ser estudado da seguinte forma, como é mostrado na Figura 51.

FIGURA 51: Estudo do sinal da $tg(x)$



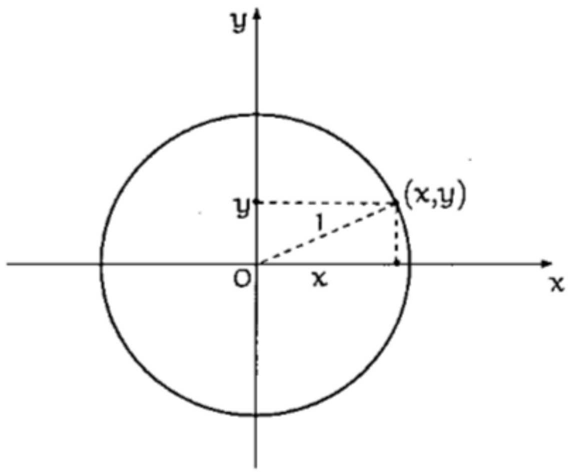
Fonte: (IEZZI, 2004)

Segue da relação fundamental, com $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1.$$

que é possível dado um ângulo β entre 0 e 2π, definir $cos\ \beta$ e $sen\ \beta$ como valores que representam as coordenadas de um ponto na circunferência de raio 1 centrada na origem (denominda circunferência unitária) como está representado na Figura 52.

FIGURA 52: Ciclo Trigonométrico



Fonte: (Lima, 2016)

Indicaremos com a notação C essa circunferência, que chamaremos de circunferência unitária, ou círculo unitário. Temos, portanto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$.

Observa-se que, para todo ponto $(x, y) \in C$, tem-se $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

A fim de definir as funções cos: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, devemos associar a cada número real t um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo. O número t desempenhará, portanto, o papel de medida do ângulo.

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E : \mathbb{R} \to C$, que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (x, y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1, 0)$.
- se $t > 0$, percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto (1,0), um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio comum, ou seja, o sentido que nos leva de $(1, 0)$ para $(0, 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- se $t < 0, E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1, 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio usual).

A fim de definirmos as funções trigonométricas faremos as seguintes considerações: as funções trigonométricas $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são nomeadas como função cosseno e função seno, e nisso, elas são definidas para $x \in \mathbb{R}$:

$$E(\alpha) = (cos\ \alpha, sen\ \alpha).$$

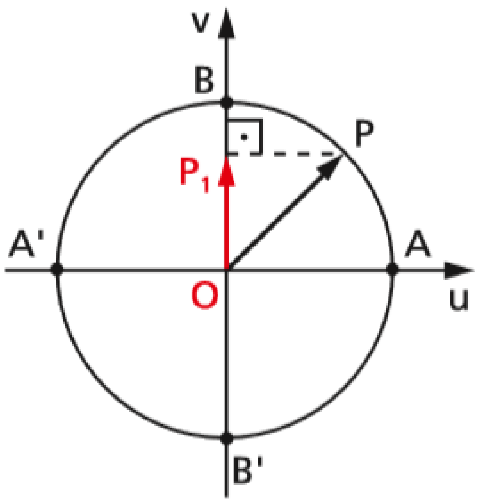
E ao analisarmos as coordenadas de $E(\alpha)$, percebemos que elas representam um par ordenado, e notoriamente a abscissa ($cos\ \alpha$) e a ordenada ($sen\ \alpha$) no ciclo tigonométrico, ou seja fazemos a identificação $x = cos\ \alpha$ e $y = sen\ \alpha$.

Da definição de função no ciclo trogonométrico temos que as funções seno e cosseno são períodicas, de período 2π.

2.5.1 Função Seno

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $sen(x)$) a ordenada OP_1 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP_1 = sen(x)$ (Iezzi, 2004). Podemos ver isso na Figura 53.

FIGURA 53: $f(x) = sen(x)$



Fonte: (IEZZI, 2004)

Além disso, seguimos alguns pontos importantes da função seno:

- A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$ ou seja, $1 \leq sen - 1 \leq sen(x) \leq 1$, isso ocorre por estarmos trabalhando no ciclo trigonométrico unitário, isto é, de raio 1.

- A função seno é periódica e seu período é 2π. Se o $sen(x) = OP_1$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $sen(x + k \cdot 2\pi) = OP_1$, pois x e $x + k \cdot 2\pi$ terem a mesma imagem P no ciclo trigonométrico. Assim, para todo x real

$$sen(x) = sen(x + k \cdot 2\pi)$$

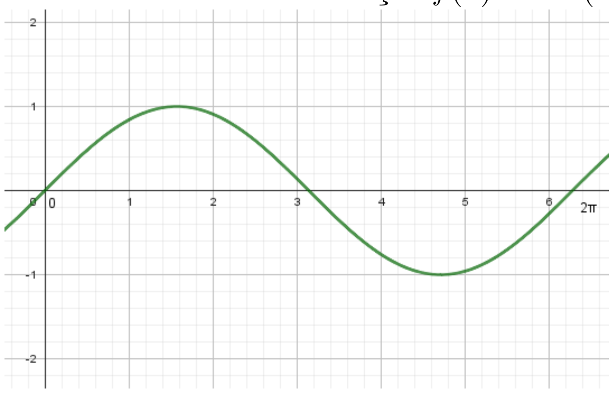
  logo, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, isto é, 2π.

Gráfico: Fazendo um diagrama com os valores de x em abscissas e $sen(x)$ em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, chamado de **senoide**, que nos indica como varia a função $f(x) = sen(x)$ ao longo dos números reais.

x	$y = sen(x)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Vejamos o gráfico da função seno na Figura 54 a seguir.

FIGURA 54: Gráfico da função $f(x) = sen(x)$

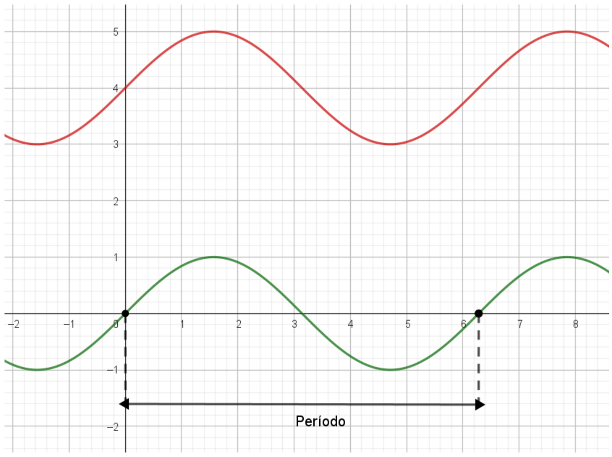


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Notamos aqui que, como o domínio da função seno é $\mathbb{R}$, a senóide (de cor verde) continua para aos dois lados da abscissa, para a direita de 2π, para a esquerda de 0. Nessa representação, destaca-se somente um período da função.

Na abordagem das funções trigonométricas, podemos ressaltar as translações. Mais adiante, enfatizamos o esboço do gráfico de uma função trigonométrica, no qual destacamos o seu deslocamento (translação). Veja, na Figura 55, uma translação vertical.

FIGURA 55: Gráfico das funções $f(x) = \ sen(x)$ e $g(x) = \ sen(x) + 4$



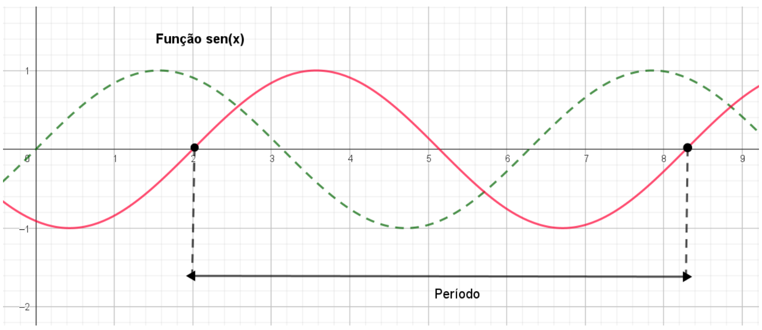
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Veja que o gráfico da função $f(x) = \ sen(x)$, que está na cor verde, foi movimentado 4 unidades para cima. Podemos ver isso de maneira bem clara no gráfico da função $g(x) = \ sen(x)+4$, representada pela cor vermelha. Esse tipo de transformação é chamado de translação vertical.

Sabemos que o domínio das funções $f(x) = \ sen(x)$ e $g(x) = \ sen(x) + 4$ são os reais ($\mathbb{R}$). E as imagens de f e g são, respectivamente, os intervalos $[-1,\ 1]$ e $[3,\ 5]$. Caso tivéssemos, por exemplo, a função $g(x) = \ sen(x) - 4$, o gráfico seria deslocado 4 unidades para baixo.

Já para fazermos deslocamentos horizontais, ou seja, para a direita ou para a esquerda, somamos ou subtraímos uma constante k no domínio da função, isto é, dentro da variável. Veja essa ideia na Figura 56, em que subtraímos 2 unidades ao domínio da função $f(x) = sen(x)$.

FIGURA 56: Gráfico da função $g(x) = \ sen(x - 2)$

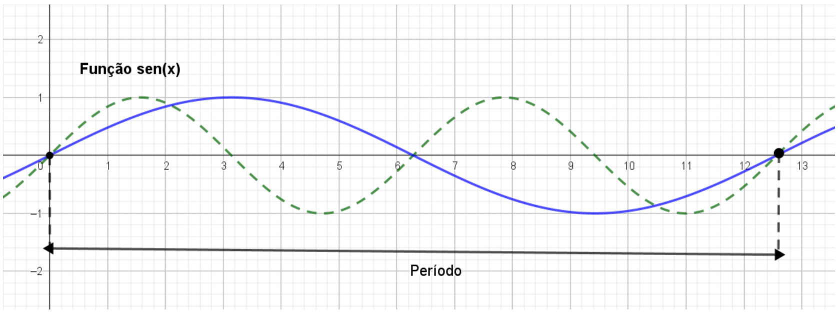


Fonte: Próprio autor da pesquisa

Ao compararmos $f(x) = \ sen(x)$ com a função $g(x) = \ sen(x - 2)$, notamos que a função g, representada pela cor vermelha, apresenta um deslocamento de 2 unidades para a direita. Além disso, não há nenhuma alteração em seu período, que permanece 2π. O domínio e o contradomínio também se mantêm os mesmos: o domínio são os números reais ($\mathbb{R}$) e o contradomínio está limitado entre -1 e 1.

Dentro das transformações, há um caso bastante interessante: a **dilatação horizontal**. De modo geral, esse tipo de transformação modifica a largura do gráfico da função ao longo do eixo das abscissas, esticando ou comprimindo o seu formato horizontalmente. Vejamos esta situação na Figura 57.

FIGURA 57: Gráfico da função $f(x) = \ sen\left(\frac{x}{2}\right)$



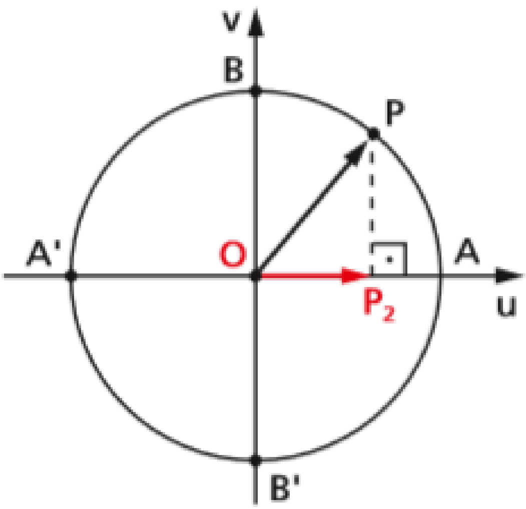
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Observe que, de fato, há uma dilatação da função $f(x) = \ sen(x)$, como pode ser visto na função $f(x) = \ sen\left(\frac{x}{2}\right)$, representada pela cor azul. Esse "esticamento" altera o valor do período, que passa a ser 4π, pois $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, mas não modifica a imagem da função.

2.5.2 Função Cosseno

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigronométrico. Denominamos cosseno de (x) (e indicamos $cos(x)$ a abscissa OP_2 do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $OP_2 = cos(x)$, isto é, $f(x) = cos(x)$, como se vê na Figura 58.

FIGURA 58: $f(x) = cos(x)$



Fonte: (IEZZI, 2004)

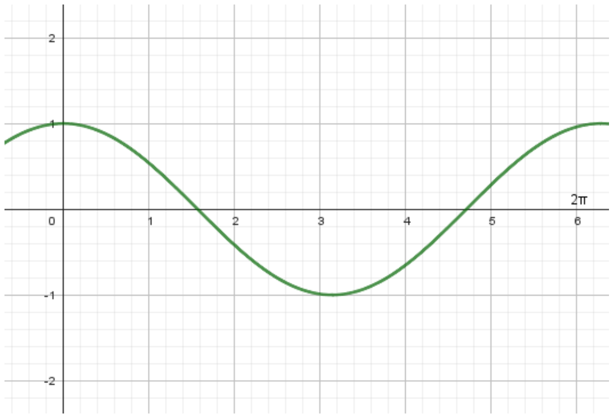
Seguimos alguns pontos importantes da função cosseno:

- A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq cos\ x \leq 1$, para todo x real.
- A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

Gráfico: Para o esboço do gráfico, faz-se uma tabela com x em abscissas e $cos(x)$ em ordenadas, a partir daí constrói-se o gráfico chamado de **cossenóide**, que nos mostra a variação da $f(x) = cos(x)$.

Vejamos a sua representação gráfica na Figura 59.

FIGURA 59: Gráfico da função $cos(x)$



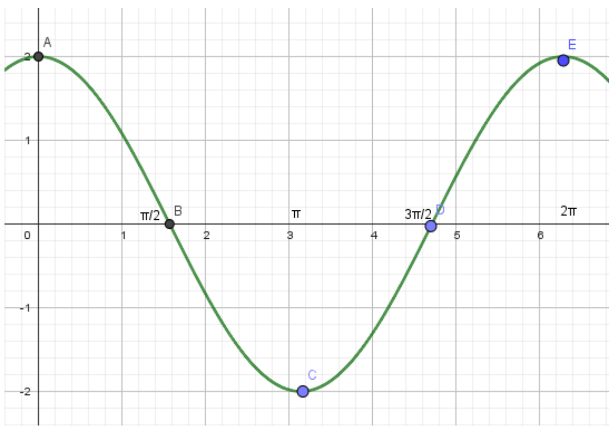
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Ressaltamos que pela definição, como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, a cossenóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. Na imagem acima destacamos apenas o seu período 2π de cor verde.

Exemplo 14 *Faça o gráfico de um período completo da função* $f(x) = 2 \cdot cos(x)$*, considerando* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Depois determine o período e a imagem.*

Vejamos a representação gráfica da função $f(x) = 2 \cdot cosx$, na Figura 60.

FIGURA 60: Gráfica da função $f(x) = 2 \cdot cosx$

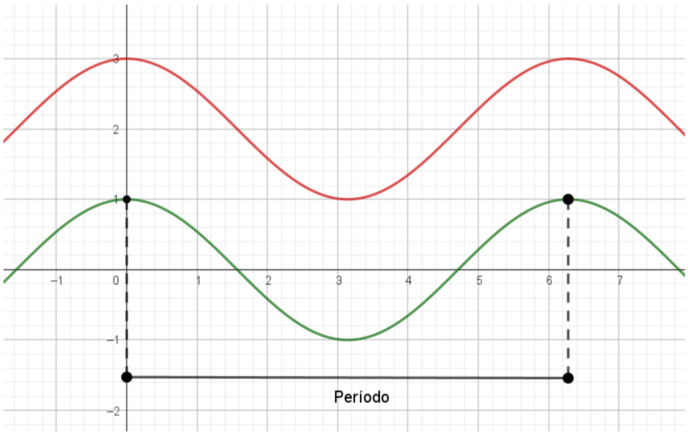


Fonte: Próprio autor da pesquisa

É imediato que: Imagem $f(x) = [-2, 2]$ e o período de f é dado por $p(f) = 2\pi$.

Na função cosseno, também podemos trabalhar com as translações. Vejamos o gráfico de $f(x) = \ cos(x)$, no qual destacamos o seu deslocamento (translação). Note, na Figura 61, uma translação vertical.

FIGURA 61: Gráfico das funções $f(x) = \ cos(x)$ e $g(x) = \ cos(x) + 2$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

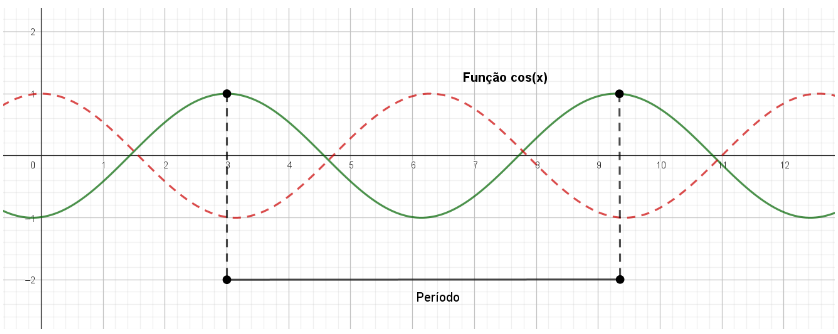
Observe que o gráfico da função $f(x) = \ cos(x)$, que está na cor verde, foi movimentado 2 unidades para cima. Podemos ver isso no gráfico da função $g(x) = \ cos(x) + 2$, que está de cor vermelha. Essa transformação é chamada de translação vertical.

Em relação ao domínio das funções $f(x) = \ cos(x)$ e $g(x) = \ cos(x) + 2$, é o conjunto dos reais ($\mathbb{R}$). Além disso, as imagens de f e g são dadas pelos intervalos $[-1,\ 1]$ e $[1,\ 3]$.

De modo análogo à função cossseno, caso tivéssemos,por exemplo, a função $g(x) = cos(x) - 2$, o gráfico seria deslocado 2 unidades para baixo.

Agora, faremos deslocamentos horizontais, isto é, para a direita ou para a esquerda, mas para isso, basta somarmos ou subtraírmos uma constante k no domínio da função. Vejamos essa ideia na Figura 62, em que subtraímos 3 unidades ao domínio da função $f(x) = \ cos(x)$.

FIGURA 62: Gráfico da função $g(x) = \ cos(x - 3)$



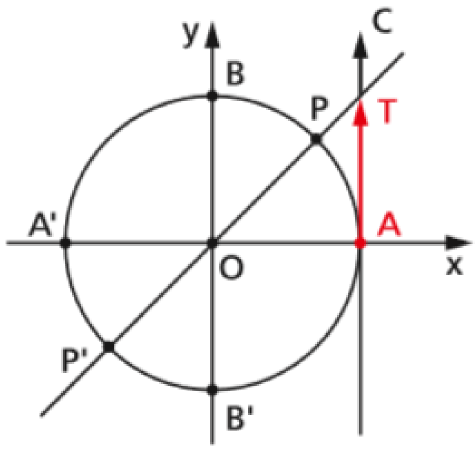
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Nesta imagem, podemos observar a função cosseno, representada pela linha tracejada vermelha, e a função $g(x) = \cos(x - 3)$, representada pela linha verde contínua. Nota-se que o gráfico função da g de cor verde corresponde a um deslocamento horizontal de 3 unidades para a direita em relação à função original. Apesar desse deslocamento, o período da função continua o mesmo, ou seja, 2π, pois a translação não altera o valor do período da função cosseno.

2.5.3 Função Tangente

Dado um número real x, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta OP e seja T sua interseção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicamos $tg(x)$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$. Veja como isso acontece na Figura 63.

FIGURA 63: $f(x) = tg(x)$



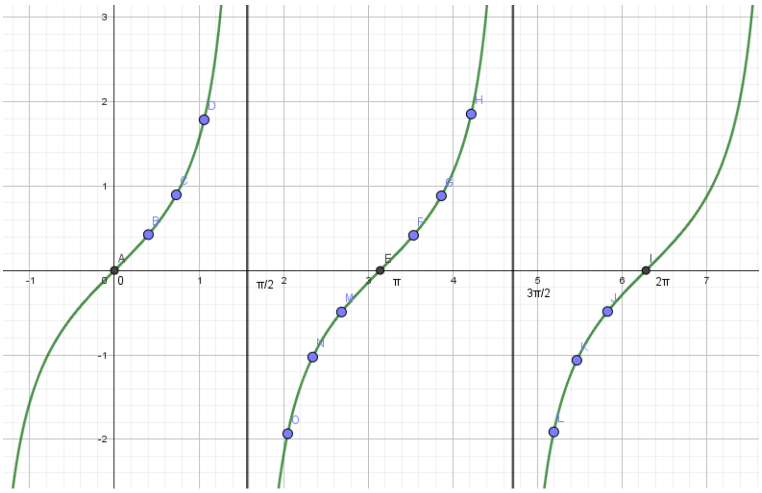
Fonte: (IEZZI, 2004)

No que diz respeito as suas propriedades, seguimos as mesmas pontuadas da razão trigonométrica da tangente. Ademais, existem também outras situações que ocorrem na função tangente que devem ser destacadas:

- O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$.
- A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x tal que $tg\ x = y$.
- A função tangente é periódica e seu período é π.

Gráfico: Para a representação gráfica, é necessário que se faça primeiramente uma tabela com x (abscissas) e $cos(x)$ (ordenadas), com isso, constrói-se o gráfico chamado **tangentóide**, que nos indica como varia a função $f(x) = tg(x)$. Veja o seu gráfico na Figura 64.

FIGURA 64: Gráfico da função $tg(x)$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Observamos que quando x for igual a $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$, não existirá um valor para y, ou seja, esse valor será constante verticalmente para abcissa, e mediante a isso, ela de modo algum irá tocar a tangentóide, nesse viés, denominamos essa constante de assíntota da tangente (que está de azul no gráfico).

Exemplo 15 *Esboce o gráfico, dê o domínio e o período da função real* $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

De início, lembremos que se $y = tg(x)$ então

$$D(y) = \{t \in \mathbb{R} | t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Para encontrar o domínio da função, faça $t = x - \frac{\pi}{4}$:

$$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

assim

$$x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

portanto

$$D(y) = \{x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$Im(f) = \mathbb{R}.$$

Para encontrar o período da função, façamos uma pequena manipulação algébrica no período da função $y = tg(x)$, assim, consideremos que

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

Novamente para $t = x - \frac{\pi}{4}$, calculemos

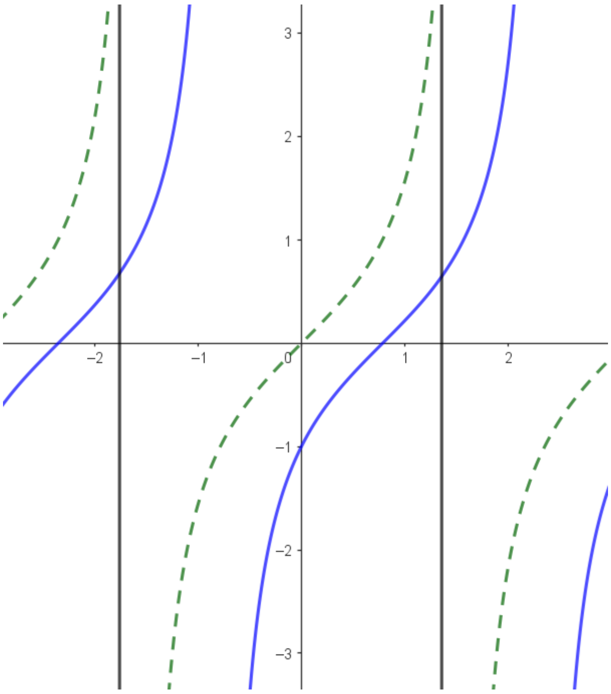
$$-\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

Então o $p(f) = -\frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} = \pi$. Logo, o seu período é π.

Vejamos ainda aonde a função corta o eixo x, ou seja, aonde $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, ou ainda, quando $tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, o que nos dá $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Como a função faz uma associação a cada x a $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ nós temos um gráfico que é a tangentóide deslocada de $\frac{\pi}{4}$ para a direita, como podemos perceber na Figura 65.

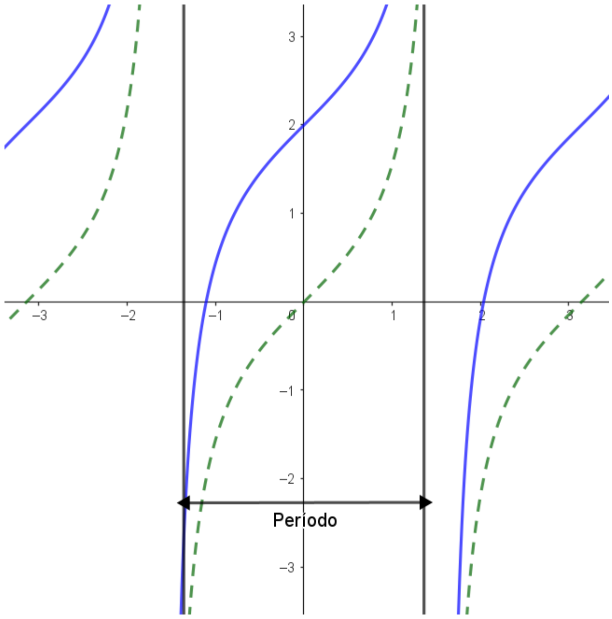
FIGURA 65: Gráfico das funções $g(x) = \ tg(x)$ e $f(x) = tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

As funções tangente também permitem a aplicação de translações. Vejamos o gráfico de $f(x) = \ tg(x)$, no qual podem ocorrer deslocamentos tanto horizontais quanto verticais. Observe, na Figura 66, um exemplo de translação vertical.

FIGURA 66: Gráfico das funções $f(x) = tg(x)$ e $g(x) = tg(x) + 2$



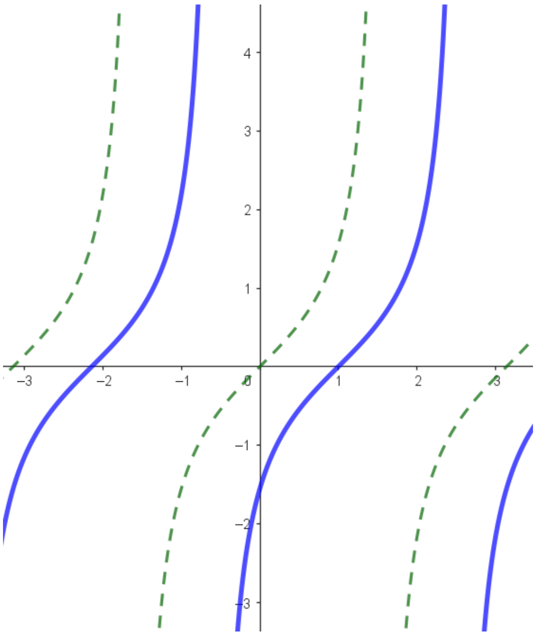
Fonte: Próprio autor da pesquisa

Na Figura 66, temos que o gráfico da função $f(x) = tg(x)$, que está na cor verde, foi deslocado 2 unidades para cima, esse deslocamento é chamado de translação vertical. Podemos ver essa situação no gráfico da função $g(x) = tg(x) + 2$, representada pela cor azul.

Em relação ao domínio funções f e g, são dados por $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$, já o contradomínio e a imagem das funções $f(x) = tg(x)$ e $g(x) = tg(x) + 2$ são os reais $(\mathbb{R})$.

Nesse momento, abordamos a temática dos deslocamentos horizontais, isto é, se acontece para a direita ou para a esquerda, mas para isso, basta somarmos ou subtraírmos uma constante k no domínio da função. Vejamos essa ideia na Figura 67, em que subtraímos 1 ao domínio da função $f(x) = tg(x)$.

FIGURA 67: Gráfico da função $g(x) = \ tg(x-1)$



Fonte: Próprio autor da pesquisa

Ao compararmos a função tangente com a função $g(x) = \ tg(x-1)$, percebemos que a curva azul corresponde a uma translação de 1 unidade para a direita. Na imagem, a função $f(x) = \ tg(x)$ está representada pela linha tracejada verde, enquanto a função transformada está indicada pela linha azul contínua. Observa-se que essa modificação desloca horizontalmente o gráfico, mas mantém seu período inalterado, isto é, π. Pontuamos ainda que o domínio da função $g(x) = \ tg(x-1)$ é dado por

$$D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi + 1,\ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

pois

$$x - 1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi + 1.$$

Considerações finais

Ao longo deste trabalho foi possível compreender com maior profundidade alguns fundamentos das funções, sobretudo no que se refere à análise de seus gráficos. Um ponto essencial abordado foi o estudo das transformações do gráfico de uma função, além de algumas curiosidades interessantes, como a demonstração de que o gráfico de uma função afim é, de fato, uma reta. Para comprovar esse resultado, utilizamos conceitos da Geometria Analítica, o que proporcionou uma base sólida para as conclusões obtidas. Por fim, percebemos que esse tema é de grande relevância tanto para futuros professores da Educação Básica quanto para aqueles que desejam prosseguir em estudos mais avançados na área de Matemática.

O uso do Geogebra mostrou-se de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Pois ele possibilitou uma compreensão mais clara e prática dos conceitos abordados, especialmente no que diz respeito à análise e às transformações dos gráficos das funções. Por meio desse *software*, foi possível visualizar de maneira dinâmica e interativa o comportamento das funções, e ainda observar as alterações produzidas em seus gráficos. Essa abordagem visual tornou o estudo mais acessível, facilitando a interpretação dos resultados e o entendimento das relações matemáticas envolvidas.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela vida, pela saúde, pelas bençãos que ele vem realizando na minha vida.

A minha família, pelo amor incondicional, pelos incetivos, pelas preocupações que tiveram a respeito de meus trabalhos, pelas condições de estudos que me proporcionaram, enfim por tudo.

Agradeço a minha orientadora Profª Dra Sandra Imaculada Moreira Neto, pelas orientações quando possível, pelas correções realizadas durante o desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso, e pelos conselhos de vida acadêmica que levarei para vida.

Agradeço aos membros da banca, prof Roberto e prof Jackson pelas correções e considerações a respeito do trabalho. Agradeço também aos professores do curso pelos ensinamentos e a secretária Maria pelos conselhos.

Agradeço aos meus amigos que estiveram comigo ao longo desta caminhada, me motivando e me apoiando nos momentos difíceis.

Enfim, a todos que diretamente ou indiretamente fizeram parte da minha graduação, o meu muito obrigado.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, V. V. P. d. *MTM141 – Funções Periódicas*. 2018. Universidade Federal de Ouro Preto. Disponível em: <https://professor.ufop.br/sites/default/files/vinicius/files/mtm141_-_funcoes_periodicas_0.pdf>. Acesso em: 16 de junho de 2025.

ESCOLAR, G. *A História das Funções*. [S.l.]: Grupo Escolar, 1998. Disponível em: <https://www.grupoescolar.com/pesquisa/a-historia-das-funcoes.html>. Acesso em: 2 de agosto de 2023.

FRID, H. *Análise Real. Vol. 1*. Rio de Janeiro: Fundação Cecierj, 2010.

GARCIA, V. C. *Números Naturais*. [S.l.]: Sistemas Númericos, 2025. Disponível em: <http://mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/naturais-web/naturais_numero_natural.htm>. Acesso em: 3 de fevereiro de 2025.

GOUVEIA, R. *Função Exponencial*. 2025. Disponível em: <https://www.todamateria.com.br/funcao-exponencial/>. Acesso em: 15 de junho de 2025.

GUZMAN, J. *Valor Absoluto*. [S.l.]: Neurochispas, 2023. Disponível em: <https://br.neurochispas.com/algebra/valor-absoluto-definicao-e-aplicacoes/>. Acesso em: 18 de dezembro de 2024.

HENRY. *ENEM-PPL*. 2018. Disponível em: <https://www.yesmatematica.com/enem-2018-uma-industria-automobilistica-esta-testando-um-novo-modelo-de-carro/>. Acesso em: 23 de abril de 2023.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introduzindo softwares de matemática dinâmica para professores do ensino médio: o caso do geogebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, n. 2, p. 135–146, 2008.

IEZZI, G. *Fundamentos de Matemática Elementar: Trigonometria. Vol. 3*. 8ª. ed. São Paulo: Atual, 2004.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos. Vol. 2*. 10ª. ed. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. et al. *A Matemática do Ensino Médio. Vol. 1*. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, E. L. *Análise Real. Vol. 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. *Logaritmos*. 6ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção Professor de Matemática).

LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. *Análise Real: Funções de uma variável. Vol. 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária).

PRÉ-CÁLCULO-UNB. *Lista de Aplicações - Funções*. Universidade de Brasília-Departamento de Matemática: SBM, 2023.

RABELO, R. *Função de 2°grau*. n.d. Disponível em: <https://www.ufs.br/uploads/page_attach/path/8506/Fun___o_de_2___grau.pdf>. Acesso em: 5 de junho de 2023.

Sá, M. M. A. de. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol. 1, Conjuntos e Funções*. Disponível em: <http://www.periodicos.letras.ufmg.br/index.php/anais_linguagem_tecnologia/article/viewFile/12142/10362>. Acesso em: 10 de janeiro de 2025.

WINTERLE, P. *Vetores e geometria analítica*. 2. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2014.