UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
CURSO DE MATEMÁTICA LICENCIATURA

CLAYSON RHONI GABRIEL PEREIRA FRANÇA

RECORTES HISTÓRICOS PARA O ESTUDO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO

São Luís - MA
2025

CLAYSON RHONI GABRIEL PEREIRA FRANÇA

RECORTES HISTÓRICOS PARA O ESTUDO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª Drª Waléria de Jesus Barbosa Soares.

São Luís - MA

2025

França, Clayson Rhoni Gabriel Pereira
Recortes históricos para o estudo de números complexos no ensino Médio. / Clayson Rhoni Gabriel Pereira França. – São Luís, MA, 2025.

69 f.

TCC (Graduação em Matemática Licenciatura) - Universidade Estadual do Maranhão, 2025.
Orientador: Profa. Dra. Waléria de Jesus Barbosa Soares.

1.Ensino de matemática. 2.História da matemática. 3.Proposta pedagógica. 4.Números complexos. I.Titulo.

CDU:373.5:511.11(091)

Elaborado por Cássia Diniz - CRB 13/910

RECORTES HISTÓRICOS PARA O ESTUDO DE NÚMEROS COMPLEXOS NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática Licenciatura da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Waléria de Jesus Barbosa Soares.

Aprovado em: / /2025.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
gov.br
WALERIA DE JESUS BARBOSA SOARES
Data: 28/07/2025 16:53:08-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Waléria de Jesus Barbosa Soares (Orientadora)

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Documento assinado digitalmente
gov.br
MAURO GUTERRES BARBOSA
Data: 25/07/2025 17:21:59-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Mauro Guterres Barbosa

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Documento assinado digitalmente
gov.br
SANDRA IMACULADA MOREIRA NETO
Data: 28/07/2025 14:55:53-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof.ª Dr.ª Sandra Imaculada Moreira Neto

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Dedico este trabalho a Deus, minha família, amigos e todos aqueles que precisam de educação pública de qualidade, pois a única forma de ascensão, é através da educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me proporcionado chegar até aqui, pois sem a aprovação e a benção d'Ele nada disso teria acontecido, e por ainda, ajudar a seguir com sabedoria para enfrentar todos os obstáculos e barreiras encontrados durante esse percurso até a conclusão do curso.

Agradeço, grandiosamente, aos meus pais: Rosenilde Araújo Pereira França e Claudionor da Luz Santos França, pela dedicação à minha criação, pela educação que me forneceram e, também, pelo apoio e pelo incentivo durante esses anos de curso.

Agradeço aos colegas de sala: Luan Felipe Mendes Soares, Robert Vinicius Goulart Santos, Rodrigo Jorge Paixão Pinheiro Mendes, Jailson Pereira Silva, Joseilson Roxo da Silva, Renata Gomes de Oliveira, Ana Caroline Fonseca Chaves, Victor Ariel de Oliveira Carvalho, Hosana Bianca Malheiros Moraes e Ana Lídia de Souza Silva que tive o imenso prazer de conhecer e compartilhar experiências durante esses anos juntos, que construímos vínculos e passamos por diversos momentos que ficarão para sempre em minhas memórias.

Agradeço à professora e orientadora Dra. Waléria de Jesus Barbosa Soares, por toda dedicação e carinho ao me conduzir nesta pesquisa. E, também, aos professores, Mauro Guterres Barbosa e Rayane de Jesus Santos Melo, por todo apoio e incentivo durante a reta final do curso.

Agradeço a todos os professores do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Maranhão, pois através dos conhecimentos repassados foi possível a conclusão desse trabalho.

Agradeço também a mim, por não ter desistido em momento algum, por ter seguido com aquilo em que acreditava a todo momento sem titubear ou pestanejar, pelo esforço exercido durante esses anos de graduação, abrindo mão de horas de sono e lazer para cumprir com minhas responsabilidades acadêmicas.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indiretamente me ajudaram na construção e realização deste sonho. Muito obrigado!

"A importância de estudar história. Não conhecer o passado condena presente e futuro!"

- Jackson Alves

RESUMO

Este trabalho investiga o uso da História da Matemática como recurso para o ensino dos números complexos, buscando compreender como essa abordagem pode favorecer a construção de aprendizagens significativas no ensino médio. Parte-se do reconhecimento de que os números complexos são frequentemente percebidos pelos alunos como um conteúdo abstrato e descontextualizado, o que dificulta sua compreensão e desmotiva o aprendizado. A introdução de elementos históricos, nesse cenário, surge como uma estratégia didática capaz de humanizar o conhecimento matemático, despertando a curiosidade, o interesse e a compreensão crítica dos estudantes. Por meio de uma pesquisa qualitativa, do tipo bibliográfica e histórico-documental, o nosso objetivo geral foi investigar as potencialidades do uso da história da Matemática como recurso metodológico na construção de uma proposta didática para o ensino dos números complexos. Teve-se como aportes teóricos principais: Miguel (1997), D'Ambrósio (1999) e Oliveira (2017). Constatou-se que é possível construir a proposta didática pretendida quando trazemos história da matemática por meio de histórias de vidas de matemáticos envolvidos com o desenvolvimento dos números complexos, linha do tempo sobre o desenvolvimento do conteúdo, problemas envolvendo a matemática de outros tempos e artefatos históricos por meio de imagens de livros antigos.

Palavras-chave: Ensino de matemática; História da matemática; Proposta pedagógica; Números complexos.

ABSTRACT

This research investigates the use of the History of Mathematics as a didactic resource for teaching complex numbers, aiming to understand how this approach can favor the construction of meaningful learning in high school. It starts from the recognition that complex numbers are often perceived by students as an abstract and decontextualized content, which makes their understanding difficult and demotivates learning. The introduction of historical elements, in this scenario, emerges as a didactic strategy capable of humanizing mathematical knowledge, arousing students' curiosity, interest, and critical understanding. Through qualitative research, of the bibliographic and historicaldocumentary type, our general objective was to investigate the potentialities of using the history of Mathematics as a methodological resource in the construction of a didactic proposal for teaching complex numbers. Our main theoretical contributions were: Miguel (1997), D'Ambrósio (1999), and Oliveira (2017). We found that it is possible to construct the intended pedagogical didactic proposal when we bring the history of mathematics through the life stories of mathematicians involved with the development of complex numbers, a timeline on the development of the content, problems involving the mathematics of other times, and historical artifacts through images of old books.

Keywords: Mathematics teaching; History of mathematics; Pedagogical didactic proposal; Complex numbers.

LISTA DE SIGLAS

BOCEHM – Boletim Cearense de Educação e História da Matemática

CREPHIMat – Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática

ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática

ITA – Instituto Tecnológico da Aeronáutica

IME – Instituto Militar de Engenharia

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PROFMAT – Programa de Pós-graduação em Matemática

REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SBHMat – Sociedade Brasileira de História da Matemática

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A necessidade constante de achar novas formas de planejar aulas com intuito de ensinar matemática e, ao mesmo tempo, despertar e curiosidade dos alunos para aprenderem, é uma tarefa árdua que exige do professor uma gama de saberes interdisciplinares para produzir uma aula que atinja tais objetivos. Junto a isto, existe o fato da matemática ser considerada pelos alunos, uma disciplina com um certo nível de dificuldade de entendimento, assim, desafiadora. Diante disso como destaca Eves (2004), uma forma de motivar o aluno no processo de aprendizagem dessa área de conhecimento é a introdução da história da matemática.

Motta e Ferreira (2007, p. 9), destacam que "a Matemática vem sendo apresentada com um amontoado de fórmulas e teoremas que o aluno tem que decorar para a prova, não se conhecendo a história daquele conteúdo com o qual estamos tendo contato em sala de aula". Neste sentido, podemos adotar a história da matemática como uma ferramenta para criar formas não usuais de ministrar aula e manter o aluno focado, curioso e motivado, mostrando não só a parte matemática, com cálculos, conceitos e teoremas, mas fazendo com que compreendam a importância de estudar este assunto e o porquê do desenvolvimento ao passar dos séculos até os dias atuais.

Com relação aos números complexos, vemos que é um tema relevante para os dias atuais, visto que têm aplicações práticas importantíssimas. No qual, entra sempre no debate que o ser humano desenvolve, não só a matemática, mas outras componentes curriculares, a fim de satisfazer uma necessidade. Engenharia elétrica, aerodinâmica, dinâmica dos fluidos, mecânica quântica etc., são somente alguns exemplos das aplicações que se utilizam dos números complexos.

Contudo, com tantas aplicações, vemos poucos livros didáticos e outros trabalhos tratando da história, surgimento e desenvolvimento dos números complexos e suas aplicações. E com certeza, cairá naquele mesmo debate que os alunos propõem aos professores, tais como: *"números complexos existem?", "este assunto serve para o quê?", "quem inventou os números complexos?"*. Nesse contexto, corroboramos com Schubring (2014) quando propõe que o professor de matemática deve conhecer não apenas os conceitos e teorias a ensinar, como também compreender a própria natureza desse conhecimento.

Ante o exposto anunciamos como problema dessa pesquisa: *Como a história da Matemática pode ser mobilizada como recurso metodológico na elaboração de propostas de ensino que favoreçam a construção das noções relativas aos Números Complexos pelos* *estudantes no ensino médio?* Por hipótese, reconhecer a origem e evolução do conhecimento matemático, por si, motiva o aluno a engajar-se em atividades investigativas, ainda mais quando se trata de um objeto matemático abstrato como os números complexos, aprender entendendo como e quais as necessidades de criação de tal objeto de conhecimento conduz o aluno a construir aprendizagens significativas sobre este.

Diante disso, este trabalho tem como objetivo geral investigar as potencialidades do uso da história da Matemática como recurso metodológico na construção de uma proposta didática voltada para o ensino dos Números Complexos. Para isso, busca-se analisar, sob uma perspectiva teórica, o uso da história da Matemática como recurso metodológico no processo de ensino-aprendizagem; identificar pesquisas que abordam a utilização da história da Matemática como recurso no processo de ensino e aprendizagem dos Números Complexos; reconhecer artefatos históricos relevantes sobre os números complexos; elaborar uma proposta didática que incorpore a história da Matemática ao processo de ensino dos Números Complexos.

Para tanto, o trabalho foi dividido em capítulos para uma melhor compreensão do objeto de pesquisa em estudo. Destaca-se então que o capítulo "Referencial teórico" foi subdividido em três subtópicos que são: Contribuições da história da matemática para o ensino de matemática; O estudo de números complexos na sala de aula; O uso de história da matemática para o ensino de números complexos. O capítulo "Percursos metodológicos" relata o caminho trilhado durante a pesquisa e o modo que ela foi realizada, a fim de manter a coerência, a intencionalidade e a credibilidade deste trabalho. O capítulo "Resultados e discussões" foi subdividido em três partes, que são: Artefatos históricos para o ensino da matemática; Uma proposta didática para o ensino de números complexos; e, Orientações para o desenvolvimento da proposta didática elaborada.

Espera-se que a compreensão da história dos números complexos não apenas induza os alunos a se engajarem no processo de aprendizagem, mas também, contribua para a construção de um conhecimento matemático mais significativo e contextualizado. Espera-se ainda que, ao inserir elementos históricos na abordagem didática, possamos despertar o interesse dos estudantes pelas aulas de matemática e, assim, proporcionar a eles uma visão mais ampla sobre o desenvolvimento do pensamento matemático, tornando a experiência de aprendizado mais envolvente e eficaz.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O presente estudo, busca romper com práticas de ensino tradicionais centradas na memorização de fórmulas e procedimentos, promovendo, uma aprendizagem mais reflexiva, contextualizada e significativa.

Acredita-se que incorporar a história da matemática ao ensino de números complexos pode representar uma alternativa promissora, fazendo com que estudantes não apenas compreendam a evolução conceitual dos números complexos, mas reconheçam a sua importância em diferentes contextos científicos e tecnológicos.

Essa estratégia, permitirá que o ensino vá além do cálculo mecânico, estimulando o pensamento crítico e a curiosidade intelectual, transformando assim os alunos, em protagonistas no processo da aprendizagem. Isso também permite ao professor criar conexões entre a matemática e outras áreas de conhecimento, despertando o interesse dos estudantes para atividades investigativas, lúdicas e interdisciplinares.

Miguel (1997), em sua pesquisa publicada, na revista 'The Mathematics Teacher' concluiu que:

> Nesses textos, o poder motivador da história é atestado e exaltado em função da adoção de uma concepção lúdica ou recreativa do mesmo ponto é a história-anedotário vista como contraponto momentâneo necessário aos momentos formais do ensino, que exigiriam uma grande dose de concentração e esforço por parte do aprendiz. (Miguel, 1997, p. 75).

Diante deste cenário, essa abordagem se torna especialmente relevante no ensino de números complexos, cujo surgimento histórico está intimamente ligado à busca por soluções para equação que não podiam ser resolvidas no conjunto dos números reais. No entanto como apontam Almeida (2013) e Silva (2014), o ensino desse tema, tal como ocorre em grande parte dos livros didáticos e práticas escolares, ainda é marcado por um enfoque excessivamente algébrico e formal. Esse tipo de abordagem não contribui para a compreensão dos alunos que, por muitas vezes, questionam a utilidade prática dos números complexos e tem dificuldades para atribuir significado ao conteúdo.

2.1 Contribuições da história da matemática para o ensino de matemática

O uso da História da Matemática no ensino escolar tem sido amplamente defendido como uma estratégia pedagógica que visa aproximar os alunos do objeto matemático de maneira mais contextualizada e significativa. Nesse contexto, a pesquisa de Miguel (1997), é fundamental para entender os benefícios e as limitações dessa abordagem no ensino da Matemática. Pois, a aprendizagem matemática, deve estar correlacionada não somente ao entendimento dos significados, mas de estabelecer conexões entre os objetos matemáticos e as situações do cotidiano, ou seja, que se utilize de problemas reais.

A história da matemática oferece um repertório valioso de problemas que podem encantar e desafiar os alunos, ao incorporar as aulas transformam aprender em uma jornada repleta de curiosidades, contextos práticos e descobertas. Situações vividas por matemáticos como Gauss que revelam dilemas reais que estimularam grandes ideias. Esses relatos não apenas humanizam o objeto de conhecimento, mas instigam raciocínio, desperta o interesse pelos problemas históricos, incentivam o desenvolvimento da criatividade e do conhecimento e fortalecem a aprendizagem significativa tornando a matemática acessível envolvente repleta dando sentido para os estudantes.

Miguel (1997), argumenta que, ao integrar a história do desenvolvimento dos conceitos matemáticos ao ensino, os alunos podem entender o contexto histórico e as motivações humanas que levaram à criação desses conceitos. Ele destaca que a história da matemática tem o poder de tornar o conteúdo acessível, interessante e motivador, criando um elo entre o conhecimento atual e os processos de descoberta e evolução que moldaram esse saber ao longo do tempo. No caso dos números complexos, a história não apenas esclarece como e por que esses números surgiram, mas revela as aplicações práticas que justificam sua importância, como nas áreas de engenharia elétrica, dinâmica dos fluidos e mecânica quântica. Segundo Miguel (1997), os alunos podem ser mais propensos a se engajar no aprendizado quando compreendem como o conceito foi moldado pela necessidade de resolver problemas reais.

No entanto, Miguel (1997), também aponta que o uso da história da matemática não está isento de desafios. Ele ressalta que, para que a história seja eficaz, ela deve ser apresentada de maneira cuidadosa e equilibrada, evitando transformar a história em uma mera anotação cronológica dos eventos. Em vez disso, deve ser utilizada para questionar e refletir sobre os métodos de resolução de problemas matemáticos que surgiram ao longo do tempo, oferecendo aos alunos uma visão crítica do processo de construção do conhecimento matemático.

D'Ambrósio (1999), enumera alguns itens importantes, a qual ele denomina "para quem e para que serve a História da Matemática?". E, segue:

> 1. Para situar a Matemática como uma manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução; 2. Para mostrar que a

> Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade; 3. Para destacar que essa Matemática teve sua origem nas culturas da antiguidade mediterrânea e se desenvolveu ao longo da Idade Média e somente a partir do século XVII se organizou como um corpo de conhecimentos, com um estilo próprio; 4. Para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico,tecnológico e econômico, e avaliar as consequências sócio-culturais dessa incorporação. (D'Ambrósio, 1999. p. 27).

Um dos principais benefícios dos recursos oferecidos pela história da matemática, articulada ao ensino, é exatamente a reflexão sobre o processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, dado que pode ser feito a construção da linha do tempo onde a necessidade do homem foi moldando o conhecimento, a fim de suprir uma falta de opção de resolução de um problema, onde através de tentativa e erro, foi solucionada.

Visto ainda, que a matemática não pode ser tratada como uma ciência acabada, é assim que deve ser apresentada ao aluno, sendo o principal papel do professor instigar o aluno a buscar as respostas. Em consonante, a Oliveira (2017) defende:

> Ao professor compete despertar, no aluno, a vontade de aprender e, no nosso caso, aprender matemática, que poderá ser feito se o professor pensar na matemática como um objeto de estudo em movimento, interligado com os diferentes saberes e que sua aprendizagem ocorre na ação do aluno com esse objeto, por meio de experimentação, de descoberta, de atividades lúdicas e outras. (Oliveira, 2017, p. 73).

O exercício de se utilizar a história da matemática permite ao professor uma maneira lúdica de ensinar aos alunos sobre às civilizações antigas, o ajudando a produzir conhecimento, de forma ativa, a desenvolver reflexões e fazer compreeender acontecimentos históricos que causaram grandes discussões em suas épocas. E o uso da história serve também para o professor realizar uma interligação da matemática com outras áreas do conhecimento, possibilitando que os objetos de conhecimento sejam discutidos de forma ampla.

2.2 O estudo de números complexos na sala de aula

São poucos os trabalhos que abordam reflexões sobre o ensino dos números complexos. Aqui daremos ênfase a dois Trabalhos de Conclusão de Curso PROFMAT (Programa de Pós-graduação em Matemática), do autor Almeida (2013) e da Silva (2014) que apresentam uma crítica à forma como os números complexos são abordados no Ensino Médio e nos livros didáticos. A escolha destes artigos fundamenta-se no fato de que ambos os trabalhos abordam, de maneira consistente e crítica, a inserção dos números complexos no contexto escolar, com base em experiências e reflexões sobre a prática docente. Ambos os artigos concordam na defesa de uma abordagem didática que articule história, conceitos fundamentais e aplicações práticas, reconhecendo os complexos como elementos fundamentais da matemática moderna e da formação dos alunos.

Almeida (2013), afirma que o tratamento dado ao tema é muito formal e algébrico, sem levar em consideração suas aplicações práticas e a história de seu surgimento. Ele destaca que, como professor com experiência no ensino desse assunto em escolas de Campina Grande, percebeu que os alunos, ao serem confrontados com uma abordagem puramente algébrica, frequentemente se perguntam sobre a utilidade dos números complexos, sua existência e suas aplicações práticas. Então, se propõe a inovar a forma de ensino, introduzindo os números complexos através de suas aplicações em Geometria Plana, além de resgatar o contexto histórico de seu surgimento, para responder afirmativamente às questões dos alunos.

O fato que foi notado por Almeida (2013), ao revisar a bibliografia para a elaboração do trabalho de conclusão de curso, foi que aplicações importantes e algumas das propriedades, principalmente as gráficas, não eram abordadas nas escolas de Ensino Básico. Ainda assim, ele encontrou poucos materiais apropriados para estudo deste objeto matemático, sendo estes: algumas apostilas e materiais resumidos na internet, com finalidade de preparar os alunos para a participação em olimpíadas de Matemática, de prestação de vestibulares militares como o Instituto de Tecnologia da Aeronáutica (ITA) e o Instituto de Militar de Engenharia (IME), ou com destino a estudantes e professores de cursos de graduação da área de exatas.

Além disso, desejava apresentar uma abordagem que fosse além do tratamento tradicional e formal dos números complexos, abordando tanto seu surgimento histórico quanto suas aplicações em Geometria, algo que ele percebeu ser pouco explorado nos materiais didáticos tradicionais. Com isso, pretendia estimular outros educadores e pesquisadores a repensarem e expandirem as formas de ensinar esse tema, contribuindo para uma evolução do ensino da Matemática.

Almeida (2013), conclui que é viável ensinar números complexos no Ensino Médio não apenas de uma maneira formal e algébrica, mas explorando suas aplicações práticas, e abordando sua história. Essa visão excessivamente algébrica, segundo Almeida, muitas vezes impede os alunos de perceberem a utilidade prática dos números complexos, o que pode desmotivar o interesse pela disciplina.

Silva (2014) fez notar que os números complexos são mais que um simples conjunto numérico. Segundo a autora, é de suma importância conhecer o motivo e a utilidade da sua criação, pois houve vários percalços durante o desenvolvimento deste conteúdo. Desde as primeiras equações cúbicas que foram propostas por desafios matemáticos, passando pelo pensamento e os dilemas enfrentados de Cardano, que passa também pelas contribuições de Bombelli, até as reformulações de Euler e Gauss.

Não distante disto, Silva (2014) acrescenta que através de sua representação polar, constitui um dispositivo mais do que adequado para resolução de questões de geometria ampliando as formas de analisar problemas, o que engloba e beneficia diversas áreas como física, engenharia elétrica, aerodinâmica, entre outros.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) reconheciam os números complexos como parte do conteúdo a ser abordado no ensino médio, especialmente no eixo de álgebra, e defendiam o uso da história da matemática no processo de ensino e aprendizagem. Conforme suas orientações, o exercício histórico “daria aos estudantes uma oportunidade de questionar e compreender melhor processos sociais, econômicos e culturais passados e contemporâneos e, além disso, auxiliaria a construir uma visão [...] associada a outras dimensões da vida humana” (Brasil, 2000, p.15).

Os PCN’s valorizavam a formação de um raciocínio abstrato e a compreensão de estruturas algébricas, o que justificava a presença dos números complexos como um objeto de conhecimento enriquecedor, mesmo que não essencial para todos os estudantes.

Silva (2014), alega em sua introdução do trabalho, como a apresentação do tema números complexos costuma resultar em uma difícil compreensão dos estudantes e realiza abordagens em sua fala sobre os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio), onde cita a importância de estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e as aplicações dos conhecimentos em situações diversas.

Com a implementação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), houve uma reformulação significativa nos objetos obrigatórios da Educação Básica. Os números complexos deixaram de ser mencionados explicitamente, o que levou à sua exclusão de grande parte dos materiais didáticos e planejamentos curriculares. Este documento regulador, prioriza habilidades voltadas à resolução de problemas, o que acabou relegando os números complexos a um papel secundário, conforme é possível observar na seguinte citação da BNCC: “[...] propõe-se a resolução de problemas envolvendo números naturais, inteiros, racionais e reais, em diferentes contextos (do cotidiano, da própria Matemática e de outras áreas do conhecimento)” (Brasil, 2018, p. 527).

2.3 O uso de história da matemática para o ensino de números complexos

Neste tópico, foi utilizado um artigo de autoria de Souza e Carneiro (2024), onde fazem a junção de História da Matemática e Números complexos e destacam o desempenho fundamental do uso desta ferramenta no ensino dos números complexos, principalmente quando se busca uma abordagem mais contextualizada e motivadora para os alunos.

Como é demonstrado ao longo deste trabalho, a História da Matemática oferece uma perspectiva rica e envolvente, que humaniza o conteúdo e quebra a barreira do ensino mecanicista de fórmulas e procedimentos. É um elemento articulador e motivador, quando a história de conceitos matemáticos como os números complexos é incorporada ao processo de aprendizagem, ela possibilita aos alunos entender não apenas como esses conceitos foram formulados e desenvolvidos, mas também o porquê de sua relevância, despertando seu interesse e facilitando sua compreensão.

A trajetória histórica dos matemáticos, como Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Bombelli e Euler, entre outros, revela como o conceito de número complexo foi sendo aceito e desenvolvido ao longo do tempo, e como ele surgiu da necessidade prática de resolver problemas matemáticos que não podiam ser solucionados apenas com os números reais.

A história da matemática nos últimos anos vem adquirindo uma forte caracterização no auxílio para o ensino-aprendizagem das aulas de matemática, fundamentando novas metodologias e práticas, fazendo uma mescla de outros saberes, tornando assim, a aula dinâmica e construtiva, como retrata (Pinto Júnior, 2009, p.09).

> [...] a história da matemática tem adquirido, nos últimos anos, um status de forte aliada do ensino fundando, novas práticas e metodologias [...]. Além disso, vários livros didáticos utilizados por eles, ainda buscam encontrar a melhor maneira de oferecer uma opção para trabalho com conceitos matemáticos à luz do processo histórico no qual estão inseridos.

Além disso, ao situar os números complexos dentro de um contexto histórico, os alunos podem perceber que a matemática não é uma construção estática e acabada, mas sim uma disciplina dinâmica, em constante evolução, que responde a necessidades específicas de resolução de problemas isso contribui para uma desmistificação da matemática, ajudando os alunos a compreenderem que os conceitos matemáticos são frutos da busca humana por respostas e soluções, não apenas abstrações ou enigmas sem significado prático.

3 PERCURSOS METODOLÓGICOS

A metodologia usada na presente pesquisa tem caráter qualitativo que segue os parâmetros adotados por Flick (2009, p. 9) que diz: “uma parte importante da pesquisa qualitativa está baseada em texto e na escrita, desde notas de campo e transcrições até descrições e interpretações, e, finalmente, à interpretação dos resultados e da pesquisa como um todo”.

A pesquisa seguiu um estudo bibliográfico, com o objetivo de encontrar artigos, dissertações de mestrado e teses de doutorado que abordam sobre a história da matemática em processos de ensino-aprendizagem, tendo como finalidade analisar como a história da matemática pode ser utilizada em aulas de matemática sobre números complexos. Ainda, foi histórico-documental, quando buscou livros antigos sobre os numeros complexos.

As nossas fontes foram levantadas em plataformas como Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Boletim Cearense de Educação e História da Matemática (BOCEHM), Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHMat), Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat) e o Google Acadêmico. Segundo Libâneo e Pimenta (1999), a pesquisa no campo educacional deve ser alimentada constantemente pela reflexão teórica que é construída a partir da leitura crítica e sistemática de obras clássicas e contemporâneas sobre a educação.

A seguir, os artigos utilizados na fundamentação da pesquisa foram organizados conforme a plataforma de origem. Também foram separados os artigos que, embora não tenham sido citados diretamente, serviram como fontes de inspiração para a construção da proposta, especialmente no que se refere à história da matemática, ao uso de artefatos históricos e às estratégias metodológicas para o ensino dos números complexos.

QUADRO 1 – Artigos utilizados diretamente na pesquisa, por plataforma

Plataforma	Título do Artigo	Autor(es)
Google Acadêmico	Números Complexos Para o Ensino Médio	ALMEIDA, S. P. de
	A História dos Números Complexos	PINTO JÚNIOR, U.
	Propostas para o ensino de números complexos no Ensino Médio	SILVA, F. G. L.

REVEMAT	Uma abordagem didática para os Números Complexos por meio da História da Matemática	SOUSA, M. S. de; CARNEIRO, R. dos S.
BOCEHM	Experiência de utilização de Artefatos Históricos em atividade de Ensino	OLIVEIRA, R. L.

Fonte: Autor, 2025.

QUADRO 2 – Artigos que serviram de inspiração para a pesquisa, por plataforma		
Plataforma	**Título do Artigo**	**Autor(es)**
BOCEHM	Artefatos históricos no ensino de matemática: um estudo a partir dos anais do seminário nacional de história da matemática (2011 – 2017)	NASCIMENTO, M. F. G. do; ANGELO, C. B.
	Números Complexos: de Gauss às Aplicações no Geogebra	SILVA, M. M. A.; PEREIRA, J. S.; SOUSA, E. K. V.
ENEM	Artefatos Históricos: Construindo Saberes na Formação Docente	OLIVEIRA, R. L.
	Ensino de Números Complexos	NETO, R. V.
Google Acadêmico	Ensino de Matemática, História da Matemática e Artefatos: Possibilidade de Interligar Saberes em Cursos de Formação de Professores da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental	OLIVEIRA, R. L.
	O Ensino dos Números Complexos por Meio de uma Proposta Metodológica de Sala	MENDES, J. A.

	de Aula Invertida	
	O Uso da História da Matemática no Ensino-aprendizagem Através de Artefatos Históricos	NASCIMENTO, M. F. G. do

Fonte: Autor, 2025.

Posteriormente, construimos uma proposta didática para o ensino de números complexos. A proposta didática focou em tornar o aprendizado matemático mais significativo e contextualizado, utilizando abordagens que vão além da simples memorização de fórmulas.

Para isso, a proposta pedagógica envolveu recortes de história da matemática, para que o aluno soubesse quais foram as necessidades humanas que fizeram surgir os números complexos; logo em seguida, uma parte teórica sobre o assunto; e, por último uma parte atribuindo exercícios. Assim, unindo a história dos números complexos com conceitos e atividades propostas, com intuito de cativar a atenção do aluno e fazê-lo desenvolver o conhecimento através dos exercícios e fazer surgir, através da história, o interesse pelo assunto.

Com isto, pudemos analisar a importância do uso de história da matemática para o ensino-aprendizagem de números complexos. Assim como Miguel (2019, p. 25), que buscava pesquisar sobre autores de livros de matemática que usaram na sua composição a história para explicar e contextualizar as mais diferentes áreas da matemática, visamos com essa proposta não apenas o aprendizado dos conteúdos, mas a valorização da Matemática como uma construção humana.

Ao integrar a história da matemática ao ensino de matemática, os alunos podem entender o contexto social, cultural e científico em que as descobertas matemáticas surgiram, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

> [...] com relação à importância da história na busca por métodos pedagogicamente adequados e interessantes para a abordagem de certos tópicos da Matemática escolar pode ser encontrada, no início do século XX, na obra Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint, de Felix Klein, (...), em cujo prefácio destaca o fato de que um dos componentes caracterizadores do método por ele empregado na redação desse livro teria sido o 'prazer especial de seguir o desenvolvimento histórico de várias teorias a fim de compreender as marcantes diferenças nos métodos de apresentação quando confrontados com os demais métodos presentes na instrução atual (Klein, 1945, prefácio)'.

Nesse sentido, podemos mostrar aos alunos que é um engano dizer que a matemática está pronta e acabada, muito pelo contrário, fazendo uso da fala do Prof.º Ledo Vaccaro

Machado, em palestra proferida no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) durante o I Encontro Nacional do Mestrado PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional): "A Matemática não constrói verdades, matemática constrói conhecimentos. E conhecimentos não são verdadeiros ou falsos, conhecimentos são aceitos ou refutados, e exatamente por serem aceitos ou refutados é que a ciência anda" (IMPA, 2023, 21min37s). Ao levar a evolução dos números complexos através da história, apresentamos uma forma eficaz de atestar e provar este argumento.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Artefatos históricos para o ensino de matemática

Nesta temática, será tratado sobre a importância dos artefatos históricos como um dos meios para contextualizar, demonstrar e/ou exemplificar as atividades matemáticas, permitindo o manuseio de objetos, imagens, cópias de documentos primários que fazem alusão a época do desenvolvimento matemático, adicionando um contexto temporal da sociedade na antiguidade, trazendo não só a visão que temos hoje, da "matemática completa", mas sim, a de indivíduos que observaram, criaram e desenvolveram o conteúdo matemático. Comungando com Roque (2012, p. 19):

> Um dos fatores que contribuem para que a matemática seja considerada abstrata, exige na forma como a disciplina ensinada fazendo-se uso, muitas vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ou seja, em vez de partirmos do modo como um conceito matemático foi desenvolvido, mostrando as perguntas as quais ele responde, tomamos esse conceito como algo pronto.

O que gera interesse nos estudantes às atividades que são propostas pelo professor, com intuito de tornar a aula mais descontraída e dinâmica dentro da sala de aula, podendo mostrar as dificuldades que foram enfrentadas, as circunstâncias em que ocorreram, a relevância dos destas obras para a sociedade na época etc.

O homem, desde os primórdios, procura meios de criar utensílios, instrumentos, objetos que o pudessem auxiliar no seu cotidiano. Por exemplo, o Período Paleolítico é denominado idade da pedra lascada, pois o *Homo habilis* começa a produzir ferramentas feitas de pedra para facilitar suas tarefas de sobrevivência, produzindo desde lanças para caça a clavas de pedra para defesa contra predadores. Então, criando esses instrumentos que auxiliam o homem em sua sobrevivência, com a matemática não foi diferente, muitos instrumentos foram criados ao passar do tempo para facilitação não somente para aprendizagens, mas também para repassar esses conhecimentos aprendidos por "tentativa e erro" a gerações posteriores.

Para conceituação de artefato histórico, vamos usar a definição produzida por Pereira (2015, p. 12), que afirma: "artefatos históricos, são objetos que foram produzidos em um determinado tempo e que retratam o contexto cultural e social da época. Ele geralmente possui uma utilidade prática e outra simbólica que marcam características de uma civilização". E estes artefatos podem ser documentos, imagens, fotografias, livros etc., utensílios que foram de extrema importância para o desenvolvimento matemático.

As aulas utilizando artefatos históricos podem ser feitas de várias maneiras, desde a utilização de instrumentos e/ou utensílios que foram empregados para auxiliar nas contas, pesquisas e também no desenvolvimento matemático na Antiguidade, como, por exemplo, o quipu, o ábaco, o astrolábio, entre outros; além disso, podem ser apresentados elementos visuais, como imagens, ilustrações, pinturas e esculturas de personagens históricos, bem como documentos antigos, tais como papiros, tabuletas de pedra, cadernos de anotações e livros, promovendo uma abordagem rica e contextualizada do conteúdo matemático.

Diante disso, podemos perceber que é muito valioso a introdução destes materiais para aula, porque estes materiais abrem uma gama de possibilidades para apresentação destes conteúdos matemáticos, quanto para a correlação deste com outras áreas de conhecimento, ou seja, a interdisciplinaridade, que os alunos consigam visualizar, interagir e obter algum sentido no estudo do conteúdo. Assim como afirma Pontes (2018, p. 30):

> Sobre materiais concretos, convém destacar que eles são concebidos, como objetos manipuláveis que funcionam como um subsídio para o ensino de conceitos matemáticos, ampliando o pensamento abstrato e proporcionando uma aprendizagem mais significativa e prazerosa.

Há um fato a ser tratado acerca do trabalho com artefatos históricos, pois este exige do professor uma formação contínua, pois assim como qualquer outro método de ensino, se o professor não for curioso a fim de pesquisar sobre o manuseio de forma satisfatória destes artefatos, ou criar um processo metodológico, que vincule os artefatos históricos ao conteúdo a ser ensinado, pode acontecer que o objetivo que deveria ser atingido durante a aula, não seja alcançado, principalmente se a utilização destes instrumentos e utensílios, forem realizados de qualquer forma, sem trabalhar e desenvolver suas reais potencialidades e objetivos. Pontes (2018, p. 24), alerta para esta questão da seguinte maneira:

> Seria incoerente tecer considerações sobre o ensino aprendizagem da Matemática sem dar o devido destaque ao papel do professor como mediador desse processo e à formação desse profissional, considerando que o resultado de suas ações pode ecoar positiva ou negativamente durante toda a vida do educando. Sem dúvida, muitos dos problemas relacionados ao ensino aprendizagem da Matemática devem-se à má formação dos profissionais que com ela trabalham e à adoção de modelos de ensino ultrapassados, que já não se adequam às demandas da sociedade contemporânea.

Em síntese, podemos perceber que o objetivo principal dessa didática é analisar como funcionavam as formas de se aprender, observar e criar a matemática. Na sala de aula, com a oportunidade da participação ativa dos alunos, ocorre uma troca de conhecimentos entre professor e aluno, pois sempre há novas formas de observar e interpretar um fato, um olhar de outro ângulo ou uma pergunta que pode ser feita de maneira riquíssima, desenvolvendo não só os alunos, mas também o próprio professor. Isso desfaz a crença de que basta saber apenas a parte algébrica da matemática, contas e mais contas, tanto para o professor quanto para o aluno, e ambos se desenvolvem na troca de saberes.

4.2 Uma proposta didática para o ensino de números complexos

Nesta seção, temos o objetivo de apresentar uma proposta didática voltada ao ensino de números complexos na educação básica, com ênfase na contextualização histórica, uso de material concreto através de artefatos históricos, e na valorização do percurso científico relacionado ao conteúdo. Ao mesclar elementos da história da matemática com a abordagem conceitual dos números complexos, busca-se a compreensão dos conteúdos, a partir de uma perspectiva mais significativa e crítica da aprendizagem.

A proposta tem como finalidade integrar artefatos históricos ao conteúdo matemático, com o intuito de despertar o interesse dos alunos para os temas trabalhados em sala de aula. A abordagem adotada não seguirá, necessariamente, a linha cronológica do desenvolvimento dos números complexos, porém cada tópico será relacionado a seu respectivo período e personagem histórico responsável pela contribuição ao desenvolvimento deste conteúdo. A proposta didática será composta por quatro aulas, cujos conteúdos estão organizados da seguinte forma:

1ª Aula – definição e forma algébrica, operações básicas;
2ª Aula – representação geométrica, conjugado e módulo;
3ª Aula – forma trigonométrica (ou polar), potenciação e radiciação na forma trigonométrica;
4ª Aula – resolução de equações binômias e trinômias.

Ao longo das aulas, serão articuladas exposições teóricas (com conceituações e definições), relatos históricos referentes ao desenvolvimento dos números complexos, bem como exemplos e exercícios complementares que possibilitem a consolidação dos conteúdos trabalhados. Também serão apresentados os planos de aula que guiarão como deverão decorrer a aula para o professor, com orientações, esclarecimentos e possíveis dúvidas.

PLANOS DE AULA

AULA 1

INSTITUIÇÃO:		
PROFESSOR(A):		
DATA: --/--/--	**ANO DE ESCOLARIDADE:** 3º ano	**TURMA:** --
COMPONENTE CURRICULAR: Matemática		**DURAÇÃO DA AULA:** 50 min
TEMÁTICA DA AULA: Números Complexos		
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA DA BNCC: 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.		

UNIDADE TEMÁTICA: Números e Álgebra
OBJETO DE CONHECIMENTO: Histórico do surgimento dos complexos; conjunto dos números complexos; Operações básicas com números complexos; Unidade imaginária i e suas potências;
HABILIDADE(S): **EM13MAT101:** Interpretação crítica de situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas, através da análise de gráficos de funções e taxas de variação, com ou sem o uso de tecnologias digitais. **EM13MAT302:** Modelagem e resolução de problemas usando funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: O professor iniciará a aula resgatando conhecimentos apresentados no ensino fundamental sobre equações do segundo grau, onde os alunos eram apresentados aos discriminantes, e quando este era menor que zero não havia solução, porém apenas no conjunto dos reais. Após isto, o professor irá falar um pouco de momentos da história em que outros personagens históricos tiveram o mesmo obstáculo, porém não encontrando uma solução para este

problema. Em seguida, apresenta os conjuntos numéricos já conhecidos: naturais, inteiros, racionais e irracionais, para demonstrar que a união destes conjuntos é o conjunto dos números reais. Daí então, é apresentada uma equação onde não há solução neste conjunto dos reais, porque aí surge a necessidade da criação de mais um conjunto de números.

Logo depois, o professor contará um pouco sobre a história dos números complexos, desde o desenvolvimento da fórmula de Del Ferro, passando pela disputa entre Fior e Tartaglia, a quebra da promessa de Cardano na publicação do Ars Magna, até chegar em Bombelli. Com inspiração nas fórmulas de Cardano e Tartaglia para a resolução de equações cúbicas, desenvolvendo então, a sua forma de resolução destas equações que tinham raízes quadradas de números negativos.

Daí, o professor partirá para a definição e forma algébrica dos números complexos, onde irá falar um pouco sobre matemáticos que ajudaram a denominar e desenvolver as partes teóricas para a prova da existência deste conjunto, sendo eles René Descartes, Leonhard Euler e Gauss.

Em seguida, apresentará a unidade imaginária, e o porquê René Descartes, chamou de "número imaginário". A partir daí, iniciará o tópico das potências da unidade imaginária "i", onde mostrará que a partir do expoente 5, iniciará um ciclo para as soluções que para fazer o cálculo da potência basta pegar o número do expoente em questão, dividir por 4 e verificar o resto, com a finalidade de fazer a substituição do expoente para um conhecido.

Na sequência, o professor mostrará algumas operações básicas com números complexos, sendo estes: adição, subtração e multiplicação, com as demonstrações dos casos.

Ao final, pedirá aos alunos que façam os exercícios para fixação do conteúdo.

RECURSOS INSTRUCIONAIS: Livro didático, pincel e quadro, Projetor (Data show)

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS: indagação e instigação os alunos, participação durante a aulas, exercícios em sala.

REFERÊNCIAS

B. Boyer, Carl. **História da matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

Contador, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve História** / Paulo Roberto Martins Contador. – São Paulo: editora Livraria da Física, 2008. Obra em 3v.

Dante, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

Eves, Howard. **Introdução a História da Matemática** / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – 3ª ed. – Campinas, SP: editora da Unicamp, 2002.

Giovanni, José Ruy, 1937 - **Matemática fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único/ José Ruy Giovanni, Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. – São Paulo: FTD 2002

Matemática: **ciência e aplicações volume 3**: ensino médio / Gelson Iezzi... [et al.]. – 7. ed. – São Paulo: Saraiva 2013.

AULA 2

INSTITUIÇÃO:		
PROFESSOR(A):		
DATA: --/--/--	**ANO DE ESCOLARIDADE:** 3º ano	**TURMA:** --
COMPONENTE CURRICULAR: Matemática		**DURAÇÃO DA AULA:** 50 min
TEMÁTICA DA AULA: Números Complexos		
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA DA BNCC: 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.		

UNIDADE TEMÁTICA: Números e Álgebra
OBJETO DE CONHECIMENTO: Representação Geométrica no Plano de Argand-Gauss; Conjugado de um Número Complexo; Módulo de um Número Complexo; Divisão de Números Complexos;
HABILIDADE(S): **EM13MAT101:** Interpretação crítica de situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas, através da análise de gráficos de funções e taxas de variação, com ou sem o uso de tecnologias digitais. **EM13MAT302:** Modelagem e resolução de problemas usando funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: O professor iniciará a aula retomando a aula anterior, perguntando sobre os exercícios que ficaram para serem feitos em casa. Reservará os primeiros minutos desta aula para tirar possíveis dúvidas sobre o conteúdo passado, principalmente se for perguntado do porquê que não foi falado sobre a operação de divisão, enfatizando que será conteúdo para mais adiante. Em seguida, iniciará a segunda aula falando sobre a representação geométrica de um número complexo, onde apresentará aos alunos o desenvolvimento da forma geométrica e da

observação dos números complexos, dando destaque ao plano cartesiano, onde um dos eixos é real (o eixo x) e o outro é o eixo dos imaginários (o eixo y).
O professor comentará sobre o primeiro a adotar essa visão, Caspar Wessel, que infelizmente não teve a fama necessária na publicação do seu estudo chamado “Um Trabalho Sobre a Representação Analítica da Direção”. Em sequência serão abordados os matemáticos mais conhecidos que são responsáveis por nomear este método, que foram: Jean-Robert Argand e Carl Friedrich Gauss. Na sequência, será mostrado alguns exemplos de como é representado a forma algébrica de números complexos no plano complexo
Em seguida, o professor irá abordar sobre conjugado e módulo de números complexos onde será mostrado que está faltando uma das operações que foram citadas na primeira aula, que no caso, é a divisão de números complexos era necessário o conhecimento sobre conjugado para realizar esta operação. Juntamente será também mostrado sobre o módulo dos números complexos e a interpretação geométrica deste, com suas demonstrações.
Ao final, o professor realizará com a turma as questões de fixação do conteúdo.

RECURSOS INSTRUCIONAIS: Livro didático, pincel e quadro, Projetor (Data show)

PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS: indagação e instigação os alunos, participação durante a aulas, exercícios em sala.

REFERÊNCIAS

B. Boyer, Carl. **História da matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

Contador, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve História** / Paulo Roberto Martins Contador. – São Paulo: editora Livraria da Física, 2008. Obra em 3v.

Dante, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

Eves, Howard. **Introdução a História da Matemática** / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – 3ª ed. – Campinas, SP: editora da Unicamp, 2002.

Giovanni, José Ruy, 1937 - **Matemática fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único/ José Ruy Giovanni, Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. – São Paulo : FTD 2002

Matemática: **ciência e aplicações volume 3**: ensino médio / Gelson Iezzi... [et al.]. – 7. ed. – São Paulo: Saraiva 2013.

AULA 3

INSTITUIÇÃO:		
PROFESSOR(A):		
DATA: --/--/--	**ANO DE ESCOLARIDADE:** 3º ano	**TURMA:** --
COMPONENTE CURRICULAR: Matemática		**DURAÇÃO DA AULA:** 50 min
TEMÁTICA DA AULA: Números Complexos		
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA DA BNCC: 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.		

UNIDADE TEMÁTICA: Números e Álgebra
OBJETO DE CONHECIMENTO: Expressão trigonométrica; Multiplicação e divisão na forma trigonométrica; Potenciação e radiciação na forma trigonométrica (1ª e 2ª Fórmula de Moivre),
HABILIDADE(S): **EM13MAT101:** Interpretação crítica de situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas, através da análise de gráficos de funções e taxas de variação, com ou sem o uso de tecnologias digitais. **EM13MAT302:** Modelagem e resolução de problemas usando funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: O professor começará a aula retomando com breves conceitos da aula anterior e verificando se os alunos estão acompanhando o ritmo, pois a próxima aula será a junção de todos estes conceitos: as equações binômias e trinômias. Verificará se estão fazendo as atividades e de preferência, pedirá os cadernos pra dar uma “vista”, não necessitando ser muito rigoroso nesta verificação, é só pra ter certeza que estão fazendo as atividades propostas e confirmar se há dúvidas.

Na sequência, continuará com a apresentação do matemático Moivre e os problemas de seu tempo, fazendo com que os alunos reflitam sobre as soluções. Logo em seguida, fará uma revisão da forma algébrica dos números complexos, relembrando que qualquer número da forma $z = a + bi$, pode ser representado como um ponto no plano cartesiano com coordenadas (a,b), sendo a a parte real e b a parte imaginária. A partir disso, introduzirá a ideia de que esse mesmo ponto também pode ser descrito por coordenadas polares, usando o módulo e o argumento do número complexo.

Em seguida, apresentará a forma trigonométrica de um número complexo, explicando que o módulo | z | de um número complexo $z = a + bi$ é a sua distância até a origem no plano complexo, dada por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, e o argumento principal $\theta = arg(z)$ é o ângulo que o vetor $\overrightarrow{Oz}$ forma com o eixo real positivo, com $0 \leq \theta < 2\pi$.

Com isso, praticará a conversão de alguns exemplos da forma algébrica para a trigonométrica, e discutirá a interpretação geométrica desses números. Ainda, representará o número no plano, calculará seu módulo, determinará o argumento e finalizará com a escrita trigonométrica.

Em seguida, o professor avançará para as operações de multiplicação e divisão entre números complexos escritos na forma trigonométrica. Destacará que, geometricamente, a multiplicação corresponde a uma rotação e uma dilatação: somamos os ângulos e multiplicamos os módulos. Já a divisão corresponde a uma rotação negativa (subtração de argumentos) e contração ou expansão, dependendo da razão entre os módulos.

Aos alunos serão apresentados um exemplo: multiplicar e dividir dois números complexos fornecidos já na forma trigonométrica. Em seguida, será proposto uma breve atividade para que os alunos pratiquem esse conteúdo em pequenos grupos, aplicando as fórmulas com números simples.

Em sequência, o professor introduzirá a potenciação de números complexos usando a 1ª fórmula de De Moivre. Explicamos que, dado um número complexo na forma trigonométrica. Apresentamos exemplos e destacamos que essa fórmula facilita enormemente os cálculos em comparação com a forma algébrica.

Logo após, apresentará a radiciação de números complexos, que é a operação inversa da potenciação, utilizando a 2ª fórmula de De Moivre, que nos permite encontrar todas as raízes enésimas de um número complexo, discutindo o fato de que as raízes possuem o mesmo módulo e seus argumentos formam uma progressão aritmética, de modo que seus pontos formam os vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência. Junto com os

alunos, o professor resolverá o exemplo clássico das raízes cúbicas de $-i$, construindo a PA dos argumentos e representando os pontos no plano complexo. Ao final, o professor realizará com a turma outras questões para a fixação do conteúdo
RECURSOS INSTRUCIONAIS: Livro didático, pincel e quadro, Projetor (Data show)
PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS: indagação e instigação os alunos, participação durante a aulas, exercícios em sala.
REFERÊNCIAS B. Boyer, Carl. **História da matemática** / Carl B. Boyer, Uta C. Merzbach; [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012. Contador, Paulo Roberto Martins. **Matemática, uma breve História** / Paulo Roberto Martins Contador. – São Paulo: editora Livraria da Física, 2008. Obra em 3v. Dante, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v. Eves, Howard. **Introdução a História da Matemática** / Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues. – 3ª ed. – Campinas, SP: editora da Unicamp, 2002. Giovanni, José Ruy, 1937 - **Matemática fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único/ José Ruy Giovanni, Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. – São Paulo: FTD 2002 Matemática: **ciência e aplicações volume 3**: ensino médio / Gelson Iezzi... [et al.]. – 7. ed. – São Paulo: Saraiva 2013.

AULA 4

INSTITUIÇÃO:		
PROFESSOR(A):		
DATA: --/--/--	**ANO DE ESCOLARIDADE:** 3º ano	**TURMA:** --
COMPONENTE CURRICULAR: Matemática		**DURAÇÃO DA AULA:** 50 min
TEMÁTICA DA AULA: Números Complexos		
COMPETÊNCIA ESPECÍFICA DA BNCC: 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.		

UNIDADE TEMÁTICA: Números e Álgebra
OBJETO DE CONHECIMENTO: Expressão trigonométrica; Multiplicação e divisão na forma trigonométrica; Potenciação e radiciação na forma trigonométrica (1ª e 2ª Fórmula de Moivre).
HABILIDADE(S): **EM13MAT101:** Interpretação crítica de situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvem a variação de grandezas, através da análise de gráficos de funções e taxas de variação, com ou sem o uso de tecnologias digitais. **EM13MAT302:** Modelagem e resolução de problemas usando funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS: Para iniciar e problematizar a aula, o professor deve utilizar como recurso exemplos de questões sobre equações de livros antigos, para que os alunos observem como os livros e as atividades mudaram ao longo dos tempos. Em seguida, o professor apresentará equações binômias e trinômias e, assim, demonstrar como podemos resolvê-las. O professor deve utilizar como recurso os exemplos dos dias atuais para facilitar o entendimento dos alunos fazendo com que os alunos revisem os conteúdos já ministrados em aula.

Como esta aula é curta, o professor pode realizar exercícios com a finalidade de observar o processo de aprendizagem, tendo em vista que a aprendizagem também depende da prática do conteúdo estudado em sala de aula.
RECURSOS INSTRUCIONAIS: Livro didático, pincel e quadro, Projetor (Data show)
PROCEDIMENTOS AVALIATIVOS: indagação e instigação os alunos, participação durante a aulas, exercícios em sala.
REFERÊNCIAS Dante, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v. Giovanni, José Ruy, 1937 - **Matemática fundamental: uma nova abordagem**: ensino médio: volume único/ José Ruy Giovanni, Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Jr. – São Paulo: FTD 2002 Matemática: **ciência e aplicações volume 3**: ensino médio / Gelson Iezzi... [et al.]. – 7. ed. – São Paulo: Saraiva 2013.

4.3 Orientações para o desenvolvimento da proposta didática elaborada

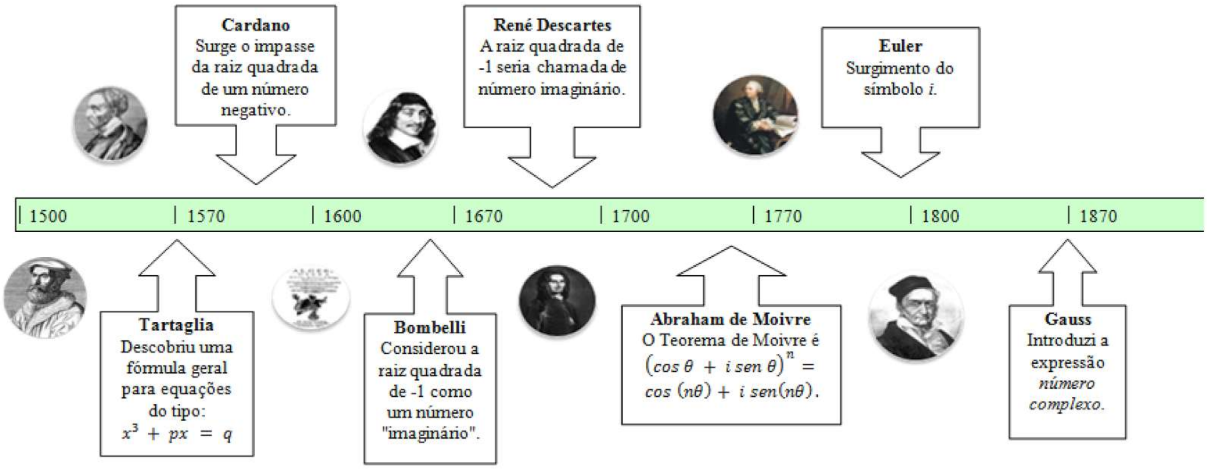
Para cada uma das aulas a seguir, elaboramos um roteiro de informações e atividades que podem ser utilizadas no desenvolvimento das aulas que compõem a proposta didática elaborada.

AULA 1

INTRODUÇÃO

Podemos utilizar a seguinte linha do tempo para compreender o desenvolvimento da formalização dos números complexos:

Figura 1: Linha do tempo do desenvolvimento dos números complexos

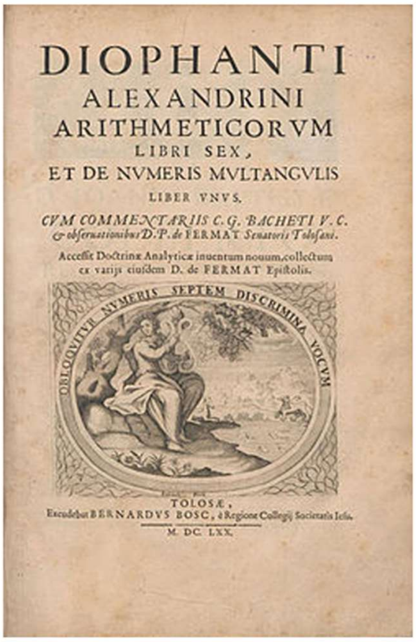


Fonte: https://complexosnadacomplexos.blogspot.com/2013/09/motivacao-historia-dos-numeros-complexos.html

Para a aula, podemos refletir que: Quando voltamos às aulas no ensino fundamental e estudamos sobre resolução de equações do segundo grau, temos casos cujo delta (discriminante) é menor que zero, dizemos que a equação não possui solução, contudo não possui solução no conjunto dos reais. Isso acontece pois, quando chegamos a parte da fórmula resolutiva de equações do segundo grau, mais conhecida como "fórmula de Bhaskara", encontraremos uma raiz quadrada de número negativo, o qual não conseguimos resolver, porque não há como um número negativo que multiplicado por ele mesmo, resulte em um número negativo.

Apesar de encontrarmos menções a uma raiz quadrada de número negativo em autores da antiguidade como, por exemplo, tabuletas de Argila da Suméria, por volta do ano de 1700 a.C, a expressão $\sqrt{81-144}$, que aparece em uma obra de Heron de Alexandria (século I), ou que aparece na tentativa de Diofanto (século III) onde teve em suas mãos um problema envolvendo um triângulo com lados desconhecidos cujo seu perímetro era 12 e a sua área equivale a 7 unidades de medida. Através destes dados ele consegue arrumar um sistema de equações onde ele esbarra em uma equação do segundo grau que seu determinante equivale a 167 negativos, ou seja, ele encontrou uma raiz quadrada de número negativo que, portanto, para a época era impossível de se resolver, foi apenas no século XVI, com os matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente junto com a necessidade de encontrar uma solução para isto, mas isso é assunto para mais adiante.

Figura 2: Capa do livro da traduçao latina (1670) de uma obra de Diofanto.



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alexandria#/media/Ficheiro:Diophantus-cover-Fermat.jpg

Vamos iniciar com os conjuntos numéricos já conhecidos, temos inicialmente o conjunto dos números naturais, que surgiu da necessidade do homem de contar, antes até que a necessidade de escrever:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Para que a subtração fosse sempre possível, ele foi estendido e obtivemos o conjunto dos números inteiros:

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Para que também a divisão fosse possível, estendemos este último e obtivemos o conjunto dos números racionais, que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros:

$$Q = \{x = \frac{a}{b}, com\ a \in Z, b \in Z\ e\ b \neq 0\}.$$

Em Q, a equação x² = 2 não pode ser resolvida, ou seja, em Q a equação $x^2 = 2$ não pode ser resolvida, ou seja, as soluções $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ não podem ser representadas por uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$ e $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ pertencente a Z. $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são exemplos dos números chamados de irracionais (I).

Da União dos racionais com os irracionais surgem os números reais (R).

$$\boldsymbol{R = Q \cup I}.$$

Portanto, podemos identificar Ncomo uma parte dos Z, Z como uma parte de Q e Q como uma parte dos R e escrever:

$$\boldsymbol{N \subset Z \subset Q \subset R}.$$

Sabemos que, se $x \in R$, então $x \geq 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em R, pois:

$$\boldsymbol{x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}}.$$

E não existe um número real $\boldsymbol{x}$ que, elevado ao quadrado, resulte -1. Por isso temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos (C). Para falar sobre este conjunto vamos iniciar com uma pequena história.

Conta-se que, em 1510, um matemático de nome Scipione del Ferro encontrou a solução para uma equação do terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu sem publicar a sua descoberta, pois naquele tempo, eram comuns desafios matemáticos, onde, por disputas de influência local, havia confrontos de quem fazia mais questões em menos tempo, e para proteger sua influência, del Ferro optou por não publicar, pois era seu trunfo para uma possível disputa. Antônio Maria Fior era seu aluno e, de alguma maneira, ficou conhecendo o novo método, então de posse deste conhecimento procurou tornar-se conhecido desafiando Tartaglia. Isso porque, passado algum tempo, se nenhuma resolução aparecesse, o desafiante em questão revelaria a nova descoberta. Dessa maneira, seu nome imediatamente emergiria do nada para a fama, em toda a Europa. Prontamente, Tartaglia aceitou o desafio, mesmo sabendo que seu adversário tinha o respaldo de outro matemático, pois não acreditava que Antônio Maria Fior tivesse grandes conhecimentos nessa área.

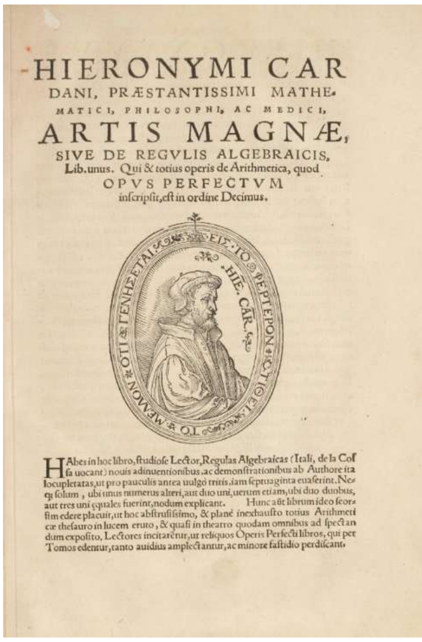
Figura 3: Capa do livro "Quesiti et inventioni diverse" (1546) de Niccòlo Fontana (Tartaglia)

Fonte: https://clubes.obmep.org.br/blog/b_niccolo-fontana-tartaglia/

Esse desafio consistia na proposta de um total de trinta problemas de um para o outro. Antônio Maria Fior, naturalmente formulou problemas de modo que as suas soluções dependessem do conhecimento da equação que somente ele conhecia. Bem, como não poderia deixar de ser, o resultado do desafio foi um desastre para Antônio Fior, que foi ridicularizado e humilhado. De certa forma, hoje tem seu nome lembrado na história da Matemática, e, por ironia, somente por causa de Tartaglia, já que não conseguiu resolver nenhum dos problemas propostos, enquanto Tartaglia, por sua vez, além de resolver todos os problemas propostos por Antônio Fior, encontrou a solução para as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, solução que era a base de todos os problemas que ele elaborou.

Após isto, Cardano, que ainda acreditava na impossibilidade da resolução das equações de terceiro grau, estava escrevendo seu livro, *Practica Arithmeticae Generalis*, envolvendo assuntos como Álgebra, Aritmética e Geometria, quando soube do desafio e da vitória de Tartaglia. Pediu então que este o ensinasse ou que revelasse a solução. Tartaglia disse não, argumentando que pretendia ele mesmo publicar essa descoberta num futuro livro. Cardano sentiu-se ofendido e insultou Tartaglia, chamando-o de egoísta. Depois de muita afronta mútua, Cardano resolveu investir novamente nas suas tentativas, desta vez chegando a implorar e a fazer juramento até sobre a Bíblia, que se Tartaglia lhe revelasse as fórmulas, ele, por sua vez, jamais as revelaria ao público. Tartaglia cedeu e resolveu acreditar em seu rival. Adivinha o que aconteceu? Cardano desrespeitou o acordo, pois não demorou muito e, dedicando seus estudos principalmente à Álgebra, publicou o livro *Ars Magna*, onde encontramos um discurso claro sobre o conceito dos números negativos e a grande revelação; a fórmula de Tartaglia. Embora tenha feito alguns elogios ao rival, fez comentários sobre o episódio envolvendo o professor Scipione del Ferro, dizendo que este já teria chegado ao mesmo resultado havia alguns anos. Tartaglia furioso e traído, publicou a sua versão, denunciando a traição de Cardano e citando o seu juramento perante a Bíblia. Registra a história que essa foi uma repetição do episódio que envolvera Bhaskara com a equação de segundo grau, e agora Cardano com a equação de terceiro grau. Assim, a fórmula que Tartaglia deduzira, hoje é carinhosamente conhecida como Fórmula de Cardano.

Figura 4: Ars Magna por Cardano, 1545



Fonte: https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-cardanos-ars-magna

Você pode estar se perguntando: *e os números complexos?* Pois bem, anos após esta descoberta da fórmula de equações cúbicas, por Tartaglia e Cardano, um matemático, chamado Rafael Bombelli estava resolvendo uma equação de terceiro grau $x^3 - 15x - 4 = 0$, e usando a fórmula de Tartaglia/Cardano, encontrou como solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, uma solução que continha raízes negativas. Contudo, Bombelli sabia que 4 era uma raiz dessa equação, pois a sentença $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$ é verdadeira então concluiu que havia uma situação em que apesar de ter radicais com números negativos existia verdadeiramente uma solução da equação proposta. Era necessário então compreender o que estava acontecendo. Bombelli consegue daí a existência de expressões da forma $a + \sqrt{b}$ e $a - \sqrt{b}$ que possam ser consideradas, respectivamente como $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Substituindo as expressões na igualdade acima, ele escreve $(a+\sqrt{-b})+(a-\sqrt{-b})=4$

Neste ponto, felizmente, as quantidades "não existentes" se cancelam e obtemos $a=2$. Com esse resultado, pode se voltar a equação $(a+\sqrt{-b})^3=2+\sqrt{-121}$ e deduzir que $b=1$. Assim, ele obtém que:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$$

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$$

$$x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}$$

$$x=2+2$$

$$x=4$$

A partir do trabalho de Bombelli, os números complexos começaram a ser utilizados devido à sua utilidade para resolver equações do terceiro grau, mas, ao mesmo tempo, era claro que tais números, até então, não poderiam existir.

Figura 5: L'Algebra por Rafael Bombelli, 1572

Fonte: https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b8446915k.image

Definição e forma algébrica

Denominamos conjunto dos números complexos (C) ao conjunto dos pares ordenados (a, b) de números reais, escritos na forma $a + bi$, sendo i a unidade imaginária. Os termos real e imaginário foram empregados pela primeira vez por René descartes em 1637. O símbolo i foi usado pela primeira vez para representar $\sqrt{-1}$ por Leonhard Euler em 1777. Apareceu impresso pela primeira vez em 1794 e se tornou amplamente aceito após seu uso por Gauss em 1801. A expressão, número complexo foi introduzida por Carl Friederich Gauss em 1832.

O número complexo $z = a + bi$, o número a é denominado *parte real* de z e o número b é a *parte imaginária*.

Indica-se: $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{a}$ e $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{b}$

Se a parte imaginária do número complexo é nula, então o número é *real.*

$$z = a + 0i \Rightarrow z = a \text{ (} z \text{ é real).}$$

Se a parte real do número complexo é nula, então o número é *imaginário puro*.

$$z = 0 + bi \Rightarrow z = bi \text{ (} z \text{ é imaginário puro).}$$

Unidade Imaginária

René Descartes cunhou o termo **"número imaginário"** em **1637**, em sua obra *La Géométrie*. Ele usou esse termo de forma pejorativa, pois na época os matemáticos ainda viam com desconfiança a ideia de raízes quadradas de números negativos.

Descartes escreveu que, embora uma equação de grau n possa ter n raízes, nem todas são necessariamente reais, e algumas seriam "imaginárias" — no sentido de que não tinham existência concreta no pensamento matemático da época.

Decorrido o tempo, foi denominado e criado um símbolo para o número complexo (0,1). Ele foi denominado de unidade imaginária e indicado por i, ou seja, o símbolo i identifica-se com o número complexo (0, 1), onde $i = \sqrt{-1}$, onde portanto, segue que:

$$i^2 = -1.$$

Potências da unidade imaginária *i*

A partir dessa definição, podemos calcular as potências de i e observar um padrão cíclico muito útil na resolução de problemas envolvendo números complexos.

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i^1 = (-1)i = -i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$$

Note, que a partir do índice cinco se iniciará um ciclo, dessa forma $i^6 = i^2 = -1$, e assim por diante. Dessa forma fica estabelecida a seguinte regra para o cálculo das potências naturais de *i*: para calcular i^n, em que $n \in$ N, divide-se *n* por 4 e o novo expoente de *i* será o resto dessa divisão.

Exemplo: Neste caso, i^{2050}, divida 2050 por 4, o quociente será 512, e o resto da divisão será 2, então $i^{2050} = i^2 = -1$.

Operações básicas

O conjunto *C* é um conjunto cujos elementos, devem ser tais que possam ser somados e multiplicados e possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto *C*, e as operações de adição e multiplicação definidas no conjunto dos números reais devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto dos *R* não seria um subconjunto de *C*.

Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1832 e reforçada por Hamilton em 1837, segundo o qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas:

- Igualdade:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$$

- Adição:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

- Multiplicação

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Adição: Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, a soma $z_1 + z_2$ será um complexo tal que:

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

Subtração: Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com *a*, *b*, *c* e *d* reais, a diferença $z_1 - z_2$ será um complexo tal que:

$$z_1 + z_2 = (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

Multiplicação: Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com a, b, c e d reais, o produto $z_1 \cdot z_2$ será um complexo tal que:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi) \cdot (c+di) = (ac - bd)+(ad+bc)i$$

Exemplos:

1- **Adição** $(\mathbf{2} + \mathbf{3i}) + (-\mathbf{3} + \mathbf{4i}) = (2 - 3) + (3 + 4)i = -\mathbf{1} + \mathbf{7i}$

2- **Subtração**$(\mathbf{1} + \mathbf{i}) - (\mathbf{3} + \mathbf{2i}) = (1 + i) + (-3 - 2i) = (1 - 3) + (1 - 2)i = -2 - 1i = -\mathbf{2} - \mathbf{i}$

3- **Multiplicação** $(\mathbf{1} + \mathbf{2i})(\mathbf{2} - \mathbf{3i}) = 1 \cdot 2 + 1(-3i) + (2i)2 + (2i)(-3i) = 2 - 3i + 4i - 6i^2 = 2 + i - 6(-1) = 2 + i + 6 = \mathbf{8} + \mathbf{i}$

QUESTÕES DE FIXAÇÃO

1) Classifique cada um dos números complexos em real, imaginário ou imaginário puro:

a) $7 - 2i$

b) $6i$

c) i

d) -3

e) $2 + i$

f) $\sqrt{3}$

2) Com o conhecimento da propriedade da multiplicação entre números complexos, mostre que $i^2 = -1$.

3) Calcule i^{49}.

4) Divida o número 16 em duas partes cujo o produto seja 70.

AULA 2

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

A representação geométrica dos números complexos surgiu no final do século XVIII, quando matemáticos começaram a explorar maneiras de visualizar esses números além da forma algébrica $a + bi$. A ideia de associar os números complexos a pontos no plano foi um avanço fundamental para a consolidação da análise complexa.

O primeiro a propor uma representação geométrica dos números complexos foi o topógrafo norueguês **Caspar Wessel**. Em 1797, ele apresentou à Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras um trabalho intitulado "*Om directionens analytiske Betregning*" que traduzido é *"Sobre a representação analítica da direção"*, publicado dois anos depois, em 1799. Nele, Wessel sugeria que os números complexos poderiam ser representados como vetores no plano, com a parte real no eixo horizontal e a parte imaginária no eixo vertical. Sua proposta, no entanto, passou despercebida por muitos matemáticos da época.

Figura 6: Sobre a representação analítica da direção por Caspar Wessel, 1798.

Om

Directionens analytiske Betegning,

et Forsøg,

anvendt fornemmelig

til

plane og sphæriske Polygoners Opløsning.

Af

Caspar Wessel,

Landmaaler.

Kiøbenhavn 1798.

Trykt hos Johan Rudolph Thiele

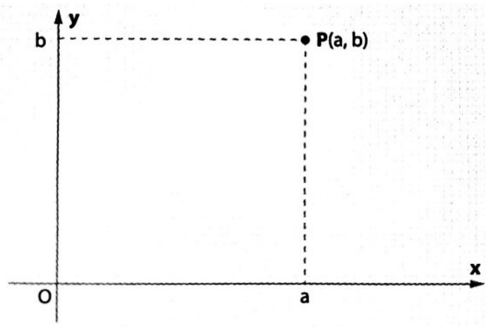
Fonte: Eves, 2002, p. 523.

Independentemente de Wessel, o matemático suíço **Jean-Robert Argand** publicou em 1806 um ensaio no qual também propunha a representação dos números complexos no plano. Seu trabalho, *"Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques"*, que traduzido é "*Ensaio sobre uma maneira de representar* *quantidades imaginárias em construções geométricas"*, foi mais amplamente divulgado e aceito, o que levou à associação de seu nome ao plano complexo. Argand introduziu o conceito de **afixo**, ou seja, o ponto do plano que representa um número complexo, e desenvolveu ideias fundamentais como o módulo e o argumento de um número complexo.

O renomado matemático **Carl Friedrich Gauss** também utilizou a representação geométrica dos números complexos em seus trabalhos, especialmente a partir de 1831. Embora Gauss não tenha sido o primeiro a propor essa representação, sua autoridade científica ajudou a consolidar o uso do plano complexo na matemática. Por isso, o plano passou a ser conhecido como **plano de Argand-Gauss**, em reconhecimento às contribuições de ambos.

Já vimos que cada número complexo $z = a + bi$ está associado o par de números reais (a, b). Por outro lado, sabemos que a cada par de números reais (a, b) está associado a um único ponto do plano. Logo, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto **P** do plano de coordenadas **a** e **b**, isto é, **P** (a, b).

Representação ponto **P** do plano de coordenadas a e b, **P** (a, b)



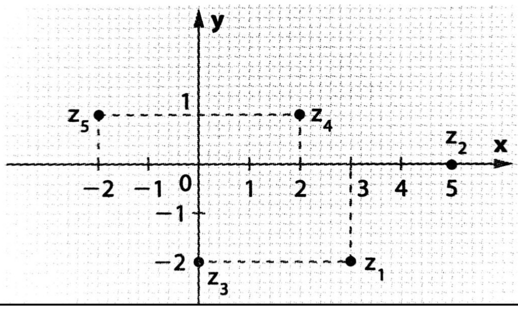
Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

Exemplos:

1- Vamos representar geometricamente os números complexos:

$$z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 5,\ z_3 = -2i,\ z_4 = 2 + i \text{ e } z_5 = -2 + i.$$

Representação geométrica de z_1, z_2, z_3, z_4 e z_5



Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante.

$z_1 = 3 - 2i \Rightarrow (3, -2)$;

$z_2 = 5 \Rightarrow (5,0)$;

$z_3 = -2i \Rightarrow (0, -2)$;

$z_4 = 2 + i \Rightarrow (2,1)$;

$z_5 = -2 + i \Rightarrow (-2,1)$.

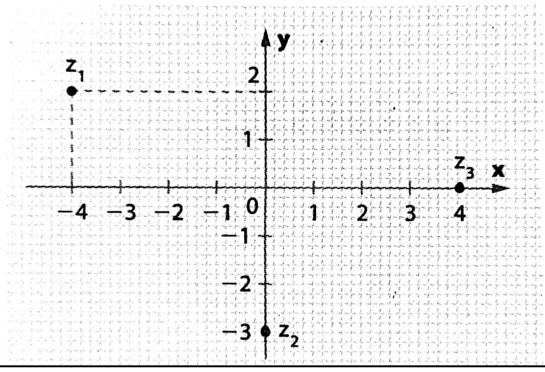
2- Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = 4$, vamos localizar, no plano complexo, os pontos correspondentes a cada número.

$z_1 = -4 + 2i \Rightarrow (-4,2)$;

$z_2 = -3i \Rightarrow (-4,2)$;

$z_3 = 4 \Rightarrow (0,4)$.

Pontos correspondentes de z_1, z_2, z_3



Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto

Conjugado e módulo

A propriedade do inverso multiplicativo pode ser escrita da seguinte maneira: se $z \neq 0$, existe um único número complexo $\frac{1}{z}$ tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

Vejamos a seguinte questão:

Como podemos determinar $\frac{1}{z}$ na forma algébrica? Para isso precisamos definir o conjugado de um número complexo.

O conjugado de número complexo $z = (a, b) = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$.

<u>Exemplos:</u>

1- Se $z = 2 + 3i$, então $\bar{z} = 2 - 3i$

2- Se $z = -3 - 4i$, então $\bar{z} = -3 + 4i$

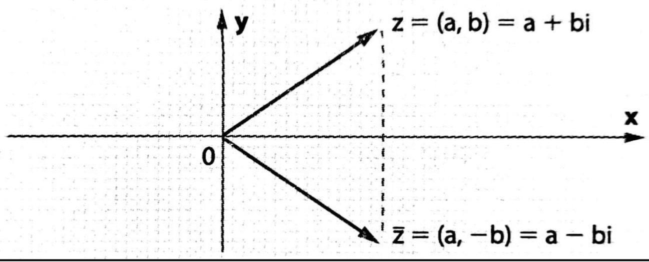
3- Se $z = 2$, então $\bar{z} = 2$

4- Se $z = 5i$, então $\bar{z} = -5i$

Interpretação Geométrica do Conjugado

Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de **z** em relação ao eixo Ox.

Representação o conjugado de z



Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

Propriedades do Conjugado:

1) Se $z = a + bi$, então:

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \text{ (que é real, positivo ou nulo)}$$

Demonstração:

Se $z = a + bi$ e $\bar{z} = \ a - bi$, temos:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi)^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2$$

2) Para o número complexo *z*, temos que:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow z \text{ é real}$$

Demonstração:

Se $z = a + bi$, temos:

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow bi = -bi \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} \text{ é real.}$$

3) Se z_1 e z_2 são números complexos, então:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ o conjugado da soma é igual a soma dos conjugados.

Demonstração:

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + b\imath) + (c + d\imath)} = \overline{(a + c) + (b + d)\imath} = (a + c) - (b + d)i = a + c - bi - di = = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

4) Se $\overline{\mathbf{z_1}}$ e $\overline{\mathbf{z_2}}$ são números complexos, então:

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ o conjugado de um produto indicado é igual ao produto dos conjugados

Demonstração:

Se $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = (ac - bd) + (bc + ad)i \text{ (I)}$$

Sabemos também que

$$\overline{z_1} = a - bi \text{ e } \overline{z_2} = c - di$$

Portanto:

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (bc - ad)i \text{ (II)}$$

Comparando (I) e (II), concluímos que:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Divisão de número complexo

Das operações básicas, a que faltava era a divisão dos números complexos, pois era necessário a compreensão do conjugado.

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$ entre dois números complexos, com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$.

<u>Exemplos:</u>

1- Vamos escrever na forma $a + bi$ o número complexo $\frac{1}{3-i}$

$$\frac{1}{3-i} = \frac{1(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3}{10} + \frac{i}{10}$$

2- Vamos efetuar $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{2+5i} = \frac{(1+2i)(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} = \frac{2 - 5i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} = \frac{12 - i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Módulo de um número complexo

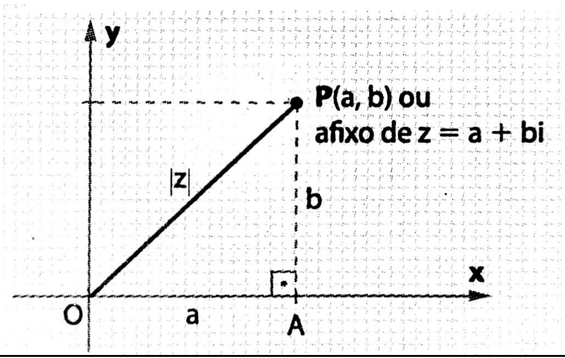
Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância da origem do sistema de coordenadas **O** ao afixo de **z**. Aplicando o teorema de Pitágoras no **triângulo OAP**, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observamos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes. Então podemos dizer que, dado **um número complexo** $\boldsymbol{z = a + bi}$ **chama-se** ***módulo*** **de z** e indica-se por |z| o número real positivo ou nulo dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Representação geométrica do triângulo **OAP**



Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto

<u>Exemplos:</u>

1- $z = 2 + 3i$

Se $z = 2 + 3i$, então:

$|z| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

2- $z = 3i$

Se $z = 3i$, então:

$|z| = |3i| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3$

3- Descubra a distância do ponto **A** (1,2) ao ponto **B** (5,-1).

1º processo:

$\mathrm{d(A, B)} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{25} = 5.$

2º processo:

$z = 1 + 2i$ e $w = 5 - i$

$z - w = -4 + 3i$

$d(A, B) = |z - w| = |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5.$

Propriedades envolvendo módulo

1- Se z é um número complexo, então:

$$\boldsymbol{z\bar{z} = |z|^2}.$$

Demonstração:

Sabemos que:

$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Logo:

$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$

Portanto, $z\bar{z} = |z|^2$.

2- Se z é um número complexo, então:

$$|\boldsymbol{z}| = |\bar{\boldsymbol{z}}|.$$

Demonstração:

Dado $z = a + bi$, temos:

$\bar{z} = a - bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Portanto, $|z| = |\bar{z}|$

3- Se z_1 e z_2 são números complexos, então:

$$|\mathbf{z_1 z_2}| = |\mathbf{z_1}||\mathbf{z_2}|.$$

Demonstração:

Usando a primeira propriedade temos:

$|z_1 z_2| = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$ (I)

Mas sabemos que:

$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ (II)

Então substituindo (II) em (I), temos:

$$|z_1 z_2| = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

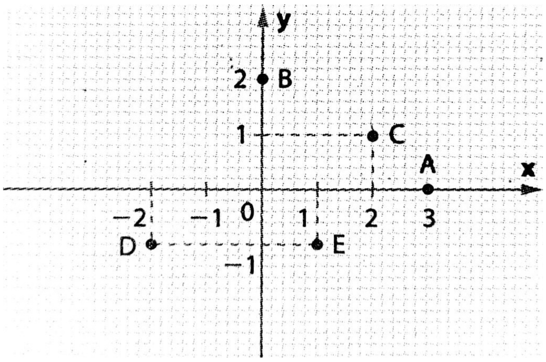
Como o módulo é um número positivo ou nulo, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros e chegamos ao que queríamos demonstrar.

$$|\mathbf{z_1 z_2}| = |\mathbf{z_1}||\mathbf{z_2}|.$$

QUESTÕES DE FIXAÇÃO

1) A partir do plano cartesiano abaixo, utilizando os pontos A, B, C, D e E, escreva na forma algébrica dos números complexos $z = a + bi$.

Representação dos pontos A, B, C, D e E no plano cartesiano



Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

2) Dado $z = 1 + 2i$, encontre o inverso multiplicativo de z $\left(\frac{1}{z} \text{ ou } z^{-1}\right)$

3) Efetue as divisões aplicadas

a) $\frac{2+3i}{1+2i}$

b) $\frac{1}{3+2i}$

c) $\frac{1+3i}{1-i}$

d) $\frac{1+i}{i}$

4) Determine o módulo de cada um dos números complexos:

a) $(3 - i)(2 + 2i)$

b) $\frac{(2+3i)}{i}$

c) $\frac{3+4i}{2+i}$

d) $\frac{(1+i)\overline{(2+3i)}}{1-i}$

AULA 3

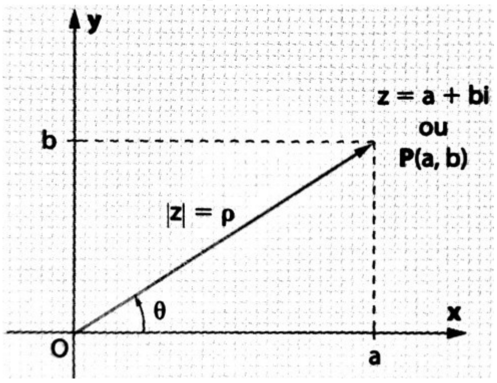
FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sabemos que o número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto do plano, de coordenadas (a, b). Essas são as coordenadas cartesianas do ponto z. Veremos agora que esse mesmo ponto pode ser representado por suas *coordenadas polares* que são:

1- O módulo do vetor $\overrightarrow{Oz}$, indicado |z| ou ρ representando a distância do ponto **P** à origem do plano (supondo que $|z| \neq 0$);

2- O ângulo θ, em que $0 \leq \theta < 2\pi$, que o vetor $\overrightarrow{Oz}$ forma com o eixo **x**. Esse ângulo θ é chamado *argumento* de **z** (ou *argumento principal* de **z**) e indicado por arg(z).

Representação das coordenadas polares do ponto P



$z = a + bi, z \neq 0$

$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$arg(z) = \theta$

Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

Já vimos em trigonometria que:

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \qquad sen\theta = \frac{b}{|z|} \qquad (\text{com } 0 \leq \theta < 2\pi)$$

Essas igualdades levam a:

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot cos\theta$$

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \cdot sen\theta$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi = |z| \cdot cos\theta + |z| \cdot sen\theta i = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta$$

Portanto:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Que é chamada *forma trigonométrica* ou *forma polar* de z.

Exemplo:

1- Vamos determinar a representação geométrica e a forma trigonométrica do número complexo $z = 1 + i$

$z = 1 + i$

$a = 1$

$b = 1$

Então:

$$|z| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ sen\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Assim, a forma trigonométrica de z é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot sen\theta) = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$$

Verificação:

Como $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} + i \cdot \frac{2}{2} = 1 + i$$

2- Vamos escrever na forma algébrica o número complexo $z = 8\left(cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot sen\frac{7\pi}{6}\right)$

$$z = 8\left(cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot sen\frac{7\pi}{6}\right) = 8\left[-cos\frac{\pi}{6} + i\left(-sen\frac{\pi}{6}\right)\right] = 8\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= -4\sqrt{3} - 4i$$

Logo, $z = -4\sqrt{3} - 4i$.

Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Consideremos os números complexos z_1 e z_2 dados na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$$

O produto $z_1 z_2$ é dado por:

$$z_1z_2 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)|z_2|(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2) =$$
$$= |z_1||z_2|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2) =$$
$$= |z_1||z_2|[(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - sen\theta_1 \cdot sen\theta_2) + i(sen\theta_1 \cdot cos\theta_2 + sen\theta_2 \cdot cos\theta_1)] =$$
$$= |z_1||z_2|[cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto:

$$\mathbf{z_1z_2 = |z_1||z_2|[cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Assim, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores, reduzida à 1ª volta.

Exemplo:

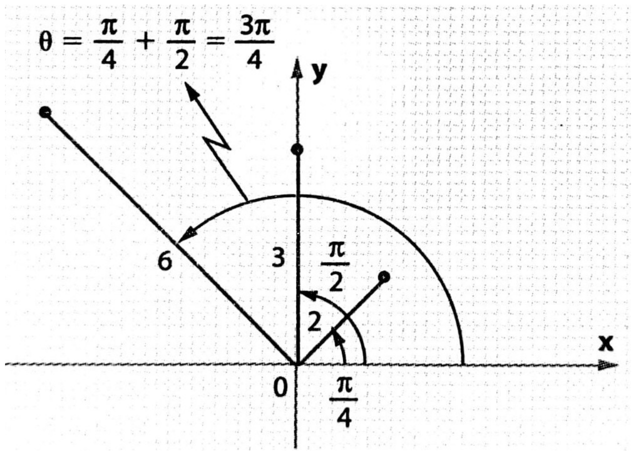
Vamos calcular o produto z_1z_2 com $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right)$.

Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

$$z_1z_2 = 2 \cdot 3\left[cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 6\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sen\frac{3\pi}{4}\right)$$

Fazendo a interpretação geométrica desse problema, obtemos:

Representação geométrica do produto z_1z_2



Fonte: **Matemática: contexto e aplicações** / Luiz Roberto Dante. – Ática, 2010 1ª impressão da 1. ed. Obra em 3v.

Em z_1z_2 houve uma rotação positiva a z_1 de um ângulo igual ao ângulo de z_2. Ou seja, nesse caso, houve uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ a z_1. Como o argumento de z_1 era $\frac{\pi}{4}$ e z_1 recebeu a rotação de $\frac{\pi}{2}$, o produto z_1z_2 passa a ter argumento igual a $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$. Já o módulo z_1z_2 é 6, que corresponde a $2 \cdot 3$, ou $|z_1||z_2|$.

Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Dados os números complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$$

podemos obter o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, para $z_2 \neq 0$; assim:

$$\boldsymbol{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)]}$$

A demonstração dessa relação pode ser feita mostrando que o produto de $\frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)]$ por z_2 é igual a z_1.

Assim, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica com segundo número diferente de zero, é o número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida à 1ª volta $\left(0 \leq arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) < \boldsymbol{2\pi}\right)$.

Exemplo:

Vamos calcular o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ para $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right)$.

Substituindo os dados do problema na fórmula, temos:

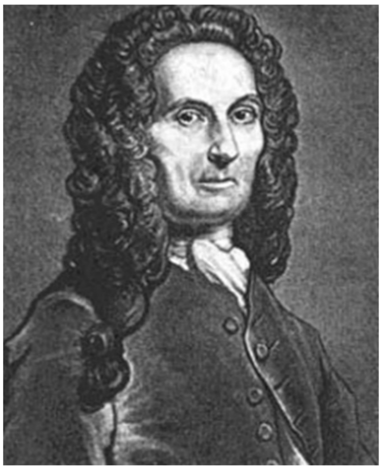
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= \frac{2}{3}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{3}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right)$.

Potenciação de números complexos na forma trigonométrica – a primeira fórmula De Moivre

O matemático francês Abraham De Moivre (1667 – 1754) que em determinada época ganhava a vida dando aulas particulares na Inglaterra se interessou pelo assunto números complexos.

Figura 7: De Moivre (1667 – 1754)



Fonte: https://s1.static.brasilescola.uol.com.br/be/imagens/biografia/AbraMoiv7.jpg

Na Inglaterra, De Moivre conheceu e tornou-se amigo de Newton, porém a princípio ele duvidava da possibilidade da existência dos números complexos, chegando mesmo a chamar este conjunto de números impossíveis. De Moivre destacou-se principalmente com a publicação de duas obras, uma trazia estudos da teoria das probabilidades e a outra trazia estudo sobre séries e trigonometria analítica. De Moivre relacionou funções trigonométricas com números complexos e confirmou as fórmulas de Viète, para seno e cosseno de ângulos múltiplos.

A potência $\boldsymbol{z^n}$, $n \in N^*$, é dada por $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\text{n fatores}}$.

Assim, se um número complexo **z** está escrito na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i} \cdot sen\theta)$, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\boxed{\text{Multiplicação de n fatores}}} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|}_{\boxed{\text{Produto de n módulos}}} \cdot \left[cos\left(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{\boxed{\text{Soma de n argumentos}}}\right) + i \cdot sen\left(\underbrace{\theta + \theta + \ldots + \theta}_{\boxed{\text{Soma de n argumentos}}}\right)\right] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boldsymbol{z^n = |z|^n[cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)]}$ **(Fórmula de Moivre)**

Para $n = 0$ temos:

$$z^0 = |z|^0[cos(0 \cdot \theta) + i \cdot sen(0 \cdot \theta)] = 1(cos0 + i \cdot sen0) = 1(1 + 0) = 1$$

Assim, podemos dizer que a potência de ordem **n** de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo modo é igual ao módulo do número elevado a **n** e cujo o argumento é igual ao argumento do número multiplicado por **n**, reduzido à primeira volta $(0 \leq arg(z^n) < 2\pi)$.

Exemplo:

1) Dado o número $z = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$, vamos determinar z^7.

Na forma trigonométrica, temos:

$$z^7 = \left[2\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)\right]^7 = 2^7\left(cos7 \cdot \frac{\pi}{4} + i \cdot sen7 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 128\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right)$$

Logo, $z^7 = 128\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right)$

Na forma algébrica, vem:

$$z = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z^7 = 128\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right) = 128\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}i$$

Logo, $z^7 = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}i$.

Radiciação – raízes enésimas de números complexos

A generalização de um número complexo, elevado à potência a n, que havia fugido das mãos de Viète, apareceu com De Moivre, mas e a relação inversa? Ou seja, a radiciação. Como extrair a raiz enésima de um número complexo?

Dado um número complexo **z** e uma natural **n**, $n > 1$, definimos em ***C***.

Raiz enésima de **z** é um número complexo ω tal que $\omega^n = z$.

A segunda fórmula de Moivre

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|[cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)]$. Encontrar as raízes enésimas de **z** significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega|(cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$$

de modo que $\omega^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números ω tal que:

$$[|\omega|(cos\alpha + i \cdot sen\alpha)]^n = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Aplicando a primeira fórmula de Moivre, temos:

$$|\omega|^n(cos\, n\alpha + i \cdot sen\, n\alpha) = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

Da igualdade:

$$\omega^n = |\omega|^n(cos\, n\alpha + i \cdot sen\, n\alpha) = z = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

vem $|\omega|^n = |z|$, $cos\, n\alpha = cos\theta$ e $sen\, n\alpha = sen\theta.$

De $|\omega|^n = |z|$, temos $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$ (sempre real e positivo).

De $cos\, n\alpha = cos\theta$ e $sen\, n\alpha = sen\theta$, temos:

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \text{ (com } k \in z)$$

Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k \leq n - 1$

Assim concluímos que:

$$\boldsymbol{\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i \cdot sen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}.$$

(segunda fórmula de Moivre) para $k = \{0, 1, 2, \ldots, (n - 1)\}$

Após,$k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos **n** raízes distintas. Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Assim, qualquer número complexo **z**, não nulo, admite **n** raízes enésimas distintas. Todas elas têm módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ e seus argumentos formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$

Geometricamente, as **n** raízes são vértices de um polígono regular de **n** lados. Logo, sabendo uma delas e sabendo quantas são no total, é possível obter as raízes $n - 1$ desconhecidas.

<u>Exemplo:</u>

1- Vamos determinar as raízes cúbicas de $-i$.

Escrevendo **z** na forma trigonométrica temos:

$z = -i$

$a = 0$

$b = 0$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$\begin{cases} cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ sen\theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \theta = arg(z) = \frac{3\pi}{2}$

Portanto:

$z = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot sen\frac{3\pi}{2}\right)$

Usando a segunda fórmula de Moivre, vem:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ (real positivo)

Como $n = 3$, então $\boldsymbol{k}$ poderá ser 0, 1 ou 2. Assim temos:

- Para $k = 0$:

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

- Para $k = 1$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{3} = \frac{7\pi}{6}$$

- Para $k = 2$

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}$$

Observe que $\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{4\pi}{6}$.

Assim as raízes cúbicas de $\boldsymbol{-i}$ são:

$\omega_0 = \left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right) = cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i$

$\omega_1 = 1\left(cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot sen\frac{7\pi}{6}\right) = cos\frac{7\pi}{6} + i \cdot sen\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$\omega_2 = 1\left(cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot sen\frac{11\pi}{6}\right) = cos\frac{11\pi}{6} + i \cdot sen\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

QUESTÕES DE FIXAÇÃO

1) Dê a representação geométrica e a forma trigonométrica dos seguintes números complexos.
   a) $\sqrt{3}+i$
   b) $-\sqrt{3}+i$
   c) $\sqrt{3}-i$
   d) $-\sqrt{3}-i$

2) Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos
   a) $6i$
   b) $2+2i$
   c) $(1+i)(1-i)$
   d) i

3) Dados os números complexos $z=6\left(cos\frac{5\pi}{6}+i\cdot sen\frac{5\pi}{6}\right)$ e $w=3\left(cos\frac{\pi}{4}+i\cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$, calcule:
   a) zw
   b) w^2
   c) $\frac{z}{w}$
   d) $\frac{w}{z}$

4) Determine o produto z_1z_2 e o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ para

$$z_1=2\left(cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sen\frac{2\pi}{3}\right) \text{ e}$$
$$z_2=3\left(cos\frac{\pi}{4}+i\cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$$

5) Determine as raízes quadradas dos seguintes números complexos e dê sua representação geométrica$-$

a) -4

b) $-i$

c) $1-i$

d) $1-\sqrt{3}i$

AULA 4

EQUAÇÕES BINÔMIAS E TRINÔMIAS

Qualquer equação que possa ser reduzida da forma:

$$ax^n + b = 0$$

com a ∈ C e b ∈, com $a \neq 0$ e $n \in N$. É chamada equação binômia.

Para resolvê-la, isolamos $\boldsymbol{x^n}$ no primeiro membro e aplicamos a segunda fórmula de De Moivre:

$$ax^n + b = 0 \Leftrightarrow x^n = \frac{-b}{a}$$

Essa equação admite n raízes enésimas de $\frac{-b}{a}$.

Outro tipo muito comum de equação que envolve números complexos é o que se pode reduzir a chamada *equação trinômia*:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

com $a, b,$ e c ∈ C, a e $b \neq 0$ e $n \in N$.

Para resolvê-la, fazemos uma mudança de variável, $x^n = y$, obtendo uma equação do segundo grau:

$$ay^2 + by + c = 0$$

cuja as soluções são ***y'*** e ***y"***.

Recaímos então nas equações anteriores, pois $y' = x^n$ e $y" = x^n$

Resolvendo-as, temos as raízes da equação inicial.

Exemplo: Vamos resolver as equações em C

a- $2x^3 - 16i = 0$

$$2x^3 - 16i = 0 \Rightarrow 2x^3 = 16i \Rightarrow x^3 = 8i$$

Vamos procurar as raízes cúbicas de $8i$:

$z = 8i$

$a = 0$

$b = 8$

$|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{0}{8} = 0 \\ sen\theta = \dfrac{8}{8} = 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \theta = arg(z) = \frac{\pi}{2}$$

Portanto:

$z = 8i = 8\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right)$

$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

Como $n = 3, k = 0, k = 2, \sqrt[3]{8} = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$\omega_0 = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i \cdot sen\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$

$\omega_1 = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot sen\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

$\omega_2 = 2\left(cos\frac{9\pi}{6} + i \cdot sen\frac{9\pi}{6}\right) = -2i$

Logo, o conjunto solução da equação $2x^3 - 16i = 0$ é $S = \{\sqrt{3} - i, -\sqrt{3} + i, -2i\}$

b- $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$

Fazendo a mudança de variável $x^3 = y$, temos:

$$y^2 + 26y - 27 = 0 \Rightarrow y = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 \cdot 1(-27)}}{2} = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} =$$

$$= \frac{-26 \pm 28}{2} \Rightarrow y' = 1 \text{ e } y'' = -27$$

Agora, precisamos resolver as equações binômias $x^3 = 1$ e $x^3 = 27$, ou seja, precisamos encontrar as raízes cúbicas de 1 e -27.

- $x^3 = 1$

  $z = 1 \Rightarrow |z| = 1$

  $\theta = arg(z) = 0$

  Portanto:

  $\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$

  $n = 3, k = 0, k = 2$ e $\theta = 0$

$\omega_0 = 1(cos0 + i \cdot sen0) = 1$

$\omega_1 = 1\left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sen\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\omega_2 = 1\left(cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot sen\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- $x^3 = -27$

  $z = -27 \Rightarrow |z| = 27$

  $\theta = arg(z) = \pi$

  $\sqrt[3]{27} = 3$

$\omega_0 = 3\left(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

$\omega_1 = 3(cos\pi + i \cdot sen\pi) = -3$

$\omega_2 = 3\left(cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot sen\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i$

Logo o conjunto solução da equação $x^6 + 26x^3 - 27 = 0$ é:

$$S = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3}i, -3, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}i\right\}$$

<u>QUESTÕES DE FIXAÇÃO</u>

1) Resolva as equações em C

   a) $x^3 - 8 = 0$

   b) $x^4 + 1 = 0$

   c) $2x^5 - 64 = 0$

   d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

   e) $x^2 - 2ix + 3 = 0$

2) Constate que $1 + i\sqrt{3}$ é uma das seis soluções da equação $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho buscou refletir, com base em revisão bibliográfica e análise teórica, sobre o potencial pedagógico da História da Matemática para ressignificar o ensino dos números complexos, frequentemente abordado de maneira abstrata e desmotivadora, buscando responder ao questionamento principal: *“Como a História da Matemática pode ser mobilizada como recurso metodológico na elaboração de propostas de ensino que favoreçam a construção das noções relativas aos números complexos pelos estudantes da educação básica?”.*

A pesquisa revelou que a mobilização da História da Matemática permite contextualizar o surgimento dos números complexos, conectando o conteúdo escolar a necessidades reais que motivaram sua criação e desenvolvimento ao longo do tempo. Tal abordagem contribui para que os estudantes compreendam que a matemática é fruto de uma construção humana, dinâmica e em constante evolução, e não um conjunto de verdades absolutas e prontas. Essa percepção tende a despertar maior curiosidade, engajamento e compreensão crítica por parte dos alunos.

Nesse sentido, alcançamos nosso objetivo, pois apresentamos uma proposta didática que traz história da matemática por meio de histórias de vidas de matemáticos envolvidos com o desenvolvimento dos números complexos, linha do tempo sobre o desenvolvimento do conteúdo, problemas envolvendo a matemática de outros tempos e artefatos históricos por meio de imagens de livros antigos (ainda que não os tenhamos de forma física).

Embora este projeto não tenha sido aplicado na prática, ele oferece subsídios teóricos e didáticos que podem orientar a elaboração de propostas pedagógicas mais significativas, mas também ser adaptada e utilizada por outros professores de acordo com a realidade das suas salas de aula. A proposta didática — que integra a narrativa histórica com a formalização conceitual e a resolução de problemas — busca exemplificar como o ensino pode ser enriquecido ao romper com métodos meramente expositivos e mecanicistas.

Portanto, este trabalho não se encerra em si mesmo, mas propõe-se como base e inspiração para futuras pesquisas, investigações de campo e práticas docentes que queiram explorar o uso da História da Matemática como estratégia metodológica. Espera-se, assim, que ele contribua para a construção de um ensino reflexivo, contextualizado e transformador, especialmente no que diz respeito à abordagem dos números complexos na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. P. de. **Números Complexos Para o Ensino Médio**: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações / Salomão Pereira de Almeida. Campina Grande, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

D'AMBROSIO, U. **A História da Matemática:** Questões Historiográficas E Políticas E Reflexos Na Educação Matemática. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas, org. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 1999; pp. 97-115.

EVES, H. W. **Introdução a história da matemática**. São Paulo: Ed. da Unicamp, 2004

FLICK, U. **Qualidade na Pesquisa Qualitativa.** Porto Alegre: Artmed, 2009.

LIBÂNEO, J. C.; PIMENTA, S. G. Formação dos profissionais da educação – visão crítica e perspectivas de mudança. **Educação e Sociedade**, Campinas, 1999, n. 68.

MACHADO, L. V., **I Encontro Nacional do Mestrado PROFMAT** - Palestra de Divulgação - Ledo Vaccaro (CESGRANRIO)**.** Disponível em: https://youtu.be/e6z3aSxxc2k?si=-VpuX_xgbMLV9sGT. Acesso em 05 abril. 2025.

MIGUEL, A. As potencialidades da história da matemática em questão: Argumentos reforçadores e questionadores. **Zekitiké**, Campinas, v.5, n. 8, p.73-105, 1997.

MIGUEL, A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios / Antonio Miguel, Maria Angela Miorim. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

MOTTA, C. D. V. B., FERREIRA. V. L. (2007). **Uma perspectiva para a história da matemática na formação de professores das séries iniciais.** São Paulo: Unicentro.

OLIVEIRA, R. L**.** Experiência de utilização de Artefatos Históricos em atividade de Ensino. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Fortaleza, v. 04, n. 11, 2017.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 21 de junho de 2025.

PEREIRA, A. C. C. **Aspectos históricos da régua de cálculo para construção de conceitos matemáticos**. v. 1. São Paulo: Livraria da física, 2015.

PINTO JUNIOR, U. **A História dos Números Complexos:** das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand / Ulício Pinto Júnior. - Rio de Janiero: UFRJ / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

PONTES, V. A**. Materiais concretos:** uma estratégia para o ensino aprendizagem de geometria plana e espacial no ensino médio / Valderlândio de Araújo Pontes. – São Luís, 2018.

ROQUE. T. **História da Matemática uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.** Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 511 pp. ISBN 978-85-378-0888-7

SCHUBRING, G. On Historiography of Teaching and Learning Mathematics. In: KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert. (ed.). **Handbook on the History of Mathematics Education**. New York: Springer, 2014.

SILVA, F. G. L. **Propostas para o ensino de números complexos no Ensino Médio** / Fabiana Gerusa Leindeker da Silva. 2014.

SOUSA, M. S. de; CARNEIRO, R. dos S. **Uma abordagem didática para os Números Complexos por meio da História da Matemática.** Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/96011. Acesso em 17 jan. 2025.