

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E PRODUÇÃO
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

WANGLES KALLIZCK DA SILVA DE CARVALHO

ANÁLISE MODAL DE UMA VIGA UTILIZANDO SENSOR ACELERÔMETRO

SÃO LUÍS

2016

WANGLES KALLIZCK DA SILVA DE CARVALHO

ANÁLISE MODAL DE UMA VIGA UTILIZANDO SENSOR ACELERÔMETRO

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual do Maranhão, para o grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Me. Flavio Nunes Pereira.

SÃO LUÍS

2016

WANGLES KALLIZCK DA SILVA DE CARVALHO

ANÁLISE MODAL DE UMA VIGA UTILIZANDO SENSOR ACELERÔMETRO

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual do Maranhão, para o grau de bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Me. Flavio Nunes Pereira.

Aprovado em: ___/___/2016

BANCA EXAMINADORA

Prof.ºMe. Flávio Nunes Pereira

Universidade Estadual do Maranhão

Prof.ª Núbia Célia Bergê Cutrim

Universidade Federal do Maranhão

Prof.º José Henrique Bezerra

Universidade Estadual do Maranhão

Carvalho, Wangles Kallizck da Silva de.

Análise modal de uma viga utilizando sensor acelerômetro / Wangles Kallizck da Silva de Carvalho. – São Luís, 2016.

70 f.

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual do Maranhão, 2016.

Orientador: Me. Flávio Nunes Pereira.

1. Acelerômetro. 2. Análise modal. 3. Vibrações mecânicas. I. Título.

À Deus pelo dom da vida e seu amor incondicional. Especialmente à minha mãe, hoje aos braços do pai, por todo cuidado e instrução concedidos a mim. Ao meu Pai por sua força e coragem. As minhas irmãs Wangleyse Siesgley e Michelle Ferreira e aos meus primos Luan Carlos e Carly Caroline por todo carinho e apoio. À minha tia Isa Maria por toda ajuda. Aos meus familiares, amigos e professores que sempre acreditaram em mim e me apoiaram para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus a vida me concedida, por seu imenso amor, proteção e por sempre me dá forças mesmo nas situações mais complicadas.

Aos meus pais pela criação e edificação de todos os meus princípios, especialmente a minha mãe Glória de Maria da Silva de Carvalho, não mais presente em vida, mas presente sempre em meu coração, e ao meu pai Sérgio Henrique Rabelo de Carvalho por continuar me guiando e incentivando, agradeço imensamente por todo o apoio, carinho, amor e paciência durante toda minha vida, assim como minhas irmãs Wangleyse Siesgley da Silva de Carvalho e Michelle Ferreira de Lourdes.

A minha avó Maria da Glória Matos da Silva, por sempre estar presente e ajudar não só a mim, mas também toda a família sempre que precisasse.

A minha tia e madrinha Isa Maria da Silva Prado pela ajuda após o falecimento da minha mãe, por toda força e incentivo dado todos os dias.

Aos meus primos, Luan Carlos e Carly Caroline, independente do momento e grau de parentesco, sempre tivemos um forte laço fraternal.

A toda minha família, que foi extremamente importante para a fundamentação teórica do meu caráter pessoal e profissional. Obrigado a todos por fazerem parte da minha história de vida, por estarem presente durante minhas quedas e minhas ascensões, por colaborarem no desenvolvimento do meu dia-a-dia.

A minha maninha Tayene Carvalho e ao meu brother Guilherme Giglio, um profundo agradecimento por sempre estarem ao meu lado nos momentos em que mais precisei de uma palavra, de um conselho, de um abraço, ou de um puxão de orelha.

A Larissa Mendes por todo o acompanhamento e incentivo durante todo meu período acadêmico, com toda certeza ninguém sabe mais a respeito de tudo que passei dentro desse período.

A todos os meus amigos que sempre estiveram perto e que fazem as dificuldades rotineiras parecerem mais fáceis.

A minha amada turma de Engenharia Mecânica 2011.2, pessoas que conviveram comigo durante esses 5 anos mais que minha própria família propriamente dita, a quem foi compartilhado problemas, vitórias, sorrisos e lágrimas. Uma turma na qual todos gostariam de ter pela simplicidade e união, muito obrigado

mesmo por fazerem parte dos meus dias, a minha graduação se tornou mais fácil e divertida graças a vocês.

A todos os meus professores que muito marcaram minha jornada escolar de forma mais que positiva, mais que amiga e solidária. Aos meus professores da UEMA, agradeço por toda a minha formação.

E por fim, ao Professor Me. Flávio Nunes Pereira por aceitar o convite como meu orientador, e mesmo na condição de Diretor do Curso de Engenharia Mecânica, disponibilizar seu tempo apertadíssimo para me guiar durante a preparação desta monografia e por se fazer presente durante todos os experimentos e manipulações realizadas em software.

“Eu aprendi que a coragem não é a ausência de medo, mas o triunfo sobre ele. O homem corajoso não é aquele que não sente medo, mas aquele que conquista por cima do medo.”

Nelson Mandela

RESUMO

A Análise Modal é uma das ferramentas mais importantes dentro do ramo de estudo em Vibrações Mecânicas, é um método utilizado para obter os parâmetros modais de uma estrutura utilizando sinais de resposta quando excitados por uma força externa. Entretanto, é uma área pouco difundida no ambiente acadêmico da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA). Esta pesquisa consistiu na construção de um modelo experimental com grau de complexidade simplificado, utilizando uma viga com um grau de liberdade, com a finalidade de abrir portas para o desenvolvimento em estudos ainda mais profundos nesta área. No presente trabalho, também é discutido o uso do sensor acelerômetro na aquisição dos dados de resposta, muito importante para a realização da análise modal experimental (AME). A incorporação de novas tecnologias nos testes estruturais, podem agregar novos conhecimentos e avanços neste ramo de pesquisa.

Palavras-chave: Acelerômetro. Análise modal. Vibração mecânica.

ABSTRACT

The Modal Analysis is one of the most important tools within the field of study in Mechanical Vibrations, is a method used to obtain the modal parameters of a structure using response signals when excited by an external force. However, it is an area little widespread in academic at the Universidade Estadual do Maranhão (UEMA). This research consisted in the construction of an experimental model with simplified complexity, using a beam with a degree of freedom, in order to open doors for the development of even more profound studies in this area. In this work, is also discussed the use of the accelerometer sensor data acquisition, very important for the realization of experimental modal analysis (AME). The incorporation of new technologies in structural testing, can add new knowledge and advances in this branch of research.

Keywords: Accelerometer. Modal analysis. Mechanical vibrations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação do monocórdio	15
Figura 2 - Sismógrafo de Zhang Heng	16
Figura 3 - Ponte Tacoma Narrows	18
Figura 4 - Projeto da Ponte Tacoma	18
Figura 5 - Sistema massa-mola	19
Figura 6 - Equilíbrio estático da mola	20
Figura 7 - Massa em vibração	20
Figura 8 - Sistema com um grau de liberdade e com amortecimento	23
Figura 9 - Vibração livre amortecida	25
Figura 10 - Sistema com dois graus de liberdade	26
Figura 11 - Representação gráfica da análise modal teórica	32
Figura 12 - Representação gráfica da análise modal experimental	32
Figura 13 - Representação de sinais em diferentes formas. (a) Sinais no domínio do tempo. (b) Sinais no domínio da frequência. (c) Registros digitais de $x(t)$.	40
Figura 14 - Motor elétrico	43
Figura 15 - Sensor Acelerômetro MMA8452	43
Figura 16 - Ligação do sensor acelerômetro no Arduino	44
Figura 17 - Arduino Leonardo	45
Figura 18 - Montagem do experimento	46
Figura 19 - Definição dos pontos	47
Figura 20- Fixação do acelerômetro em um dos pontos	48
Figura 21 - Interface do Arduino	49
Gráfico 1 - Ensaio realizado no Ansys	51
Gráfico 2 – Amplitude x Frequência na faixa de tensão de 2.5 volts do motor	52
Gráfico 3 - Análise geral da viga quanto sua forma de vibrar na frequência de 17 Hz (tensão inicial do motor)	53
Gráfico 4 - Amplitude x Frequência na faixa de tensão de 4 volts do motor	54
Gráfico 5 - Análise geral da viga quanto sua forma de vibrar na frequência de 27,73 Hz (tensão de 4v no motor)	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Propriedades físicas da viga	46
Tabela 2 - Dados de todos os experimentos realizados	55

LISTA DE SÍMBOLOS

a	Amplitude de vibração	
A	Área de seção transversal	m ²
a ₀ , a _i e b _i	Coefficientes espectrais	
A, B	Constantes de integração	
c	Coefficiente de amortecimento	
C, [C]	Constante de amortecimento, Matriz	
\vec{d}	Vetor de coeficientes espectrais	
E	Modulo de elasticidade	Pa
e	Base neperiana	
f _n	Frequência natural	Hz
Fr	Força resultante	N
g	Gravidade	m/s ²
I	Momento de inércia	
i	i-ésimo valor	
K, [K]	Módulo de Young, Matriz	N/m ²
M [M]	Massa, Matriz	Kg
n	Constante, capacidade de amortecimento	
N	Número de amostras	
P	Peso	N
T	Período de vibrações	
r	Modo de vibração	
t	Tempo	s
V ₀ ; \dot{Y}_0	Velocidade inicial	m/s
x	Deslocamento	m
\dot{x}	Velocidade	m/s
\ddot{x}	Aceleração	m/s ²
[X], [ϕ]	Matriz modal	
$\vec{X}^1, \vec{X}^2, \dots, \vec{X}^n$	Modos normais	
Y	Deslocamento vertical de massa	m
Y' _{EST}	Deflexão estática	m

\ddot{Y}		$\frac{d^2Y}{dt^2}$	m/s ²
$ x(\omega) ^2$	Magnitude da transformada de Fourier		
$h(t)$	Resposta da estrutura ao longo do tempo		
$H(i \omega)$	Função de resposta de frequência		
$q_i(t)$	Deslocamentos generalizados		
ρ	Densidade		Kg/m ³
δ	Decremento logarítmico		
ω	Frequência de oscilação		rad/s
ω_r	i-ésima frequência natural		rad/s
ω_n	Frequência natural		rad/s
ζ	Fator de amortecimento		
λ	Autovalor		
τ	Período de oscilação, tempo		s
ϕ	Defasagem		rad

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	12
1.1	Justificativa	12
1.2	Objetivos	13
1.2.1	<i>Objetivos Gerais</i>	13
1.2.2	<i>Objetivos Específicos</i>	14
2.	PRINCÍPIOS DE VIBRAÇÕES	15
2.1	Aspectos históricos	15
2.2	O curioso caso da ponte Tacoma Narrows	17
2.3	Vibrações livres para sistemas com um grau de liberdade	19
2.4	Vibrações livres para sistemas com um grau de liberdade com amortecimento	23
2.5	Vibrações livres para sistemas com muitos graus de liberdade	26
2.6	Vibrações livres de sistemas contínuos	28
3.	ANÁLISE MODAL	31
3.1	Análise Modal Teórica	34
3.2	Análise Modal Experimental	37
3.2.1	<i>Excitador</i>	38
3.2.2	<i>Transdutor</i>	38
3.2.3	<i>Condicionador de sinal</i>	39
3.2.4	<i>Analisador</i>	39
4.	MATERIAIS E MÉTODOS	42
4.1	Construção do modelo numérico	42
4.2	Definição do equipamento para experimento	42
4.3	Montagem do modelo experimental	46
5.	RESULTADOS E DISCUSSÕES	50
6.	CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
6.1	Considerações finais	56
6.2	Sugestões de trabalhos futuros	57
	REFERÊNCIAS	58
	APÊNDICE A – PROGRAMAÇÃO DO SENSOR ACELERÔMETRO	60
	APÊNDICE B –SCRIPT MATLAB (SINAL EM DOMÍNIO DO TEMPO E TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER)	63

APÊNDICE C – SCRIPT MATLAB (TRANFORMADA DE RÁPIDA DE FOURIER APLICADA EM TODOS OS PONTOS SIMULTANEAMENTE)	64
--	-----------

1. INTRODUÇÃO

No projeto e análise de sistemas mecânicos, a análise modal é uma ferramenta de grande interesse utilizada no estudo de avaliação do comportamento estrutural de sistemas mecânicos e estruturas. (PRAZZO, 2011). Segundo Almeida (1990), realizar uma análise de vibração é conhecer os mecanismos de comportamento de uma estrutura e seus componentes. Tipicamente, as características da dinâmica estrutural são definidas pela função de transferência. Em consequência, se nós podemos medir características de transferência da estrutura, então a dinâmica estrutural é conhecida, ou seja, as propriedades que definem um modo de vibração podem ser obtidas.

A análise modal determina as propriedades dinâmicas de uma estrutura através da identificação de seus modos de vibrar. Todo modo de vibração possui uma frequência natural específica e um fator de amortecimento. A ressonância associada a cada modo é caracterizada por uma única distribuição de deformação ou forma modal através da estrutura. (ALMEIDA, 1990).

O conhecimento dessas propriedades é importante para que não ocorram problemas associados à existência de frequências de excitação próximas das respectivas frequências naturais que venham comprometer as estruturas ou o funcionamento dos equipamentos durante a operação.

1.1 Justificativa

O desenvolvimento de estruturas civis e mecânicas mais complexas, como barragens, pontes suspensas, edifícios, aeronaves e outros tipos de estruturas espaciais fizeram com que engenheiros estruturais sentissem a necessidade de criar ferramentas que pudessem ser capazes de estimar com precisão as mais relevantes propriedades estruturais. (FREITAS, 2008).

A vibração vem sendo cada vez mais observada na análise comportamental de estruturas em diversas áreas de atuação. As medições através de monitoramento feito por sensores, são utilizadas para formular um modelo que reproduzirá o comportamento em condições reais. Essa área da dinâmica estrutural é conhecida como Análise Modal. (MAIA; SILVA, 2001).

Dentre as razões citadas por (RAO, 2008), na qual se torna necessário à medição da vibração, está:

- Conhecer as características dinâmicas da estrutura para poder reduzir a ocorrência de ressonância durante a operação de máquinas, aumentando a confiabilidade do sistema;
- O conhecimento das frequências natural será útil para determinar velocidades de operação de uma máquina próxima, evitando condições de ressonância;
- As características da vibração de entrada e saída resultantes de um sistema facilitam na sua identificação em termos de massa, rigidez e amortecimento.

Podemos perceber então que, o conhecimento em vibrações, mais precisamente em análise modal, é de fundamental importância, não só na área da mecânica, mas também, da civil. O desastre da Ponte Tacoma Narrows, por exemplo, poderia ter sido evitado se os engenheiros daquela época tivessem realizado um estudo no modelo da ponte, a fim de conhecer as propriedades da dinâmica estrutural da mesma.

Este trabalho, por sua vez, surge da necessidade de difundir no meio acadêmico do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual do Maranhão, a metodologia da análise modal, pois é escassa a quantidade de trabalhos e desenvolvimentos contínuos na área de Vibrações no Campus Paulo VI na cidade de São Luís. Deseja-se, então, prover um material acessível e que sirva de primeiro passo para aqueles que se interessarem pelo tema.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos Gerais

Realizar a análise modal em um viga utilizando sensor acelerômetro para a captação de dados experimentais e conseqüentemente demonstrar as frequências naturais e os modos de vibrar.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Construir um modelo experimental utilizando o sensor acelerômetro fixado a uma viga engastada;
- Estudar o comportamento da viga por meio dos dados captados pelo sensor acelerômetro;
- Realizar ensaio numérico através do *software Ansys*;
- Demonstrar a similaridade entre os resultados da modelagem numérica e modelagem experimental da estrutura estudada;
- Discutir os resultados obtidos.

2. PRINCÍPIOS DE VIBRAÇÕES

Neste capítulo, inicia-se um histórico da descoberta da vibração como objeto de análise, aproveitando também para realizar um estudo teórico sobre vibrações livres, lembrando que este não deverá ser o principal foco deste trabalho, mas auxiliará no entendimento de análise modal abordado em capítulos futuros.

2.1 Aspectos históricos

O interesse pela vibração surgiu da descoberta dos primeiros instrumentos musicais, provavelmente apitos e tambores. A partir de então, iniciou-se uma investigação crítica ao estudo deste fenômeno. A música já era apreciada pelos chineses e hindus desde 4000 a.C., contudo, ainda que fossem observadas certas regras muito definidas em relação a esta arte, dificilmente poderiam ser consideradas ciência. (RAO, 2008).

Aproximadamente 3000 a.C., começaram a aparecer os primeiros instrumentos de cordas, semelhantes a harpas nas tumbas egípcias. É muito provável que este tipo de instrumento musical tenha sido inspirado dos arcos dos caçadores, arma preferida dos exércitos do antigo Egito. Desde a antiguidade já havia pesquisas sobre as leis de produção de som, utilizadas no aperfeiçoamento dos instrumentos musicais, músicos e filósofos transmitiam esse conhecimento de geração para geração. (RAO, 2008).

O primeiro a investigar sons musicais com base científica foi o filósofo e matemático grego Pitágoras (582-507 a.C.). Um de seus experimentos foi realizado com uma corda vibratória utilizando um instrumento simples denominado monocórdio, figura 1. (RAO, 2008).



Fonte: Adaptado de RAO, 2008.

No monocórdio, os cavaletes de madeira 1 e 3 são fixos e o cavalete 2 é móvel, a tensão na corda se torna constante devido ao peso pendurado em uma das extremidades. O que Pitágoras observou foi que, se duas cordas iguais, mas de comprimentos diferentes fossem sujeitas à mesma tensão, a corda mais curta emitia uma nota mais aguda; ele observou também que, se o comprimento da corda menor fosse à metade do comprimento da maior, a menor emitiria uma nota uma oitava acima da outra. Porém, ele não deixou registros escritos do seu trabalho, e mesmo que o conceito de tonalidades já estivesse sido desenvolvido por ele, sua relação com a frequência de vibração do corpo sonoro ainda não era compreendida, e continuou assim até a época de Galileu no século XVI d.C. (PEREIRA, 2013).

Passou-se muito tempo sem desenvolvimento algum nas teorias de som e da vibração. Muitos séculos se passaram, foi quando a China após sofrer constantemente com abalos sísmicos, percebeu-se a necessidade de desenvolver um instrumento que fosse capaz de medir terremotos com precisão. Em 132 d.C., um historiador e astrônomo chamado Zhang Heng inventou o primeiro sismógrafo do mundo para medir a intensidade de terremotos, figura 2. (RAO, 2008).

Figura 2- Sismógrafo de Zhang Heng



Fonte: BORGES; NICOLAU, 2012.

Fabricado em bronze fundido, com 1,89 metros de diâmetro. No interior da jarra possuía um mecanismo que consistia em pêndulos cercados por um grupo de oito alavancas apontado para oito direções; possuía também oito figuras de dragões, cada um com uma bola na boca e embaixo de cada dragão, havia sapos

com a boca aberta. Um terremoto para qualquer direção acionaria a alavanca na cabeça de dragão, isso faria com que a boca do animal abrisse e liberasse a bola de bronze que cairia dentro da boca do sapo com um som metálico, assim o pessoal da monitoração poderia saber a hora exata e a direção em que o terremoto ocorreu. (BORGES; NICOLAU, 2008).

No século XVII d.C., Galileu Galilei (1564-1642) teve a ideia de estudar o comportamento de um pêndulo simples observando os movimentos pendulares de uma lâmpada em uma igreja em Pisa. Em 1638, no *Discourses concerning two new sciences*, ele discutiu sobre corpos vibratórios. Galileu descreveu a dependência entre a frequência e vibração e o comprimento de um pêndulo simples, juntamente com o fenômeno de ressonância. Seus escritos também indicaram claro entendimento da relação entre frequência, comprimento, tensão e densidade de uma corda vibratória esticada. Seu trabalho serviu de inspiração a fundação da Academia Del Cimento em Florença, abrindo portas para novos experimentos anos mais tarde. (GALILEI, [15--?] apud MACMILLAN COMPANY, 1914).

A possibilidade de uma corda vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo foi provada por meio das equações dinâmicas de Daniel Bernoulli (1700-1782) publicadas pela Academia de Berlim em 1755. Esse princípio foi muito importante para o desenvolvimento da teoria de vibrações, levando à possibilidade de expressar qualquer função arbitrária (forma inicial da corda) usando uma infinita série de senos e cossenos. (RAO, 2008).

As vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas de várias maneiras foram estudadas por Leonhard Euler (1707-1783) em 1744 pela primeira, e em 1751 por Daniel Bernoulli em 1751, conhecida como teoria de Euler-Bernoulli ou mais precisamente de viga delgada. (RAO, 2008).

Há também muitos outros como Charles Coulomb, Simeon Poisson, Lord Baron Rayleigh que foram cruciais para o desenvolvimento de teorias e aperfeiçoamento das leis de vibração.

2.2 O curioso caso da ponte Tacoma Narrows

Quando falamos de vibrações e fenômenos oscilatórios, é importante lembrar do famoso e curioso caso da ponte Tacoma Narrows, figura 3, no dia 7 de novembro de 1940, em Washington (EUA), onde a mesma entrou em colapso após

oscilar por aproximadamente 10 horas. A frequência de oscilação da ponte chegou a 36 ciclos por minuto com uma amplitude de 90 centímetros, aliado a isso a falta de rigidez transversal e torcional da ponte fizeram com que ela desabasse sobre o rio. (FERREIRA JUNIOR, 2013).

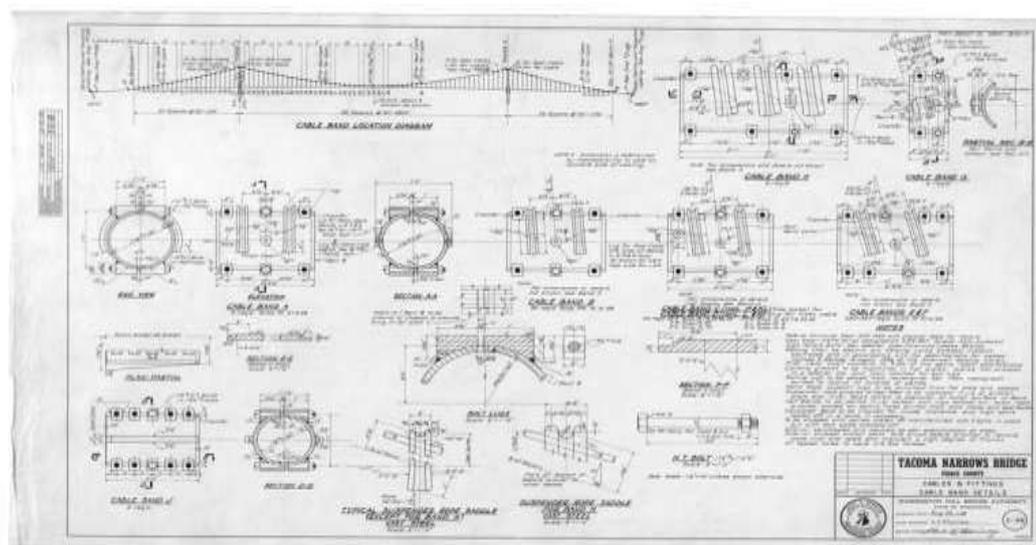
Figura 3 - Ponte Tacoma Narrows



Fonte: CAVALCANTI, 2015.

O modelo proposto por Moisseiff, figura 4, estabelecia uma ponte pênsil com dois pilares, na qual substituíram as estruturas triangulares características. Possuía suporte de duas vigas simples em I, paralelas, composta por uma pequena estrutura interna, com suporte de apenas 2,4 metros de espessura. (CAVALCANTI, 2015).

Figura 4 - Projeto da Ponte Tacoma



Fonte: CAVALCANTI, 2015.

Durante sua construção, técnicos, engenheiros e demais perceberam que a estrutura tendia oscilar transversalmente quando atingida por correntes de ventos não tão intensos. Vários ensaios foram realizados com o objetivo de reduzir tais oscilações, porém, nenhum chegou a ser eficaz.

Na madrugada do dia em que ocorreu o colapso da ponte Tacoma Narrows, os ventos atingiram a velocidade de 64 km/h, fazendo que a ponte oscilasse juntamente com os cabos de sustentação alcançando o valor de uma das frequências naturais da ponte. (FERREIRA JUNIOR, 2013).

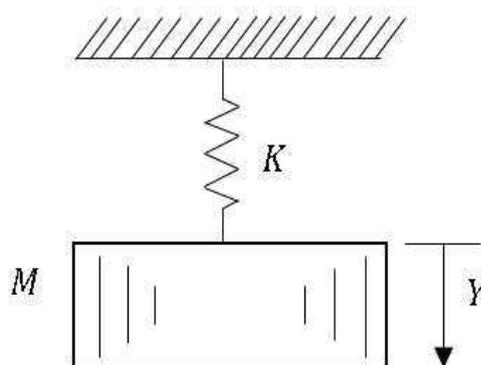
Após o colapso da ponte pênsil, buscou-se um melhor entendimento sobre os fenômenos ondulatórios, que culminaram num grande avanço no campo das Engenharias, mais precisamente no que se refere à Aerodinâmica de Estruturas.

Este trabalho irá demonstrar o desenvolvimento da análise modal de um sistema estrutural, com o auxílio do modelo teórico utilizando elementos finitos e do modelo experimental utilizando sensor acelerômetro, conhecer as frequências naturais deste sistema, conseqüentemente seus modos de vibrar e as possíveis áreas mais afetadas por meio de uma excitação externa.

2.3 Vibrações livres para sistemas com um grau de liberdade

Utilizaremos o sistema massa-mola da figura 5 para demonstrarmos o modelo dinâmico com um grau de liberdade, as propriedades físicas do sistema, ou seja, os valores de massa M , amortecimento viscoso C e rigidez K da estrutura em estudo deverão ser conhecidos.

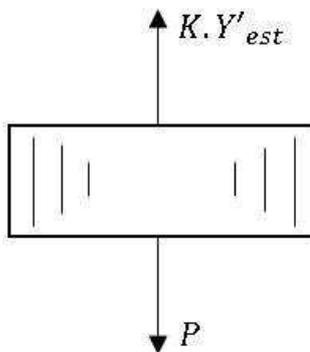
Figura 5 - Sistema massa-mola



Fonte: Adaptado de ALMEIDA, 1990.

Após a estabilidade do equilíbrio estático, teremos o equilíbrio de forças mostrado no diagrama de corpo livre da figura 6.

Figura 6 - Equilíbrio estático da mola



Fonte: Adaptado de ALMEIDA, 1990.

Teremos, portanto:

$$Y'_{EST} = \frac{P}{K} = \frac{M \cdot g}{K} \quad (1)$$

Onde:

Y'_{EST} = deflexão estática

P = peso

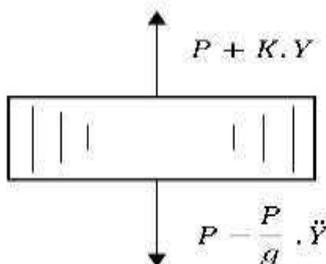
K = constante de mola, rigidez ou módulo de Young.

M = massa

g = gravidade

Em seguida, retirando a massa da posição de equilíbrio, o sistema sofrerá oscilação, assim mostrado na figura 7 e segundo a Lei de Newton, teremos:

Figura 7 - Massa em vibração



Fonte: Adaptado de ALMEIDA, 1990.

$$(P + KY) - \left(P - \frac{P}{g} \ddot{Y}\right) = 0 \quad (2)$$

Ou de forma simplificada:

$$\frac{P}{g} \ddot{Y} + K.Y = 0 \quad (3)$$

Ou ainda:

$$\ddot{Y} + \omega_n^2 Y = 0 \quad (4)$$

Onde:

Y = deslocamento vertical da massa

$$\ddot{Y} = \frac{d^2 Y}{dt^2}$$

t = tempo

ω_n = frequência angular das vibrações livres ou frequência natural

Sabendo que:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{K \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{g}{Y'_{EST}}} \quad (5)$$

A solução para equação diferencial 4 será:

$$Y = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (6)$$

ALMEIDA (1990), explica que A e B são as constantes de integração que dependem das condições iniciais. Ele considera também que no instante em que $t=0$, $Y=Y_0$ e a velocidade inicial $V_0=\dot{Y}_0$. Sendo assim, determinamos:

$$A = Y_0 \text{ e } B = \frac{V_0}{\omega_n} \quad (7)$$

E supondo que:

$$Y_0 = a \operatorname{sen} \phi \text{ e } \frac{\dot{Y}_0}{\omega_n} = a \operatorname{cos} \phi \quad (8)$$

Poderemos transformar a solução 6 em:

$$Y = a \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \quad (9)$$

Onde:

a = amplitude de vibração

$(\omega_n t + \phi)$ = fase das vibrações

ϕ = defasagem

Então:

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{Y_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega_n^2}} \quad (10)$$

Enquanto ϕ pode ser determinado da seguinte forma:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{Y_0 \omega_n}{V_0} \quad (11)$$

Conhecendo a frequência angular podemos determinar também o período T , pois:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi \sqrt{\frac{Y'_{EST}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (12)$$

E a frequência f_n expressa em Hertz:

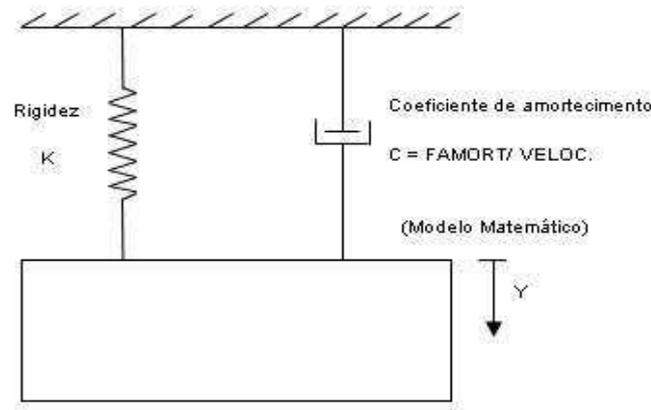
$$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi} \quad (13)$$

Concluimos através da equação 5 que a frequência natural aumenta com o aumento da rigidez e diminui com aumento da massa.

2.4 Vibrações livres para sistemas com um grau de liberdade com amortecimento

Amortecimento é a dissipação de energia de um sistema vibratório e sua força é diretamente proporcional à velocidade da vibração. (ALMEIDA, 1990).

Figura 8 - Sistema com um grau de liberdade e com amortecimento



Fonte: Adaptado de ALMEIDA, 1990.

Utilizaremos a figura 8 para demonstrar o modelo de um sistema com um grau de liberdade e com amortecimento, logo, teremos para equilíbrio dinâmico:

$$P = \frac{P}{g} \ddot{Y} - c\dot{Y} = P + KY \quad (14)$$

Ou

$$\ddot{Y} + 2n\dot{Y} + \omega_n^2 Y = 0 \quad (15)$$

Sendo c o coeficiente de amortecimento, $c\dot{Y}$ a força de amortecimento e n o coeficiente que caracteriza a capacidade de amortecimento do sistema vibratório. (ALMEIDA, 1990).

Na equação 15, temos:

$$\omega_n^2 = \frac{K \cdot g}{P} \quad (16)$$

E

$$2n = \frac{c \cdot g}{P} \quad (17)$$

Logo:

$$\omega_1^2 = \omega_n^2 - n^2 \quad (18)$$

A solução da equação 15 será:

$$Y = e^{-nt}(A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \operatorname{cos} \omega_1 t) \quad (19)$$

Onde e é a base neperiana igual a 2,718.

O período das vibrações amortecidas do sistema é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - n^2}} \quad (20)$$

Concluimos através da equação 19 que por meio do fator e^{-nt} a amplitude das vibrações diminui com o tempo. A e B são constantes de integração determinadas pelas condições iniciais. (ALMEIDA, 1990). Supondo que $t = 0$, $Y = Y_0$ e $\dot{Y} = \dot{Y}_0$, teremos:

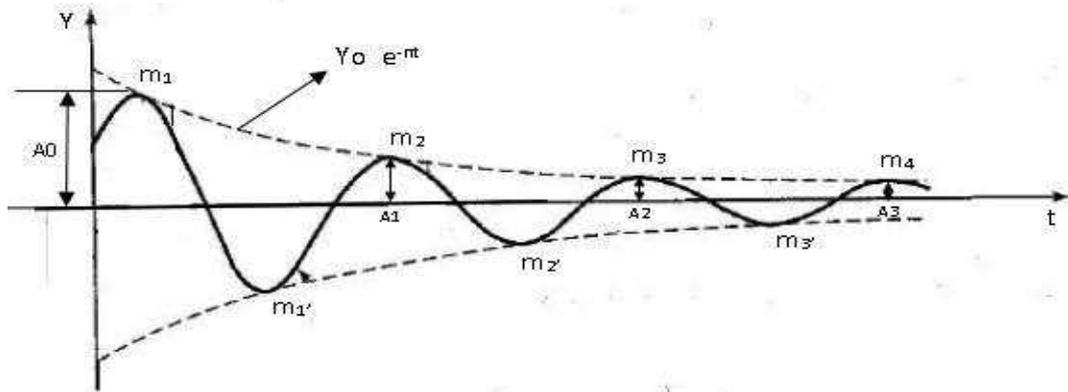
$$B = Y_0 ; A = \frac{1}{\omega_1}(\dot{Y}_0 + nY_0) \quad (21)$$

Sendo assim, a solução 19, pode se tornar:

$$Y = e^{-nt} \left[\frac{\dot{Y}_0}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t + Y_0 \left(\operatorname{cos} \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \right) \right] \quad (22)$$

Em casos particulares quando $A = 0$, a equação 22 terá a seguinte forma da figura 9:

Figura 9 - Vibração livre amortecida



Fonte: Adaptado de ALMEIDA, 1990.

A redução da amplitude é uma progressão geométrica, logo, quando $t = 0$; $t = T$; $t = 2T$, etc., os valores de amplitude serão, respectivamente:

$$A_0 = Y_0 ; A_1 = Y_0 e^{-nt} ; A_2 = Y_0 e^{-2nt} \dots \quad (23)$$

Ou

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{A_1}{A_2} = \dots = \frac{A_K}{A_{K+1}} = e^{nt} \quad (24)$$

Onde:

$$L \frac{A_K}{A_{K+1}} = L e^{nT} = nT = \delta \quad (25)$$

A grandeza δ é o decremento logarítmico das vibrações, em outras palavras, é a característica principal do amortecimento ou característica das propriedades amortecedoras do sistema vibratório. (ALMEIDA, 1990).

ALMEIDA (1990) ressalta ainda, que muitas estruturas têm o parâmetro de amortecimento n muito menor que a frequência natural ω_n . A razão entre n e ω_n é denominada fator de amortecimento da viga, representado por ζ na equação 29.

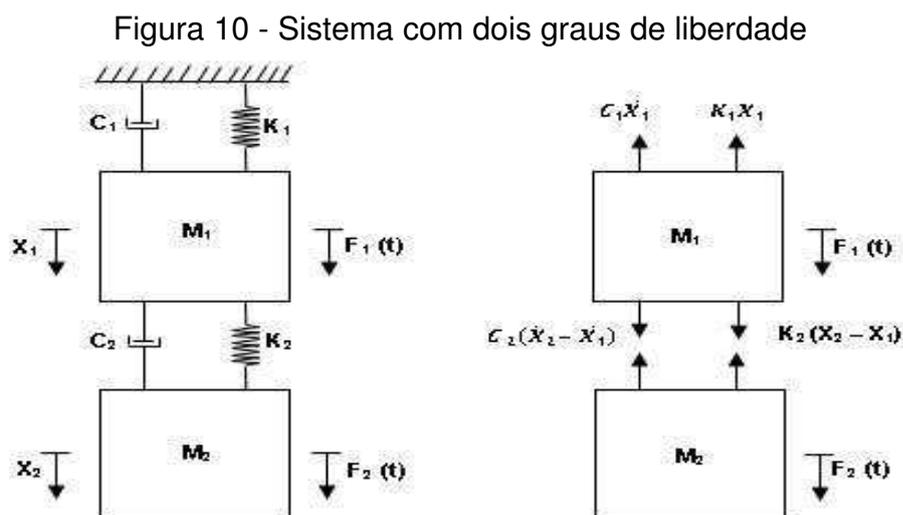
$$\zeta = \frac{n}{\omega_n} \quad (26)$$

Por fim, para calcularmos a constante de amortecimento C , utilizaremos a equação:

$$C = 2n\frac{P}{g} = 2nM \quad (27)$$

2.5 Vibrações livres para sistemas com muitos graus de liberdade

Estruturas reais se apresentam com vários graus de liberdade, suas análises são realizadas por meio de várias equações diferenciais. Para tal, determinaremos primeiramente as equações diferenciais do sistema mostrado na figura 10 abaixo:



Fonte: Adaptado de ALMEIDA, 1990.

Aplicando a segunda Lei de Newton, a força resultante F_r do sistema será:

$$F_r = M\ddot{x} = f(t) - Kx - C\dot{x} \quad (28)$$

Organizando:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(t) \quad (29)$$

Onde \ddot{x} é a aceleração, \dot{x} a velocidade e x o deslocamento.

Com base na equação característica 29, podemos determinar o sistema da figura 6 para as massas M_1 e M_2 da seguinte forma:

$$M_1\ddot{x}_1 + (C_1 + C_2)\dot{x}_1 - C_2\dot{x}_2 + (K_1 + K_2)x_1 - K_2x_2 = F_1(t) \quad (30)$$

$$M_2\ddot{x}_2 - C_2\dot{x}_1 + C_2\dot{x}_2 - K_2x_1 + K_2x_2 = F_2(t) \quad (31)$$

Colocando na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + -K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$[M]$, $[C]$ e $[K]$ são denominadas matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente (RAO, 2008), e são dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 + -K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Primeiramente consideraremos a vibração livre do sistema para então podermos determinar as frequências naturais e seus respectivos modos. Sendo assim, as equações serão reduzidas para:

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0} \quad (36)$$

ALMEIDA (1990) assume um movimento harmônico, $\ddot{x}_i = -\lambda_i x_i$ onde $\lambda = \omega^2$, assim a Equação 36 torna-se:

$$-\lambda \underline{M}\underline{x} + \underline{K}\underline{x} = \underline{0} \quad (37)$$

Ou

$$[-\lambda \underline{M} + \underline{K}]\underline{u} = \underline{0} \quad (38)$$

Onde $x = u$ e este representa a deformação padrão da estrutura para a correspondente frequência natural. Multiplicando por M^{-1} e rearranjando, obteremos:

$$[\underline{M}^{-1}\underline{K} - \lambda\underline{I}]\underline{u} = \underline{0} \quad (39)$$

Lembrando que $M^{-1}.M = I$ é a matriz identidade.

A equação 39 é um conjunto de equações algébricas em u_i . ALMEIDA (1990) ressalta também que para uma solução não trivial onde $u \neq 0$, o determinante dos coeficientes da Equação 39 deve ser nulo. Logo:

$$[\underline{M}^{-1}\underline{K} - \lambda\underline{I}] = \underline{0} \quad (40)$$

A equação acima representa a equação característica do sistema. Expandindo-a poderá ser rescrita como:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad (41)$$

ALMEIDA (1990) descreve a equação 41 como um polinômio em λ de grau (n) que é o número de graus de liberdade do sistema. As raízes λ_i são chamadas de autovalores e as frequências naturais (sem amortecimento) são estabelecidas pela seguinte relação:

$$\lambda_i = \omega_i^2 \quad (42)$$

Se substituirmos λ_i na equação 39, obteremos o modo natural ou principal correspondente \underline{u}_i , chamado de autovetor. O modo natural de vibração é definido pelas amplitudes de movimento em vários pontos da estrutura quando excitada pelas frequências naturais correspondentes. (ALMEIDA, 1990).

2.6 Vibrações livres de sistemas contínuos

Neste tópico, será considerado a vibração de sistemas contínuos simples, como cordas, barras, eixos e vigas. Em geral, a equação de frequência de um sistema contínuo é uma equação transcendental que dá um número infinito de frequências naturais e modos normais. É necessário a aplicação de condições de

contorno para determinações de frequências, os coeficientes de influência dependem da maneira como o sistema é apoiado. (CRAIG, 1934, tradução nossa).

A vibração livre de vigas Bernoulli-Euler se reduz a equação:

$$(EI'''' + \rho A \ddot{v} = 0 \quad (43)$$

Onde:

E = Modulo de elasticidade.

I = Momento de inércia

ρ = Densidade

A = Área de seção transversal

Assumimos o movimento harmônico dado pela equação:

$$v(x, t) = V(x)\cos(\omega t - \alpha) \quad (44)$$

Para vibrações livres de uma viga uniforme, a equação 44 acima, reduz a:

$$\frac{d^4 V}{dx^4} - \lambda^4 V = 0 \quad (45)$$

Onde:

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad (46)$$

A solução geral da equação 45 pode ser escrita na forma:

$$V(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 e^{i\lambda x} + A_4 e^{-i\lambda x} \quad (47)$$

Duas formas alternativas úteis são:

$$V(x) = B_1 e^{\lambda x} + B_2 e^{-\lambda x} + B_3 \sin \lambda x + B_4 \cos \lambda x \quad (48)$$

E

$$V(x) = C_1 \sinh \lambda x + C_2 \cosh \lambda x + C_3 \sin \lambda x + C_4 \cos \lambda x \quad (49)$$

Há cinco constantes na solução geral: as quatro constantes de amplitude e os autovalores λ . As condições finais (limite) são usadas na avaliação dos autovalores e três das constantes de amplitude remanescente permanece arbitrária (CRAIG, 1934, tradução nossa). Para a vibração livre de vigas uniformes, a equação 44 pode ser transformada em:

- Viga engastada

$$V = \frac{dV}{dx} = 0 \quad (50)$$

- Viga biapoiada

$$V = \frac{d^2V}{dx^2} = 0 \quad (51)$$

- Viga livre-livre

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d^3V}{dx^3} = 0 \quad (52)$$

Definindo as condições de contorno de uma viga engastada da equação 50 e manipulando a equação 49 como solução geral do problema, encontramos a seguinte equação (CRAIG, 1934):

$$\omega_r = \left(\frac{r\pi}{L}\right)^2 x \left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (53)$$

Onde r é a ordem do modo de vibrar e ω_r é a frequência de excitação do respectivo modo.

3. ANÁLISE MODAL

O princípio básico de descrição do comportamento dinâmico de uma estrutura em termos de modos de vibração foi primeiramente explorado por Rayleigh no final do século XVIII. Desde então, engenheiros têm procurado aproveitar essa poderosa abordagem como um meio de solucionar uma ampla faixa de problemas práticos em estruturas dinâmicas. (LEO, 2007).

A evolução na construção de estruturas e máquinas no campo da civil e da mecânica forçou os engenheiros a desenvolverem ferramentas que pudessem ser capazes de estimar com precisão as propriedades estruturais dos sistemas, assim, para obter-se um modelo que refletisse adequadamente o verdadeiro comportamento dinâmico das estruturas, recorreu-se a experimentos. (FREITAS, 2008).

Os dados obtidos nas estruturas são utilizados para formular um modelo que reproduza o comportamento em condições reais. Essa área da dinâmica estrutural é conhecida como Análise Modal Experimental (AME), popularizado na década de 70. A partir de então, tem-se desenvolvido um amplo domínio de aplicações, como acoplamento de subestrutura, vibro-acústica entre outros. (MAIA; SILVA, 2001). Por outro lado, a identificação baseada no conhecimento apenas das respostas do sistema, sem utilizar as informações de excitação é conhecida como Análise Modal Operacional (AMO). (LARDIES; MINH-HGI, 2010).

Mas o que é Análise Modal?

Para Ewins (1984), é um método experimental usado para obter um modelo matemático do comportamento dinâmico ou de vibração. Na prática, pode ser usada para:

1. Inspeccionar a progressão de trincas por fadiga em elementos rotativos com base nas frequências de vibração de seus apoios (RAO, 2008);
2. Quantificar a mobilidade dos domínios de uma proteína segundo seus modos de vibrar (SKJAERVEN; HOLLUP; REUTER, 2009);
3. Avaliar a suscetibilidade de instalações prediais a sismos devido a seu projeto arquitetônico (SHEPHERD, 1969).

A análise modal foi o início para o grande avanço ocorrido nas últimas décadas. Através do desenvolvimento e aperfeiçoamento do método de elementos finitos, criou-se a possibilidade para vários métodos numéricos muito eficientes para a análise de estruturas (BATHE; WILSON, 1976; ZIENKIEWICZ, 1985) e programas computacionais que simulavam o comportamento estrutural dos componentes em estudo. O *Ansys*, por exemplo, foi desenvolvido pela empresa que hoje utiliza o mesmo nome, mas originalmente chamava-se *Swanson Analysis Inc*, fundada pelo Dr. John A. Swanson em 1970 na Pensilvânia, Estados Unidos (ANSYS, 2010).

Ewins (1984) apresenta a análise de vibração por meio de estágios. De uma forma geral, podem-se analisar as vibrações de um sistema estrutural por meio de dois caminhos distintos: análise teórica e análise experimental. Na figura 11 é mostrada resumidamente a análise modal teórica de um sistema, enquanto na figura 12 o modelo experimental.



Fonte: Adaptado de SALGADO, 2012.



Fonte: Adaptado de SALGADO, 2012.

Onde:

$[M]$ = matriz massa

$[C]$ = matriz amortecimento viscoso

$[K]$ = matriz rigidez

$[\omega]$ = matriz frequências naturais

$[\Phi]$ = matriz modal

$H_{ij}(\omega)$ = função de resposta de frequência de transferência (FRF)

$h(t)$ = resposta da estrutura ao longo do tempo

As propriedades modais da estrutura ou equipamento mecânico podem ser apresentadas de três formas diferentes, assim teremos um sistema que poderá ser descrito pelo modelo espacial, modelo modal e o modelo de resposta de frequência, como mostrado nas Figura 11 e 12.

O modelo espacial representa as propriedades físicas do objeto em estudo, ou seja, é constituído pela matriz de massa $[M]$, amortecimento viscoso $[C]$ e rigidez $[K]$. Estas matrizes descrevem o comportamento do sistema e podem ser obtidas a partir da discretização da estrutura.

No modelo modal será determinado às frequências naturais de vibração (ω) e os padrões de vibração das coordenadas em estudo, chamados de formas do modo de vibrar (Φ). Este modelo dará a possibilidade das propriedades modais poderem ser representadas graficamente.

Na etapa do modelo de resposta, como o próprio nome já diz, será analisada a resposta do sistema quando excitado por uma força externa. Através da amplitude de vibração para diferentes frequências ou impulsos, é possível determinar a solução para caso.

Para Almeida (1990), muitas estruturas podem ser caracterizadas por meio de métodos matemáticos lineares.

Na modelagem teórica, o comportamento estrutural do modelo pode ser estudado utilizando diferentes tipos modelagens, por exemplo, o método de elementos finitos (BATHE; WILSON, 1976; ZIEKIEWICZ, 1985), este permite poupar tempo e dinheiro em testes, além disso, atualmente vem sendo muito utilizado para análises e projetos de sistemas mecânicos, no entanto, sua resposta geralmente é aproximada. (PRAZZO, 2011).

A análise modal experimental foi criada a fim de solucionar tal problema, uma vez que os parâmetros e a resposta do modelo são obtidos diretamente da própria estrutura a partir de testes experimentais, contudo, quantificar a força de excitação ou de entrada do sistema é um dos maiores desafios para realização da mesma.

Há vários instrumentos que captam a vibração da estrutura, acelerômetros e piezelétricos geralmente são os mais utilizados para isso, no entanto, é necessário que tais sensores não afetem as características da estrutura. (LEO, 2007).

Também é importante conhecer o número de parâmetros independente do sistema, chamado de *número de graus de liberdade*, o que irá determinar a posição do sistema em cada instante de tempo. (ALMEIDA, 1990).

3.1 Análise Modal Teórica

Quando aplicados uma força externa num sistema, este estará sujeito a um tipo de vibração forçada. Em sistemas com n graus de liberdade, as equações de movimento que ditam o comportamento dinâmico dos mesmos, são fornecidos por um conjunto de complexas equações diferenciais, onde suas soluções tornam-se cada vez mais complicadas aumentando o número de graus de liberdade ou quando as forças de excitação são não determinísticas. (PRAZZO, 2011).

Pelo método de análise modal, utiliza-se o teorema de expansão, onde os deslocamentos das massas são expressos como uma combinação linear dos modos normais do sistema. Através de uma transformação linear, as equações são desacopladas levando a um sistema com n equações diferenciais de segunda ordem independentes e as suas soluções, é equivalente à solução de n sistemas de um grau de liberdade. (RAO, 2008).

Como dito anteriormente, para sistemas com n graus de liberdade excitados por uma força externa, temos a equação:

$$[M]\ddot{x}(t) + [C]\dot{x}(t) + [K]x(t) = \{F(t)\} \quad (54)$$

Desconsiderando o amortecimento C , a equação 54 pode ser rescrita da seguinte forma:

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{F} \quad (55)$$

A solução desta equação utilizando o teorema da expansão necessita primeiramente da solução do problema de autovalor/autovetor do modelo da equação 56:

$$\omega^2[M]\vec{X} = [K]\vec{X} \quad (56)$$

Resolvendo o problema de autovalor/autovetor, teremos as frequências próprias $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ e modos normais correspondentes $\vec{X}^1, \vec{X}^2, \dots, \vec{X}^n$. Podemos expressar a solução da equação 44 por uma combinação linear dos modos normais (RAO, 2008), assim teremos:

$$\vec{x}(t) = q_1(t)\vec{X}^1 + q_2(t)\vec{X}^2 + \dots + q_n(t)\vec{X}^n \quad (57)$$

Onde $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ são coordenadas generalizadas dependentes do tempo, chamadas de coordenadas principais ou coeficientes de participação modal. Definindo a matriz modal $[X]$ na qual a j -ésima coluna é o vetor $\vec{X}^{(f)}$, ou seja,

$$\{\vec{x}(t)\} = [X]\{\vec{q}(t)\} \quad (58)$$

Rescrevendo a equação 57 na forma matricial:

$$[X] = [\vec{X}^1 \vec{X}^2 \dots \vec{X}^n] \quad (59)$$

Onde

$$\vec{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \quad (60)$$

A matriz modal $[X]$ não depende do tempo, sendo assim:

$$\ddot{\vec{x}} = [X]\ddot{\vec{q}}_1(t) \quad (61)$$

Substituindo as equações 58 e 61 na equação 54, teremos:

$$[M][X]\ddot{\vec{q}} + [K][X]\vec{q} = \vec{F} \quad (62)$$

Multiplicando por $[X]^T$, obtém-se:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \quad (63)$$

Empregando as propriedades de ortogonalidade dos modos normais, tem-se:

$$[X]^T[m][X] = [^{\wedge} I \searrow] \quad (64)$$

$$[X]^T[k][X] = [^{\wedge} \omega^2 \searrow] \quad (65)$$

Definindo o vetor de forças generalizadas $\vec{Q}(t)$:

$$\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}(t) \quad (66)$$

Sendo assim, a equação 63 poderá ser rescrita da seguinte forma:

$$[^{\wedge} I \searrow]\ddot{\vec{q}}(t) + [^{\wedge} \omega^2 \searrow]\vec{q}(t) = \vec{Q}(t) \quad (67)$$

A equação 67 é um conjunto de várias equações diferenciais de segunda ordem não acopladas, i.e.:

$$\ddot{q} + \omega_i^2 q + c(t) = Q_i(t) \quad (68)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

As equações acima descrevem o movimento de um sistema não amortecido com um grau de liberdade. (PRAZZO, 2011). A solução dessas equações, conforme Rao (2008), é dado por:

$$q_i(t) = q_i(0) \cos \omega_i t + \left(\frac{q_i(0)}{\omega_i} \right) \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau \quad (69)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Os deslocamentos generalizados iniciais $q_i(0)$ e as velocidades generalizadas iniciais $\dot{q}_i(t)$ podem ser obtidos pelos valores iniciais dos deslocamentos físicos $x_i(0)$ e velocidades físicas como $\dot{x}_i(0)$. (PRAZZO, 2011). Logo:

$$\vec{q}(0) = [X]^T [m] \vec{x}(0) \quad (70)$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = [X]^T [m] \dot{\vec{x}}(0) \quad (71)$$

Onde

$$\vec{q}(0) = \begin{Bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ \vdots \\ q_n(0) \end{Bmatrix} \quad (72)$$

$$\dot{\vec{q}}(0) = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1(0) \\ \dot{q}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(0) \end{Bmatrix} \quad (73)$$

$$\vec{x}(0) = \begin{Bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{Bmatrix} \quad (74)$$

Determinando os deslocamentos generalizados $q_i(t)$ com a utilização das equações 69-71, pode-se encontrar os deslocamento físicos $x_i(t)$ através da equação 58. (RAO, 2008).

3.2 Análise Modal Experimental

Também chamada de teste modal, trata das propriedades modais do sistema, ou seja, as frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais através dos testes de vibração. Rao (2008) afirma que há duas ideias básicas envolvidas:

1. Quando uma estrutura é excitada, a resposta exhibe um pico acentuado na ressonância se a frequência excitadora for igual a frequência natural e o amortecimento do sistema não seja grande.
2. Quando a frequência excitadora passa pela frequência natural, a fase da resposta muda de 180° , enquanto na ressonância a fase será de 90° .

Para a realização da análise modal, é necessário o uso do seguinte equipamento:

1. Uma fonte de vibração para aplicar uma força conhecida à estrutura.
2. Um sensor ou um transdutor para converter o movimento físico em sinal elétrico.
3. Um amplificador de condicionamento de sinal para tornar os dados do transdutor compatível ao sistema de aquisição de dados.
4. Um analisador responsável pelo processamento de sinal e análise modal utilizando um software numérico adequado.

3.2.1 Excitador

Responsável por fazer o sistema vibrar em uma determinada faixa de frequência. Existem diversas formas de excitadores, os eletromagnéticos e os martelos de impacto são geralmente utilizados nesta função.

O sinal de excitação normalmente é de um tipo senoidal de varredura ou aleatório. Para o tipo senoidal de varredura, uma força é aplicada em diversas frequências discretas em uma faixa de frequência específica de interesse. (RAO, 2008).

3.2.2 Transdutor

Muito confundido com os sensores, os transdutores são dispositivos que transformam uma grandeza física em sinais elétricos equivalentes, porém quando usado em conjunto com outro dispositivo, ele é denominado sensor. Vale lembrar que, apesar de não ser o mesmo dispositivo, muitas vezes os transdutores e os sensores podem vir integrados, o que acabam sendo chamados apenas de

transdutores. (RAO, 2008). Ele é responsável pela captura de dados na estrutura durante experimento.

3.2.3 Condicionador de sinal

Para o condicionamento de sinal adquirido do sensor, é necessária a utilização de uma central de processamento, na qual transformará os dados captados em resultados que futuramente poderão ser trabalhados no analisador. Existem várias plataformas que realizam este tipo de tarefa, uma delas é o Arduíno.

3.2.4 Analisador

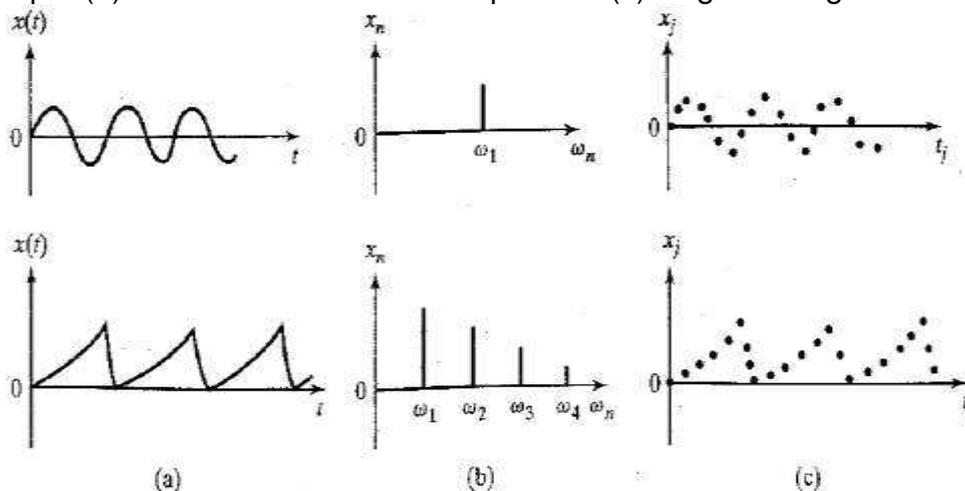
Após os dados serem condicionados, o sinal de resposta será passado para um software que fará a análise do mesmo.

Uma das ferramentas utilizadas para realizar a análise dos dados condicionados é denominado de transformada rápida de Fourier (FFT). Ela calcula os espectros de frequência discreta de sinais individuais, bem como espectros cruzados entre a entrada e os diferentes sinais de saída. Esses dados serão usados para determinar as frequências naturais, fatores de amortecimento e as formas modais em forma numérica ou gráfica. (RAO, 2008).

A transformada de Fourier converte o sinal analógico no domínio do tempo, $x(t)$, em dados digitais no domínio da frequência utilizando relações da série de Fourier. Podemos visualizar o processo de conversão de sinal analógico em dados digitais na figura abaixo:

Na Figura 13 abaixo, $x(t)$ representa o sinal analógico e $x_i = x(t_i)$ representa o registro digital correspondente, onde t_i indica o valor discreto de tempo.

Figura 13 - Representação de sinais em diferentes formas. (a) Sinais no domínio do tempo. (b) Sinais no domínio da frequência. (c) Registros digitais de $x(t)$.



Fonte: RAO, 2008.

A forma discreta da transformada de Fourier pode ser obtida se N amostras de $x(t)$ forem coletadas em valores discretos de tempo, t_i , como:

$$x_i = x(t_i) = \frac{a_0}{2} \sum_{i=1}^{N/2} \left(a_i \cos \frac{2\pi i t_j}{T} + b_i \sin \frac{2\pi i t_j}{T} \right) \quad (75)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

Sendo N o número de amostras igual a alguma potência de 2, o analisador aceita os sinais de saída analógicos do acelerômetro e calcula os coeficientes espectrais desses sinais a_0 , a_i e b_i . (RAO, 2008).

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \quad (76)$$

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \cos \frac{2\pi i t_j}{T} \quad (77)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \sin \frac{2\pi i t_j}{T} \quad (78)$$

As equações 76-78 representam n equações algébricas para cada uma das N amostras. Elas podem ser expressas na forma matricial:

$$\vec{X} = [A]\vec{d} \quad (79)$$

Onde $\vec{X} = \{x_1 x_2 \dots x_N\}^t$ é o vetor de amostras, $\vec{d} = \{a_0 a_1 a_{22} \dots a_{N/2} b_1 b_2 \dots b_{N/2}\}^T$ é o vetor de coeficiente espectrais e $[A]$ é a matriz composta pelos coeficientes $\cos \frac{2\pi i t_j}{T}$ e $\sin \frac{2\pi i t_j}{T}$ da Equação 76. (RAO, 2008).

Por fim, o conteúdo de frequência do sinal ou resposta do sistema pode ser determinado pela solução:

$$\vec{d} = [A]^{-1}\vec{X} \quad (80)$$

Sendo $[A]^{-1}$ calculado utilizando a transformada rápida de Fourier. (RAO, 2008).

4. MATERIAIS E MÉTODOS

O projeto proposto é de caráter experimental e analítico, realizado dentro da própria Universidade Estadual do Maranhão, onde se apresenta nas seguintes etapas: pesquisa bibliográfica, construção do modelo numérico, construção do modelo experimental, coleta e análise de dados da estrutura e por fim o resultado comparativo dos mesmos.

4.1 Construção do modelo numérico

Na modelagem numérica, o comportamento estrutural utilizará o método de elementos finitos (BATHE; WILSON, 1976; ZIEKIEWICZ, 1985), onde os cálculos e simulações serão realizados através do software Ansys.

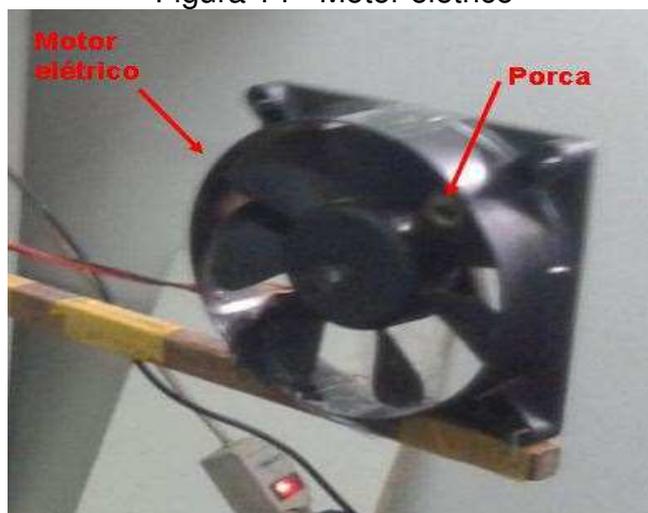
4.2 Definição do equipamento para experimento

Como abordado anteriormente, para realização da análise modal experimental, usa-se o equipamento citado por Rao (2008):

- Excitador

Para o excitador, fez-se o uso de um motor elétrico de corrente contínua, desbalanceado por meio de uma porca fixada em uma de suas hélices como mostrado na figura 14. Ele funciona a uma faixa de tensão entre 2.5 a 12 volts contínuos. Sua velocidade será controlada por meio de uma fonte de tensão variável, isso fará com que possa gerar faixas de frequências e amplitudes diferentes. Ele será unicamente responsável por fazer o sistema vibrar. Devemos ressaltar que, como neste caso o excitador estará ligado a estrutura, sua massa influenciará a resposta medida, isto é conhecido como efeito de carregamento de massa, mediante a isso, é preciso tomar extremo cuidado para atenuar este efeito de massa do excitador.

Figura 14 - Motor elétrico

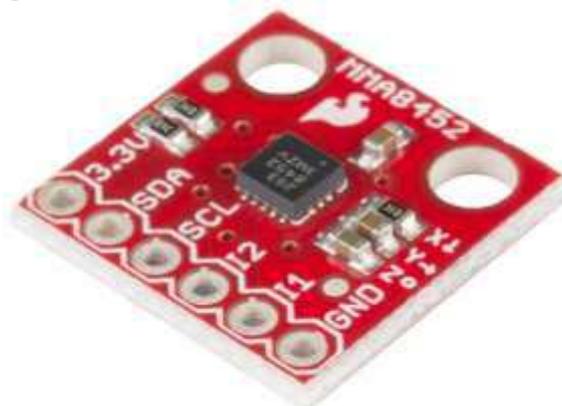


Fonte: Autor, 2016.

- Transdutor

Utilizou-se o sensor acelerômetro para fazer a captura dos dados na viga, figura 15. Ele é amplamente utilizado para medir vibrações e realizar o registro de terremotos, como o próprio nome já diz, é um instrumento que mede a aceleração de um corpo vibratório. (RAO, 2008). Sua enorme versatilidade se sobressai comparado a outros sensores de vibração, já que os mesmos se resumem a aplicações muito específicas. (SEQUEIRA, 2005).

Figura 15 - Sensor Acelerômetro MMA8452



Fonte: Autor, 2016.

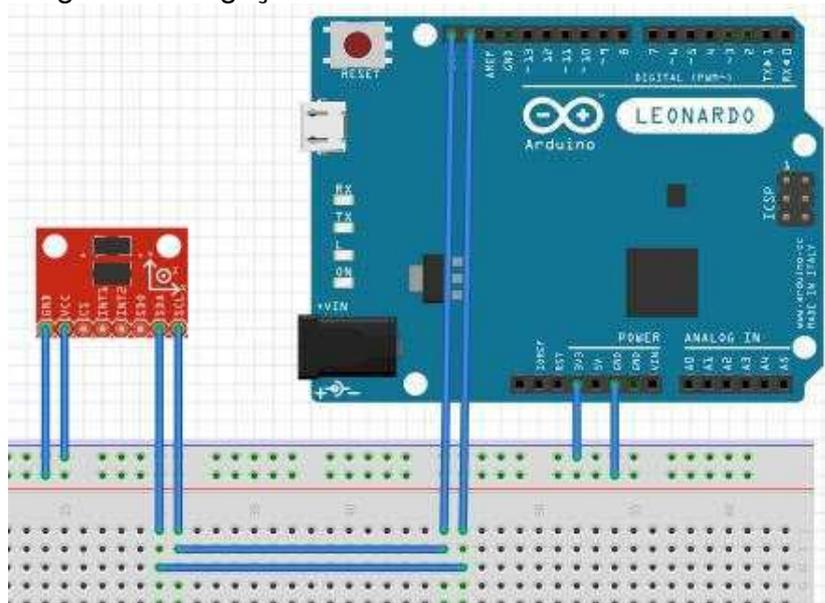
O acelerômetro possui em seu interior um material piezoelétrico que age como uma mola rígida e provoca uma frequência de ressonância ou natural no

transdutor. Sua máxima frequência mensurável é uma fração de sua frequência natural. (RAO, 2008).

Durante seu funcionamento, o sensor tende acompanhar a vibração transmitida pelo objeto de estudo, a massa no interior do sensor se mantém estacionária no espaço até que seja fixado numa superfície em movimento, onde haverá um deslocamento provocado pela força motriz que dará origem ao movimento. Esta força é igual ao produto da aceleração com a massa sísmica. (SEQUEIRA, 2005).

Para seu funcionamento, deverá ser compilado uma programação de controle para o sensor. A programação é mostrada detalhadamente no Apêndice A. Sua ligação no condicionador de sinal deverá ser feita como na figura 16 abaixo:

Figura 16 - Ligação do sensor acelerômetro no Arduino



Fonte: Autor, 2016.

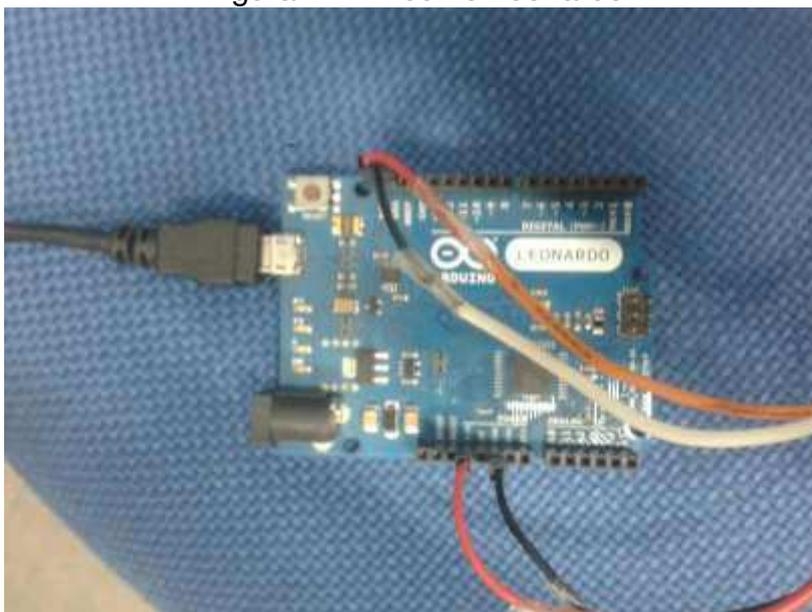
- Condicionador de sinal

Para o condicionamento de sinal, utilizou-se o Arduino. Ele é uma plataforma de prototipagem aberta baseada em hardware e software flexíveis e de fácil utilização. Consiste, por definição, em um microcontrolador de placa única e um conjunto de software para programá-lo (ARDUINO, 2016).

Ele terá o programa de controle do sensor acelerômetro, mostrado no Apêndice A.

Há uma diversidade de placas Arduíno no mercado, inclusive implementações nacionais (SOUZA, 2011). Cada qual com características que a diferem das demais, como velocidade (clock), memórias, pinagem entre as várias versões, entre outras. Uma característica comum entre as várias versões é o custo relativamente baixo e a flexibilidade (REZENDE et all, 2010).

Figura 17 - Arduino Leonardo



Fonte: Autor, 2016.

A placa que será utilizada neste trabalho é a Arduíno Leonardo, figura 17. Dentre as principais características dela, está o uso do microcontrolador ATmega328, tensão de operação de 5V, 14 pinos de entrada/saída digital, 6 pinos de entrada/saída analógicos, 32 KB de memória flash, 2 KB de SRAM, 1 KB de EEPROM e velocidade de clock de 16 MHz. (ARDUINO, 2012).

- Analisador

Utilizou-se o software Matlab para o tratamento e análise do sinal.

Matlab é um software de alto desempenho destinado a fazer cálculos com matrizes, podendo funcionar como uma calculadora ou com uma linguagem de programação científica (Fortran, Pascal, Linguagem C, entre outras). Entretanto, seus comandos são mais próximos da forma como escrevemos expressões algébricas, tornando mais simples o seu uso. Atualmente, ele é definido como um

sistema interativo e uma linguagem de programação para computação técnica e científica em geral, integrando a capacidade de fazer cálculos, visualização gráfica e programação. (TONINI; COUTO, 1999).

Os *scripts* de programações utilizadas para análise constam dos Apêndices B e C.

4.3 Montagem do modelo experimental

Definido o equipamento a ser utilizado, passou-se para fase de montagem do modelo experimental. Neste ponto, definimos uma viga engastada em uma das extremidades como objeto de estudo, figura 18. Suas propriedades físicas constam na tabela 1.

Figura 18 - Montagem do experimento



Fonte: Autor, 2016.

Tabela 1 - Propriedades físicas da viga

Propriedade físicas da viga	
Material	Madeira de cupiúba
Comprimento (L)	1.13 m
Área de seção transversal	10^{-4} m^2
Módulo de elasticidade (E)	13,6Gpa

Momento de Inércia (I)	1.666×10^{-10}
Densidade (ρ)	710 kg/m ³

Fonte: Autor, 2016.

O motor elétrico utilizado como força excitadora do sistema deverá ser bem fixado na ponta da viga como mostrado na figura 18. Devera-se tomar cuidado com os cabos de alimentação afim de minimizar a influência de seu peso na estrutura. Mediante a isso, uma das medidas tomadas foi utilizar apenas a quantidade de cabos necessária para chegar até o motor; uma outra medida foi fixar os cabos na estrutura de maneira que eles não ficassem avulsos, o que também faria atenuar sua amplitude de sua vibração durante o experimento. A fonte de alimentação será posta ao decorrer da bancada, ela fará o controle da velocidade do motor através do controle de tensão, uma vez que a tensão será diretamente proporcional a sua velocidade.

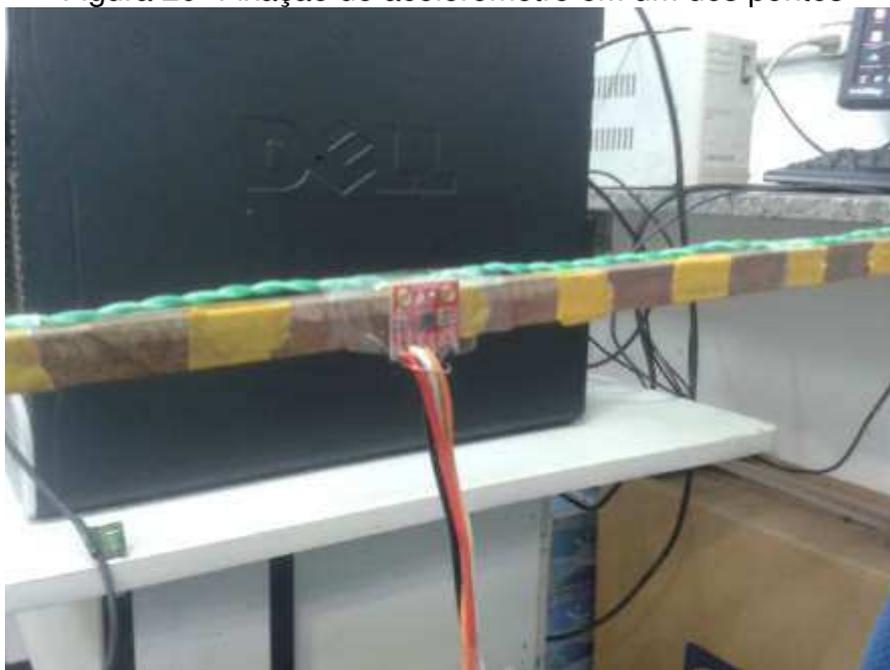
Figura 19 - Definição dos pontos



Fonte: Autor, 2016.

A viga foi dividida em quatro pontos (P1, P2, P3 e P4) como mostrado na figura 19, com uma distância de 28,25 centímetros de um ponto a outro, estes servirão de pontos de captura de dados para diferentes faixas de velocidade do motor.

Figura 20- Fixação do acelerômetro em um dos pontos

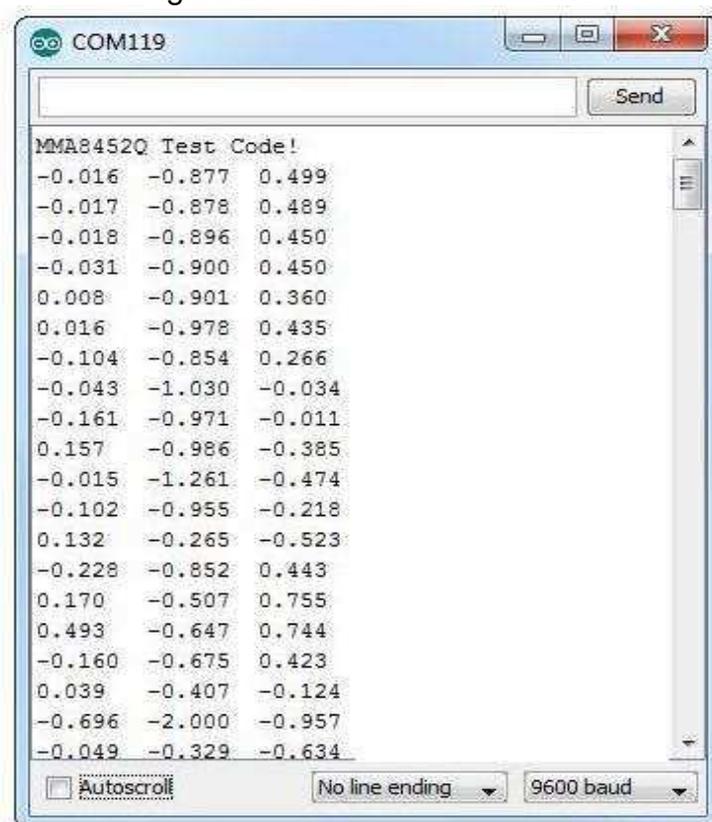


Fonte: Autor, 2016.

O sensor acelerômetro, por sua vez, será fixado alternadamente pelos pontos de análise da viga, figura 20, ele fará primeiramente a leitura de dados num intervalo de 10 segundos em um único ponto da estrutura em faixas de tensão de 0,5 a 0,5 volt num intervalo de 2,5 a 12 volts (tensão de operação do motor), feito isto, ele passará para captura de dados em um outro ponto até que colha os dados em todos os pontos predeterminados.

Os dados serão mostrados na interface de comandos do Arduíno, figura 21, e armazenados em blocos de notas, salvos organizadamente em pastas separadas por faixa de tensão.

Figura 21 - Interface do Arduino



Fonte: Autor, 2016.

Logo após, utilizaremos esses dados para análise no Matlab, fazendo uso da transformada rápida de Fourier (FFT).

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente, substituindo as propriedades da viga da tabela 1 na equação 53, obtêm-se os valores de frequências naturais dos respectivos modos de vibrar. Os resultados seguem abaixo:

1° modo de vibrar

$$\omega_1 = \left(\frac{\pi}{1.13} \right)^2 x \left(\frac{13,6 x 10^9 x 1.66 x 10^{-10}}{710 x 0,01^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 6,9368 \text{ Hz}$$

2° modo de vibrar

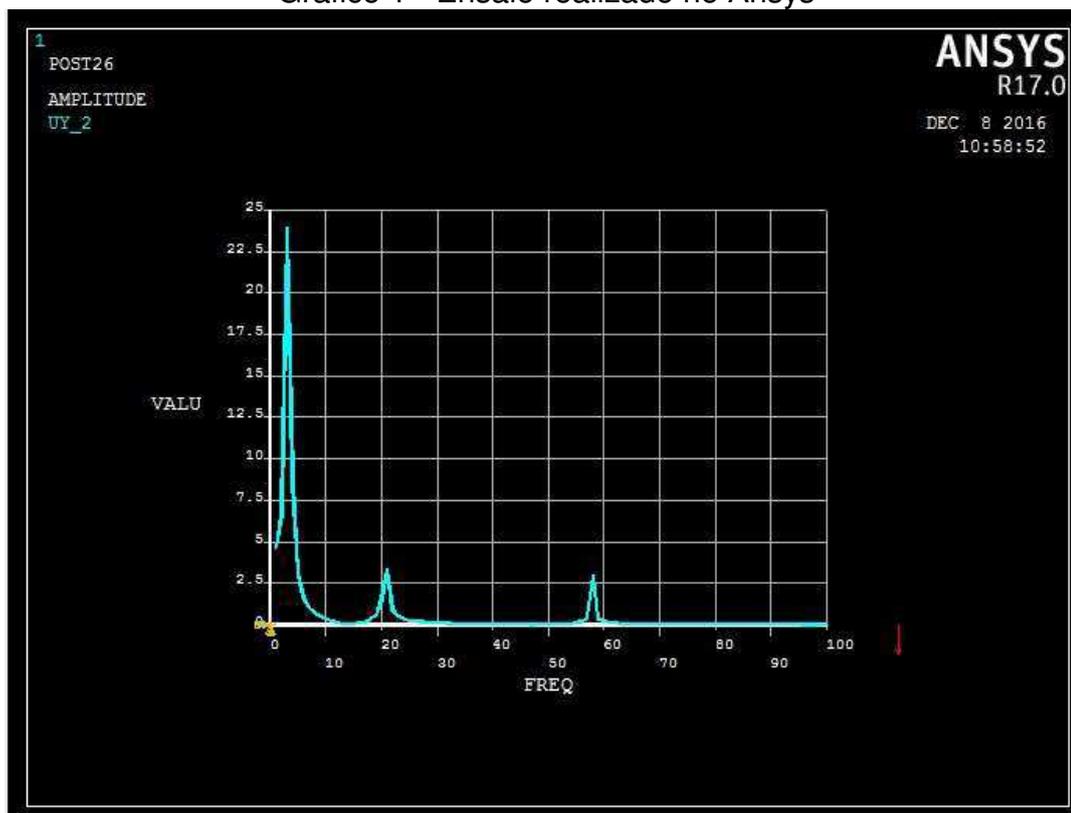
$$\omega_1 = \left(\frac{2\pi}{1.13} \right)^2 x \left(\frac{13,6 x 10^9 x 1.66 x 10^{-10}}{710 x 0,01^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 27,7471 \text{ Hz}$$

3° modo de vibrar

$$\omega_1 = \left(\frac{3\pi}{1.13} \right)^2 x \left(\frac{13,6 x 10^9 x 1.66 x 10^{-10}}{710 x 0,01^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 62,4309 \text{ Hz}$$

Ainda utilizando as propriedades físicas da viga na modelagem numérica realizada pelo software Ansys, obtemos o seguinte resultado:

Gráfico 1 - Ensaio realizado no Ansys

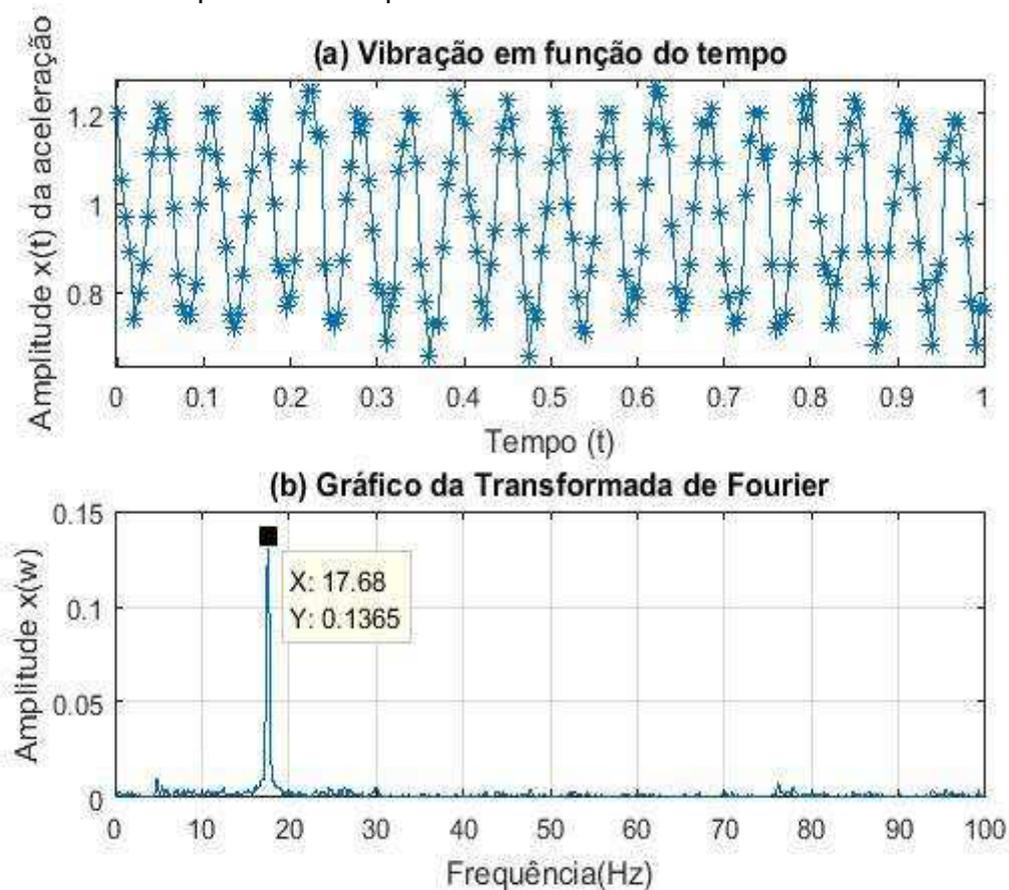


Fonte: Autor, 2016.

No gráfico1, temos vista das frequências de excitação dos três primeiros modos de vibrar da viga, percebe-se também a similaridade dos resultados com o obtido no cálculo teórico, o primeiro modo próximo de 5 Hz, o segundo modo se aproximando dos 20 Hz e o terceiro modo a 60 Hz.

Em posse dos valores de frequência de excitação dos modos da viga, tanto no teórico, quanto numérico, realizamos as análises no MATLAB dos dados obtidos no experimento, os scripts utilizados constam nos Apêndices B e C. Deve-se lembrar que a tensão mínima de operação do motor elétrico é de 2.5 volts, o sinal característico da vibração da viga causada por ele nessa faixa de tensão é mostrado abaixo no gráfico 2.

Gráfico 2– Amplitude x Freqüência na faixa de tensão de 2.5 volts do motor

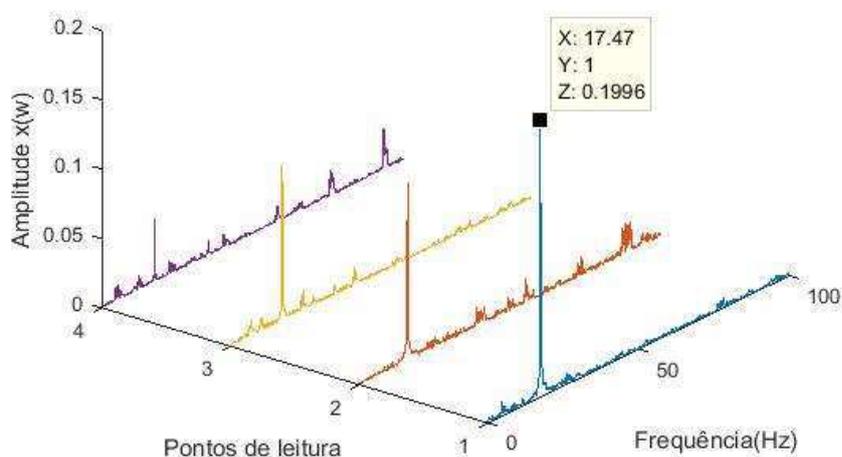


Fonte: Autor, 2016.

Observa-se no gráfico 2 que o sinal é de característica periódica ao decorrer do tempo. Sua amplitude de aceleração é dada em força g ($1g = 9,8 \text{ m/s}^2$). No gráfico 2.b tem-se a resultante da transformada rápida de Fourier. Pode-se perceber que a faixa de tensão inicial do motor excita a viga com uma frequência de 17,68 Hz, que por sua vez já está acima da frequência de excitação do primeiro modo de vibrar da viga, no entanto, ainda está distante do segundo modo de vibrar da mesma. No gráfico 3, tem-se a amplitude máxima dos quatro pontos de análise, fica claro que ainda nesta faixa de frequência, a viga se mantém no primeiro modo de vibrar.

Gráfico 3 - Análise geral da viga quanto sua forma de vibrar na frequência de 17 Hz (tensão inicial do motor)

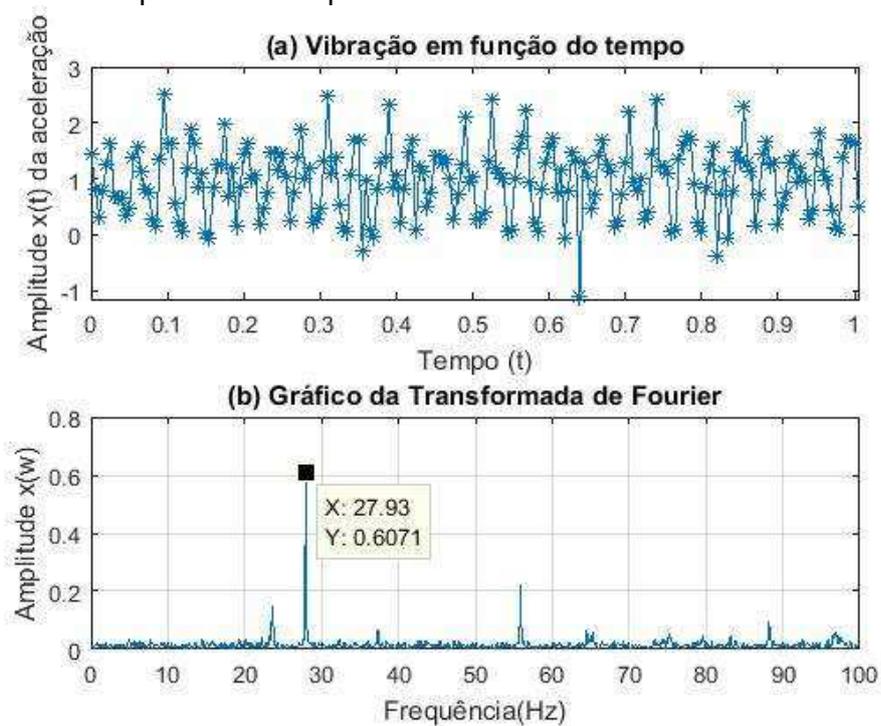
Característica de vibração da viga na amplitude máxima de cada ponto



Fonte: Autor, 2016.

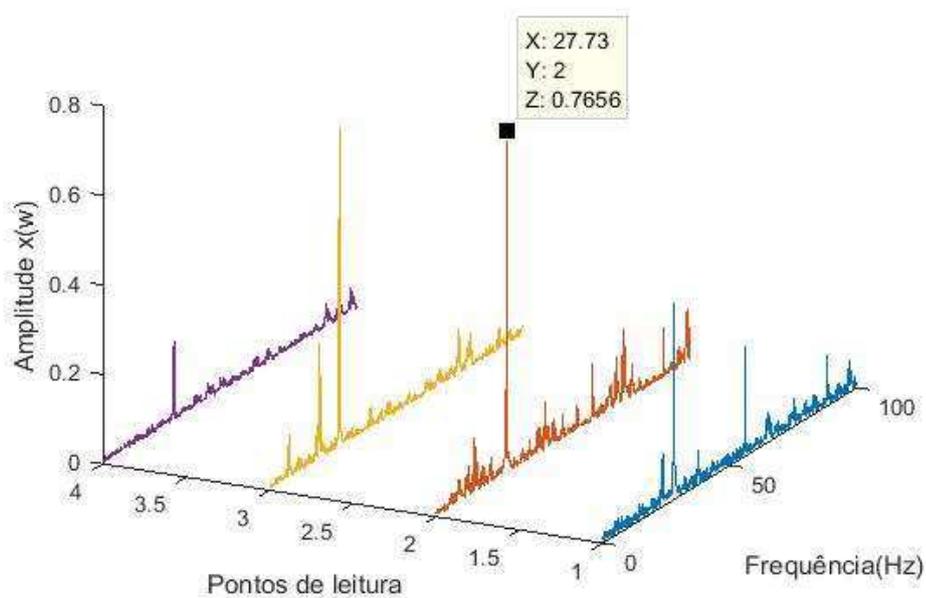
Tanto o gráfico 2 quanto o gráfico 3, se mantêm de formas parecidas até a tensão de 3,5 volts no motor, contudo, a frequência excitação aumenta conforme aumenta a tensão do motor. Na tensão de 4 volts a frequência de excitação atinge a frequência natural do segundo modo de vibrar da viga.

Gráfico 4 - Amplitude x Freqüência na faixa de tensão de 4 volts do motor



Fonte: Autor, 2016.

Gráfico 5 - Análise geral da viga quanto sua forma de vibrar na frequência de 27,73 Hz (tensão de 4v no motor)

Característica de vibração da viga na amplitude máxima de cada ponto

Fonte: Autor, 2016.

No gráfico 4 acompanhamos a característica do sinal em função do tempo e a resposta de sua respectiva transformada de Fourier, percebe-se que nessa faixa de tensão, a frequência de excitação do sistema nos pontos de análise tende a frequência de 27 Hz. No gráfico 5, o ponto 3 apresenta uma frequência de excitação 27.73 Hz, praticamente igual a frequência de excitação, como consta na teoria. A capacidade máxima de leitura do sensor é de 8g, logo, a resposta fica comprometida acima da tensão de 10 volts no motor. A tabela 2 mostra os dados dos quatro pontos de todas as faixas de tensão captadas durante os experimentos.

Tabela 2 - Dados de todos os experimentos realizados

Comprimento	28.25		56.50		84.75		113	
	Frequência	Amplitude	Frequência	Amplitude	Frequência	Amplitude	Frequência	Amplitude
2.5	17,47	0,1996	16,13	0,1282	17,2	0,112	17,73	0,04504
3.0	21,2	0,2421	22	0,2619	21,87	0,2123	21,87	0,06859
3.5	24,67	0,4392	24,53	0,4506	24	0,333	24,13	0,09087
4.0	28	0,4376	27,73	0,7656	27,47	0,7125	28	0,1787
4.5	29,2	0,3358	31,33	0,6006	30,67	0,8032	30,53	0,2633
5.0	34,53	0,199	33,6	0,9595	32,93	1,169	32,27	0,4233
5.5	36	0,5285	35,07	1,792	34,67	2,133	35,07	1,017
6.0	37,47	1,537	36,27	2,674	35,73	2,789	36,4	1,322
6.5	37,73	2,464	37,33	3,326	36,8	3,498	36,93	1,728
7.0	38	3,399	37,73	4,537	37,2	4,423	36,93	1,728
7.5	38,27	2,966	38	4,283	37,47	5,491	37,87	4,053
8.0	38,4	4,666	38,13	6,701	37,73	5,346	38	3,49
8.5	38,53	5,325	38,27	6,916	37,73	7,474	38,13	4,683
9.0	38,67	5,255	38,4	4,907	37,87	8,172	38,27	3,944
9.5	38,67	5,955	38,4	7,921	38	7,016	38,4	3,922
10.0	38,8	5,263	38,4	6,669	38	8,129	38,4	5,631
10.5	38,67	6,517	38,53	7,228	54	0,8997	38,53	4,902
11.0	38,67	5,597	38,53	8,533	50,13	1,199	38,53	4,819
11.5	38,67	5,458	38,53	8,084	49,73	1,479	38,67	5,504
12.0	38,8	6,201	38,53	7,308	50,8	0,9345	38,67	5,654

Fonte: Autor, 2016.

Percebemos na tabela 2 que não só a amplitude do sinal é comprometida a partir de 8g, mas a frequência também é afetada em faixas superiores a 38 Hz. Desta forma ficamos impossibilitados de captar o terceiro modo de vibrar, o primeiro motivo se deve ao fato da capacidade do sensor ser pequena para amplitudes elevadas e o segundo é pelo fato do motor não conseguir atingir frequências acima de 62,43Hz, frequência de excitação do terceiro modo como consta o cálculo teórico.

6. CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas as conclusões gerais deste trabalho e uma lista de possíveis melhorias que podem ser realizadas em trabalhos futuros com o propósito de obtenção de pesquisas com resultados mais avançados.

6.1 Considerações finais

Com intuito de salientar o interesse do leitor, ainda que ele não seja da área da Engenharia Mecânica, este trabalho buscou facilitar o conteúdo, limpando desenvolvimentos matemáticos complexos e dando foco apenas a informações realmente relevantes. O estudo em vibrações, por sua própria natureza de complexidade, tem afastado o interesse de muitos no ambiente acadêmico, ainda é cedo para definir se haverá crescimento em pesquisas neste ramo, mas é certeza do autor, que este primeiro passo abrirá portas futuramente.

Voltando para o experimento, conseguiu-se atingir resultados consideráveis utilizando o sensor acelerômetro para a realização da análise modal. Percebemos que seu uso de fato está no nível de outros sensores de vibrações. Vale ressaltar que no início da pesquisa, sua sensibilidade na captação de vibrações com amplitudes menores foi duvidosa, mediante a isso, optou-se em fazer um modelo na qual fosse perceptível também a olho nu. Contudo ao fim da pesquisa percebemos que esta sensibilidade supera as expectativas, abrindo ainda mais possibilidades a pesquisas mais aprimoradas.

O início da pesquisa também foi marcado pela necessidade de ter pontos de leitura simultâneos, todavia não foi possível, pois o sensor acelerômetro funciona com barramento I2C no Arduíno. Ainda que este barramento tenha sido criado no intuito de suportar vários sensores numa mesma porta, ele necessita que os mesmos possuam endereçamentos diferentes, logo o acelerômetro em questão já possui endereçamento próprio e não permite essa modificação. Com isso, foi feito o uso de apenas um sensor, o que explica a grande quantidade de experimentos realizadas.

O modelo experimental foi construído a partir de viga engastada, a simetria na seção transversal não era a mais indicada ao estudo, pois facilita o acontecimento de movimentos torcionais, dificultando a realização dos experimentos

em grandes amplitudes de vibrações. Acrescenta-se uma observação, durante a realização dos experimentos, era de extrema importância que a passagem de uma faixa de tensão a outra no motor, deveria ser feita de forma lenta, pois foi percebido que após um certo momento, o sistema começava a agir de maneira não desejada, acredita-se que o motor elétrico deixava de ser uma fonte excitadora e passava a ser um absorvedor de vibração, outra teoria é que o sistema pudesse está realizando um modo torcional, contudo nenhuma das duas hipóteses foi efetivamente comprovada, devido ao tempo.

A similaridade do resultado experimental com o cálculo teórico e também ensaio numérico foram totalmente satisfatórios, conseguiu-se não somente comprovar as frequências naturais de excitação na prática, mas também, concatená-los aos seus respectivos modos de vibrar.

6.2 Sugestões de trabalhos futuros

- Utilizar o multiplexador TCA9548A, ele dá a possibilidade de inserir até 8 acelerômetros no Arduíno, isso facilitará o trabalho do pesquisador e diminuirá o tempo de experimento;
- Encontrar uma maneira de interligar o Arduíno diretamente ao Matlab, assim o pesquisador poderá trabalhar de maneira mais eficiente e obter resultados mais precisos na mudança de velocidade do motor;
- Criar um modelo com amplitude de vibração menor, afim de captar mais modos de vibrar, pois a sensibilidade do acelerômetro já foi comprovada;
- Utilizar modelos preferencialmente assimétricos para evitar torções não desejadas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M.T. **Vibrações Mecânicas para Engenheiros**. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher LTDA, 1990. 445p.

ANSYS. **Ansys – Simulation driven product development**. Canonsburg, 2010. Disponível em: <p09>. Acesso em: 01 abr. 2016.

ARDUINO. **Arduino uno**.

Disponível em: <<http://www.arduino.cc/en/Main/ArduinoEthernetShield>>, 2012. Acesso: 01 abr 2016.

BATHE, J.; WILSON, E.L. **Numerical methods in finite elements analysis**. EnglewoodCliffs: Prentice-Hall, 1976. 528 p.

BORGES; NICOLAU. **O primeiro sismógrafo chinês**. Disponível em: <<http://fsicafascinante.blogspot.com.br/2012/03/o-primeiro-sismografo-chines.html>>, 2012 Acesso: 10 jul. de 2016

CAVALCANTI, B. **Ponte Tacoma Narrows, 1940 – Um estudo dos efeitos não-lineares**. Disponível em: <<http://www.astropt.org/2015/04/06/ponte-tacoma-narrows-1940-um-estudo-dos-efeitos-nao-lineares/comment-page-1/>>.2015. Acessado em: 01 de set. de 2016.

CRAIG, R.R; KURDILA, A.J. **Fundamentals of structural dynamics**. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 1934.

EWINS, D.J. **Modal Testing: Theory and practice**. Taunton: Research Studies Press Ltd., 1984.

FERREIRA JÚNIOR, P.N. **Ressonância: O curioso caso da Ponte Tacoma Narrows**. Disponível em: <<https://www.portaleducacao.com.br/pedagogia/artigos/41429/ressonancia-o-curioso-caso-da-ponte-tacoma-narrows>>, 2013. Acesso em: 01 de set. de 2016.

FREITAS, T.C. **Identificação de parâmetros modais utilizando apenas as respostas da estrutura: identificação estocástica de subespaço e decomposição no domínio da frequência**. 2008. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2008.

GALILEI, G. **Two new sciences by Galileo**. New York: The Macmillan Company, 1914.

LARDIES, J.; MINH-NGI, T. Modal Parameter identification of stay cables from output only measurements. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v.25, n.1, p.133-150, 2011.

LEO, D.J. **Engineering analysis of smart material systems**. New York: John Wiley & Sons, 2007. 539p.

MAIA, N.M.M.; SILVA, J.M.M. Modal analysis identification techniques. **Philosophica I Transactions of The Royal Society A**, London, v.359, p.29-40, jan. 2001.

PEREIRA, M.C. **Matemática e Música de Pitágoras aos dias de hoje**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

PRAZZO, C.E. **Análise modal de uma estrutura do tipo viga utilizando materiais piezelétricos (PVDF) como sensores**. 2011. 139f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2011.

RAO, S. S. **Vibrações Mecânicas**. 4ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. 424p.

REZENDE NETO, A.L.; MAGAGNIN JUNIOR, A; NEIVA, E.C.R; FARINHAKI, R. **Sistema de Medição de Campo Magnético Baseado no Efeito Hall e Arduino**. Monografia. Dep. Acadêmico de Eletrônica. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

SEQUEIRA, C.D. **Sensores para medições de vibrações mecânicas – Acelerômetro: A análise de vibrações como ferramenta no diagnóstico de avarias em máquinas rotativas**. Tese de mestrado – FCT, Lisboa, 2005.

SHEPHERD, R. **Some limitations of modal analysis in seismic design**. NZEE QuartelyBulletin, v.2, n. 3, p. 284-288, 1969.

SHIGUE, C; ABEL, A.M. S; LUIZ, S.G. **Sensores e Atuadores Piezoelétricos**. Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de Lorena – EEL, 2010.

SKJAERVEN, L; HOLLUP, S.M.; REUTER, N. **Normal mode analysis for proteins**. Journal of Molecular Structure: THEOCHEM, v.898, n. 1-3, p. 42-48, mar. 2009.

SOUZA, A.R. de; et al. **A placa Arduino: uma opção de baixo custo para experiências de física assistidas pelo PC**. Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 33, n.1, 1702, 2011.

TONINI, A.M; COUTO, BRÁULIO R.G.M. **Ensinando geometria analítica com do MATLAB**. Departamento de Ciências Exatas e Tecnologia do Centro Universitário de Belo Horizonte / DECET – Unibh, 1999.

ZIENKIEWICZ, O.C. **The finite element method**. 3. ed. London: McGraw-Hill, 1985.

APÊNDICE A – PROGRAMAÇÃO DO SENSOR ACELERÔMETRO

/*

Ligações :

MMA8452	Arduino
3.3V -----	3.3V
SDA -----	A4
SCL -----	A5
GND -----	GND

*/

```
#include <Wire.h>
```

```
#include "MMA8452.h"
```

```
void setup()
```

```
{
```

```
Serial.begin(57600);
```

```
Serial.println("Exemplo de uso do acelerometro MMA8452");
```

```
Wire.begin(); //Inicializa a comunicação I2C
```

```
initMMA8452(); //Testa e inicializa o MMA8452
```

```
}
```

```
void loop()
```

```
{
```

```
int accelCont[3]; // Variável que armazena os valores das leituras de 12-bit
```

```
readAccelData(accelCont); // Leitura de todos os eixos do sensor
```

```
float accelG[3]; // Variável para armazenar os valores da aceleração em g (9,8 m/s2)
```

```
    // Calcula a aceleração e separa na matriz accelG
```

```
for (int i = 0 ; i < 3 ; i++)
```

```
{
```

```
    accelG[i] = (float) accelCont[i] / ((1<<12)/(2*GSCALE)); // Pega o valor da e
```

```
}
```

```

// Imprimi os valores na Serial
//for (int i = 0 ; i < 3 ; i++)
{
Serial.print (acelG[0]); // Imprime os valores de cada eixo na serial (X)
Serial.print (" ");
Serial.print (acelG[1]); // Imprime os valores de cada eixo na serial (Y)
Serial.print (" ");
Serial.print (acelG[2]); // Imprime os valores de cada eixo na serial (Z)
Serial.println(); //Pula Linha
}
//Serial.println(); //Pula Linha

//Serial.print("\t"); // Tabulação entre as leituras
delay(150); // Delay para ajudar na visibilidade das leitura
}

/* Programação de dados MMA8452.cpp */

Wire.requestFrom(MMA8452_ADDRESS, bytesToRead); //Ask for bytes, once done,
bus is released by default

while(Wire.available() <bytesToRead); //Hang out until we get the # of bytes we
expect

for(int x = 0 ; x <bytesToRead ; x++)
dest[x] = Wire.read();
}

// Read a single byte from addressToRead and return it as a byte
bytereadRegister(byte addressToRead)
{
Wire.beginTransmission(MMA8452_ADDRESS);
Wire.write(addressToRead);

```

```
Wire.endTransmission(false); //endTransmission but keep the connection active
```

```
Wire.requestFrom(MMA8452_ADDRESS, 1); //Ask for 1 byte, once done, bus is
released by default
```

```
while(!Wire.available()) ; //Wait for the data to come back
returnWire.read(); //Return this one byte
```

```
}
```

```
// Writes a single byte (dataToWrite) into addressToWrite
voidwriteRegister(byte addressToWrite, byte dataToWrite)
```

```
{
```

```
Wire.beginTransmission(MMA8452_ADDRESS);
```

```
Wire.write(addressToWrite);
```

```
Wire.write(dataToWrite);
```

```
Wire.endTransmission(); //Stop transmitting
```

```
}
```

```
/* Definição de escalaMMA8452.h */
```

```
#ifndef _MMA8452_H
```

```
#define _MMA8452_H
```

```
#define MMA8452_ADDRESS 0x1D // 0x1D if SA0 is high, 0x1C if low
```

```
#define OUT_X_MSB 0x01
```

```
#define XYZ_DATA_CFG 0x0E
```

```
#define WHO_AM_I 0x0D
```

```
#define CTRL_REG1 0x2A
```

```
#define GSCALE 2 // Sets full-scale range to +/-2, 4, or 8g. Used to calc real g
values.
```

```
extern void initMMA8452(void);
```

```
extern void readAccelData(int *destination);
```

```
#endif
```

APÊNDICE B –SCRIPT MATLAB (SINAL EM DOMÍNIO DO TEMPO E TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER)

```

clc;clearall;closeall;
% Estuda Na frequencia
%% AMOSTRA /////
dados_2_5
% dados_4_0

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a=p113; %matriz amostras

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
N = length(a); %quantidade total de amostras
y = a(:,1); %eixo de interesse

%% TEMPO DO EXPERIMENTO

del = 5; %delay de uma leitura pra outra em milisegundos
dels = del/1000; %delay de uma leitura pra outra em segundos
N1 = 1/dels; %qnt de amostras em 1 seg
t = [0:dels:dels*(N-1)]; %tempo de experimento

%% TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Y=2*abs(fft(y))/N;
f=[0:1:N-N1/N]*N1/N; %%PERGUNTA PQ

%% GRÁFICOS

figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(t,y); %gráfico do sinal de entrada

subplot(2,1,2)
plot(f(2:N/2),Y(2:N/2)); %frequencia de resposta
% axis([0 100 0 0.20])
grid

```

APÊNDICE C – SCRIPT MATLAB (TRANFORMADA DE RÁPIDA DE FOURIER APLICADA EM TODOS OS PONTOS SIMULTANEAMENTE)

```

clc; clear all;closeall;
% Estuda Na frequencia
%% AMOSTRA /////
% dados_parado
% dados_2_5
% dados_3_0
% dados_3_5
% dados_4_0
% dados_4_5
% dados_5_0
% dados_5_5
% dados_6_0
% dados_6_5
% dados_7_0
% dados_7_5
% dados_8_0
% dados_8_5
% dados_9_0
% dados_9_5
dados_10_0
% dados_10_5
% dados_11_0
% dados_11_5
% dados_12_0

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
a1=p113(:,1); %matriz amostras
a2=p84(:,1);
a3=p56(:,1);
a4=p28(:,1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A=[a1(1:1500) a2(1:1500) a3(1:1500) a4(1:1500)];

for i=1:4
i
a=A(:,i);
N = length(a); %quantidade total de amostras
y = a; %eixo de interesse

%% TEMPO DO EXPERIMENTO

del = 5; %delay de uma leitura pra outra em milisegundos
dels = del/1000; %delay de uma leitura pra outra em segundos
N1 = 1/dels; %qnt de amostras em 1 seg
t = [0:dels:dels*(N-1)]; %tempo de experimento

%% TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Y=2*abs(fft(y))/N;
f=[0:1:N-N1/N]*N1/N;

%% GRÁFICOS

figure(1)

```

```
hold on
plot3(f(2:N/2),i*ones(1,length(f(2:N/2))),Y(2:N/2)); %frequencia de
resposta de todos os pontos
title('Característica de vibração da viga na amplitude máxima de cada
ponto')
xlabel('Frequência(Hz)')
ylabel('Pontos de leitura')
zlabel('Amplitude x(w)')
grid

end
```