UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO / PPG
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL / PROFMAT

MARLOS LUIS ROCHA MARTINS

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR TRIEDRO TRI-RETANGULAR

São Luís – MA

2023

MARLOS LUIS ROCHA MARTINS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu

São Luís – MA

2023

Martins, Marlos Luís Rocha.
Generalização do Teorema de Pitágoras por triedro tri-retangular / Marlos Luís Rocha Martins. – São Luís, 2023.
62 f.

Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Maranhão, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu.

1.Teorema de Pitágoras. 2.Triedro Tri-retangular. 3.Generalizações. 4.Aplicações. I.Título.

CDU: 514

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

MARLOS LUIS ROCHA MARTINS

GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS POR TRIEDRO TRI-RETANGULAR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ph.D. Ivanildo Silva Abreu

Aprovado em: 20/06/2023**.**

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ivanildo Silva Abreu (Orientador)
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Prof. Dr. João Coelho Silva Filho (Examinador Interno)
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Prof. Dr. Antônio José da Silva (Examinador externo)
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

São Luís – MA
2023

Á minha mãe Flor Diliz que mesmo sem estudo, sempre se dedicou para que eu me tornasse o que sou hoje, à minha esposa Tatiara que sempre esteve ao meu lado e aos meus filhos, Marlos Filho e Arthur.

AGRADECIMENTO

Agradeço a Deus pela oportunidade dada e por ter me dado saúde e força para não desistir deste sonho.

A minha esposa que sempre esteve ao meu lado e que me amparou nos momentos mais difíceis.

Aos meus professores pelos ensinamentos e sugestões prestadas durante o decorrer do curso.

Ao meu orientador, professor Dr. Ivanildo Sousa Abreu que tanto contribuiu para esse trabalho, com muita paciência e disposição para guiar-me nesta pesquisa.

Aos meus amigos da turma PROFMAT 2021 por contribuírem no meu aprendizado.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), pela coordenação deste importante programa de mestrado.

À Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), pela coordenação e oportunidade.

Aos meus colegas e amigos que sempre me incentivaram e torceram pelo meu sucesso. Muito obrigado a todos!

“Mas graças a Deus, que sempre nos conduz vitoriosamente em Cristo e por nosso intermédio exala em todo lugar a fragrância do seu conhecimento.”

(Bíblia sagrada, 2 Coríntios 2:14)

RESUMO

O presente trabalho apresenta diferentes demonstrações do Teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular. Inicialmente, é apresentado um breve contexto histórico sobre Pitágoras, Teorema de Pitágoras e sua recíproca, além de algumas de suas demonstrações existentes, que envolvem abordagens geométricas, algébricas e vetoriais. Em seguida, são explorados os conceitos de triedro tri-retangular e sua relação com o teorema, bem como as generalizações e aplicações do teorema de acordo com alguns autores. Além disso, são discutidas as generalizações no espaço tridimensional. O trabalho também analisa a importância da inclusão da generalização do teorema de Pitágoras na educação básica, ressaltando os benefícios para o estudante. Será apresentada nos resultados da pesquisa as demonstrações do Teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular de diferentes formas. A dissertação conclui destacando a relevância de cada uma das generalizações do teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular, sugerindo qual é mais adequada para se trabalhar no ensino médio e qual a mais indicada para o ensino superior.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras; Triedro Tri-retangular; Generalizações; Aplicações.

ABSTRACT

The present work presents different demonstrations of the generalized Pythagorean Theorem by the tri-rectangular trihedron. Initially, a brief historical context about Pythagoras, the Pythagorean Theorem and its converse is presented, along with some of its existing demonstrations, involving geometric, algebraic, and vector approaches. Then, the concepts of the tri-rectangular trihedron and its relation to the theorem are explored, as well as generalizations and applications of the theorem according to some authors. Furthermore, generalizations in three-dimensional space are discussed. The work also analyzes the importance of including the generalization of the Pythagorean Theorem in basic education, emphasizing the benefits for the student. The research results will present demonstrations of the generalized Pythagorean Theorem by the tri-rectangular trihedron in different ways. The dissertation concludes by highlighting the relevance of each of the generalizations of the generalized Pythagorean Theorem by the tri-rectangular trihedron, suggesting which one is most suitable for working in high school and which one is most recommended for higher education.

Keywords: Pythagorean theorem; Tri-rectangular tetrahedron; Generalizations; Applications.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Geometria é uma disciplina matemática que tem sido estudada desde a antiguidade e é conhecida por seu papel importante na resolução de problemas práticos relacionados a medidas, formas e posições de objetos, (ALMEIDA, 2016). Um dos teoremas mais conhecidos e relevantes nessa área é o Teorema de Pitágoras, que estabelece a relação entre os lados de um triângulo retângulo e tem aplicações amplas em diversas áreas, desde a construção civil até a cartografia.

Além de ser fundamental em diversas áreas, como engenharia e arquitetura, o Teorema de Pitágoras é um dos conceitos mais importantes da geometria ensinados na educação básica. No entanto, muitas vezes o ensino do teorema fica restrito a triângulos retângulos e o potencial de generalizações desse teorema para outras formas de figuras não são explorados.

Nesse sentido, esta pesquisa propõe a compreensão das demonstrações do Teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular. Para atingir esse objetivo, será feito um breve contexto histórico sobre Pitágoras, Teorema de Pitágoras, sua recíproca e será apresentada algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras usando as abordagens: geométricas, algébricas e vetoriais.

Em seguida, na seção 4, vamos definir triedro tri-retangular de acordo Dulce (2013), citar seus elementos e sua relação com Teorema de Pitágoras, além disso, mostrar a importância do triedro tri-retangular na geometria.

Já na seção 5, será apresentada algumas discussões e aplicações sobre a generalização do teorema Pitágoras de acordo com alguns autores, mostrando as contribuições de matemáticos ao longo do século para a generalização do teorema. Ainda nesta seção destaca-se a importância das aplicações do teorema no espaço tridimensional para várias áreas da ciência e da engenharia, bem como as vantagens e desvantagens. Por último, nesta seção, mostraremos algumas generalizações do teorema de Pitágoras no espaço.

Na seção 6, iremos apontar que nos documentos normativos da educação, a generalização do teorema de Pitágoras é considerada uma habilidade matemática essencial para os alunos do ensino fundamental e médio e que sua inserção traz diversos benefícios para os estudantes.

Na seção 7, serão exploradas diferentes formas de se demonstrar o Teorema de Pitágoras Generalizado por triedro tri-retangular, a partir do seguinte teorema: “Num triedro tri-retangular o quadrado da área do triângulo ABC é igual à soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos".

Na seção 8, faremos uma breve discussão das generalizações do teorema de Pitágoras por triedro tri-retangular mostradas na seção 7, destacando em cada uma, sua relevância para o estudante. Iremos sugerir qual dessas generalizações é a mais adequada para o ensino básico e qual é mais apropriada para o ensino superior, em seguida, será feita as considerações finais. Portanto, espera-se que esta pesquisa possa contribuir para o avanço do conhecimento na área da geometria e suas aplicações, especialmente no que se refere ao Teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular. Além disso, essa pesquisa pode permitir novas formas de ensino do Teorema de Pitágoras, que possibilitam uma compreensão mais ampla e profunda do conceito.

2 BREVE CONTEXTO HISTÓRICO

Pitágoras foi um notável filósofo e matemático grego que viveu no século VI a.C. Sua influência na matemática e na filosofia é inegável, tendo sido reconhecido por suas contribuições significativas em ambos os campos, incluindo a descoberta do famoso Teorema de Pitágoras, uma das ideias fundamentais da geometria, que tem sido amplamente aplicada em diversas áreas práticas, desde a construção de edifícios até a criação de tecnologias modernas.

Embora o Teorema de Pitágoras seja conhecido por muitos, pouco se sabe sobre a recíproca do teorema e sua importância para a matemática. É importante destacar que a recíproca do teorema também tem sido aplicada em diversas áreas práticas e é uma contribuição significativa de Pitágoras para a matemática.

Neste contexto, será abordado brevemente um pouco da história de Pitágoras, a descoberta do Teorema de Pitágoras e algumas demonstrações da recíproca do teorema, enfatizando suas significativas contribuições para o mundo da matemática e da filosofia.

2.1 Pitágoras

Pitágoras é um dos grandes nomes da matemática e filosofia da Grécia Antiga. Segundo Boyer (2012), ele foi um filósofo e matemático que viveu no século VI a.C. na ilha de Samos e fundou a escola pitagórica, dedicada ao estudo da matemática, filosofia e religião. Entre suas principais contribuições, destaca-se a descoberta do teorema que leva seu nome, que é considerado uma das descobertas mais importantes na história da matemática. Sua influência transcendeu sua época, tendo exercido um impacto significativo sobre a matemática e a filosofia por séculos. Boyer (2012) ainda destaca ligação de Pitágoras com o teorema que leva seu nome.

> Mesmo o teorema ao qual o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente, veio dos babilônios. Sugeriu-se, como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, que foram os pitagóricos os primeiros a dar uma demonstração dele; mas não há meios de se verificar essa conjetura. As lendas de que Pitágoras sacrificou um boi (cem bois, segundo outras versões) ao descobrir o teorema são implausíveis, tendo em vista as regras vegetarianas da escola. Além disso, são repetidas, com idêntica incredibilidade, em conexão com vários outros teorema. (BOYER, 2012, p.56)

Assim, o teorema de Pitágoras foi conhecido pelos babilônios e egípcios, mas foi o trabalho de Pitágoras e seus seguidores que o elevou a um status de grande importância na matemática. O teorema diz que "em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".

Figura 1: Imagem de Pitágoras

Fonte: `https://www.todamateria.com.br/pitagoras`

As primeiras fontes detalhadas sobre sua vida datam de 150 a 250 anos após sua morte e são baseadas em histórias transmitidas oralmente, o que contribui para a existência de muitas diferenças entre elas. Mesmo diante dessas limitações, o nome de Pitágoras ainda é lembrado por suas importantes contribuições para a Matemática, como o famoso teorema que leva seu nome. (RIBEIRO, 2013).

A escola pitagórica se notabilizou por sua crença na existência de um universo matemático e harmônico, no qual "todas as coisas são números" e as leis matemáticas governam o universo. No entanto, apesar de sua importância, a influência da escola pitagórica na matemática e filosofia foi breve, atingindo seu auge por volta de 500 a.C. e declinando rapidamente após a morte de Pitágoras. Ainda assim, a obra de Pitágoras e seus seguidores deixou uma marca indelével na história da matemática e da filosofia. (BOYER, 2012).

Desse modo, a escola pitagórica foi responsável por importantes contribuições tanto para a matemática quanto para a filosofia. Sua visão de um universo governado por leis matemáticas e harmoniosas foi uma ideia pioneira, que teve influência em muitos pensadores posteriores. No entanto, é importante ressaltar que a influência da escola pitagórica foi relativamente breve e sua história é cercada de mistérios e lendas. Apesar disso, suas ideias e ensinamentos foram fundamentais para o desenvolvimento da matemática grega e continuaram a ser estudados e debatidos ao longo dos séculos. É notável como a obra de Pitágoras e seus seguidores foi capaz de deixar uma marca tão duradoura na história da matemática e da filosofia.

2.2 O Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é um dos conceitos matemáticos mais conhecidos e estudados em todo o mundo. Desde a sua formulação há mais de dois milênios, ele tem sido aplicado em diversas áreas do conhecimento, como a física, a engenharia e a arquitetura.

Há diversas formas de apresentar o enunciado do Teorema de Pitágoras nos livros de matemática.

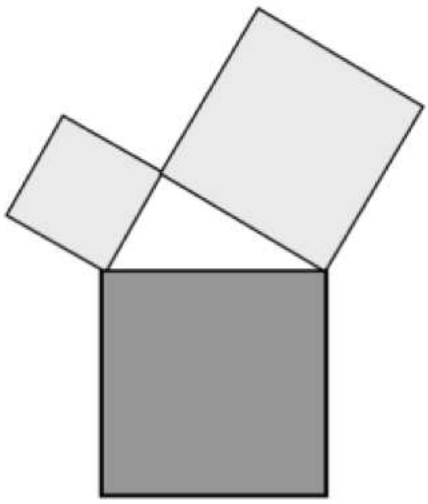
No livro Meu Professor de Matemática e Outras Histórias de Lima (1991), o enunciado do Teorema de Pitágoras é o seguinte: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Se a representa a medida da hipotenusa e b e c são as representações das medidas dos catetos, o enunciado acima equivale a afirmar que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

O enunciado do Teorema de Pitágoras é mostrado geometricamente na Figura 2.

Figura 2-Representação geométrica do Teorema de Pitágoras



Fonte: (LIMA, 2006, p. 65)

O livro Temas e Problemas Elementares de Lima et al. (2006) enuncia o Teorema de Pitágoras da seguinte forma: "Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Barbosa (1993), em seu livro Descobrindo Padrões Pitagóricos, define o Teorema de Pitágoras da seguinte maneira: "A área do quadrado construído com a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos com os catetos".

Cintra e Cintra (2003), em seu livro O Teorema de Pitágoras cita a seguinte definição: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados cujos lados são cada um dos catetos desse mesmo triângulo".

Eves (2011), define em seu livro Introdução à História da Matemática o Teorema de Pitágoras assim, "O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos".

No livro "Os Elementos", escrito por Euclides, há duas proposições que podemos relacionar com o Teorema de Pitágoras. A primeira é a proposição 47, escrita da seguinte maneira: "Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sobre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sobre os outros lados que fazem o mesmo ângulo reto". A segunda proposição é a 48. Nela está escrito: "Se o quadrado feito sobre um lado de um triângulo for igual aos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por estes dois lados será reto".

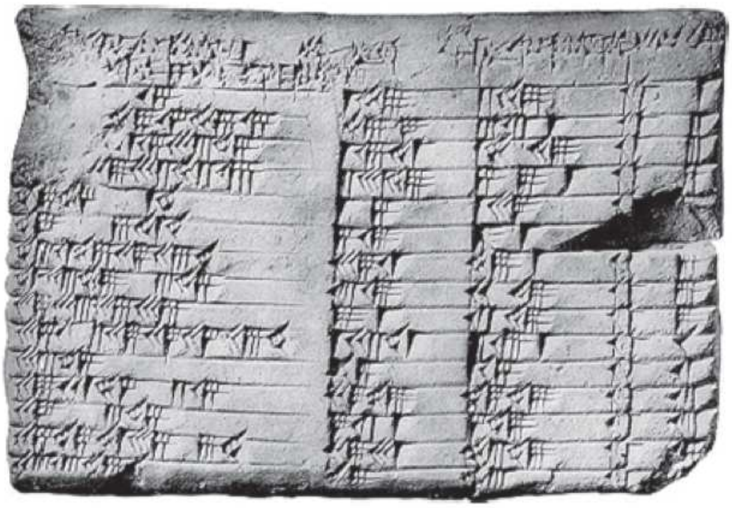
Muitos professores de matemática, para facilitar a compreensão dos alunos, anunciam o Teorema de Pitágoras da seguinte forma: "O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". Barbosa (1993) diz que devemos ter cuidado para não repetir este enunciado que ele chama de simplista, pois serve apenas para facilitar a compreensão.

É interessante notar como existem várias formas de apresentar o enunciado do Teorema de Pitágoras, como descrito nos diferentes livros citado. Independente da forma de apresentação, o Teorema de Pitágoras continua sendo um dos conceitos matemáticos mais fundamentais e complementares.

Esse teorema é uma das mais antigas e importantes relações matemáticas conhecidas, e sua história remonta aos antigos gregos. Embora o teorema seja atribuído a Pitágoras de Samos (ver Figura 1), que viveu no século VI a.C., evidências indicam que o conhecimento do teorema foi adquirido e utilizado por muitas culturas antes disso, incluindo os babilônicos, os chineses e os egípcios.

De acordo com Lima et al. (2006), há evidências concretas de que os antigos babilônios tinham conhecimento do Teorema de Pitágoras. Durante o período de 1800 a 1600 a.C, muitos tabletes de argila foram descobertos e decifrados, e hoje estão em exibição em diversos museus. Entre esses tabletes, destaca-se o chamado *Plimpton* 322 (Figura 3), que está localizado na Universidade de Columbia. O fragmento preservado desse tablete mostra uma tabela de 15 linhas e 3 colunas de números. Os pesquisadores descobriram que esta tabela continha ternos pitagóricos, ou seja, as medidas dos lados de um triângulo retângulo.

Figura 3-*Plimpton* 322



Fonte: (BOYER,2011, p.48)

Mas, uma indicação de que os babilônios possuíam conhecimento sobre como encontrar esses números pode ser encontrada em um tablete guardado hoje no Museu Britânico. O referido tablete contém a seguinte inscrição:

4 é o comprimento

5 é a diagonal

Qual é a altura?

4 vezes 4 dá 16

5 vezes 5 dá 25

Tirando 16 de 25 o resto é 9

Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?

3 vezes 3 dá 9

3 é a altura.

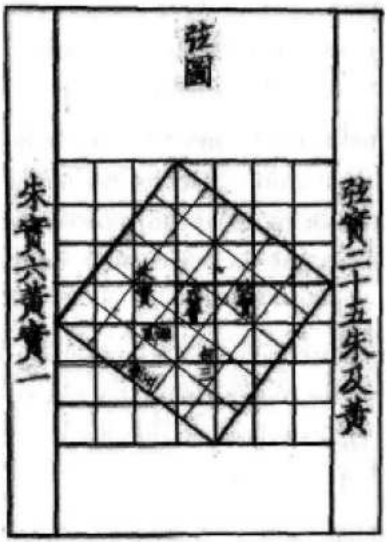
Outro tablete digno de destaque pode ser encontrado no museu da Universidade de Yale e, é o único que contém figuras: um quadrado e sua diagonal. No fragmento desse tablete (Figura 4), o lado do quadrado é considerado como tendo 30 unidades de medidas, enquanto o comprimento da diagonal é expresso como sendo igual a 42, 25, 35.

Figura 4-Fragmento de tablete

Fonte: (LIMA,2006, p. 63)

Os chineses já conheciam o Teorema de Pitágoras cerca de 600 anos antes de Pitágoras. No famoso livro chinês, Zhoubi Suanjing, encontra-se um dos problemas muito antigo, o "*Gou Gu*", o equivalente chinês do Teorema de Pitágoras, que se pode ver na Figura 5.

Figura 5-*Gou Gu*



Fonte: (LIMA,2006, p. 64)

Ao observar com atenção, pode-se notar que está figura apresenta uma demonstração do teorema de Pitágoras utilizando o conceito área.

Segundo Eves (2011), há registro de que os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, construíam triângulos $3, 4, 5$ com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos.

Este teorema foi fundamental para o desenvolvimento da matemática grega, pois forneceu a base para a construção de conceitos matemáticos mais avançados, como geometria, trigonometria e cálculo. Além disso, o teorema de Pitágoras teve aplicações práticas em diversas áreas, incluindo arquitetura, engenharia, astronomia e cartografia.

De acordo com a Encyclopædia Britannica (2003), o teorema de Pitágoras foi demonstrado de muitas maneiras diferentes ao longo dos séculos, e sua importância foi reconhecida por muitos matemáticos e filósofos notáveis, incluindo Euclides, Arquimedes, Leonardo da Vinci e Isaac Newton.

Assim, o teorema de Pitágoras é uma das contribuições mais importantes da matemática antiga e tem sido uma parte fundamental da educação matemática há séculos. Sua simplicidade e aplicabilidade em uma ampla gama de áreas continuam a fazê-lo relevante e valioso até hoje.

Existem várias demonstrações do teorema de Pitágoras, cada uma com seu próprio nível de complexidade e enfoque matemático.

2.3 A Recíproca do Teorema de Pitágoras

A recíproca do Teorema de Pitágoras é uma proposição matemática que estabelece uma relação fundamental entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Essa recíproca afirma que, "Se em um triângulo o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então o triângulo é retângulo" (POMPEO, 2009, p.219).

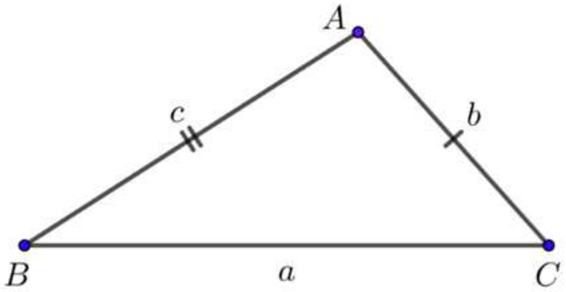
Existem várias formas de demonstrar essa recíproca, algumas mais simples e outras mais complexas, que utilizam técnicas e conceitos matemáticos. A escolha da demonstração pode depender do nível de conhecimento e da abordagem do aluno ou professor, mas todas elas permitem compreender e apreciar a elegância da geometria euclidiana. Nesse sentido, apresenta-se duas demonstrações da recíproca do teorema de Pitágoras: uma utilizando o conceito de congruência de triângulos e outra por meio de uma prova por contradição.

Ambas as demonstrações fornecem uma fundamentação sólida para a recíproca do teorema de Pitágoras, permitindo assim uma compreensão mais profunda dessa importante relação entre os lados de um triângulo retângulo.

Demonstração por congruência de triângulos:

Considere um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$ (Figura 6).

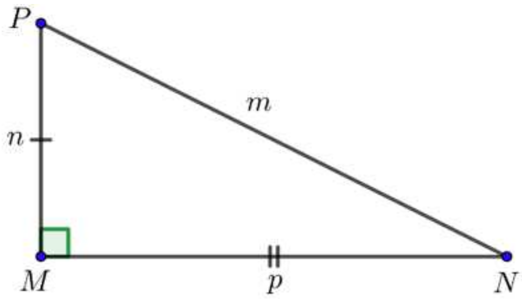
Figura 6-Triângulo ABC



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Construiu-se o triângulo MNP (Figura 7), retângulo em M, com os catetos MN e MP congruentes a AB e AC, respectivamente. Observa-se o seguinte:

Figura 7-Triângulo retângulo MNP



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

O triângulo MNP é retângulo em M, o que implica em

$$m^2 = n^2 + p^2.$$

Considerando que $n = b$ e $p = c$, tem-se

$$m^2 = b^2 + c^2.$$

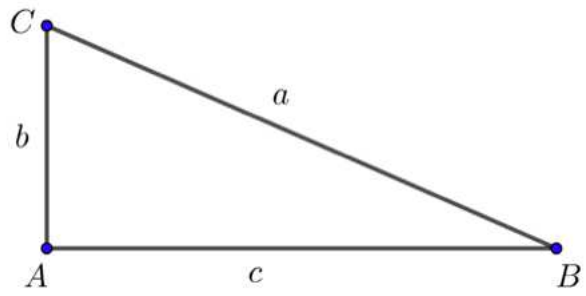
Logo, podemos deduzir que $m^2 = a^2$, ou seja, $m = a$.

De acordo com o caso LLL (Lado-Lado-Lado), o triângulo ABC é congruente ao triângulo MNP. Além disso, como o triângulo MNP é retângulo em M, conclui-se que o triângulo ABC também é retângulo em A.

Demonstração por contradição:

Para demonstrar se um triângulo de lados a, b e c, onde $a^2 = b^2 + c^2$, é retângulo, consideremos um triângulo ABC com $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Deve-se considerar

Figura 8-Triângulo



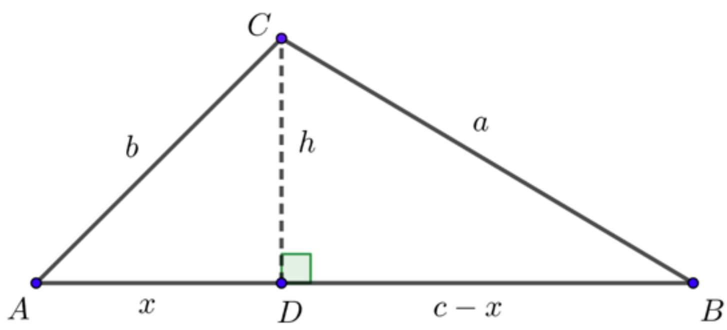
Fonte: Produzida pelo autor, 2023

dois casos.

1º Caso: O triângulo é acutângulo, ou seja, $\widehat{A} < 90°$.

Neste caso, suponh que $b \leq c$. Dessa forma, o ponto D, que é a projeção de C sobre AB, está localizado dentro do segmento AB. Sejam $AD = x$ e $CD = h$ (Figura 9).

Figura 9-Triângulo acutângulo



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Como ADC é retângulo, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2.$$

O triângulo BDC também é retângulo, e aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2.$$

Substituindo h^2 por $b^2 - x^2$ na equação anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - x^2 + (c - x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

Logo,

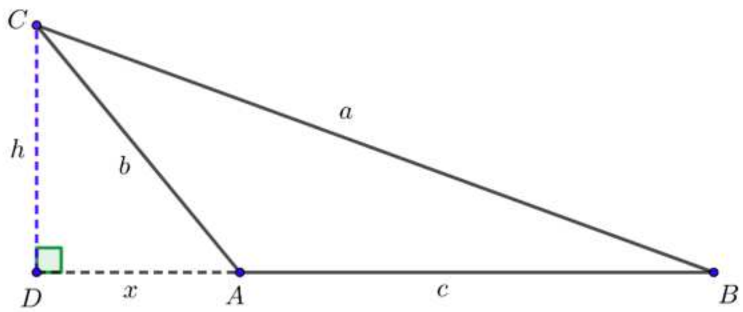
$$a^2 < b^2 + c^2.$$

Mas, isso contradiz a hipótese inicial, portanto, não é possível que $\widehat{A} < 90°$.

2º Caso: O triângulo é obtusângulo, ou seja, $\widehat{A} > 90°$.

Nesse caso, o ponto D está localizado fora do segmento AB, como mostrado na Figura 10.

Figura 10-Triângulo obtusângulo



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

De acordo com a Figura 10, observa-se que $AD = x$, $CD = h$ e $BD = c + x$.

O triângulo ADC é retângulo.Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2.$$

O triângulo BDC também é retângulo, e aplicando novamente o Teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2.$$

Substituindo h^2 por $b^2 - x^2$ na equação anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - x^2 + (c+x)^2 \\ &= b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2cx. \end{aligned}$$

Logo, $a^2 > b^2 + c^2$. Mais uma vez, isso contradiz a hipótese inicial, então não é possível que $\widehat{A} > 90°$.

Portanto, demonstra-se que em um triângulo ABC, com lados medindo a, b e c, com $a^2 = b^2 + c^2$, se:

$$\widehat{A} < 90° \Longrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\widehat{A} > 90° \Longrightarrow a^2 > b^2 + c^2.$$

Logo, se

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

então $\widehat{A} = 90°$, ou seja, o triângulo é retângulo.

3 ABORDAGENS E DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Segundo Lima (1991, p.53), o professor de Matemática em Cheveland, Ohio (Estados Unidos) Elisha Scott Loomis (1852-1940), era um apaixonado pelo teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou num livro, ao qual chamou "The Pythagorean Proposition". A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, em 1940, este número foi aumentado para 370.

Ainda de acordo com Lima (1991, p.53), Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: As baseadas nas relações métricas no triângulo retângulo, ou seja, as provas "algébricas" e as baseadas em comparações de áreas, isto é, as "geométricas". Mas, existem ainda as provas vetoriais, ou seja, as que utilizam os conceitos de vetores.

Atualmente existem mais de 400 demonstrações diferentes do Teorema de Pitágoras, algumas feitas por personalidades como Bháskara e Leonardo da Vinci e até mesmo um presidente dos Estados Unidos (em 1871), James Abram Garfield (1831-1881).

3.1 Abordagem geométrica

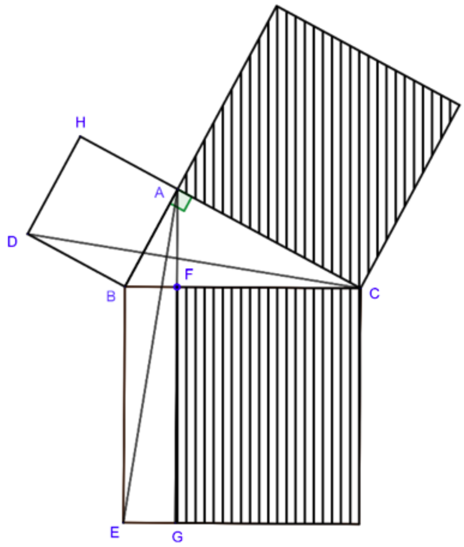
A abordagem geométrica é a mais comum para apresentar e compreender o teorema de Pitágoras. Ele afirma que, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Essa relação pode ser visualizada geometricamente através da figura de um triângulo retângulo, onde a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e os catetos são os lados que o formam.

A seguir, serão destacadas duas demonstrações geométricas do Teorema de Pitágoras.

Demonstração geométrica clássica: Esta é a forma mais comum de demonstração do teorema de Pitágoras. É uma demonstração puramente geométrica que usa propriedades de triângulos retângulos e áreas de figuras planas para mostrar que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados.

Agora será apresentada a demonstração de Euclides (ver Figura 11) abordada por Lima (1997, p.25-26)

Figura 11-Demonstração de Euclides



Fonte: Adaptado (LIMA, 1997, p. 25)

Demonstração. No triângulo retângulo ABC, para provar que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa BC é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos AB e AC, Euclides traça AF perpendicular a BC e a prolonga até G. Traça também AE e CD.

Os triângulos ABE e CBD têm a mesma área porque são congruentes (um ângulo igual entre dois lados iguais).

Os triângulos ABE e FEB têm áreas iguais pois têm a mesma base e alturas iguais. Assim, a área de ABE é a metade da área do retângulo $BEGF$.

Analogamente, CDB tem área igual à de ADB, que é a metade do quadrado $ABDH$. Segue-se que a área deste quadrado é igual à área do retângulo $BEGF$.

Do mesmo modo se mostra que a área do quadrado e do retângulo hachurados verticalmente na figura são iguais. Assim, resulta o Teorema de Pitágoras.

A demonstração apresentada a seguir, que é atribuída a Pitágoras, é uma demonstração geométrica que utiliza a comparação de áreas para provar o Teorema de Pitágoras. É uma demonstração simples e intuitiva, que permite visualizar claramente a relação entre os lados de um triângulo retângulo e a hipotenusa.

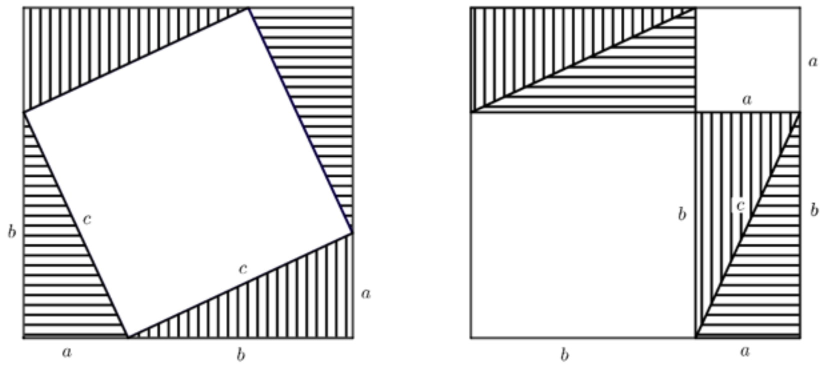
Não há um registro escrito da demonstração dada por Pitágoras, portanto, não é possível afirmar com certeza qual método ele utilizou. A maioria dos historiadores acredita que ele tenha utilizado uma demonstração geométrica, baseada na comparação de áreas. A demonstração mais conhecida do Teorema de Pitágoras é encontrada nos

"Elementos" de Euclides, no entanto, essa demonstração foi concebida por Euclides, e não por Pitágoras.

Uma possível demonstração geométrica que poderia ter sido utilizada por Pitágoras de acordo com Lima (2012, p. 53-54) é a seguinte:

Demonstração. Considere um quadrado de lado $a+b$ e retiramos 4 triângulos congruentes ao triângulo retângulo de catetos a e b, como mostra a Figura 12. Fazendo essa operação de maneira que os triângulos formem um quadrado dentro do quadrado original, obtém-se um quadrado de lado c. Isso pode ser visto na figura 12.

Figura 12-A mais bela prova



Fonte: Adaptado (LIMA, 2012, 53)

Porém, se fizer essa mesma operação de maneira que os triângulos formem dois quadrados distintos, um com lado a e outro com lado b, como mostra a Figura 12, obtém-se a seguinte relação entre as áreas:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

Simplificando essa expressão, obtém-se:

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2,$$

que é o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Portanto, essa demonstração poderia ter sido utilizada por Pitágoras para provar o seu famoso teorema.

3.2 Abordagem algébrica

A abordagem algébrica do teorema de Pitágoras envolve a utilização de fórmulas matemáticas para encontrar a relação entre as medidas dos lados do triângulo retângulo. Uma forma de demonstrar isso é através da equação

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

onde b e c são os catetos e a é a hipotenusa.

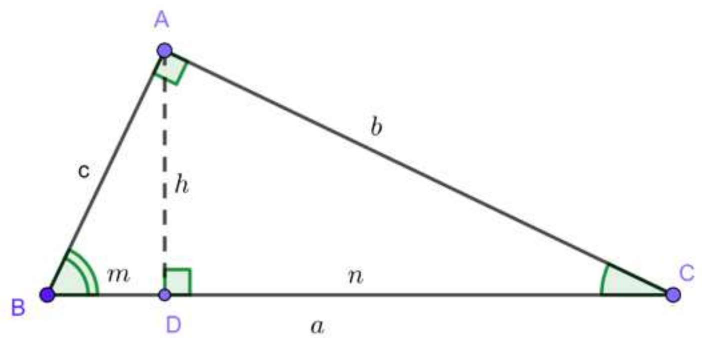
A seguir, será apresentada duas demonstração algébrica do teorema de Pitágoras bem presente nos livros didáticos da educação básica. A primeira, por semelhança de triângulos, enquanto que a segunda, será usada a fórmula de Heron.

Primeira demonstração: Por semelhança de Triângulos.

Essa demonstração é baseada no livro didático (DOLCE e POMPEO, 2013, p .218).

Considere o triângulo retângulo ABC da Figura 13, onde a hipotenusa é o segmento BC e os catetos são os segmentos AC e AB de medidas a, b e c, respectivamente.

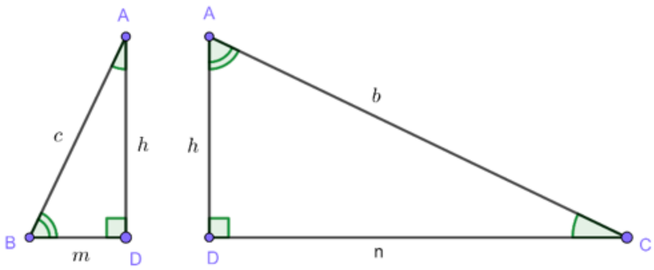
Figura 13: Triângulo Retângulo



Fonte: Adaptado (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 218).

A altura relativa à hipotenusa, AD tem medida h e determina os segmentos BD e DC, de medidas m e n, que são as projeções ortogonais dos catetos AB e AC sobre a hipotenusa. Note que $m + n = a$. Os triângulos ABC, ABD e ACD são semelhantes e h é média geométrica entre m e n, conforme mostra a Figura 14. Decompôs-se o triângulo retângulo ABC, em 2 triângulos retângulos ABD e ACD para que sejam escritas as seguintes proporcionalidades entre os lados homólogos:

Figura 14 -Triângulos retângulos



Fonte: Adaptado (DOLCE e POMPEO, 2013, p. 218)

O triângulo ABD é semelhante ao triângulo ABC:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \Longrightarrow c^2 = am. \tag{3.1}$$

O triângulo ACD é semelhante ao triângulo ABC

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \Longrightarrow b^2 = an. \tag{3.2}$$

As relações (3.1) e (3.2) são enunciadas numa única proposição:"cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção na hipotenusa".

Somando membro a membro as equações (3.1) e (3.2), obtém-se

$$b^2 + c^2 = a(m+n) \Longrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Portanto, o quadrado da hipotenusa a é igual à soma dos quadrados dos catetos b e c, como enunciado no Teorema de Pitágoras.

Segunda demonstração: Demonstração de Heron.

A fórmula

$$S(ABC) = \sqrt{(p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

onde $p = \dfrac{x+y+z}{2}$ é o semiperímetro do triângulo ABC, serve para calcular a área de um triângulo em função das medidas dos lados e é conhecida como fórmula de Heron.

Utiliza-se a fórmula de Heron para demonstrar o Teorema de Pitágoras. Assim, substituindo o valor de p e, em seguida, simplificando obtém-se

$$\begin{aligned}
S(ABC) &= \sqrt{\frac{x+y+z}{2}\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}-y\right)\cdot\left(\frac{x+y+z}{2}-z\right)}\\
&= \sqrt{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)\cdot\left(\frac{-x+y+z}{2}\right)\cdot\left(\frac{x-y+z}{2}\right)\cdot\left(\frac{x+y-z}{2}\right)}\\
&= \sqrt{\frac{(x+y+z)\cdot(-x+y+z)\cdot(x-y+z)\cdot(x+y-z)}{16}}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{[(y+z)^2-x^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]}.
\end{aligned}$$

Como a área do triângulo retângulo pode ser o semiproduto dos catetos, podemos escrever a igualdade

$$\frac{1}{2}yz = \frac{1}{4}\sqrt{[(y+z)^2-x^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]}.$$

Elevando os dois membros da equação anterior ao quadrado, temos:

$$\frac{1}{4}y^2z^2 = \frac{1}{16}[(y+z)^2-x^2]\cdot[x^2-(y-z)^2].$$

Fazendo as simplificações adequadas, tem-se:

$$\begin{aligned}
4y^2z^2 &= [(y+z)^2-x^2]\cdot[x^2-(y-z)^2]\\
&= x^2[(y+z)^2+(y-z)^2]-(y+z)^2\cdot(y-z)^2-x^4\\
&= x^2(2y^2+2z^2)-(y^2-z^2)^2-x^4.
\end{aligned}$$

Assim:

$$x^4-2x^2(y^2+z^2)+(y^2+z^2)^2=0 \Longrightarrow [x^2-(y^2+z^2)]^2=0.$$

Portanto,

$$x^2 = y^2+z^2.$$

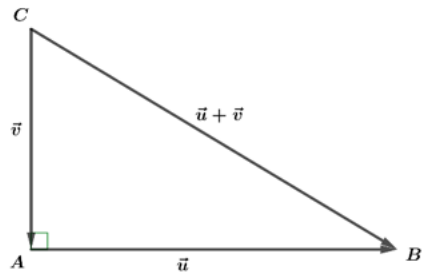
Essas são apenas algumas das muitas demonstrações algébricas do teorema de Pitágoras, e cada uma oferece uma visão diferente e enriquecedora da relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. Essa abordagem permite que o teorema de Pitágoras seja aplicado em problemas matemáticos mais complexos, como no cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas. Além disso, ele também é usado na trigonometria para encontrar ângulos e distâncias em um triângulo.

3.3 Outras abordagens

Existem outras abordagens do teorema de Pitágoras. Uma dessas abordagem é a de vetores, que se utiliza do conceito de vetores para estabelecer a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Nessa abordagem, a hipotenusa é vista como a soma vetorial dos catetos conforme ilustra a demonstração a seguir.

Demonstração: Considere o triângulo ABC, retângulo em A, Figura 15, onde $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$.

Figura 15-Vetorial



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Nesse triângulo, tem-se que: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{CB}$.

Provar o Teorema de Pitágoras é provar que

$$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{v} + \vec{u}||^2.$$

De fato, como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, tem-se que $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$, ou seja, o produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é nulo. Dessa forma,

$$\begin{aligned} ||\vec{v} + \vec{u}||^2 &= < \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} >=< \vec{u}, \vec{u} > + < \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{v}, \vec{u} > + < \vec{v}, \vec{v} > \\ &= < \vec{u}, \vec{u} > +2 < \vec{u}, \vec{v} > + < \vec{v}, \vec{v} >=< \vec{u}, \vec{u} > +2 \cdot 0+ < \vec{v}, \vec{v} > \\ &= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2. \end{aligned}$$

Portanto, está mostrado que $||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{v} + \vec{u}||^2$.

Essas são apenas algumas das muitas demonstrações do teorema de Pitágoras, e cada uma oferece uma visão diferente e enriquecedora da relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

4 TRIEDRO TRI-RETANGULAR

O triedro tri-retangular é um conjunto de três segmentos de reta que se interceptam em um ponto e forma ângulos retos entre si. Uma das suas propriedades mais importantes é que as medidas das arestas que compõem cada plano estão na proporção de 3 : 4 : 5, o que implica que o triedro é tri-retangular. Essa proporção única torna possível calcular as medidas das arestas desconhecidas de um triedro tri-retangular, desde que se conheça a medida de pelo menos uma das arestas.

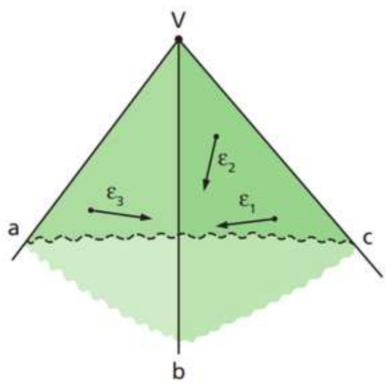
Os autores Iezzi, Dolce e Degenszajn (2010) apresentam uma explicação detalhada sobre o triedro tri-retangular e suas propriedades. Uma das afirmações desse livro é que a proporção 3:4:5 é única para um triedro tri-retangular, e que, portanto, se as medidas das arestas não estiverem nessa proporção, o poliedro não é um triedro tri-retangular.

Além disso, como mencionado anteriormente, a proporção 3:4:5 pode ser usada para calcular as medidas das arestas desconhecidas de um triedro tri-retangular, desde que se conheça a medida de pelo menos uma das arestas. Isso torna o triedro tri-retangular ainda mais útil para cálculos em áreas que envolvem geometria espacial.

É importante ressaltar que a compreensão das propriedades do triedro tri-retangular é fundamental para um bom desempenho em geometria espacial. A seguir, são apresentados alguns dos conceitos e elementos relacionados a triedros de acordo com Dulce (2013, p. 98-99).

Definição: Um triedro é definido como a interseção de três semiespaços não coplanares que possuem a mesma origem V. Esses semiespaços são representados por $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ e ε_3, que contêm as semirretas V_a, V_b e V_c, respectivamente. Veja Figura 16.

Figura 16-Triedro



Fonte: (DOLCE, 2013, p.98)

O triedro é representado por $V(a, b, c)$ e é dado pela interseção dos três semiespaços:

$$\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 \cap \varepsilon_3.$$

Também é possível definir o triedro como a reunião de três setores angulares formados pelas semirretas V_a, V_b e V_c. Nesse caso, ele é chamado de setor triedral ou ângulo sólido de três arestas. A orientação do triedro pode variar, mas ele sempre será a interseção dos três semiespaços ou a união dos três setores angulares.

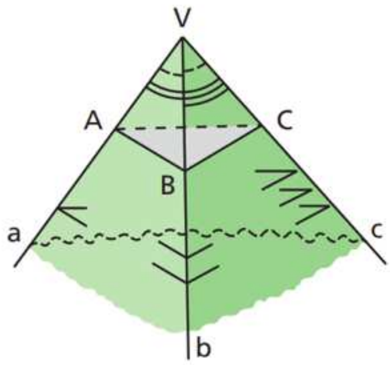
Elementos:

1. Os elementos de um triedro incluem o vértice V, as três arestas V_a, V_b, V_c e as três faces ou ângulos de face: $a\widehat{V}b, a\widehat{V}c$ e $b\widehat{V}c$ (ou $\widehat{ab}, \widehat{ac}$ e $\widehat{bc}$).

2. Os diedros do triedro são denotados por $di(a), di(b)$, $di(c)$ e cada um deles é determinado por duas faces do triedro.

3. Uma seção do triedro é um triângulo ABC com um único vértice em cada aresta. Veja Figura 17.

Figura 17-Elementos de um Triedro

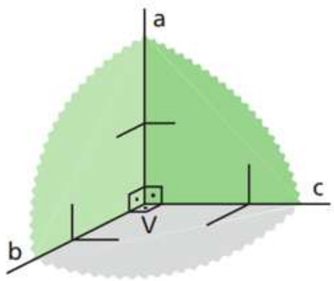


Fonte: (DOLCE, 2013, p.99)

Um triedro notável é o triedro tri-retângulo (ou triedro tri-retangular), que possui faces com ângulos retos e diedros retos. Veja Figura 18.

A presença do triedro tri-retangular na geometria espacial é amplamente estudada e explorada em diferentes livros, demonstrando a relevância desse poliedro na matemática e em áreas práticas. O estudo do triedro tri-retangular permite a solução de problemas envolvendo cálculos de medidas desconhecidas em poliedros, tornando-o uma ferramenta útil para aplicações em áreas como engenharia, arquitetura e arte.

Figura 18-Triedro Notável



Fonte: (DOLCE, 2013, p.99)

4.1 Relação entre o teorema de Pitágoras e o triedro tri-retangular

Como já foi dito anteriormente, o teorema de Pitágoras é uma das mais importantes e fundamentais descobertas da matemática, e tem sido utilizado por inúmeras gerações de estudantes e profissionais em todo o mundo. O teorema, como já vimos, estabelece que, em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa (o lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados dos catetos (os outros dois lados).

O triedro tri-retangular, por sua vez, é um conjunto de três planos que se intersectam em um ângulo reto e formam um sistema de coordenadas cartesianas tridimensionais. Esse sistema é fundamental para a geometria analítica e para diversas áreas da matemática e da física.

A relação entre o teorema de Pitágoras e o triedro tri-retangular é bastante interessante e relevante, uma vez que o teorema pode ser usado para calcular a distância entre dois pontos em um sistema de coordenadas tridimensionais. Para entender essa relação, podemos imaginar um ponto P no triedro tri-retangular, com coordenadas (x, y, z), e outro ponto Q com coordenadas (x', y', z').

A distância entre esses dois pontos é dada por:

$$d = \sqrt{((x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2)}.$$

Essa fórmula pode ser facilmente derivada a partir do teorema de Pitágoras (STEINBRUCH e WINTERLE, 1991).

Além disso, o triedro tri-retangular também pode ser usado para visualizar as relações entre os diferentes ângulos e lados de um triângulo retângulo. Por exemplo, pode-se imaginar um triângulo retângulo ABC com a hipotenusa AB e os catetos AC e

BC. Se traçarmos um plano que contém a hipotenusa AB e a reta perpendicular a ela que passa pelo ponto C, tem-se um dos planos do triedro tri-retangular.

Esse plano também irá conter o ângulo reto C, e pode-se usar as relações trigonométricas do triângulo retângulo para calcular os valores dos outros ângulos e lados. Por exemplo, pode-se usar a tangente do ângulo C para calcular a medida do cateto oposto AC, ou a cossecante do ângulo C para calcular a medida da hipotenusa AB.

Assim, a relação entre o teorema de Pitágoras e o triedro tri-retangular é fundamental para a geometria analítica e para a visualização das relações entre os diferentes ângulos e lados de um triângulo retângulo em três dimensões. Essa relação é amplamente explorada em diversos campos da matemática e da física, e é encontrada em diversas referências bibliográficas, como Steinbruch e Winterle (1991) e Swokowski (1984).

5 GENERALIZAÇÕES E APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Segundo Cooke (2005), há discussões sobre a generalização do Teorema de Pitágoras para outros tipos de figuras geométricas. Segundo o autor, a ideia de que a relação entre os lados de um triângulo retângulo é dada pelo quadrado da hipotenusa é uma das mais fundamentais e amplamente utilizadas na geometria e na matemática em geral. Por isso, o Teorema de Pitágoras é considerado uma das mais importantes descobertas da geometria.

Cooke (2005) destaca que, ao longo dos séculos, matemáticos de diversas culturas exploraram as possibilidades de generalizar o Teorema de Pitágoras para outros tipos de figuras geométricas, como quadrados, retângulos, pentágonos e até mesmo esferas e outros sólidos tridimensionais. Ele cita exemplos de matemáticos como Thales, Euclides, Arquimedes, Omar Khayyam, Bhaskara e Leonardo da Vinci, entre outros, que contribuíram para o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras e suas generalizações.

Maor (2007) apresenta diversas contribuições de matemáticos ao longo dos séculos para a generalização do teorema de Pitágoras. Alguns dos principais nomes e suas contribuições incluem:

(a) Euclides: criou a primeira prova formal do teorema de Pitágoras em seu livro "Os Elementos", e demonstrou a relação entre as medidas de um triângulo retângulo e as raízes quadradas.

(b) Ptolomeu: desenvolveu a primeira generalização do teorema de Pitágoras para triângulos isósceles, usando o princípio de que os ângulos na base de um triângulo isósceles são iguais.

(c) Bhaskara: apresentou várias generalizações do teorema de Pitágoras em seu tratado "Lilava-ti", incluindo o uso de triângulos escalenos e cônicas.

(d) Euler: desenvolveu uma generalização do teorema de Pitágoras para n-dimensões, conhecida como "Teorema de Euler".

(e) Cayley: provou que as equações polinomiais de grau n correspondem a comprimentos de segmentos em um espaço euclidiano n-dimensional, o que é uma generalização do teorema de Pitágoras.

Essas são apenas algumas das contribuições apresentadas no livro. Cada matemático trouxe sua própria perspectiva e avanços para a generalização do teorema de Pitágoras ao longo do tempo.

O autor Loomis (1968) apresenta um contexto histórico interessante sobre a generalização do teorema de Pitágoras. A ideia do teorema de Pitágoras no espaço foi desenvolvida a partir da necessidade de se calcular distâncias em três dimensões, mas suas origens remontam à Grécia antiga.

Com o tempo, a geometria evoluiu e novas dimensões foram adicionadas. No século XVII, a geometria analítica permitiu a representação de figuras geométricas em um espaço tridimensional, o que levou ao desenvolvimento do teorema de Pitágoras no espaço. Matemáticos como René Descartes e Pierre de Fermat contribuíram significativamente para a evolução do teorema de Pitágoras, especialmente na compreensão da relação entre as dimensões.

A generalização do teorema de Pitágoras para espaços com mais de três dimensões só foi possível graças ao desenvolvimento da geometria não euclidiana. Matemáticos como Bernhard Riemann, Eugenio Beltrami e Henri Poincaré contribuíram para a compreensão da geometria em espaços com várias dimensões. A partir daí, a aplicação do teorema de Pitágoras foi estendida para espaços com quatro ou mais dimensões, o que permitiu seu uso em várias áreas da matemática e ciência.

Contudo, o contexto histórico da generalização do teorema de Pitágoras começa na Grécia antiga com os pitagóricos e evolui ao longo dos séculos com a adição de novas dimensões e o desenvolvimento da geometria analítica e não euclidiana. Isso permitiu que o teorema de Pitágoras se tornasse uma ferramenta essencial em várias áreas da matemática e ciência.

O autor Loomis (1968) destaca as aplicações do teorema de Pitágoras no espaço tridimensional e sua importância para várias áreas da ciência e da engenharia. Algumas dessas áreas são:

(f) Geometria: A generalização do teorema de Pitágoras para o espaço tridimensional é importante na geometria, permitindo que se calcule distâncias em três dimensões e se resolvam problemas envolvendo figuras tridimensionais.

(g) Física: A aplicação do teorema de Pitágoras no espaço tridimensional é importante na física, permitindo que se calculem distâncias e deslocamentos em três dimensões, bem como se resolvam problemas envolvendo forças, movimento e energia.

(h) Engenharia: O teorema de Pitágoras é usado na engenharia para calcular distâncias e ângulos em problemas de construção e design, bem como para resolver problemas envolvendo mecânica, hidráulica e outras áreas.

(i) Ciências da Terra: O teorema de Pitágoras é aplicado em diversas áreas das ciências da Terra, como na geologia, na cartografia e na topografia, para calcular distâncias e altitudes em terrenos acidentados e para construir mapas tridimensionais.

(j) Ciência da computação: A generalização do teorema de Pitágoras para espaços com mais de três dimensões é importante na ciência da computação, onde é usado em algoritmos de aprendizagem de máquina e processamento de imagem e som, entre outras aplicações.

Desse modo, o teorema de Pitágoras no espaço tridimensional é importante em várias áreas da ciência e da engenharia, permitindo que se calculem distâncias e ângulos em três dimensões e se resolvam problemas envolvendo figuras tridimensionais.

Ainda de acordo Loomis (1968), a generalização do teorema de Pitágoras para o espaço é discutida, e nesse contexto, é possível destacar algumas vantagens e desvantagens desse teorema.

Vantagens:

(k) O teorema de Pitágoras no espaço é uma ferramenta fundamental na geometria, física e engenharia para calcular a distância entre dois pontos em um espaço tridimensional, além de ser uma fórmula simples e fácil de aplicar.

(l) A generalização do teorema de Pitágoras para espaços com mais de três dimensões também é útil em diversas áreas, incluindo a teoria das cordas em física.

(m) O teorema de Pitágoras é amplamente ensinado em escolas e universidades, o que ajuda a promover o interesse e o conhecimento em matemática e ciência.

Desvantagens:

(n) O teorema de Pitágoras no espaço é limitado a espaços euclidianos tridimensionais, e não pode ser aplicado em outros tipos de espaços, como espaços hiperbólicos ou esféricos.

(o) A generalização do teorema de Pitágoras para espaços com mais de três dimensões pode ser difícil de visualizar e entender para aqueles que não têm um conhecimento avançado em ma-temática.

(p) Em algumas áreas, como a teoria das cordas, o teorema de Pitágoras é usado em conjunto com outras fórmulas e teorias, o que pode tornar sua aplicação mais complexa.

Lakatos (1976) aborda em sua obra intitulada "Proofs and Refutations" a discussão da generalização do Teorema de Pitágoras por meio de um diálogo dinâmico entre um professor e seus alunos. Essa discussão é a espinha dorsal do livro e constitui um exemplo convincente da maneira como a matemática é descoberta e validada.

Ao longo do diálogo, os personagens examinam uma variedade de conjecturas sobre a generalização do Teorema de Pitágoras e desenvolvem uma série de argumentos e contra-argumentos, desafiando e refinando constantemente suas hipóteses. Esse autor utiliza essas discussões para explorar a natureza da matemática, enfatizando a importância do raciocínio crítico e da revisão constante das hipóteses.

A discussão da generalização do Teorema de Pitágoras é um exemplo vívido de como a matemática é uma atividade humana, envolvendo a criatividade, a incerteza e a colaboração. O livro mostra que, embora a matemática possa parecer rígida e formal, ela é, na verdade, um processo dinâmico que exige uma abordagem criativa e flexível.

Além disso, a discussão da generalização do Teorema de Pitágoras oferece *insights* (percepções ou compreensões) valiosos sobre a natureza da validade matemática. O livro demonstra que a validade matemática não é uma questão de encontrar a resposta certa, mas sim de desenvolver uma compreensão mais profunda e ampla do problema em questão.

Contudo, a discussão da generalização do Teorema de Pitágoras, segundo Lakatos (1976) é uma leitura envolvente e perspicaz que oferece uma visão única do processo de descoberta e validação matemática.

No entanto, como muitas teorias matemáticas, o Teorema de Pitágoras, como já visto, pode ser generalizado para situações mais complexas e abstratas. Knorr (1975) explora uma dessas generalizações: o Teorema de Pitágoras para triângulos isósceles retângulos com lados incomensuráveis.

Um triângulo isóscele retângulo é aquele que tem dois lados iguais e um ângulo reto. Na geometria euclidiana clássica, os lados desses triângulos são considerados comensuráveis, o que significa que seus comprimentos são expressos em termos de um número inteiro ou fração. No entanto, na teoria das magnitudes incomensuráveis de Eudoxo, como discutido no livro de Knorr (1975), existem triângulos isósceles retângulos com lados incomensuráveis, que não podem ser expressos dessa maneira.

Para lidar com esse problema, o Teorema de Pitágoras foi generalizado para incluir esses triângulos. A generalização afirma que, em um triângulo isósceles retângulo com lados incomensuráveis, o quadrado da hipotenusa é igual à área de um retângulo cujos lados têm comprimentos iguais aos dois outros lados do triângulo.

Essa generalização é importante porque expande a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras além dos limites da aritmética e da geometria euclidiana clássica. Também demonstra como a teoria das magnitudes incomensuráveis, que foi inicialmente considerada uma ameaça à matemática pitagórica, acabou por levar a novas descobertas e generalizações matemáticas.

Para demonstrar o Teorema de Pitágoras para triângulos isósceles retângulos com lados incomensuráveis, é necessário provar que o quadrado da hipotenusa é igual à área de um retângulo cujos lados têm comprimentos iguais aos dois outros lados do triângulo.

Demonstração. Considere um triângulo isósceles retângulo com lados incomensuráveis AB, AC e hipotenusa BC. Trace a altura a partir do vértice A, que intercepta o lado BC no ponto H. Assim, os triângulos ABC e ABH são semelhantes, pois possuem dois ângulos ordenadamente congruentes: os ângulos $B\widehat{A}C$ e $B\widehat{H}A$, que são retos e $\widehat{B}$ que é comum aos dois triângulos. Logo,

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH} \Longrightarrow (AB)^2 = BC \cdot BH.$$

Como o triângulo ABC é isósceles, a altura AH coincide com a mediana e, assim,

$$BH = \frac{1}{2}BC.$$

Logo,

$$(AB)^2 = BC \cdot \frac{1}{2}BC \Longrightarrow (BC)^2 = 2(AB)^2 \Longrightarrow (BC)^2 = (AB)^2 + (AB)^2.$$

Mas, $AB = AC$, pois o triângulo ABC é isósceles. Portanto,

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2.$$

Isso prova que o quadrado da hipotenusa BC é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, AB e AC, que é a forma clássica do Teorema de Pitágoras.

Portanto, a demonstração do Teorema de Pitágoras para triângulos isósceles retângulos com lados incomensuráveis é concluída.

A demonstração da generalização do Teorema de Pitágoras para n-dimensões, como já visto, Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967), é baseada na definição do produto escalar e vetor:

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + 2(v \cdot w) + ||w||^2.$$

Essa é a generalização do Teorema de Pitágoras para n-dimensões.

Um exemplo de aplicação dessa fórmula é em um triângulo retângulo em três dimensões. Suponha que ABC seja um triângulo retângulo em que o ângulo reto está em A. Seja P o ponto médio de BC e sejam os vetores $v = AP$ e $w = PB$. Então,

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + 2(v \cdot w) + ||w||^2.$$

Substituindo as normas dos vetores e o produto escalar $v \cdot w$, obtém-se

$$AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2(AP \cdot PB).$$

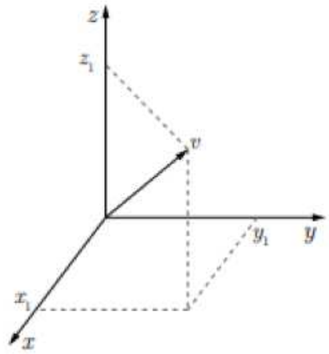
Essa é uma generalização do Teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo em três dimensões.

5.1 Algumas Generalizações no Espaço

5.1.1 Vetores coordenados no plano

Considerando um sistema de coordenadas XYZ fixo no espaço, podemos analisar os vetores cujo ponto de origem é a origem desse sistema. Dessa forma, um vetor v fica perfeitamente determinado pelas coordenadas do ponto (x_1, y_1, z_1), conforme Figura 19.

Figura 19-Um vetor coordenado no espaço



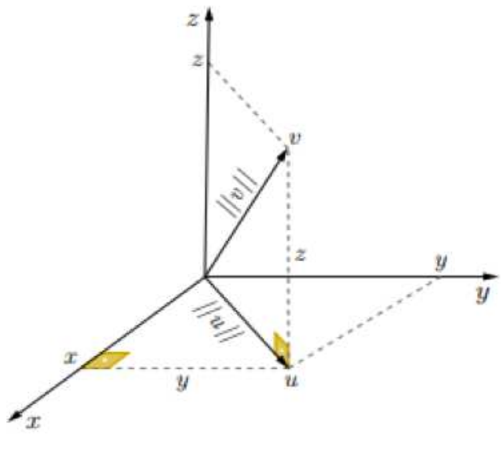
Fonte: (DANTAS, 2006, p.20)

Dado um vetor $v = (x, y, z)$, mostra-se que o comprimento de v é dado por

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo do plano xy de hipotenusa $||u||$ e de catetos x e y, apresentado na Figura 20, obtêm-se $||u||^2 = x^2 + y^2$.

Figura 20-O comprimento do vetor v



Fonte: (DANTAS, 2006, p.20)

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 20, de hipotenusa $||v||$ e de catetos $||u||$ e z, obtêm-se $||v||^2 = ||u||^2 + z^2$, onde $||v||^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ou seja,

$$||v|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

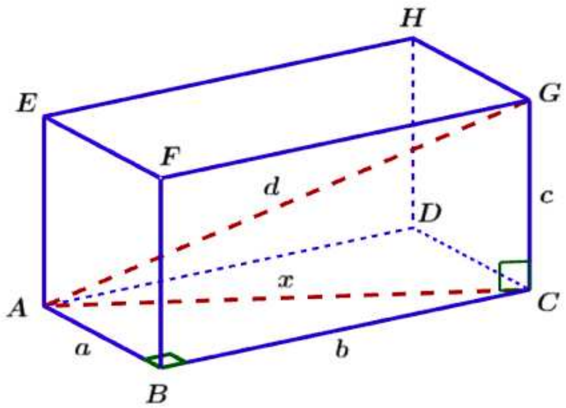
5.1.2 Cálculo da diagonal de um paralelepípedo retângulo

Uma generalização clássica do Teorema de Pitágoras no espaço frequentemente encontrada em livros de matemática da educação básica, é a relação entre as arestas e a diagonal de um paralelepípedo retângulo, ou seja, a soma dos quadrados das arestas de um paralelepípedo retângulo é igual ao quadrado de sua diagonal:

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \tag{5.1}$$

Demonstração. Considere um paralelepípedo retângulo (Figura 21) de dimensões a, b e c. Para estender de forma natural a três dimensões, o espaço $\mathbb{R}^3$, calcula-se a diagonal deste paralelepípedo retângulo. Para isso, utiliza-se duplamente o Teorema de Pitágoras dado pela relação (5.1), conforme a Figura 21. Para isso, assuma-se que no primeiro triângulo retângulo ABC.

Figura 21-Paralelepípedo Retângulo



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Na Figura 21, tem-se o segmento AC que corresponde a diagonal da face $ABCD$ ou $(EFGH)$. Aplicando pela primeira vez o Teorema de Pitágoras tem-se que

$$a^2 + b^2 = x^2.$$

Agora considere o segundo triângulo retângulo ACG de hipotenusa d, e catetos x e c. Mais uma vez, aplica-se a o Teorema de Pitágoras e obtém-se:

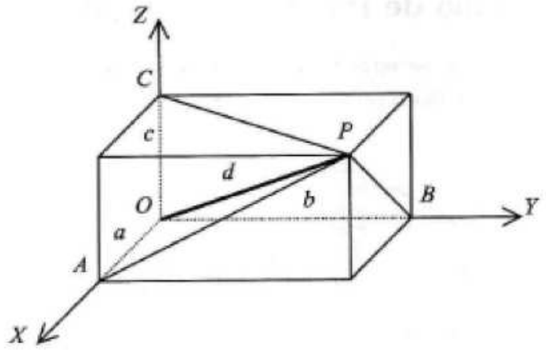
$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2.$$

Observe que para a obtenção do Teorema de Pitágoras no espaço, fez-se uso apenas de suas arestas.

5.1.3 Relação entre os três ângulos de um triedro tri-retângulo.

Exemplo. Considere um ponto$P$ no interior de um triedro tri-retângulo de arestas OX, OY e OZ. Traçando por P planos paralelos aos planos OXY, OYZ e OXZ, forma-se um bloco retangular cuja diagonal é OP. Sejam $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ e $OP = d$. Supondo que $P\widehat{O}X = \alpha$, $P\widehat{O}Y = \beta$ e $P\widehat{O}Z = \gamma$. Que relação existe entre esses três ângulos? (LIMA, 2006). *Solução.* Na figura 22, observa-se que a face do paralelepípedo

Figura 22-Paralelepípedo no eixo



Fonte: (LIMA, 2006, p.76)

que contém P e A (a face da frente) é perpendicular a OX. Logo, o triângulo AOP é retângulo em A e, portanto,

$$\cos\alpha = \frac{a}{d}.$$

A face do paralelepípedo que contém P e B (a face lateral direita) é perpendicular a OY. Logo, o triângulo BOP é retângulo em B e, consequentemente,

$$\cos\beta = \frac{b}{d}.$$

A face que contém P e C (a face de cima) é perpendicular a OZ. Logo, o triângulo COP é retângulo em C e,

$$\cos\gamma = \frac{c}{d}.$$

Como $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, temos, dividindo tudo por d^2,

$$\frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2} = 1,$$

ou seja, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

5.1.4 Distância entre Dois Pontos no Espaço

Uma das aplicações mais importantes do teorema de Pitágoras é em relação à distância entre dois pontos no espaço.

A partir desse teorema, pode-se calcular a distância entre dois pontos no espaço. Para isso, basta considerar esses pontos com as extremidades de um segmento de reta, que será a hipotenusa de um triângulo retângulo. Os catetos desse triângulo serão as diferenças entre as coordenadas dos pontos nas diferentes dimensões do espaço (x, y, z, etc.).

Assim, se tiver dois pontos P e $P^{'}$ no espaço tridimensional com coordenadas (x, y, z) e $(x^{'}, y^{'}, z^{'})$ respectivamente, a distância entre esses dois pontos dados é dada pela fórmula

$$d(P,\, P') = \sqrt{(x - x')^2 \,+\, (y - y')^2 \,+\, (z - z')^2}.$$

Demonstração (LIMA, 2014, p.172-173). Para a demonstração da fórmula da distância entre dois pontos no espaço, observa-se inicialmente que se, num determinado sistema $OXYZ$, os pontos $P(a, b, z)$ e $Q(a,\, b,\, z')$ têm as duas primeiras coordenadas iguais então

$$d(P, Q) = |z \,-\, z'|,$$

pois esta é a distância entre dois pontos no eixo formado por todos os pontos (a, b, z), $z \in \mathbb{R}$. Um resultado análogo vale para a primeira e terceira, ou para a segunda e a terceira coordenadas.

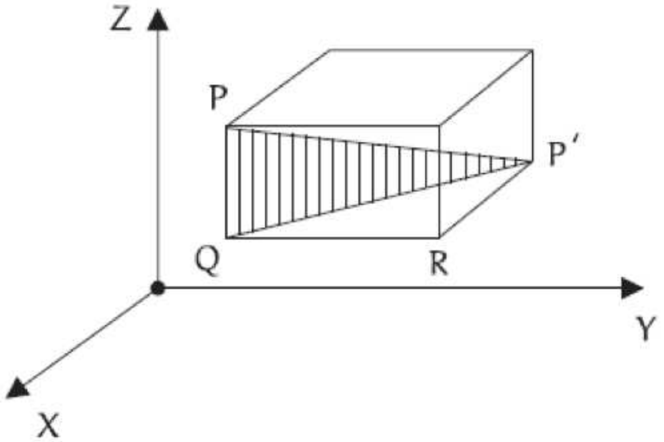
Dados $P(x, y, z)$ e $P'(x^{'}, y^{'}, z^{'})$, considere os pontos auxiliares $Q(x,\, y,\, z')$ e $R(x,\, y',\, z')$, conforme Figura 23.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos PQP' e QRP', tem-se:

$$d(P, P')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, P')^2 = d(P, Q)^2 + d(Q, R)^2 + d(R, P')^2.$$

Como $(P, Q), (Q, R)$ e (R, P') são pares de pontos com duas coordenadas iguais, resulta

Figura 23-Calculando a distância entre P e P'



Fonte: (LIMA, 2014, p.173)

da observação inicial que

$$d(P, P')^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2.$$

Portanto,

$$d(P, P') = \sqrt{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)}.$$

Esta fórmula é conhecida como distância euclidiana, que é uma generalização do Teorema de Pitágoras no espaço tridimensional. Ela nos permite calcular a distância entre dois pontos em qualquer número de dimensões.

A distância do ponto $P = (x, y, z)$ à origem $O = (0, 0, 0)$ é dada por:

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

É importante destacar que a relação entre o teorema de Pitágoras e a distância entre dois pontos no espaço não se limita ao espaço tridimensional. A fórmula da distância euclidiana pode ser aplicada a qualquer número de dimensões, e o teorema de Pitágoras é uma base teórica que permite essa generalização.

6 A GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NO CONTEXTO ESCOLAR

Nos documentos normativos da educação, a generalização do teorema de Pitágoras é considerada uma habilidade matemática essencial para os alunos do ensino fundamental e médio.

A generalização do teorema de Pitágoras refere-se a sua extensão para além do contexto de triângulos retângulos, ou seja, sua aplicação em outros tipos de figuras geométricas. No Brasil, por exemplo, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que, no final do 9º ano do ensino fundamental, os alunos devem ser capazes de aplicar o teorema de Pitágoras e suas generalizações em diferentes situações, utilizando ferramentas tecnológicas e modelos geométricos.

Além disso, o documento curricular ressalta a importância de desenvolver nos alunos a capacidade de generalizar, ou seja, de extrapolar as ideias e conceitos aprendidos em uma determinada situação para outras situações semelhantes. Nesse sentido, a generalização do teorema de Pitágoras é um exemplo de como o ensino de matemática pode promover o desenvolvimento do pensamento crítico e da resolução de problemas.

No entanto, é importante ressaltar que a generalização do teorema de Pitágoras é um conceito mais avançado e pode exigir um maior nível de abstração e compreensão matemática. Por isso, os documentos curriculares nacionais geralmente indicam que esse tema deve ser introduzido gradualmente ao longo do ensino fundamental e médio, em uma abordagem que leve em conta o nível de desenvolvimento dos alunos e suas necessidades individuais de aprendizagem.

A generalização do teorema de Pitágoras é um tema importante e valorizado nos documentos curriculares nacionais, pois se trata de uma habilidade matemática essencial para o desenvolvimento de competências e habilidades fundamentais para a vida.

A inserção da generalização do teorema de Pitágoras na educação básica traz diversos benefícios para os estudantes, dentre eles:

(q) Desenvolvimento do pensamento crítico: A generalização do teorema de Pitágoras exige que os estudantes sejam capazes de extrapolar as ideias e conceitos aprendidos em uma determinada situação para outras situações semelhantes. Essa habilidade é essencial para o desenvolvimento do pensamento crítico e resolução de problemas.

(r) Aprendizagem mais significativa: A generalização do teorema de Pitágoras permite que os estudantes façam conexões mais profundas entre os conceitos matemáticos e sua aplicação em situações do mundo real, tornando a aprendizagem mais significativa e motivadora.

(s) Desenvolvimento de habilidades tecnológicas: A aplicação da generalização do teorema de Pitágoras muitas vezes exige o uso de ferramentas tecnológicas, como softwares de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas. Isso pode ajudar os estudantes a desenvolver habilidades tecnológicas importantes para sua formação.

(t) Preparação para estudos avançados: A generalização do teorema de Pitágoras é um conceito mais avançado e pode preparar os estudantes para estudos mais complexos no ensino médio e superior, tais como cálculo diferencial e integral, álgebra linear, geometria não euclidiana, entre outros.

(u) Maior compreensão da matemática: O estudo da generalização do teorema de Pitágoras pode contribuir para uma compreensão mais profunda da matemática como um todo, permitindo que os estudantes percebam a conexão entre diferentes tópicos e conceitos.

Silva (2014), aborda o uso do software Geogebra na generalização do Teorema de Pitágoras. O autor relata que obteve resultados positivos e cita

> Percebi que os alunos gostaram muito da atividade, foi muito proveitoso e que eles gostariam que atividades como essa fossem feitas com maior frequência. Particularmente, foi uma atividade muito prazerosa de ser realizada, ainda mais com o questionamento do aluno, da 6ª série/7º ano, sobre as extensões do Teorema de Pitágoras (SILVA, 2014, p. 100).

Portanto, a inserção da generalização do teorema de Pitágoras na educação básica é uma medida positiva que pode contribuir para uma formação mais completa e abrangente dos estudantes, preparando-os para os desafios do mundo atual.

7 RESULTADOS DA PESQUISA

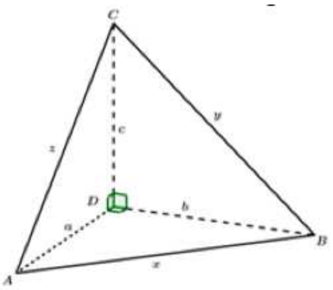
Nesta seção, serão apresentadas algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras Generalizado que são aplicáveis ao triedro tri-retangular. Serão exploradas diferentes formas de se chegar à relação matemática que descreve a relação entre os comprimentos dos lados de um triedro tri-retangular.

Partindo do Teorema: "Num Triedro Tri-Retângulo, o quadrado da área do triângulo ABC é igual à soma dos quadrados das áreas dos outros três triângulos", (LIMA et al, 2006, p.81).

7.1 Generalização 1

Para esta generalização, considere um triedro tri-retângulo de vértice D, cortado por um plano qualquer, formando o tetraedro $ABCD$ com $AD = a, BD = b$ e $CD = c$, como mostra a Figura 24.

Figura 24-Tetraedro Tri-retangular $ABCD$



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Sejam S_1, S_2 e S_3 as áreas dos triângulos retângulos BCD, ACD e ABD, respectivamente, e seja X a área do triângulo ABC.

Assim, tem-se que:

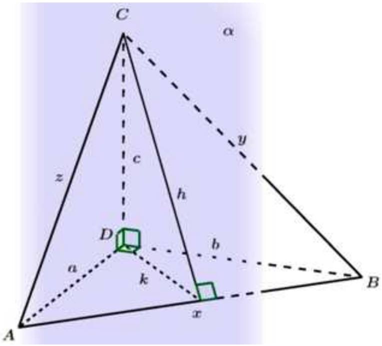
$$S_1 = \frac{bc}{2},\ S_2 = \frac{ac}{2} \quad \text{e} \quad S_3 = \frac{ab}{2}.$$

Deve-se mostrar que:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = X^2.$$

Traçando um plano α passando por CD perpendicular a x, conforme a Figura 25, obtém-se os segmentos k e h perpendiculares a x.

Figura 25-Tetraedro Tri-retangular $ABCD$ com interseção de um plano α



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Assim,

$$X = \frac{hx}{2}, \quad h^2 = k^2 + c^2 \quad \text{e} \quad S_3 = \frac{xk}{2}.$$

Elevando a equação $X = \dfrac{hx}{2}$ ao quadrado, tem-se

$$X^2 = \frac{h^2x^2}{4}.$$

Como $h^2 = k^2 + c^2$, tem-se

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{(k^2+c^2)\cdot x^2}{4} = \frac{k^2\cdot x^2 + c^2\cdot x^2}{4} = \frac{4S_3^2 + +c^2\cdot(a^2+b^2}{4} = \frac{4S_3^2 + +(ac)^2 + (bc)^2}{4} \\ &= \frac{4S_3^2 + 4S_2^2 + 4S_1^2}{4} = S_3^2 + S_2^2 + S_1^2. \end{aligned}$$

Logo, $X^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

7.2 Generalização 2

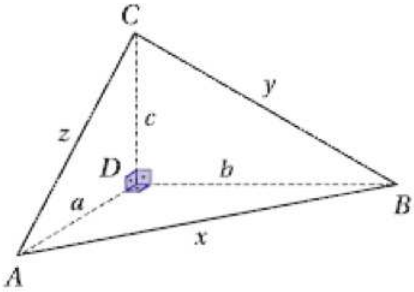
Para essa generalização, considere a Figura 26, que é um tetraedro com um triedro tri-retangular.

Uma generalização do Teorema de Pitágoras no Espaço, que advém de maneira semelhante ao Teorema de Pitágoras clássico, é apresentada por esse tetraedro.

Demonstração. Nesta prova, assume-se que seja a área da face frontal do triângulo ABC, ou seja, deve-se provar que:

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = X^2.$$

Figura 26-Tetraedro Tri-retangular



Fonte: QUERGINALDO, 2012, p.23)

Sejam S_1, S_2 e S_3 as áreas dos triângulos retângulos BCD, ACD e ABD dadas por:

$$S_1 = \frac{bc}{2} \Longrightarrow 2S_1 = bc \Longrightarrow (bc)^2 = (2S_1)^2 \Longrightarrow b^2c^2 = 4S_1^2$$

$$S_2 = \frac{ac}{2} \Longrightarrow 2S_2 = ac \Longrightarrow (ac)^2 = (2S_2)^2 \Longrightarrow a^2c^2 = 4S_2^2$$

$$S_3 = \frac{ab}{2} \Longrightarrow 2S_3 = ab \Longrightarrow (ab)^2 = (2S_3)^2 \Longrightarrow a^2b^2 = 4S_3^2$$

Somando membro a membro essas equações, obtém-se

$$b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = 4S_1^2 + 4S_2^2 + 4S_3^2 = 4(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

e, assim, $S_1^2+S_2^2+S_3^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2)$. Dessa forma, para completar a demonstração, deve-se mostrar que

$$X^2 = \frac{1}{4}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2).$$

A fórmula de Heron será utilizada, visto que todos os três triângulos BCD, ACD e ABD são retângulos. A área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados é expressa por:

$$X = \sqrt{p \cdot (p-x) \cdot (p-y) \cdot (p-z)}.$$

Sendo $p = \dfrac{x+y+z}{2}$, tem-se:

$$\begin{aligned} X^2 &= p \cdot (p-x) \cdot (p-y) \cdot (p-z) \\ &= \left(\frac{x+y+z}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{x+y+z}{2} - z\right). \end{aligned}$$

Desenvolvendo, obtém-se:

$$X^2 = \frac{1}{16}(y^2 + z^2 + 2yz - x^2) \cdot [2yz - (y^2 + z^2 - x^2)]. \tag{7.1}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras clássico, nos três triângulos retângulos BCD, ACD e ABD, obtém-se as seguintes relações

$$\begin{cases} y^2 = b^2 + c^2 \\ z^2 = a^2 + c^2 \\ x^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Somando membro a membro as equações do sistema, tem-se

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2). \tag{7.2}$$

Substituindo cada equação do sistema na equação (7.2), obtém-se

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x^2 + c^2) = 2x^2 + 2c^2 \Longrightarrow 2c^2 = -x^2 + y^2 + z^2 \tag{7.3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(z^2 + b^2) = 2z^2 + 2b^2 \Longrightarrow 2b^2 = x^2 + y^2 - z^2 \tag{7.4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(y^2 + a^2) = 2y^2 + 2a^2 \Longrightarrow 2a^2 = x^2 - y^2 + z^2 \tag{7.5}$$

A substituição da Equação (7.3) na Equação (7.1) resulta

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{1}{16}(2c^2 + 2yz)(2yz - 2c^2) \\ &= \frac{4}{16}(yz + c^2)(yz - c^2) \\ &= \frac{1}{4}(y^2z^2 - c^4) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Substituindo y^2 e z^2 pelos seus valores (ver o sistema), na equação (7.6), obtém-se

$$\begin{aligned} 4X^2 &= (b^2 + c^2)(a^2 + c^2) - c^4 \\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + c^4 - c^4 \\ &= a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \Longrightarrow X^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2). \end{aligned}$$

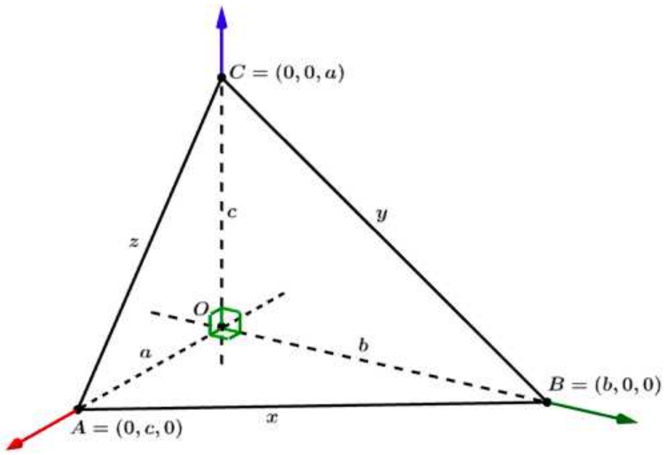
Com isso, conclui-se a demonstração generalizada do Teorema de Pitágoras.

7.3 Generalização 3

Uma abordagem vetorial para o Teorema de Pitágoras Generalizado por Triedro Tri-retangular.

Para esta nova demonstração do Teorema de Pitágoras Generalizado, utiliza-se a Figura 27 do Triedro Tri-retangular sobre os eixos coordenados no espaço, Ox, Oy e Oz, e assume-se que $A = (0, c, 0), B = (b, 0, 0)$ e $C = (0, 0, a)$. Para este propósito, considere as seguintes relações clássicas dos três triângulos retângulos envolvidos na Figura 27.

Figura 27-Tetraedro Tri-retangular sobre os eixos



Fonte: Produzida pelo autor, 2023

Sejam S_1, S_2 e S_3 as áreas dos triângulos retângulos AOC, BOC e AOB dadas pelas relações

$$S_1 = \frac{ac}{2} \Longrightarrow ac = 2S_1 \tag{7.7}$$

$$S_2 = \frac{ab}{2} \Longrightarrow ab = 2S_2 \tag{7.8}$$

$$S_3 = \frac{bc}{2} \Longrightarrow bc = 2S_3 \tag{7.9}$$

Dividindo-se a Equação (7.7) pela Equação (7.8) produz-se a seguinte relação

$$\frac{ac}{ab} = \frac{2S_1}{2S_2} \Longrightarrow \frac{c}{b} = \frac{S_1}{S_2} \Longrightarrow c = b \cdot \frac{S_1}{S_2}. \tag{7.10}$$

Substituindo-se a Equação (7.10) na Equação (7.9) tem-se

$$b \cdot b\frac{S_1}{S_2} = 2S_3 \Longrightarrow b^2 = 2 \cdot \frac{S_2S_3}{S_1} \Longrightarrow b = \sqrt{2 \cdot \frac{S_2S_3}{S_1}}. \tag{7.11}$$

Substituindo-se a Equação (7.11) na Equação (7.10) tem-se

$$c = \sqrt{2 \cdot \frac{S_2S_3}{S_1}} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{2 \cdot \frac{S_1S_3}{S_2}}. \tag{7.12}$$

De forma análoga, deduz-se que

$$a = \sqrt{2 \cdot \frac{S_1S_2}{S_3}}. \tag{7.13}$$

Agora, considere os vetores

$\overrightarrow{AB} = B - A = (b,0,0) - (0,c,0) = (b,-c,0)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,0,a) - (0,c,0) = (0,-c,a)$.

Geometricamente, sabe-se que o módulo do produto vetorial dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ mede a área do paralelogramo $ABCD$ determinado pelos seus vetores (Steinbruch, 1991).

Daí,

$$\text{Área}_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|. \tag{7.14}$$

Então, a partir do triângulo ABC, é possível construir um paralelogramo $ABCD$, cuja área é o dobro da área do triângulo,

$$\text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|. \tag{7.15}$$

Mas, do produto vetorial entre os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ tem-se a área do paralelogramo $ABCD$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} == (-ac) \cdot \vec{i} + (-bc) \cdot \vec{k} + (-ab) \cdot \vec{j}. \tag{7.16}$$

Da definição de módulo

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2 = a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2. \tag{7.17}$$

Das Equações (7.7), (7.8) e (7.9), tem-se que

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|^2 = 4S_1^2 + 4S_2^2 + 4S_3^2 \Longrightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}. \tag{7.18}$$

Substituindo-se a Equação (7.18) na Equação (7.15) e sabendo-se que a área S é dada por

$$S = \text{Área}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \Longrightarrow S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2},$$

ou seja,

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

conforme desejava-se demonstrar.

Com isso, mostrou-se uma nova abordagem de demonstrar o Teorema de Pitágoras Generalizado, utilizando-se os conceitos de vetores, o que era o nosso objetivo.

7.4 Generalização 4

Integral de Superfície para o Teorema de Pitágoras Generalizado no Triedro Triretangular.

Para demonstrar do Teorema de Pitágoras Generalizado utilizando-se a Integral de Superfície para o cálculo de área segundo o propósito deste trabalho, considera-se a Equação Segmentária do plano que contém os pontos $A = (0, c, 0), B = (b, 0, 0)$ e $C = (0, 0, a)$.

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} = 1. \tag{7.19}$$

Isolando-se z na Equação (7.19), temos:$z = a(1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{c})$. Fazendo-se uma parametrização usual para a equação (7.19) no $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$r(x, y) = \left(x, y, a\left(1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{c}\right)\right) \tag{7.20}$$

Uma vez que as derivadas parciais correspondem as tangentes, obtém-se:

$$\frac{\delta r}{\delta x}(x, y) = \left(1, 0, -\frac{a}{b}\right), \quad \frac{\delta r}{\delta x}(x, y) = \left(0, 1, -\frac{a}{c}\right). \tag{7.21}$$

Mas, do Cálculo Diferencial e Integral, sabe-se que a área da Integral de Superfície do $\left|\left|\frac{\delta r}{\delta x}(x, y) \times \frac{\delta r}{\delta y}(x, y)\right|\right|$ é estabelecida por

$$S = \iint_S \left|\left|\frac{\delta r}{\delta x}(x, y) \times \frac{\delta r}{\delta y}(x, y)\right|\right| dxdy \tag{7.22}$$

O produto vetorial em questão é dado por

$$\frac{\delta r}{\delta x}(x,y) \times \frac{\delta r}{\delta y}(x,y) = \frac{a}{b} \cdot \vec{i} + \frac{a}{c} \cdot \vec{j} + \vec{k}. \tag{7.23}$$

Tomando o módulo da equação (7.23), tem-se

$$\left|\left|\frac{\delta r}{\delta x}(x,y) \times \frac{\delta r}{\delta y}(x,y)\right|\right| = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} + 1} = \frac{\sqrt{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}{bc} dxdy. \tag{7.24}$$

Substituindo a equação (7.24) na equação (7.22), obtém-se

$$S = \iint_S \frac{\sqrt{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}}{bc} dxdy \tag{7.25}$$

Utilizando novamente as Equações (7.7), (7.8) e (7.9), obtém-se

$$S = \iint_S \frac{\sqrt{4S_1^2 + 4S_2^2 + 4S_3^2}}{2S_3} dxdy = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_3} \iint_S dxdy. \tag{7.26}$$

Como $\iint_S dxdy = S_3$, tem- se que:

$$S = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_3} \cdot S_3 = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} \Longrightarrow S_3^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

conforme deseja-se demonstrar.

8 DISCUSSÕES

Nesta seção, faz-se um breve comentário sobre as demonstrações do Teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular, destacando suas relevâncias para o ensino médio e o superior.

As generalizações 1 e 2 são apropriadas para os estudantes do ensino médio, uma vez que elas envolvem alguns conteúdos básicos de geometria e álgebra, tais como, áreas de figuras (área de triângulos), reta perpendicular a um plano, Teorema de Pitágoras, triedro tri-retangular, tetraedro, equações, sistema de equações e a fórmula de Heron. Esses conceitos são ensinados no ensino médio e são importantes para compreensão da geometria espacial e da álgebra.

Assim, pode-se dizer que as generalizações 1 e 2 são uma oportunidade para os alunos do ensino médio aprofundarem seus conhecimentos em geometria e álgebra e verem a aplicação prática desses conceitos em uma situação real. Além disso, a compreensão dessas generalizações podem abrir portas para novas descobertas na área da matemática.

Já as generalizações 3 e 4, que usa produto vetorial e integral dupla para demonstrar o teorema de Pitágoras generalizado em um triedro tri-retangular, são especialmente relevantes para estudantes de ensino superior que desejam aprofundar seus conhecimentos em Matemática e Física.

O produto vetorial, como mencionado anteriormente, é uma ferramenta fundamental em geometria, e permite a construção de triângulos e paralelogramos a partir de vetores, além de ser útil para calcular áreas e volumes. No caso do triedro tri-retangular, o produto vetorial pode ser usado para calcular o módulo da hipotenusa de um triângulo retângulo formado por dois vetores, e assim demonstrar o teorema de Pitágoras generalizado. A integral dupla, por sua vez, é uma ferramenta poderosa em cálculo multivariável, que permite calcular áreas e volumes de regiões no espaço. No caso do triedro tri-retangular, a integral dupla pode ser usada para calcular o volume de um paralelepípedo formado pelos vetores que definem o triedro. Esse volume pode ser calculado como o produto escalar entre o vetor que representa a terceira dimensão do triedro e o produto vetorial dos outros dois vetores. Esse resultado também pode ser utilizado para demonstrar o teorema de Pitágoras generalizado.

Portanto, a utilização combinada do produto vetorial e da integral dupla em um triedro tri-retangular pode ser uma abordagem interessante e desafiadora para os estudantes de ensino superior, pois permite a aplicação de diferentes técnicas matemáticas para resolver um mesmo problema. Além disso, a demonstração do teorema de Pitágoras generalizado através dessas

ferramentas pode fornecer uma visão mais abrangente e aprofundada da matemática, e incentivar os estudantes a explorar mais esses conceitos em suas carreiras acadêmicas e profissionais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir das diferentes abordagens de demonstração do Teorema de Pitágoras, incluindo a sua generalização por triedros tri-retangulares, é possível perceber a relevância histórica e atual desse tema na matemática e em outras áreas do conhecimento.

A generalização do Teorema de Pitágoras tem sido objeto de estudo há séculos e, ao longo do tempo, diferentes matemáticos contribuíram para o desenvolvimento dessa teoria, como o matemático indiano Baudhayana, o matemático grego Euclides e o matemático persa Al-Khwarizmi. Essa evolução histórica demonstra a importância do Teorema de Pitágoras e sua generalização para a resolução de problemas práticos.

As diferentes abordagens de demonstração, como a abordagem vetorial e a integral dupla, apresentam vantagens e desvantagens em relação à sua aplicação prática e compreensão. Enquanto a abordagem vetorial pode ajudar a visualizar as relações entre os segmentos de reta e as suas magnitudes, a abordagem com integral dupla pode fornecer uma maneira de calcular o volume de sólidos com formas complexas, mas pode ser mais difícil de ser compreendida pelos estudantes.

No entanto, independentemente da abordagem escolhida, a generalização do Teorema de Pitágoras para triedros tri-retangulares é uma importante contribuição para a matemática e outras áreas do conhecimento, pois possibilita a resolução de problemas práticos em situações tridimensionais, como a medição de volumes de sólidos ou o cálculo de distâncias em espaço tridimensional.

Ademais, a inserção desse estudo no ensino médio pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio lógico e no aprendizado da matemática de forma mais significativa e interdisciplinar. A utilização de exemplos práticos e a conexão com outras áreas do conhecimento podem ajudar a despertar o interesse dos estudantes e a promover a compreensão mais ampla e profunda dos conceitos matemáticos.

Diante do exposto, é possível concluir que a dissertação apresentada contribui significativamente para o aprofundamento do conhecimento matemático e sua aplicação prática, além de oferecer uma nova perspectiva para o ensino do Teorema de Pitágoras generalizado por triedro tri-retangular. A continuidade dos estudos e pesquisas nessa área pode ampliar ainda mais a compreensão do teorema e suas possíveis aplicações na solução de problemas práticos, além de contribuir para o desenvolvimento do ensino da matemática de forma mais interdisciplinar e significativa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. S. **Geometria plana e espacial.** São Paulo: Saraiva, 2016.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões pitagóricos: geométricos e números**. São Paulo: Atual, 1993. 93p.

BOULOS, P., & Camargo, I. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. Bookman, 2015.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: $http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_{E}nsinoMedio_{e}mbaixa_{s}ite_{1}10518.pdf$. Acesso em: 17 fev. 2023.

CAMARGO, Ivan de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Geometria Euclidiana Plana**. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 156p. (Coleção Matemática Universitária; v.17).

CINTRA, C. de O.; CINTRA, R. J. de S. **O teorema de Pitágoras**. 1. Ed. Recife: O Autor, 2003. 93p.

COOKE, Roger. **The History of Mathematics: A Brief Course**. 2nd ed.Wiley, 2005.

COXETER, H. S. M., & GREITZER, S. L. **Geometry Revisited**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1967.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, v.9, **Geometria plana**. São Paulo: Editora Atual, 9 ed, 2013.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**, v.10, **Geometria espacial**. São Paulo: Editora Atual, 7.ed, 2013.

ENCYCLOPEDIA BRITANNICA. **Pythagorean theorem.** Encyclopædia Britannica, 2023. Disponível em: https://www.britannica.com/science/Pythagorean-theorem. Acesso em: 19 mar. 2023.

EUCLIDES. **The Elements**. 1ª ed. New York: Barnes & Noble, 2005.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas.São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

IEZZI, G., Dolce, O., & DEGENSZAJN, D. (2010). **Matemática elementar: geometria espacial**. Atual Editora.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. 206 p. (Coleção do Professor de Matemática).

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em Geometria**. Rio de Janeiro:IMPA, 1997.

LOOMIS, Elisha Scott. **The Pythagorean Proposition.** Nova Iorque: National Council of Teachers of Mathematics, 1968.

MAOR, E. **The Pythagorean Theorem: 4,000-Year History.** Princeton University Press, 2007.

GREENBERG, David. **The Pythagorean Theorem: A 4,000-Year History.** Princeton University Press, 2018.

KNORR, W. R. **The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry.** Dordrecht: Reidel, 1975.

LAKATOS, Imre. **Proof and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery.** Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

PALHARES, J. L. M. **Geometria euclidiana plana e espacial.** Atlas, 2018.

RIBEIRO, Vanessa Vanha Silva Maniho. **Revisitando o teorema de Pitágoras**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2013.

SOARES, Clarissa. **Pitágoras não criou o Teorema de Pitágoras**. 2021. Disponível em: https://aventurasnahistoria.uol.com.br/noticias/almanaque/pitagoras-nao-criou-o-teorema-de-pitagoras.phtml. Acesso em: 17 fev. 2023.

STEWART, James. **Cálculo**: vol. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 624p.

STEINBRUCH, A., & WINTERLE, P. **Álgebra Linear e Geometria Analítica.** São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

STEINBRUCH, A., & WINTERLE, P. **Geometria Analítica.** Pearson Education do Brasil, 2009.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica.** Makron Books, 1984.