



**UNIVERSIDADE
ESTADUAL DO
MARANHÃO**

**CAMPUS DE BALSAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

KALISSON MIRANDA DOS SANTOS

O INFINITO NA MATEMÁTICA: ideias que são contra o senso comum

Balsas – MA
2022

KALISSON MIRANDA DOS SANTOS

O INFINITO NA MATEMÁTICA: ideias que são contra o senso comum

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Campus Balsas da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito básico para a conclusão do Curso de Matemática Licenciatura.

Orientador(a): Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus

S237i

Santos, Kalisson Miranda dos.

Ideias que são contra o senso comum. / Kalisson Miranda dos Santos. – Balsas, 2022.

54 f.

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão – UEMA / Balsas, 2022.

1. Infinito. 2. Matemática. 3. Conjuntos Numéricos. 4. Senso Comum. I. Título.

CDU: 51

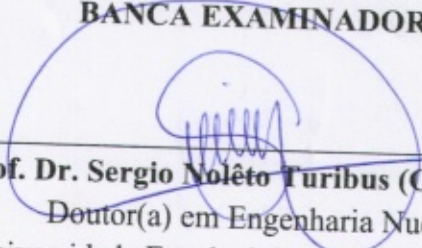
KALISSON MIRANDA DOS SANTOS

O INFINITO NA MATEMÁTICA: ideias que são contra o senso comum


Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Campus Balsas da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito básico para a conclusão do Curso de Matemática Licenciatura.

Aprovado em: 18/07/2022

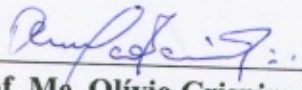
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus (Orientador)
Doutor(a) em Engenharia Nuclear
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA



Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa
Doutor em Física e Astronomia
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA



Prof. Me. Olívio Crispim de Medeiros
Mestre em Matemática
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

*A Deus, aos meus pais e a minha namorada,
que incentivaram durante o processo de
construção deste trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde, capacidade e força para superar todos os desafios.

À minha família, em especialmente a minha mãe, Eva Miranda, que sempre esteve ao meu lado dando forças e incentivando a cada momento, proporcionando o melhor ambiente para os meus estudos.

À minha namorada, Ana Beatriz, por todo apoio psicológico nos dias em que eu não conseguia ter avanços significativos na pesquisa, me protegendo de todo pensamento negativo.

Aos meus amigos da Universidade Antônio Jose, Douglas e Lucas, por todo apoio prestado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus, pela paciência, pelas orientações e por ter acreditado na realização da minha pesquisa, contribuindo para o meu amadurecimento científico.

À banca examinadora, Prof. Dr. Antonio Nilson Laurindo Sousa e Prof. Me. Olívio Crispim de Medeiros, pelas dicas que me deram na qualificação do projeto que foi de grande importância para a realização do mesmo.

À Universidade Estadual do Maranhão (UEMA) por me acolher como aluno, disponibilizando ferramentas necessárias para a conclusão do trabalho, através de seus recursos como, biblioteca física e virtual, computadores e Wi-Fi. Aproveito para agradecer também a todos os colaboradores, professores e demais componentes desta Instituição, que de alguma forma com a sua prestação de serviço, auxiliaram em meu desenvolvimento ao longo dos anos.

Por fim, todos que direta ou indiretamente fizeram parte de minha formação, o meu muito obrigado.

“É somente nas misteriosas equações do amor que qualquer lógica ou razão pode ser encontrada.”

John Nash

RESUMO

O termo infinito é encontrado em diversas áreas do conhecimento. Na Matemática seu estudo causou desconforto e perplexidade, por causa de suas propriedades aritméticas contra intuitivas. Foi realizado inicialmente um estudo bibliográfico, permitindo conhecer o que já foi desenvolvido sobre o assunto e uma pesquisa de campo, tendo como método de coleta de dados o uso de questionário aplicado com alunos do último ano do ensino médio. É apresentado as diferenciações entre um conjunto infinito e finito, enumerável e não enumerável. O Matemático alemão Georg Cantor é o principal responsável por aprimorar as ideias sobre o infinito, desenvolvendo técnicas para comparar a quantidade de elementos de um conjunto. Por ser um objeto de estudo abstrato o infinito muitas vezes foge do senso comum, com ideias que de início parecem erradas, como a possibilidade de existir infinitos maiores que outros. Foi verificado, que os alunos do 3º ano possuem uma defasagem de conhecimento prévios de conjuntos numéricos, dificultando assim enxergar a existência de infinitos números reais.

Palavras-chave: Infinito. Matemática. Conjuntos numéricos. Senso comum.

ABSTRACT

The term mathematics is found in several areas of knowledge, in its intuitive study and perplexity, because of its counterintuitive arithmetic properties. Initially, a study of the last bibliographic study was carried out, allowing to know the subject and a method of data collection, the use of the method applied with high school students. It is presented as differentiations between an infinite and finite, enumerable and non-enumerable set. Mathematician Georg Cantor is primarily responsible for improving ideas about infinity, the techniques used to compare the number of elements in a set. Because it is an abstract or infinite object of study, it often runs away from common sense, with ideas that at first seem wrong, such as the possibility of there being infinities greater than others. It was previously selected, the 3rd students have a knowledge gap in numerical numbers, thus making it difficult to have infinite real numbers.

Key Words: Infinite. Math. Numerical sets. Common sense.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Naturais com bijeção aos seus quadrados.....	14
Figura 2 - Imagem direta	20
Figura 3 - injetora ou injetiva	20
Figura 4 - Função não injetiva.....	21
Figura 5 - Função sobrejetora.....	21
Figura 6 - Função não sobrejetora	22
Figura 7 - Função composta	23
Figura 8 - Função Inversa.....	23
Figura 9 - Lema 1	26
Figura 10 - Corolário 1	27
Figura 11 - $fn = 2n$	29
Figura 12 - $f: N \rightarrow Z$	29
Figura 13 - Subconjunto Enumerável.....	30
Figura 14 - Enumeração dos Racionais	32
Figura 15 - Racionais na diagonal	32
Figura 16 - Racionais par a par com os Naturais.....	33
Figura 17 - Transferência para o quarto $n + 1$	35
Figura 18 - Transferência para o quarto $2n$	36
Figura 19 - Divisão infinita do espaço.	38
Figura 20 - Aquiles e a Tartaruga.....	38
Figura 21 - Primeira questão	48
Figura 22 - Segunda questão	49
Figura 23 - Terceira questão.....	49

LISTA DE SIMBOLOS

$=$	É igual a
$+$	Soma
$-$	Subtração
$>$	Maior que
\mathbb{N}	Números Naturais
\in	Pertence
\notin	Não pertence
\subset	Está contido em
\supset	contem
\neq	É diferente
\subsetneq	Subconjunto próprio
\supsetneq	É subconjunto próprio
\emptyset	Conjunto vazio
\cap	Intersecção
\cup	União
\rightarrow	Seta de função, de...para
\circ	Função composta
$<$	Menor que
\leq	Menor ou igual que
\Rightarrow	Condicional, implica, se...então
\Leftrightarrow	Bicondicional, equivale, se e somente se
\forall	Para todo, para qualquer, para cada
\mathbb{Z}	Números inteiros
\mathbb{R}	Números Reais
\mathbb{Q}	Números irracionais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	INFINITO ATUAL E INFINITO POTENCIAL	14
2.1	Noções básicas de conjuntos e funções	17
2.2	Conjunto dos naturais.....	23
2.3	Diferença entre conjuntos finitos e infinitos	25
2.4	Conjuntos Enumeráveis e não Enumeráveis	28
3	PARADOXOS.....	35
3.1	Paradoxo Hotel de Hilbert.....	35
3.2	Paradoxos de Zenão	37
3.2.1	Dicotomia	37
3.2.2	Aquiles.....	38
4	METODOLOGIA	40
5	RESULTADOS.....	41
5.1	Primeira Questão.....	41
5.1.1	Turma 300	41
5.1.2	Turma 301	42
5.1.3	Turma 302	42
5.1.4	Turma 303	42
5.2	Segunda Questão	42
5.2.1	Turma 300	43
5.2.2	Turma 301	43
5.2.3	Turma 302	44
5.2.4	Turma 303	44
5.3	Terceira Questão	44
5.3.1	Turma 300	44

5.3.2	Turma 301	45
5.3.3	Turma 302	45
5.3.4	Turma 303	46
5.4	Quarta Questão	46
5.4.1	Turma 300	46
5.4.2	Turma 301	47
5.4.3	Turma 302	47
5.4.4	Turma 303	48
5.5	Visão geral das turmas	48
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

Algumas vezes ouvimos a palavra infinito sendo pronunciada por algumas pessoas, outras fazem tatuagem do símbolo infinito em seus corpos. Mas afinal, o que significa o termo infinito? Qual a relação da palavra infinito ao contexto da Matemática? Algumas dessas perguntas podem ser compreendidas nesse trabalho.

O termo infinito é utilizado em diversas áreas do conhecimento tais como arte, filosofia, física, astronomia, teologia, etc. No dicionário o infinito significa “Que não é finito, que não tem limites nem medida.” (KLEIN, 2015, p.292), por ser um tema abstrato, contribuiu para grandes discussões ao longo da história da evolução das ciências. Segundo Siqueira e Lorin (2021) é possível encontrar registros de discussões sobre o infinito desde civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia.

Nessa pesquisa o estudo foi focado no infinito na Matemática, estudando o seu comportamento e verificando como os alunos do 3º ano do ensino médio da instituição de tempo integral Padre Fabio Bertagnolli, localizada na cidade de Balsas/MA, lidam com situações que o envolve. Para atingir os propósitos da monografia foi necessário distinguir os conjuntos: finitos, infinitos, enumeráveis e não enumeráveis.

As noções básicas de conjuntos e funções são indispensáveis para o entendimento do conteúdo, por esse motivo serão apresentados inicialmente alguns conceitos sobre eles, bem como uma breve exposição da teoria dos números naturais a partir dos axiomas de Peano, pois estão estreitamente ligados aos conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

O principal Matemático no desenvolvimento de ideias sobre o infinito foi Georg Cantor, apresentando conceitos Matemáticos que de início parecem errados indo contra o senso comum, ele demonstrou que os infinitos podem ter tamanhos diferentes e mostrou também que quando se trata de conjuntos infinitos nem sempre o todo será maior que as partes.

Foi através dessas ideias que analisamos a visão dos estudantes, verificando se eles compreendem o infinito na Matemática como ele é ou se apresentam o senso comum. Para a realização dessa análise, foi feito inicialmente uma pesquisa bibliográfica na busca de estudar como o infinito se comporta na Matemática e após esse estudo foi aplicado um questionário com quatro perguntas envolvendo o infinito. Com as respostas foi possível investigar o conhecimento dos alunos sobre o tema comparando com o que foi aprendido na pesquisa bibliográfica.

2 INFINITO ATUAL E INFINITO POTENCIAL

Quando paramos para refletir sobre o infinito na Matemática inicialmente nos vem a ideia de algo muito grande, porém para afirmarmos que algo é muito grande ou muito pequeno precisa-se de um referencial. Analisando o número 10.000 ele é muito grande comparado com o número 10, mas se torna pequeno comparado com 10.000.000, e certamente temos números bem maiores que esse. Então não se torna preciso afirmar que o infinito é apenas algo/número muito grande, sendo necessário um pouco mais de definição e isso se tornou alvo de grandes discursões por toda a história da Matemática, tornando-se a pedra no sapato dos Matemáticos.

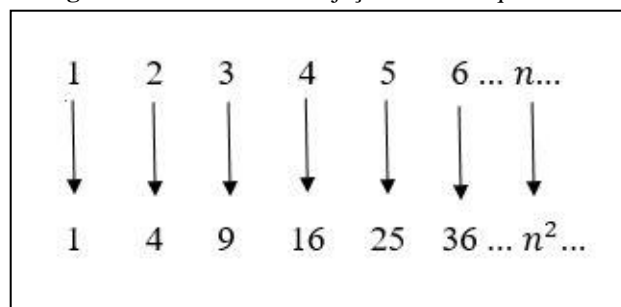
De acordo com Amadei (2005), um dos primeiros a mostrar o caos que o infinito pode gerar foi Zenão de Eleia (425 a.C), que através de seus paradoxos foi possível ver inconsistências na ideia de continuidade e divisibilidade do espaço em infinitas grandezas. Serão apresentados detalhadamente em outro tópico dois de seus paradoxos: “Aquiles e a Tartaruga” e “A dicotomia”.

Não sabemos ao certo que ideia precisamente Zenão estava procurando demonstrar. Aristóteles diz que Zenão propôs o paradoxo de ‘Aquiles e a Tartaruga’ e um outro chamado ‘A dicotomia’ no intuito de mostrar que o movimento era impossível. Mas não é certo que isso seja correto. Alguns filósofos pensam que Zenão estava rebatendo a ideia de que o espaço e o tempo eram infinitamente divisíveis. (MORRIS, 1997, p.22).

“Os paradoxos de Zenão constituem os exemplos mais primitivos dos impasses causados pela noção de infinito na história.” (AMADEI, 2005, p.28)

De acordo com Amadei (2005), em 1638 Galileu desenvolveu suas ideias sobre o infinito na Matemática, demonstrando que existe tantos números inteiros quantos são seus quadrados, através de uma relação biunívoca, ou seja, comparando par a par a quantidade de elementos presentes em cada conjunto, como demonstrado a baixo:

Figura 1 - Naturais com bijeção aos seus quadrados



Fonte: Produzido pelo autor

Podemos observar na Figura 1, que não importa o quanto repetimos esse processo sempre terá um elemento no outro conjunto para se fazer uma relação biunívoca, porém ao perceber isso ele preferiu evita-los. “Quando chegou a esse resultado, Galileu concluiu que havia algo de muito esquisito com os números infinitos e que o melhor que tinha a fazer era evitá-los. A infinidade, disse ele, era inerentemente incompreensível.” (MORRIS, 1997, p.15).

Por apresentar essa complexidade de compreensão que vai contra o senso comum, “O infinito pode gerar encrenca, porque as vezes seu comportamento é Paradoxal.” (STEWART, 2016, p.263). Essa “encrenca” é gerada pois ele “[...] não obedece às regras aritméticas habituais e não é um número no sentido usual do termo.” (CRILLY, 2011, p.6), ou seja, não podemos simplesmente somar ou subtrair os infinitos como bem entendermos.

Isso pode ser verificado no exemplo proposto por Borges (2015) no qual ele supôs que o infinito é um número representado por “S”, podendo ser escrito da seguinte forma:

$$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots \quad (1)$$

Quando o 2 é colocado em evidência tem-se:

$$S = 1 + 2 \cdot (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots) \quad (2)$$

A expressão dentro dos parênteses acaba sendo igual a equação (1), e quando substituído na equação (2) temos:

$$S = 1 + 2 \cdot S \quad (3)$$

$$1 = 2 \cdot S - S \quad (4)$$

$$S = -1 \quad (5)$$

A expressão torna-se um absurdo, pois é $S > 0$. Dessa forma, ele conclui “[...] este exemplo nos mostra que o infinito não pode ser considerado como um número” (BORGES, 2015, p.18)

Na Matemática o infinito pode ser visto de duas formas: potencial e atual. Segundo Sena (2011, p.13) “O infinito potencial consiste num processo através do qual um número cresce para além dos limites finitos.”, ou seja, não importa o quão grande um número é, sempre

poderá existir outro maior. “Para cada grande número obtido, exemplo 10^{1000} , existe sempre um maior, como $10^{1000 + 1}$.”(CRILLY, 2011, p.28). Considerando as frações a seguir:

$$\frac{1}{1} = 1; \frac{1}{0,1} = 10; \frac{1}{0,01} = 100; \frac{1}{0,001} = 1000; \frac{1}{0,0001} = 10000; \frac{1}{0,00001} = 100000; \dots$$

Pode-se observar que quando o denominador é diminuído, o resultado fica cada vez maior, continuando o processo os resultados crescem infinitamente. Por sua vez, quando aumentamos o denominador o resultado chega a valores cada vez menores, como mostra o exemplo a baixo.

$$\frac{1}{1} = 1; \frac{1}{10} = 0,1; \frac{1}{100} = 0,01; \frac{1}{1000} = 0,001; \frac{1}{10000} = 0,0001; \frac{1}{100000} = 0,00001; \dots$$

Através disso, é possível observar que, “[...] considerar algo infinito em potência significa considerar que uma sequência pode ser aumentada tanto quanto se queira por adições ou multiplicações sucessivas, ou diminuída tanto quanto se queira por divisões sucessivas.” (MACHADO et al., 2013, p. 290)

Diferente do infinito potencial o infinito atual, que na visão de Sena (2011) não se trata de um processo no qual se repete infinitamente, mas sim de uma representação do todo. “O infinito atual não é um processo, é ele próprio um número.” (SENA, 2011, p.13). Na visão de Siqueira e Lorin (2021) ele é tratado como um objeto Matemático.

Pode-se entender essas duas ideias na matemática, tomando como exemplo a dízima periódica 0,9999..., ao imaginar que é sempre possível acrescentar mais um algarismo, neste caso, o número 9 e entender que este processo nunca terminará, isto trata-se do infinito potencial. Já se entender que 0,999... é igual a 1, estará tratando, portanto, do infinito atual (MOMETTI, 2007 apud PIMENTEL, SANTOS, MOMETTI. 2010, p.55)

Outro exemplo que diferencia o infinito atual do potencial é quando olhamos para os números naturais, se consideramos eles como uma sequência de números sem fim que cada vez mais adiciona um novo elemento $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, então estamos diante do infinito potencial. Agora, se olharmos para eles como um todo representado pelo símbolo \mathbb{N} , então temos o infinito atual.

2.1 Noções básicas de conjuntos e funções

Para entendermos a diferença entre os conjuntos finitos e infinitos, precisamos definir inicialmente alguns conceitos básicos de conjuntos e funções que irão facilitar o entendimento do tema.

Definição 1 “Um conjunto é constituído de objetos chamados elementos. Usamos a notação $x \in A$ (lê-se x pertence a A) para dizer que x é um elemento do conjunto A . se x não é um elemento de A , então escrevemos $x \notin A$ (lê-se x não pertence a A)” (NERI, CABRAL, 2010, p.1)

A lista de elementos de um conjunto pode ser caracterizada escrevendo os seus componentes separando-os por vírgulas “,” dentro de chaves “{}”.

Exemplo 1 Seja B um conjunto cujo seus elementos são 2, 4, 6, 8 e 10. Escrevemos $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Temos $4 \in B$, $10 \in B$ e $15 \notin B$.

Definição 2 “Dizemos que A é um subconjunto de B ou que A é uma parte de B , ou ainda, que A está contido em B e escrevemos $A \subset B$ se todo elemento de A pertence a B . Dizemos também que B contém A e escrevemos $B \supset A$.” (NERI, CABRAL, 2010, p.1)

Definição 3 “Quando $A \subset B$ e $B \subset A$, os conjuntos A e B são ditos iguais e escrevemos $A = B$. Caso contrário eles são diferentes e escrevemos $A \neq B$. A notação $A \subsetneq B$ (ou $B \supsetneq A$) é uma abreviação para $A \subset B$ com $A \neq B$, neste caso dizemos que A é um subconjunto próprio de B .” (NERI, CABRAL, 2010, p.2)

De acordo com a **Definição 3**, se tivermos um conjunto X e um subconjunto próprio Y , significa que existe pelo menos um elemento em X que não irá pertencer a Y , porém todos os elementos de Y pertencem a X .

Exemplo 2 seja $A = \{4, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 10\}$. Temos $A \subsetneq B$, ou seja, o conjunto A está contido em B porém são conjuntos diferentes.

Exemplo 3 Sejam $A = \{1, 2, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 5, 7, 8, 10\}$. Neste caso A não está contido em B , pois $1 \in A$ e $1 \notin B$, significa que existe um elemento contido em A que não pertence ao conjunto B . Pela **Definição 2**, para que A esteja contido em B necessita que todos os seus elementos pertençam a B .

Definição 4 “O conjunto vazio, denotado por \emptyset , é um conjunto que não possui nenhum elemento, ou seja, não existe x tal que $x \in \emptyset$.” (NERI, CABRAL, 2010, p.2)

Através da prova por absurdo podemos mostrar que o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto. Considerando que exista um conjunto Y tal que \emptyset não esteja contido em Y . Como foi mostrado na **Definição 2**, isso significa que existe um elemento qualquer que pertence a \emptyset tal que esse elemento não esteja em Y , porém por definição, não existe nenhum elemento pertencente a \emptyset , gerando assim uma contradição, isso nos abriga a concluir que \emptyset está contido em Y ($\emptyset \subset Y$), pois caso contrário chegaríamos a uma conclusão absurda.

Definição 5 “Quando C é um conjunto de conjuntos (para simplificar a linguagem) dizemos que C é uma coleção, uma classe ou uma família de conjuntos. Elementos de C são comumente chamados de membros.” (NERI, CABRAL, 2010, p.3)

Definição 6 “Dados X, Y conjuntos quaisquer, chamaremos de intersecção de X e Y o conjunto $X \cap Y$, formado pelos elementos que pertencem tanto a X quanto a Y .” (VICTOR, 2019, p.19)

Exemplo 4 Dados os conjuntos A e B , com $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, a intersecção de X e Y é o número 3. $A \cap Y = \{3\}$.

Definição 7 “Dados n natural e A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos arbitrários, definimos sua intersecção como o conjunto $A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, que denotamos por: $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$.” (VICTOR, 2019, p.21)

A notação $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ significa que temos a intersecção entre todos os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n que se inicia no 1 e vai até o n .

Definição 8 “Dados X, Y conjuntos quaisquer, chamaremos de união de X e Y o conjunto $X \cup Y$, formado pelos elementos que pertencem a X ou a Y .” (VICTOR, 2019, p.22)

Exemplo 5 sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5, 6\}$, a união dos dois elementos é $A \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definição 9 “Dados n natural e A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos arbitrários, definimos sua união como o conjunto $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ que denotamos por: $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$.”

A notação $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ significa que temos a união entre todos os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n que se inicia no 1 e vai até o n .

Definição 10 “Dados dois objetos a e b definimos o par ordenado (a, b) cuja primeira coordenada é a e a segunda é b . Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se eles forem iguais coordenada por coordenada; $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.” (NERI, CABRAL, 2010, p.4)

Definição 11 “Dados dois conjuntos A e B existe um conjunto chamado de produto cartesiano de A e B (denotado $A \times B$) formado pelos pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. Em símbolos: $A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}$.” (NERI, CABRAL, 2010, p.4)

Definição 12 “Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Chama-se função $f: A \rightarrow B$ a regra f que leva todos elementos de A a elementos de B de maneira única. $f: A \rightarrow B$ é lido como: ‘ f é a função de A em B .’” (Zahn, 2022, p.32), para cada elemento $x \in A$ tem um correspondente único $f(x)$ (lê-se f de x) em B .

Definição 13 “Dada uma função $f: A \rightarrow B$, chamamos A de domínio da f , ou campo de existência, e chamamos B de contradomínio da f . O conjunto dos valores em B que recebem os valores de A , mediante a transformação f , é chamado de imagem de f .” (ZAHN, 2022, p.32)

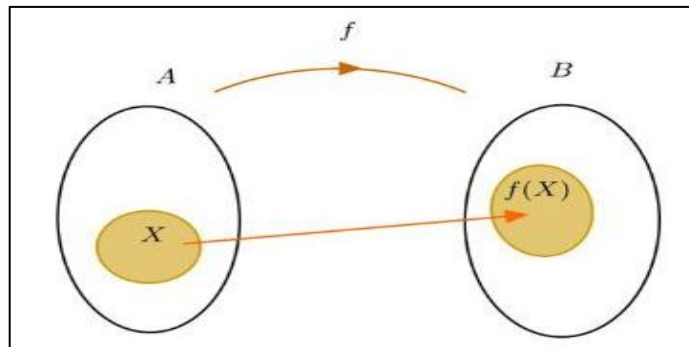
Todo $x \in A$ possui uma imagem $f(x) \in B$. Pode existir um y que pertence a B , mas que não será imagem de nenhum $x \in A$. “Entretanto, o mesmo elemento $y \in B$ pode ser imagem de mais de um elemento de A [...]” (NERI, CABRAL, 2010, p.6), ou seja, poderá ocorrer $f(x_1) = f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$.

Definição 14 “Sejam $f, g: A \rightarrow B$ duas funções. Dizemos que f e g são iguais se são dadas pela mesma regra de associação, ou seja, se $f(x) = g(x) \forall x \in A$.” (NERI, CABRAL, 2010, p.6)

Definição 15 “Sejam A e B dois conjuntos não vazios, $X \subset A$ e $f: A \rightarrow B$ uma função. Definimos a imagem direta de X por f , e denotamos por $f(X)$ o conjunto de todos $y \in B$, tais que $y = f(x)$, com $x \in X$. Mais precisamente, $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.” (ZAHN, 2022, p.32)

A imagem abaixo é uma representação na forma de diagramas da definição de imagem direta.

Figura 2- Imagem direta

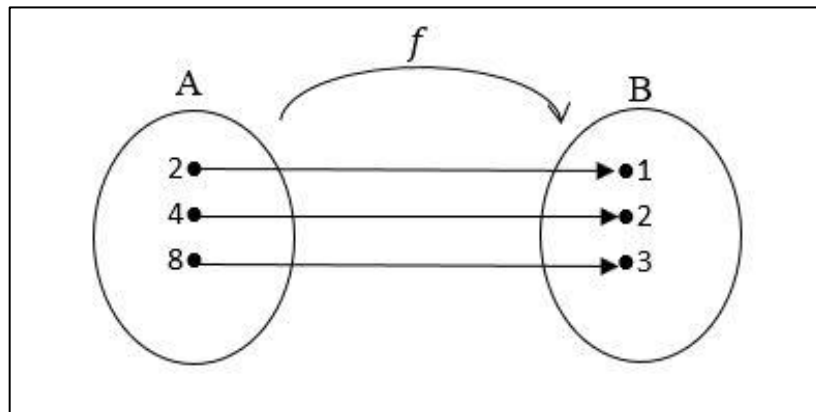


Fonte: Zahn (2022, p.33).

Definição 16 “ f é injetiva (ou injetora) se dados $x_1, x_2 \in A$, então $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$. Ou seja, não há elementos distintos de A que têm imagens iguais por f .” (GROKOSKI, 2020, p.9)

A definição a cima é o equivalente a dizer que dados $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1)$ será diferente do $f(x_2)$. A imagem abaixo é uma representação na forma de diagramas da definição de função injetora definida pela função $f: A \rightarrow B$, onde $A = \{2, 4, 8\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$. Observe que para cada elemento diferente de A tem um correspondente em B, não existindo elementos em B com mais de um correspondente em A. Assim f é injetiva.

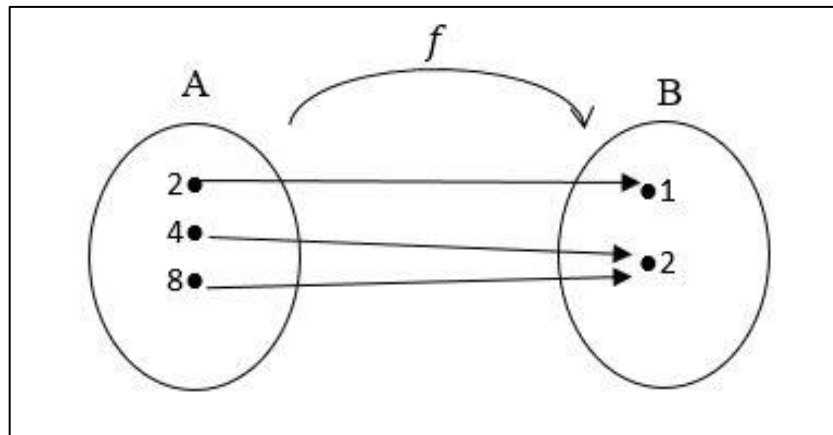
Figura 3 - injetora ou injetiva



Fonte: Produzido pelo autor

Na imagem a seguir é mostrado um exemplo de quando a função não será injetiva, pois há um elemento em B que é imagem de dois elementos distintos em A, considerando que $A = \{2, 4, 8\}$ e $B = \{1, 2\}$.

Figura 4 - Função não injetiva

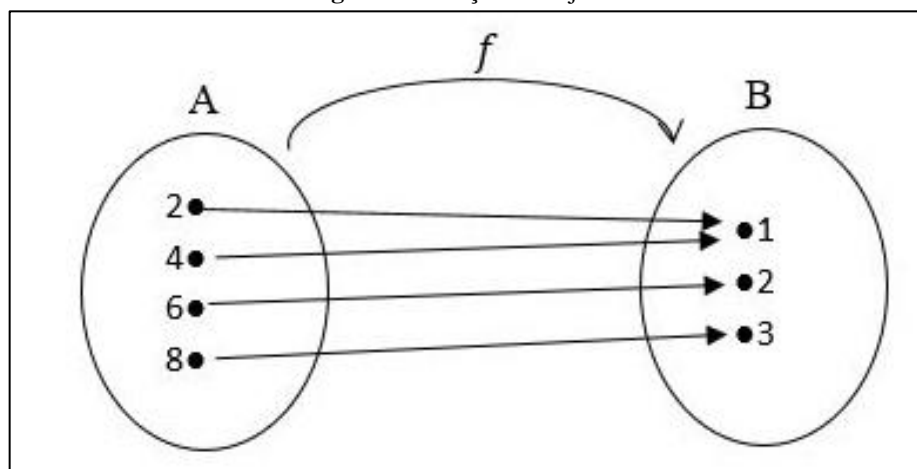


Fonte: Produzido pelo autor

Definição 17 “ f é sobrejetiva (ou sobrejetora) se para todo $y \in B$ existe $x \in A$, tal que $f(x) = y$. Isto é, todo elemento do contradomínio é imagem de algum elemento do domínio.” (GROKOSKI, 2020, p.9)

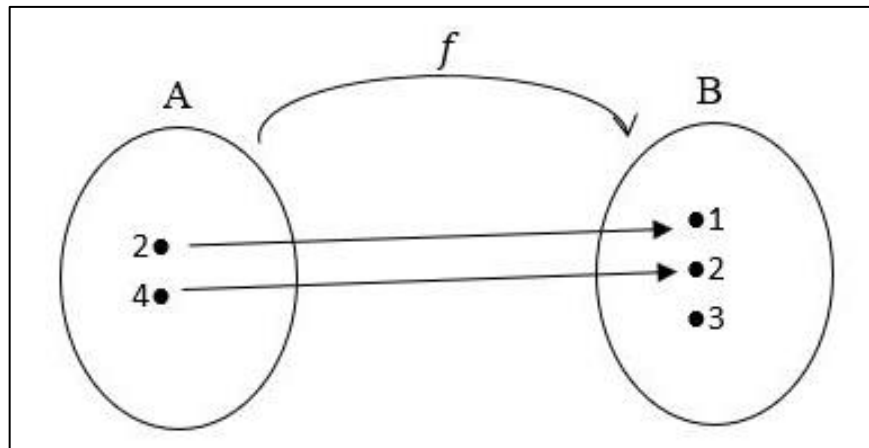
Isso significa que dado uma função $f: A \rightarrow B$, f será sobrejetiva se todos os elementos de B forem imagem de pelo menos um elemento de A . As imagens adiante são exemplos na forma de diagramas de função sobrejetora e função não sobrejetora respectivamente. No primeiro caso foi usado $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, no segundo $A = \{2, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$.

Figura 5 - Função sobrejetora



Fonte: Produzido pelo autor

Figura 6 - Função não sobrejetora



Fonte: Produzido pelo autor

Note que uma função ela pode ser sobrejetora e não ser injetora, da mesma forma que pode ser injetora e não ser sobrejetora, ela também pode ser sobrejetora e injetora ao mesmo tempo nesse caso chamamos ela de bijetora.

Definição 18 “Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita bijetiva ou bijeção se ela é injetiva e sobrejetiva.” (NERI, CABRAL, 2010, p.8)

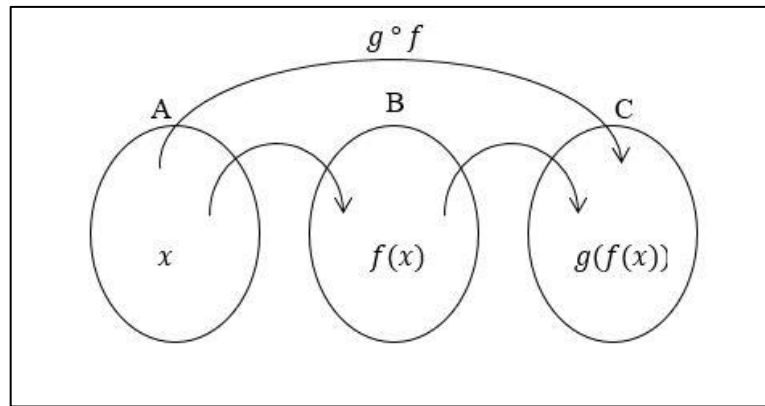
Definição 19 “Sejam $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ função tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f . Neste caso, podemos definir a função composta $g \circ f: A \rightarrow C$, que consiste em aplicar primeiro f e depois g .” (LIMA, 1976, p.16)

I. “O domínio de $g \circ f: A \rightarrow C$ é o domínio de f .” (GROKOSKI, 2020, p.9)

II. “O contradomínio de $g \circ f$ é o contradomínio de g .” (GROKOSKI, 2020, p.9)

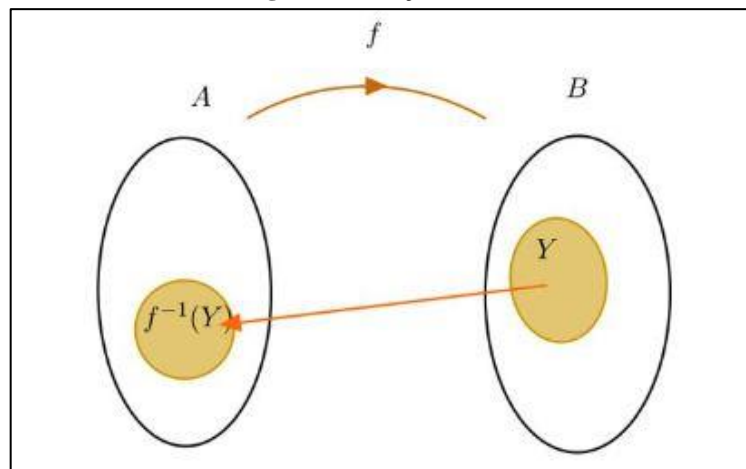
III. “Se $x \in A$, a imagem de x por $g \circ f$ será $g(f(x))$.” (GROKOSKI, 2020, p.9)

Abaixo temos um esquema ilustrando a **Definição 19**.

Figura 7 - Função composta

Fonte: Produzido pelo autor

Definição 20 “Sejam $f: A \rightarrow B$ uma função e $Y \subset B$. Definimos a imagem inversa do conjunto Y pela f ou pré-imagem de Y por f como o conjunto de todos os dominios de Y pela f , em símbolos, $f^{-1} = \{ x \in A: f(x) \in Y \}$.” (ZAHN, 2022, p.32)

Figura 8 - Função Inversa

Fonte: Zahn (2022, p.35).

2.2 Conjunto dos naturais

O conjunto dos números naturais é o primeiro dos conjuntos numéricos a ser apresentado nas escolas. Desde o ensino primário até a pós-graduação sua utilização é de grande importância, sendo representado pelo símbolo \mathbb{N} . Ele é caracterizado através dos três axiomas de Peano.

1º “Existe uma função injetiva $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural $n \in \mathbb{N}$ chama-se o sucessor de n .” (LIMA, 2009, p.1)

O primeiro axioma significa que todo número natural deve ter um sucessor, que ainda pertence aos naturais. Por ser uma função injetiva conseqüentemente, números diferentes devem ter sucessores diferentes.

2° “Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.” (LIMA, 2009, p.1)

O segundo axioma fala que o número 1 não será sucesso de nenhum número.

3° “Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$) então $X = \mathbb{N}$.” (LIMA, 2009, p.1)

O terceiro axioma é conhecido como princípio da indução finita, ele diz que se um conjunto contém o número 1 e contém também todos os sucessores de seus elementos, então esse conjunto será igual aos números naturais. “Intuitivamente, ele significa que todo número natural n pode ser obtido a partir de 1, tomando-se seu sucessor $s(1)$, o sucessor deste, $s(s(1))$, e assim por diante, com um número finito de etapas.” (LIMA, 2009, p.2)

O conjunto dos números naturais são definidos através de duas operações fundamentais: “a adição, que associa a cada par de números (m, n) sua soma $m + n$, e a multiplicação, que faz corresponder ao par (m, n) seu produto $m \cdot n$.” (LIMA, 2009, p.2), através dessas operações temos as seguintes igualdades:

- $m + 1 = s(m)$;
- $m + s(n) = s(m + n)$, isto é, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$;

Segundo Lima (2009, p.2) “Somar 1 a m significa tomar o sucessor de m . E se já conhecemos a soma $m + n$ também conheceremos $m + (n + 1)$, que é o sucessor de $m + n$.”

- $m \cdot 1 = m$;
- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

Lima (2009, p.2) também fala que “Multiplicar por 1 não altera o número. E se conhecemos o produto $m \cdot n$, conheceremos $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.”

Definição 21 “Dados os números naturais m, n , escreve-se $m < n$ quando existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$. Diz-se então quem m é menor do que n . A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$.” (LIMA, 2009, p.3)

Através da **Definição 21** que fala da relação de ordem de m e n é encontrado o princípio da boa ordenação. Que diz: “Todo subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento, isto é, um elemento $n_0 \in A$ tal que $n_0 < n$ para todo $n \in A$.” (LIMA, 2009, p.3)

Se $1 \in A$ então 1 será o menor elemento de A . Caso $1 \notin A$, considere X sendo o conjunto dos números naturais n tais que $I_n \subset \mathbb{N} - A$. Com $I_1 = \{1\} \subset \mathbb{N} - A$ vemos que $1 \in X$, como A não é um conjunto vazio, deduzimos que $A \neq \mathbb{N}$. Logo deve existir $n \in X$ tal que o seu sucessor $(n + 1)$ não pertence a X . Então $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N} - A$, o menor elemento n_0 é igual ao $n + 1 \in A$.

2.3 Diferença entre conjuntos finitos e infinitos

A diferença entre um conjunto finito e um conjunto infinito é bem intuitiva, pois podemos imaginar que um conjunto finito é aquele no qual apresenta um limite na quantidade de seus elementos, ou seja, apresenta um fim, por exemplo, considere o conjunto A parte dos números naturais na qual tem elementos maiores ou iguais a 1 e elementos menores ou iguais a 10, então o conjunto A possui os elementos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, podemos observar que o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, apresenta uma quantidade limitada de componentes chegando ao fim da sequência dos elementos.

Já um conjunto infinito é o oposto do finito, não existindo limites na quantidade de seus elementos, como exemplo pode ser utilizado o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Essas são formas intuitivas de pensar nos conjuntos finitos e infinitos.

Para definir esses conjuntos matematicamente considere a notação:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{1\} \\ I_2 &= \{1, 2\} \\ I_3 &= \{1, 2, 3\} \\ &\dots \\ I_n &= \{1, 2, 3, \dots, n\} \end{aligned}$$

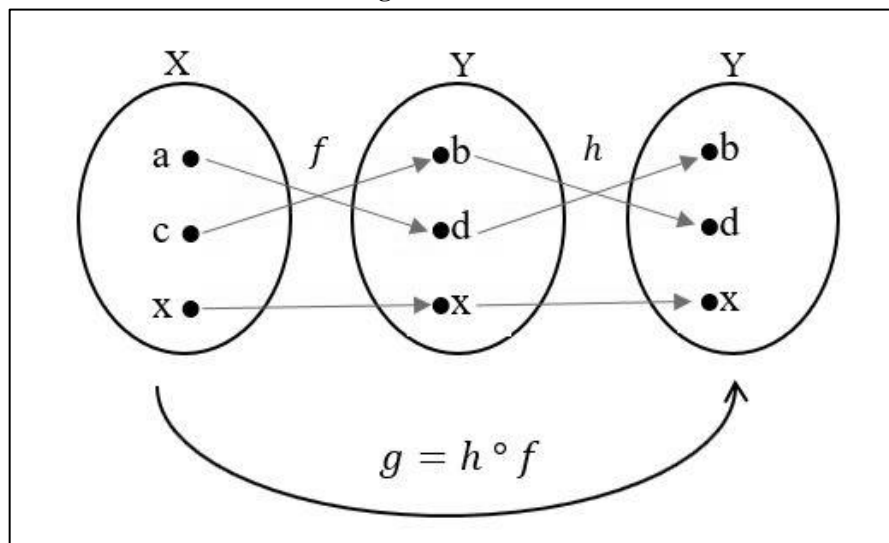
Definição 22 “Um conjunto X diz-se finito quando é vazio ou então existe $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$.” (LIMA, 2006, p.3)

No primeiro caso quando X for vazio significa que ele tem zero elementos, no segundo a bijeção $f: I_n \rightarrow X$ corresponde a uma contagem dos elementos presente em X ,

portanto temos que $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \dots, x_n = f(n)$, então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Isso simboliza que X Tem n elementos.

Lema 1 “Se existe uma bijeção $f: X \rightarrow Y$ então, dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção $g: X \rightarrow Y$ tal que $g(a) = b$.” (LIMA, 2009, p4)

Figura 9 - Lema 1



Fonte: Produzido pelo autor

Seja $f(a) = d, (d \neq b)$. Como f é sobrejetora, irá existir um $c \in X$ tal que $f(c) = b$. Podemos definir uma função $h: Y \rightarrow Y$ com $h(b) = d, h(d) = b$ e $h(x) = x$ para outros valores $x \in Y$. definindo $g = h \circ f$, temos $g(a) = h(f(a)) = h(d) = b \Leftrightarrow g(a) = b$.

Teorema 1 “Se A é um subconjunto próprio de I_n , não pode existir uma bijeção $f: A \rightarrow I_n$ ” (LIMA, 2009, p4)

Para provar o **Teorema 1**, Lima (2009) utiliza o método da prova por absurdo. Ele Considere que o teorema seja falso e que $n_0 \in \mathbb{N}$ é “o menor número natural para o qual existem um subconjunto próprio $A \subset I_{n_0}$ e uma bijeção sobre $f: A \rightarrow I_{n_0}$.” (LIMA, 2006, p.4), note que n_0 deve ser maior que 1, pois se $n_0 = 1$ o conjunto $I_1 = \{1\}$, $A \neq I_1$, então $A = \emptyset$, e nesse caso não existe nenhuma função $f: A \rightarrow I_1$. Com o $n_0 > 1$, teremos duas possibilidades.

1° possibilidade: $n_0 \in A$ então, através do **Lema 1** podemos ter uma bijeção $g: A \rightarrow I_{n_0}$ com $g(n_0) = n_0$, g restrita a $A - \{n_0\}$ tem bijeção com $g: A - \{n_0\} \rightarrow I_{n_0} - \{n_0\}$.

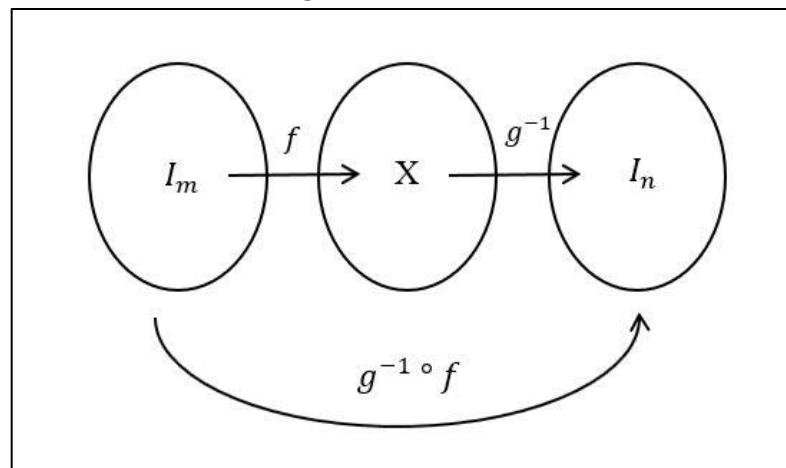
Absurdo, pois n_0 é o menor elemento com a propriedade, concluímos então que não existe o n_0 .

2° possibilidade: $n_0 \notin A$, seja $a \in A$ tal que $f(a) = n_0$, f restrita a $A - \{a\} \subset I_{n_0-1}$ tem bijeção com $f: A - \{a\} \rightarrow I_{n_0-1}$. Absurdo, pois n_0 é o menor elemento com a propriedade, concluímos então que não existe o n_0 .

Esse teorema em outras palavras significa que não existe uma bijeção entre um conjunto finito e seu subconjunto próprio.

Corolário 1 “Se $f: I_m \rightarrow X$ e $g: I_n \rightarrow X$ são bijeções então $m = n$.” (LIMA,2009, p.4)

Figura 10 - Corolário 1



Fonte: Produzido pelo autor

Utilizando a prova por absurdo, consideramos que $m < n$ então $I_m \subset I_n$ e $I_m \neq I_n$, o que desobedece ao **Teorema 1**, pois $g^{-1} \circ f: I_m \rightarrow I_n$ é uma bijeção. Isso irá valer também se considerarmos $n < m$. Logo admitir que $m \neq n$ transforma a expressão em um absurdo.

Definição 23 “Diz-se que um conjunto é infinito quando não é finito. Assim, X é infinito quando não é vazio nem existe, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f: I_n \rightarrow X$.” (LIMA, 2006, p.5)

Através das definições propostas por Lima (2006) podemos observar que o conjunto infinito é o oposto do finito, quando um conjunto não satisfizer as propriedades do conjunto finito automaticamente podemos concluir que é um conjunto infinito.

Teorema 2 “Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$.” (LIMA,2009, p.6)

Tome um $x_1 \in X$ com $f(1) = x_1$, definimos um conjunto $A_1 \subset X$, $A_1 \neq \emptyset$. Considere $A_1 = X - \{x_1\}$, como A_1 não é um conjunto vazio temos um $x_2 \in X$ com $f(2) = x_2$. Definimos um conjunto $A_2 \subset X$, $A_2 \neq \emptyset$. Considere $A_2 = X - \{x_1, x_2\}$, como A_2 não é um conjunto vazio temos um $x_3 \in X$ com $f(3) = x_3$. Expandindo esse raciocínio definimos um conjunto $A_n \subset X$, $A_n \neq \emptyset$, então $A_n = X - \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ como A_n não é um conjunto vazio temos um $x_{n+1} \in X$ com $f(n+1) = x_{n+1}$. Dessa para qualquer $n \in \mathbb{N}$, conseguimos relacionar n com algum x_n .

Corolário 2 “Um conjunto X é infinito se, e somente se, existe uma bijeção $\varphi: X \rightarrow Y$ sobre um subconjunto próprio.” (LIMA,2009, p.6)

Suponha que o conjunto X é infinito, como mostrada no **Teorema 2** existe uma função injetiva $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Se Y é subconjunto próprio de X então pode ser representado como $Y = X - \{x_1\}$. Determinamos a função $\varphi: X \rightarrow Y$ do seguinte modo: $\varphi(x) = x$ se x não é um dos x_n e $\varphi(x_n) = x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Portanto, φ é uma bijeção. Reciprocamente, pelo **Teorema 1**, um conjunto finito não faz bijeção com um subconjunto próprio, então se X tem bijeção com algum subconjunto próprio ele será infinito.

2.4 Conjuntos Enumeráveis e não Enumeráveis

Como vimos no tópico de conjuntos finitos e infinitos, o conjunto dos naturais é usado para contagens. Quando queremos contar, por exemplo, a quantidade de pessoas em uma sala de aula, relacionamos cada aluno a um elemento do conjunto dos naturais, seguindo a sua ordem usual. Dessa forma conseguimos saber quantos alunos estão presentes e assim podemos comparar a quantidade de alunos com outras salas, identificando quem tem mais, quem tem menos ou se possuem a mesma quantidade. É desse modo também que comparamos os conjuntos numéricos, sejam eles finitos ou infinitos é utilizado os números naturais como base para medir seu tamanho. O conceito de enumerável nada mais é que a possibilidade de fazer uma lista com os elementos de um conjunto podendo assim medir seu tamanho. De acordo com Lima (2009) foi Georg Cantor o responsável por aprimorar esse pensamento, desenvolvendo técnicas para comparar o tamanho dos conjuntos infinitos.

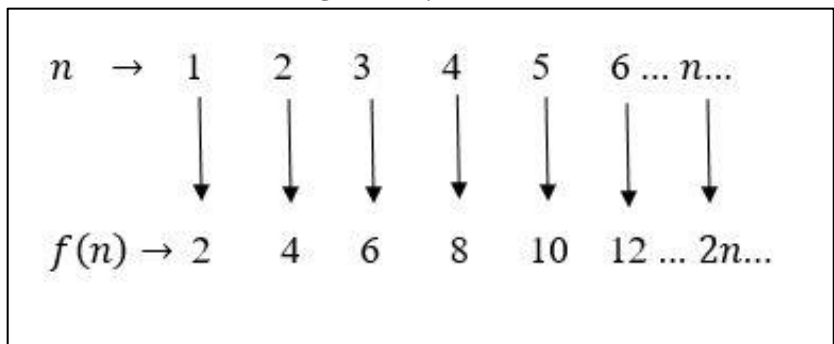
Definição 24 “Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. Neste caso, f chama-se uma enumeração dos elementos de X . Escrevendo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$, tem-se então $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$.” (LIMA, 2009, p.7)

Se não for possível fazer uma lista enumerando os elementos de um conjunto, este será um conjunto não-enumerável, ou seja, ele não será equivalente ao conjunto dos números naturais. Dizemos então que esse conjunto não enumerável tem mais elementos que os naturais.

Exemplo 4 O conjunto dos números naturais é enumerável. A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida como $f(x) = x$ é bijetora.

Exemplo 5 O conjunto dos números naturais pares é infinito enumerável. Representando o conjunto dos números naturais pares pelo símbolo P , podemos fazer a bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow P$, para qual $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) = 2n$.

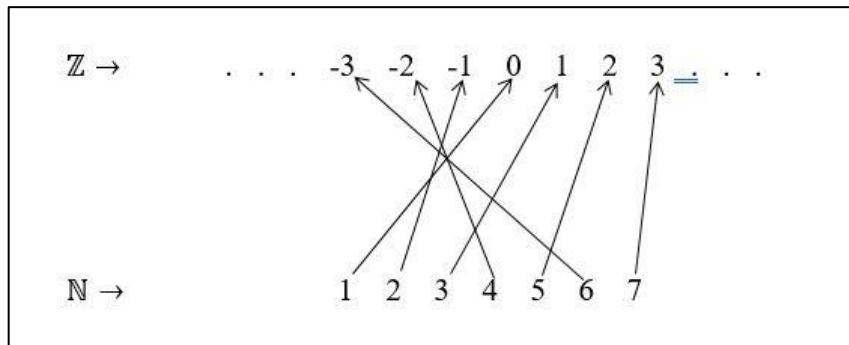
Figura 11 - $f(n) = 2n$



Fonte: Produzido pelo autor

Exemplo 6 O conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros é enumerável. A função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ pode ser definida do seguinte modo: $f(n) = \frac{n-1}{2}$ se n for ímpar e $f(n) = \frac{-n}{2}$ se n for par é bijetora.

Figura 12 - $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$



Fonte: Produzido pelo autor

Como pode ser observado na imagem a cima, temos os \mathbb{N} pares ligados aos \mathbb{Z} negativos, os \mathbb{N} ímpares ligados aos \mathbb{Z} positivos. Formando uma bijeção.

Teorema 3 “Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável” (LIMA, 2009, p.7)

Se X é finito ele é enumerável de acordo com a **Definição 24**, caso ele seja infinito é válida a bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ definida do seguinte modo: $f(1)$ o menor elemento de X , $f(2)$ o menor elemento de $X - \{f(1)\}$ e assim sucessivamente. De modo que atenda as seguintes condições: (a) $f(1) < f(2) < \dots < f(n)$, ou seja, $f(m) < f(n)$ se $m < n$. Implica que f é injetiva. (b) $n \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por indução temos: para $n = 1$, $1 \leq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq f(1)$, pois $f(1) \in X \subset \mathbb{N}$. Supondo que o resultado é válido para n :

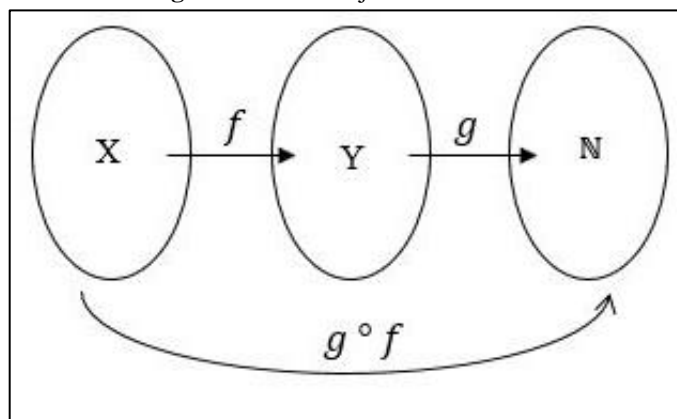
$$n \leq f(n) \Rightarrow f(n) < f(n+1)$$

$$n < f(n+1) \Rightarrow n+1 \leq f(n+1)$$

Logo temos a validade para $n+1$, portanto $n \leq f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para que f seja sobrejetiva precisamos provar que $m \in \{f(1), \dots, f(m)\}$. Por absurdo suponha que $m \notin \{f(1), \dots, f(m)\}$, logo $m \in X - \{f(1), \dots, f(m)\} \Rightarrow f(m+1) \leq m$, pois $f(m+1)$ é o menor elemento $X - \{f(1), \dots, f(m)\}$. Porém, $m+1 \leq f(m+1) \Rightarrow m+1 \leq m$, gerando um absurdo pois contradiz o que provamos anteriormente. Portanto, f é sobrejetiva.

Corolário 3 “Seja $f: X \rightarrow Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.” (LIMA, 2009, p.7)

Figura 13 - Subconjunto Enumerável



Fonte: Produzido pelo autor

Se X é finito ele é enumerável de acordo com a **Definição 24**, se X é infinito basta considerar que existe uma bijeção $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$. Então $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$ é bijeção de X sobre um subconjunto de \mathbb{N} , o qual é enumerável, pelo **Teorema 3**.

Corolário 4 “Seja $f: X \rightarrow Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.” (LIMA, 2009, p.7)

Exemplo 7 O produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n); m \in \mathbb{N} \text{ e } n \in \mathbb{N}\}$, através da fatoração de naturais como produtos de primos podemos criar a função $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(m, n) = 2^m 3^n$ é injetiva, pois $(m, n) \neq (x, y)$ geraram imagens diferentes, então pelo

Corolário 3 o produto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Mesmo sendo injetiva a função $f(m, n) = 2^m 3^n$ não será sobrejetora, pois existem números em seu contra domínio que não são imagens, por exemplo o número 7, ele não é imagem dessa função, porém está no contra domínio.

Corolário 5 “O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.” (LIMA, 2009, p.7)

Em outras palavras significa que dados dois conjuntos A e B enumeráveis, então $A \times B$ é enumerável. $A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}$, por serem enumeráveis as funções $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ e $g: B \rightarrow \mathbb{N}$ são bijetoras. Para provar o corolário basta mostra que a função $h: A \times B \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é injetiva. Definindo a função como $h(a, b) = (f(a), g(b))$ temos que: $h(a, b) = h(c, d) \Leftrightarrow (f(a), g(b)) = (f(c), g(d)) \Leftrightarrow f(a) = f(c) \text{ e } g(b) = g(d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$, dessa forma dados dois pares ordenados eles terão imagens iguais se e somente se eles forem iguais. Pelo **Corolário 3** $A \times B$ é enumerável.

Corolário 6 “A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.” (LIMA, 2009, p.8)

Dados $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ enumeráveis, existem as sobrejeções $f_1: \mathbb{N} \rightarrow X_1, f_2: \mathbb{N} \rightarrow X_2, \dots, f_n: \mathbb{N} \rightarrow X_n, \dots$ tomando $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ definimos a sobrejeção $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$ colocando $f(m, n) = f_n(m)$. Se $x \in X$ e $x \in X_i (i \in \mathbb{N})$, então irá existir a bijeção $f_i: \mathbb{N} \rightarrow X_i, f(m, i) = x$, provando a sua sobrejetividade. Pelo **Corolário 4** a reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

Exemplo 8 O conjunto $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}^*\}$ dos números racionais é enumerável. Uma injeção $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pode ser definida pondo $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m, n)$, para garantir que a função seja

injetiva o máximo divisor comum entre m e n deve ser 1, com $n > 0$. Dessa forma dois números diferentes do domínio terão imagens distintas. Pelo **Corolário 3** o conjunto dos números racionais é enumerável.

Outra forma de provar que os racionais são enumeráveis é listando todos os seus valores possíveis. Como mostra a Figura 14, a primeira linha são todos os valores possíveis de n e a primeira coluna é todos os valores possíveis de m .

Figura 14 - Enumeração dos Racionais

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$...
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$...
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$...
6	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	

Fonte: Delfino (2015, p.10)

Após listar todos os valores possíveis de m e n , em seguida é preciso definir a relação de ordem entre as frações, podendo ser feita pegando os números na diagonal conforme mostra a figura abaixo.

Figura 15 - Racionais na diagonal

$\frac{1}{1}$	\rightarrow	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	\rightarrow	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$...
	\swarrow		\nearrow	\swarrow		\nearrow	
$\frac{2}{1}$		$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$...
	\nearrow		\swarrow	\nearrow			
$\frac{3}{1}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$...
	\swarrow		\nearrow				
$\frac{4}{1}$		$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$...
	\nearrow						
$\frac{5}{1}$		$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$		$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$...
\vdots		\vdots	\vdots		\vdots	\vdots	

Fonte: Delfino (2015, p.10)

Em cada linha é fixado um numerador e os denominadores aumentando seguindo a ordem dos naturais. Na primeira coluna tem todas as frações com denominadores 1, na segunda todas as frações com denominadores 2 e assim sucessivamente. Dessa forma podemos fazer uma relação biunívoca, um para um com os naturais. Conforme mostra a Figura 16.

Figura 16 - Racionais par a par com os Naturais

1	2	3	4	5	6	7	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$...

Fonte: Delfino (2015, p.10)

Exemplo 9 O conjunto \mathbb{R} dos números reais é não enumerável. Para provar essa afirmação basta mostra que os números reais entre 0 e 1 são não enumeráveis, esse intervalo será representado por $[0,1]$. Será utilizado o método da diagonal de Cantor.

Supondo por absurdo que o intervalo entre 0 e 1 é enumerável, então é possível listar todos os seus elementos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [0,1] &= \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}, \\
 x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots \\
 x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots \\
 x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 x_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Tal que a_{ij} pode ser um número entre 0 e 9, e cada decimal de x_i irá possuir um número infinito de elementos. Pode-se construir o seguinte número decimal: $y = 0, b_1b_2b_3 \dots b_n \dots$, tal que b_1 seja diferente a_{11} , b_2 seja diferente a_{22} , b_3 seja diferente a_{33} , e assim por diante. $y \in [0,1]$ porém é diferente de qualquer $x_i, \forall i \in \mathbb{N}$, listado anteriormente gerando uma contradição pois se $y \in [0,1]$, então ele não deveria pertencer $[0,1]$, por que

em teoria já foi listado todos os números do intervalo. Assim o intervalo $[0,1]$ é não enumerável. Como $[0,1] \subset \mathbb{R}$, ou seja, os números reais tem subconjuntos não enumeráveis, conseqüentemente ele será não enumerável.

Exemplo 10 O conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é não enumerável. Como \mathbb{R} não é enumerável e \mathbb{Q} é enumerável, então $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ não pode ser enumerável pois contraria o **Corolário 3**.

3 PARADOXOS

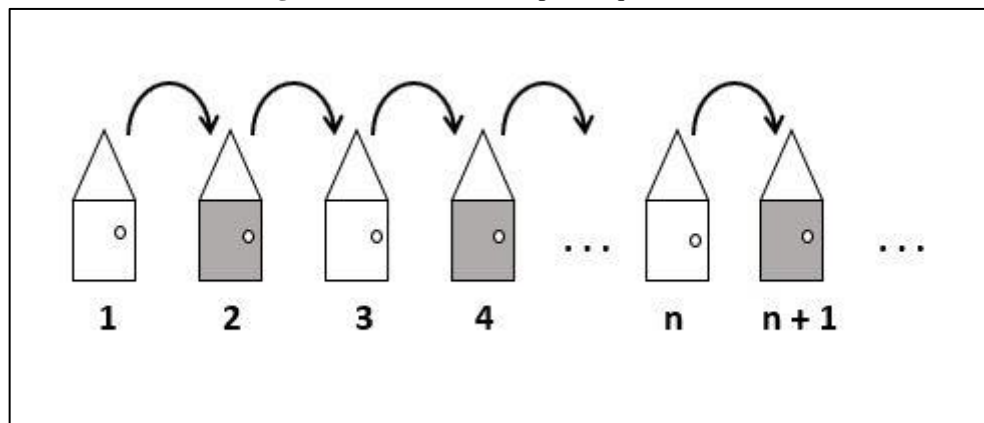
Devido a sua natureza contra intuitiva e abstrata, o infinito causou alguns impasses ao longo da história, gerando assim paradoxos. “[...] um paradoxo é uma proposição que contém ou parece conter uma contradição lógica, ou um raciocínio que, se bem que sem aparente lacuna, leva a um absurdo, ou ainda, uma situação que contraria a intuição comum.” (BALIEIRO FILHO, 2010, p. 1753)

3.1 Paradoxo Hotel de Hilbert

O paradoxo do Hotel de Hilbert, segundo Sentone (2017) foi idealizado pelo Matemático alemão David Hilbert, que apresenta algumas das relações existentes entre um conjunto infinito e seus subconjuntos, funcionando de forma diferente dos conjuntos finitos. Esse paradoxo diz que o hotel tem infinitos quartos numerados com naturais consecutivos e sempre está lotado, porém sempre existirá mais uma vaga disponível. Isso é uma contradição pois como ele poderia ter mais uma vaga se sempre está lotado.

Imagine que em uma noite qualquer, o hotel estando lotado e chega mais um hospede, o recepcionista diz que o hotel está lotado, mas pode dar um jeito para acomodar o cliente novo. Para alojar o hospede ele transfere as pessoas do quarto 1 para o 2, do quarto 2 para o 3, do quarto n para o $n + 1$ e assim por diante, repetindo o processo infinitamente. Dessa forma o quarto 1 ficara disponível para o novo hospede e todos ficaram acomodados.

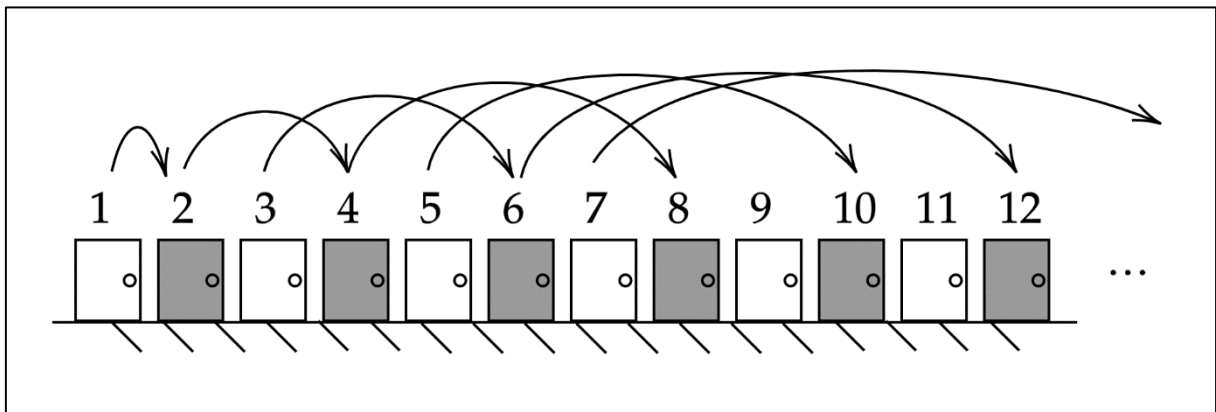
Figura 17 - Transferência para o quarto $n + 1$



Fonte: Produzido pelo autor

Logo depois chega um ônibus com infinitos passageiros, para arrumar vaga a esses novos clientes o recepcionista solicita que o hospede do quarto 1 passe para o quarto 2, do quarto 2 para o 4, do quarto 3 para o 6, do quarto n para o quarto $2n$ e assim sucessivamente. Dessa forma os quartos de números pares ficaram ocupados, enquanto os de números ímpares ficaram vagos. Como os números ímpares são infinitos então será possível alojar os infinitos passageiros.

Figura 18 - Transferência para o quarto $2n$



Fonte: (Macmanus, 2020)

Em seguida chega mais ônibus no hotel, agora são infinitos ônibus com infinitos passageiros. Para acomodar os novos clientes o recepcionista solicita que os hospedes do quarto 1 passe para o quarto 2, do quarto 2 para o 4, do quarto 3 para o quarto 8, de forma que o hospede de quarto n passe para o quarto 2^n . Os passageiros do primeiro ônibus devem se dirigir para o quarto cujos os números sejam o resultado de 3 elevado ao número de seu assento. Por exemplo, o primeiro passageiro do primeiro ônibus vai para o quarto de número 3^1 , o segundo para o quarto 3^2 , o terceiro para o quarto 3^3 , de forma que o passageiro de número n se dirija para o quarto 3^n . Os passageiros do segundo ônibus serão acomodados nos quartos cujos os números sejam o resultado de 5 elevado ao número de seu assento no ônibus, ou seja, o passageiro n vai para o quarto 5^n . Os próximos ônibus deveram seguir a sequência dos números primos, para cada ônibus um número primo elevado a n .

Essa estratégia garante que nenhum passageiro pare no mesmo quarto. Considere os dois primeiros ônibus, um passageiro de uma poltrona qualquer do primeiro ônibus irá para um quarto da forma 3^n (n é igual ao número de seu assento), da mesma forma um passageiro qualquer do segundo ônibus irá para o quarto da forma 5^m (m é igual ao número de seu assento). Suponha que os dois tenham parado no mesmo quarto, isso implicaria dizer que $3^n = 5^m$, como 3^n é divisível por 3, então 5^m também seria divisível por 3, isso significaria que 5

seria divisível por 3, chegando em um absurdo. Por tanto concluímos que todos os passageiros ficaram em quartos distintos.

3.2 Paradoxos de Zenão

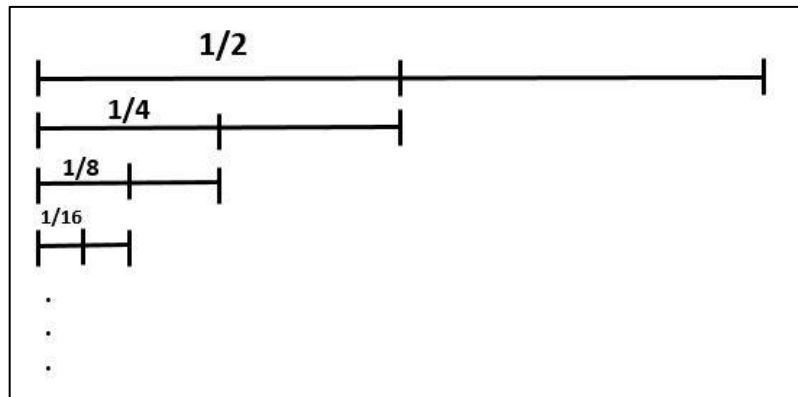
Os paradoxos de Zenão segundo Monteiro e Mondini (2019) surgiram durante o século V antes de Cristo, com fortes influencias da escola pitagórica. Seus paradoxos são chamados de falsídicos. “Os paradoxos falsídicos são aqueles cujos argumentos são aparentemente consistentes, porém nos levam a conclusões absurdas.” (MONTEIRO, 2015, p.38), “Zenão, em seus paradoxos da Dicotomia e de Aquiles, argumenta contra a hipótese de o espaço ser dividido infinitamente.” (MONTEIRO, MONDINI, 2019, p.34)

3.2.1 Dicotomia

O paradoxo da dicotomia diz que para um objeto percorrer uma distância x qualquer, primeiro ele deve percorrer a metade de x , mas, antes disso ele deve percorrer $1/4$ da distancia, porém antes disso ele deve percorrer $1/8$, e assim por diante, repetindo o processo infinitamente, formando a sequencia $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16} \dots$ de forma que as frações cheguem cada vez mais próximas de zero, mas nunca serão zero. “No paradoxo Dicotomia, por exemplo, tenta-se mostrar que é impossível completar qualquer jornada.” (MACHADO et al, 2013, p.288), pois o movimento nem é dado início.

O paradoxo da dicotomia ataca o fato do espaço ser infinitamente divisível, pois apresenta um raciocínio que, partindo dessa ideia, chega-se à impossibilidade do movimento. Pode-se apontar como falha nesse paradoxo o fato de se tratar distância infinitamente divisível como distância infinita, isto é, entre dois pontos não se tem distância infinita, mas sim uma distância que se pode dividir indefinidamente. (MONTEIRO, MONDINI, 2019, p.35)

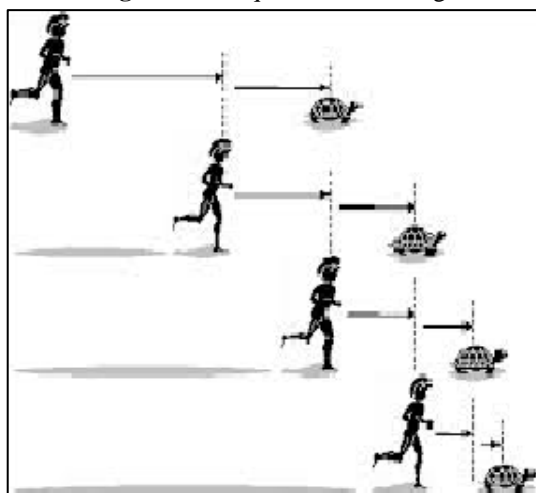
A imagem a seguir representa o paradoxo da dicotomia de forma esquematizada em um seguimento de reta.

Figura 19 - Divisão infinita do espaço.

Fonte: Produzido pelo autor

3.2.2 Aquiles

Segundo Morris (1997, p.17) “Um dos primeiros e mais famosos usos da ideia de infinidade é o paradoxo de ‘Aquiles e a Tartaruga’, concebido pelo filósofo grego Zenão de Eléia em meados do século V a.C.”, ele pode ser formulado da seguinte forma: suponha que um homem forte e veloz chamado Aquiles irá disputar uma corrida com uma tartaruga. Como a tartaruga é mais lenta que Aquiles, ele solicita que a tartaruga comece a corrida com uma distância de vantagem. Porém nesse paradoxo Aquiles nunca poderá atingir a tartaruga. “Para isso, ele precisa primeiro chegar ao ponto do qual a tartaruga partiu. A essa altura, a tartaruga terá avançado até algum ponto adiante na pista de corridas. E quando Aquiles alcançar esse ponto, a tartaruga terá avançado ainda mais.” (MORRIS, 1997, p.17), se tornando uma serie interminável, sempre existindo alguma distância entre os dois por menor seja.

Figura 20 - Aquiles e a Tartaruga

Fonte: (Vivian, 2015)

No mundo real é bem obvio que em algum momento a tartaruga será ultrapassada por Aquiles. Segundo Morris (1997) o que Zenão queria mostrar com o paradoxo era que Aquiles deve efetuar uma série infinita de atos, algo impossível de ser feito em um espaço de tempo finito.

Nesse paradoxo, têm-se dois corpos que se movimentam com velocidades distintas. Como o senso comum nos mostra, Aquiles ultrapassa a tartaruga. Todavia, o raciocínio desenvolvido por Zenão está correto com exceção da conclusão, que é absurda: Aquiles nunca poderá atingir a tartaruga. Com os paradoxos da Dicotomia e Aquiles, Zenão buscava ruir a crença da continuidade do movimento, ou seja, seus paradoxos iam de encontro com a infinita divisibilidade do espaço. Neste paradoxo, bem como no da Dicotomia, mistura-se a ideia de distância infinita com distância infinitamente divisível. Isto é, podemos considerar que, no paradoxo de Aquiles, este deve percorrer infinitos intervalos, que são aqueles trechos nos quais a tartaruga tem vantagem sobre o corredor. (MONTEIRO, MONDINI, 2019, p.37)

4 METODOLOGIA

O trabalho foi realizado através de uma pesquisa descritiva com uma abordagem quali-quantitativa, ou seja, foi utilizado tanto os métodos quantitativos quanto qualitativos. Inicialmente foi realizado uma pesquisa bibliográfica que segundo Fonseca (2002) é o primeiro passo de uma pesquisa científica, permitindo conhecer o que já foi estudado sobre o assunto. Para isso foram utilizados o Google Acadêmico e a plataforma Mendeley, na busca de Artigos, Teses e Dissertações sobre o tema. Também foi utilizado a biblioteca da UEMA do campus de Balsas e a biblioteca virtual da UEMA, na procura de livros de Análise Real.

Após a pesquisa bibliográfica foi dado início na pesquisa de campo, por meio de um estudo de caso, que de acordo com Fonseca (2002, p.34):

O estudo de caso pode ocorrer de acordo com uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes, ou uma perspectiva pragmática, que visa simplesmente apresentar uma perspectiva global, tanto quanto completa e coerente, do objeto de estudo do ponto de vista do investigador.

A investigação ocorreu através de um questionário com quatro perguntas que avaliaram o conhecimento sobre o infinito dos alunos do 3º ano do ensino médio da instituição de tempo integral Padre Fabio Bertagnolli, localizada na cidade de Balsas/MA. Participaram do questionário 81 alunos das turmas 300, 301, 302 e 303. A aplicação do questionário se deu de maneira presencial, cada aluno recebeu uma folha em branco em seguida foi escrito no quadro as quatro perguntas. Eles não precisaram copiar a questão, foram orientados a colocar apenas as repostas no papel, porém informando a qual pergunta se trata a resposta.

5 RESULTADOS

Analisou-se neste tópico o questionário sobre o infinito aplicado nas turmas do 3º ano do ensino médio da instituição de tempo integral Padre Fabio Bertagnolli, esse questionário foi proposto com o intuito de analisar a visão dos alunos sobre o tema tratado. Não foi passado nenhum conteúdo ou explicação previa sobre o assunto antes da aplicação do questionário. A única informação previa passada foi que eles poderiam considerar nas questões 1 e 2 todos os números \mathbb{R} . Participaram do questionário as turmas 300, 301, 302 e 303. Na turma 300 responderam 19 alunos, na turma 301 responderam 22 alunos, na turma 302 responderam 19 alunos e na turma 303 responderam 21 alunos, totalizando 81 discentes que participaram do questionário.

5.1 Primeira Questão

“Quantos números existem entre 0,1 e 0,5?”

5.1.1 Turma 300

Na primeira questão 6 alunos acertaram a pergunta. Dentre esses, chama atenção 2 alunos que responderam: “Existem infinitos números irracionais” e “Infinitos números sequenciais até 0,5”. Esses responderam exatamente o que a questão buscava analisar deles, a compreensão da existência de infinitos irracionais entre um intervalo.

Nessa questão, 13 alunos responderam incorretamente. 10 desses alunos foi possível notar que tentaram contar a quantidade de números, enumerando os elementos desse intervalo, fazendo por exemplo, $\{1,2; 1,3; 1,4\}$. 2 alunos fizeram a subtração entre os intervalos, colocaram $0,5 - 0,1 = 0,4$ afirmando em seguida que são 4 números e 1 aluno colocou que existia 2 números entre os intervalos.

A turma 300 teve 31,57% de acerto contra 68,42% de erro.

5.1.2 Turma 301

Nessa turma foi onde teve a maior quantidade de acertos, 13 alunos responderam corretamente. Nota-se que eles têm consciência que não é possível determinar a quantidade de números reais entre o intervalo, tendo respostas como: “indeterminado”, “Não é possível determinar” e “Não é possível contar”.

Entre os alunos que erraram cinco colocaram que existem 3 números, um aluno colocou que são 4 números, dois alunos escreveram que tem 6 números e um aluno deixou em branco essa questão. Totalizando 59,09% de acerto e 49,91% de erro.

5.1.3 Turma 302

Nessa sala ninguém acertou a pergunta. As respostas foram:

- 14 alunos responderam que são 3 números
- 3 alunos responderam que são 4 números
- 1 aluno respondeu que são 2 números
- 1 aluno respondeu que são 6 números.

5.1.4 Turma 303

Assim como na turma anterior não teve respostas corretas. As respostas foram:

- 19 alunos responderam que são 3 números
- 1 aluno respondeu que são 4 números
- 1 aluno respondeu que não tem nenhum número.

5.2 Segunda Questão

“Qual o maior número entre 1,5 e 2? Obs: Desconsiderando o 2”

5.2.1 Turma 300

Diferente da primeira nessa ninguém acertou. Um aluno deixou em branco, 16 alunos colocaram o número 1,9 mostrando que não consideraram todos os números reais e 2 alunos afirmaram que era o número 1,9... eles perceberam a infinidade dos números reais, porém estão errados, pois se fizermos a conta para encontrar a fração geratriz chegamos no $\frac{2}{1}$, conforme mostra abaixo:

$$1,99 \dots = x \quad (6)$$

Multiplicando os dois lados por 10 temos:

$$19,99\dots = 10x \quad (7)$$

Podemos então fazer a subtração de (7) - (6):

$$19,99 \dots - 1,99 \dots = 10x - x \quad (7) - (6)$$

$$18 = 9x \quad (8)$$

$$x = 2 \quad (9)$$

Através do que foi demonstrado acima a dízima periódica 1,99... é igual a 2, ela não é o maior elemento entre os intervalos, pois como mencionado na questão era para desconsiderar o 2. Então qual é o maior elemento? como vimos nos tópicos anteriores os números reais são não enumeráveis, ou seja, dado um número real não é possível definir seu sucessor ou antecessor. A resposta correta seria dizer que não é possível determinar.

5.2.2 Turma 301

Novamente essa foi a turma com mais acertos, 10 alunos responderam corretamente. A maioria desses respondeu, “indeterminado”, mas tiveram algumas diferentes

como, “não tem como definir” e “indeterminados, não dá para saber”. Mesmo sem terem estudado sobre a não enumerabilidade dos conjuntos irracionais e reais, eles compreendem que não é possível determinar o sucessor ou antecessor de um número real.

Entre os que erraram, 7 alunos responderam 1,9, um aluno respondeu 0, um aluno respondeu 1,6 e 3 alunos deixaram a pergunta em branco. Totalizando 45,45% de acerto e 54,54% de erro.

5.2.3 Turma 302

Outra vez essa turma não obteve resposta corretas. 1 aluno respondeu 1,9... e 18 alunos responderam que o maior seria 1,9.

5.2.4 Turma 303

Mais uma vez a turma não teve êxito nas respostas. 19 alunos responderam 1,9, 1 aluno respondeu “nenhum” e 1 aluno deixou em branco.

5.3 Terceira Questão

“O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ comparado com o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$, tem mais elementos ou tem menos elementos ou eles possuem a mesma quantidade de números?”

5.3.1 Turma 300

Na terceira questão 4 alunos acertaram. As respostas deles foram, “os dois tem o mesmo tamanho”, “tem a mesma quantidade”, “os dois tem a mesma quantidade” e “mesma quantidade de números”. Essas respostas mostram que eles foram contra o senso comum de

pensar que os naturais por serem subconjunto dos inteiros seriam menores, o que não é verdade, conforme foi demonstrado no tópico de conjuntos enumeráveis.

Já dentre os que erram, 14 alunos responderam que os inteiros teriam a maior quantidade de números. Uma das respostas que mais chamou atenção foi do aluno que escreveu: “Acredito que os inteiros tenham mais por representarem tanto a sequência dos naturais quanto a sua sequência inversa”, com isso podemos observar que eles consideraram os inteiros com mais elementos por que ele possui números que não pertencem aos naturais e também por saberem que todos os naturais estão contidos nos inteiros. 1 aluno deixou em branco. A turma obteve 21,05% de acerto e 78,94% de erro.

5.3.2 Turma 301

Nessa pergunta 5 alunos acertaram. Todos eles colocaram respostas diferentes, mas dando a entender que possuem a mesma quantidade de elementos. As respostas deles foram, “nenhum dos dois tem mais elementos”, “nenhum é maior”, “os dois são iguais”, “possuem a mesma quantidade” e “mesma coisa”.

Entre os que erram 9 colocaram que os inteiros eram maiores. Destaca-se a resposta de um aluno que disse: “O maior é o conjunto dos inteiros, pois além dos naturais apresenta os negativos, assim sendo um infinito maior”, essa afirmação escrita por ele vai totalmente contra o que foi mostrado nos tópicos anteriores. Apesar dos inteiros terem os números negativos e os naturais não, mesmo assim os dois possuem a mesma quantidade de elementos. 7 alunos disseram que não é possível determinar, tendo respostas como, “não é possível determinar” ou “são infinitos, não tem como determinar o maior”. 1 aluno deixou em branco. A turma obteve 22,73% de acerto e 77,27% de erro.

5.3.3 Turma 302

Apesar dessa turma não ter conseguido obter respostas corretas nas questões anteriores, nessa foi diferente, 5 alunos responderam corretamente. As respostas foram: “é a mesma quantidade”, “os dois tem o mesmo tamanho”, “ambos têm o mesmo tanto de números”, “eles têm a mesma quantidade de números” e “mesmo tanto de números”.

Nas respostas erradas 11 alunos responderam que os inteiros são maiores e 3 deixaram em branco. A turma teve 26,32% de acerto e 73,68% de erro.

5.3.4 Turma 303

Na terceira questão 2 alunos responderam corretamente. As repostas foram: “mesma coisa” e “tem a mesma quantidade”. Entre as respostas erradas, 17 alunos disseram os inteiros eram maiores, 2 alunos deixaram em branco. Obtiveram 9,53% de acerto e 90,47% de erro.

5.4 Quarta Questão

“Para você o que é infinito?”

5.4.1 Turma 300

Quadro 1: Para você o que é infinito?

TURMA 300	
RESPOSTAS	ALUNOS
O infinito é o que não tem fim.	10
Uma coisa que nunca acaba.	2
Infinito é a eterna continuação de uma determinada condição, seja ela numérica ou espacial por exemplo.	1
O infinito é a ausência do fim de uma "linha de chegada", de um ponto final ou de término.	1
Acredito que o infinito seja um número na matemática ou então na vida.	1
Algo impossível de ser, inimaginável.	1
Infinito é uma sequência sem fim.	1
Ausência do fim.	1
O que não acaba.	1

Fonte: Produzido pelo autor

5.4.2 Turma 301

Quadro 2: Para você o que é infinito?

TURMA 301	
RESPOSTAS	ALUNOS
Algo que não acaba, sem fim.	18
O infinito é uma definição de algo maior que a nossa compreensão, ou seja, o infinito é algo que é maior que as nossas formas de dimensionar fazendo alguns infinitos serem maiores que outros.	1
É uma coisa que não tem fim, como os números.	1
Algo que é constante, ou seja, nunca acabará ou não terá fim.	1
São um conjunto de números sem fim.	1

Fonte: Produzido pelo autor

5.4.3 Turma 302

Quadro 3: Para você o que é infinito?

TURMA 302	
RESPOSTAS	ALUNOS
O infinito é o que não tem fim.	10
Algo que nunca acaba.	4
Um número que não pode ser contado pelo homem.	1
Algo que é infinito e que não tem fim. Ex: o universo ele tem começo mas não tem fim.	1
Um loop.	1
Algo que não existe limite	1
Sem palavras.	1

Fonte: Produzido pelo autor

5.4.4 Turma 303

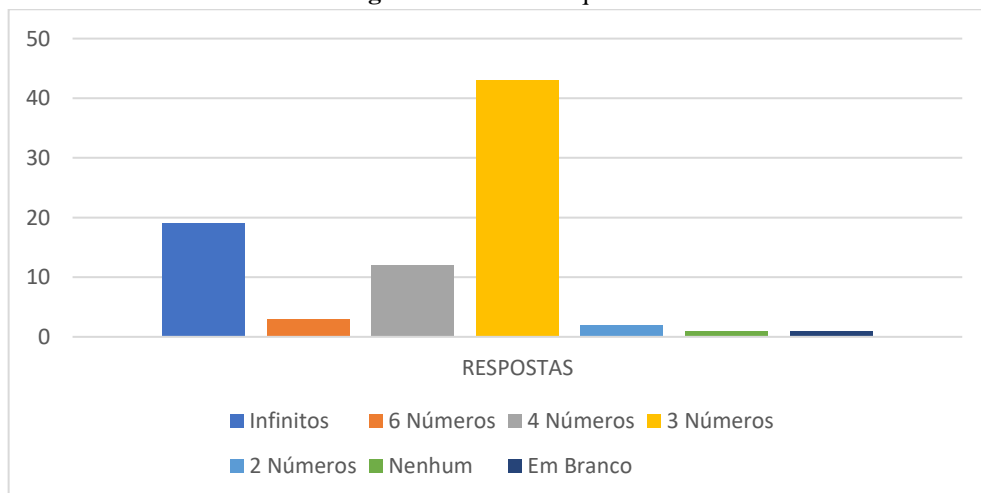
Quadro 3: Para você o que é infinito?

TURMA 303	
RESPOSTAS	ALUNOS
O infinito é o que não tem fim.	11
Algo que nunca acaba.	4
Um número que não acaba.	1
∞ (símbolo do infinito)	1
A proporção, criação ou produção de algo sem fim, ou seja, o que nunca acaba.	1
Uma constância.	1
Amor de mãe.	1
A constante aprendizagem.	1

Fonte: Produzido pelo autor

5.5 Visão geral das turmas

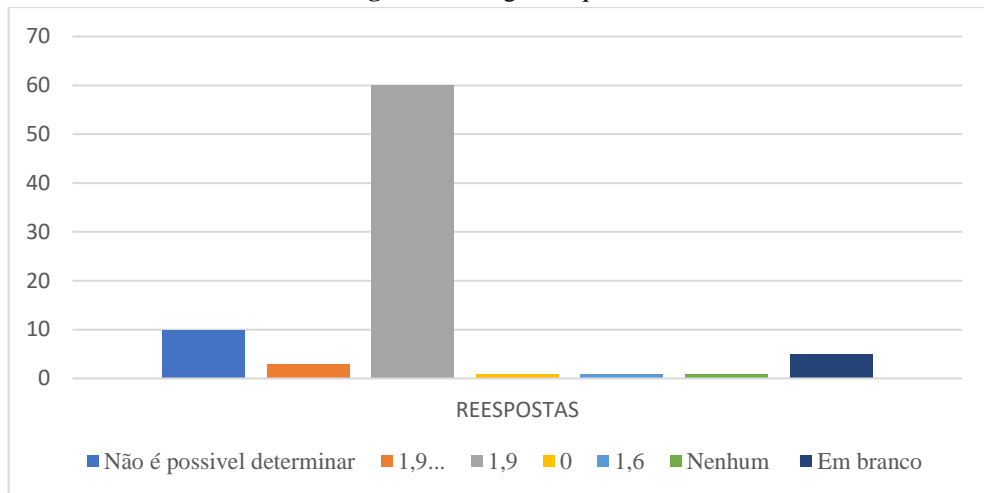
Na primeira questão o intuito era verificar se o aluno perceberia a possibilidade de sempre poder acrescentar mais um número entre o intervalo 0,1 e 0,5, fazendo assim um processo sem fim. Porém como pode ser observado no gráfico, a maioria respondeu que a quantidade de números seria apenas 3, mostrando um desconhecimento dos números irracionais presentes no intervalo. Nessa questão teve 19 respostas corretas das 81 coletadas, representando 23,45% de acerto.

Figura 21 - Primeira questão

Fonte: Produzido pelo autor

Na segunda o objetivo era verificar se aluno percebia o processo junto com a questão 1 que sempre vai existir um outro número maior, não sendo possível determinar qual é o maior elemento. No entanto não foi isso que pode ser observado quando analisado as respostas. Por volta de 74,07% das respostas foi que o maior número é o 1,9 e de respostas corretas foi apenas 12,34%.

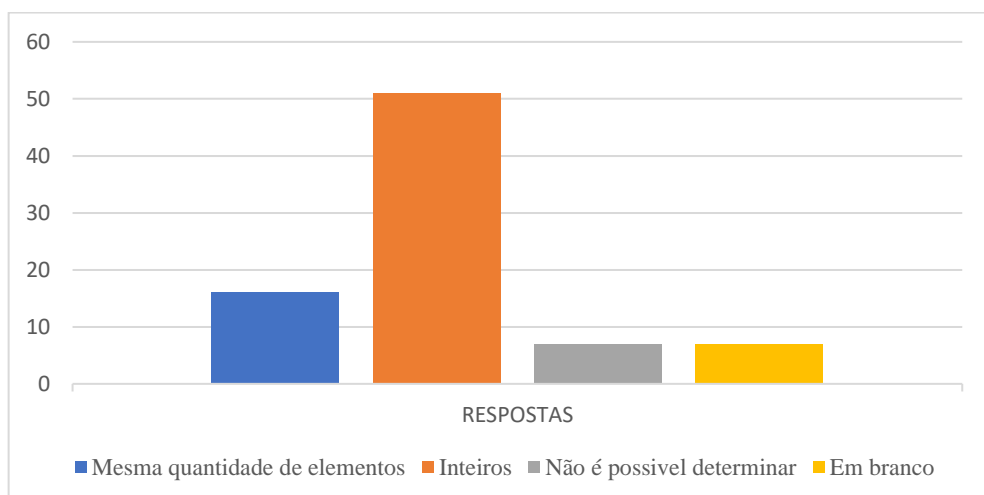
Figura 22 - Segunda questão



Fonte: Produzido pelo autor

A terceira questão foi uma pegadinha para que eles exercitassem um pouco o pensamento sobre a infinidade dos naturais e inteiros. Por eles até o momento, não terem estudado nada sobre enumerabilidade, devido ser um assunto do ensino superior e de se imaginar que teriam o pensamento do senso comum. E como de esperado a maioria respondeu que os inteiros tem mais elementos, representando 62,96% das respostas. Porém ainda teve aqueles que acertaram, em torno de 19,75%.

Figura 23 - Terceira questão



Fonte: Produzido pelo autor

Por fim, na quarta questão o propósito foi saber o que os alunos pensam sobre o infinito. Como pode ser observado nos quadros das turmas a maior parte dos discentes veem o infinito como algo sem fim, que nunca irá acabar. Porém tivemos alguns repostas diferentes. Uma dessas são as respostas de três alunos que enxergam o infinito como um número, eles disseram: “Acredito que o infinito seja um número na matemática ou então na vida.”, “Um número que não pode ser contato pelo homem.” e “Um número que não acaba”. Como foi visto no início do trabalho, o infinito não pode ser um número, pois irar gerar um absurdo. Outras repostas que chamaram atenção foram: “Infinito é uma sequência sem fim.” e “Infinito é a eterna continuação de uma determinada condição, seja ela numérica ou espacial por exemplo.”. Essas duas repostas nos remetem ao conceito de infinito potencial.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desse trabalho foi estudar o comportamento do infinito na Matemática e verificar como os alunos do 3º ano, lidam com o infinito em situações que o termo é utilizado. Foram definidos conceitos que ajudaram compreender o funcionamento do infinito, ele pode ser abordado de duas maneiras, na sua forma potencial e atual, a forma potencial é entendido como um processo que se repete sem fim e a forma atual é a representação do infinito como um todo.

Além disso vimos as diferenças entre os conjuntos, finitos e infinitos, enumeráveis e não enumeráveis. Entendido esses conceitos foi possível ver que os naturais são utilizados para contagens e para comparar a quantidade de elementos de um conjunto, podendo assim perceber que os naturais possuem a mesma quantidade de elementos que os inteiros, naturais pares, naturais ímpares e racionais, mas não possuem a mesma quantidade de elementos que os irracionais e os reais, pois estes últimos são conjuntos não enumeráveis. Diante do que foi exposto na pesquisa bibliográfica, fica claro que se tratando de conjuntos infinitos nem sempre o todo será maior que suas partes, existindo casos em que as partes terão o mesmo tamanho que o todo.

Explorando os conceitos e definições de conjunto infinito, David Hilbert elaborou o paradoxo do hotel com infinitos quartos, todos ocupados, porém sempre tem mais uma vaga para um novo hospede. O paradoxo ocorre devido a possibilidade de um conjunto infinito, fazer bijeção com os seus subconjuntos próprios. Foi apresentado também dois paradoxos de Zenão, que causaram controvérsias ao longo da história e que ainda hoje são bastante discutidos na Matemática.

A partir da aplicação do questionário, foi possível perceber que a maioria dos alunos não conseguem enxergar que existem infinitos números reais entre dois números, mostrando uma defasagem de conhecimento prévios de conjuntos numéricos. Como de esperado a maioria acredita que os inteiros tem mais elementos que os naturais, isso ocorre devido a falsa impressão de que o todo sempre será maior que as partes.

REFERÊNCIAS

- AMADEI, Flávio Luiz. **O infinito um obstáculo no estudo da matemática**. 2005. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11322/1/dissertacao_flavio_luiz_amadei.pdf. Acesso em: 04 fev. 2022.
- BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. Alguns Paradoxos da Matemática: Um Resgate Histórico e Possibilidades para o Ensino e Aprendizagem. In: XXXIII CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 33., 2010, Águas de Lindóia. **Anais do CNMAC**. Águas de Lindóia: Sbmac, 2010. v. 3, p. 1752-1758. Disponível em: http://arquivo.sbmec.org.br/publi_cnmac/errata2010/826.pdf. Acesso em: 27 maio 2022.
- BORGES, Bruno Andrade. **Infinito na matemática**. 2015. 89 f. Dissertação (Doutorado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-08042015-143010/pt-br.php>. Acesso em: 30 dez. 2021
- CRILLY, Tony. **50 Ideias de Matemática que precisa mesmo de saber**. Alfragide: Dom Quixote, 2011. 208 p. Tradução de: Jorge Nuno Silva.
- DELFINO, Hudson Sathler. **O conceito de infinito: uma abordagem para a educação básica**. 2015. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2701/1/CT_PROFMAT_M_Sentone.Franciell e%20Gon%C3%A7alves_2017.pdf. Acesso em: 15 abr. 2022.
- FONSECA, João José Saraiva da. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.
- GROKOSKI, Luiz Henrique Paixão. **Tópicos de Análise**. 1. ed. Curitiba: Contentus, 2020. 77 p. ISBN 978-65-5745-000-0.
- KLEIN, Cristina. **Dicionário da língua portuguesa**. São Paulo: Rideel, 2015. 560 p. ISBN 978-85-339-3383-5.
- LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2009. 189 p.
- LIMA, Elon Lages. **Análise real volume 1**. 8. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2006. 189 p
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Impa, 1976. 344 p. v. 1.
- MACHADO, Rosilene Beatriz et al. Aporética do Infinito: caminhos na matemática e na pintura. **Alexandria**: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, Santa Catarina, v. 1, n. 6, p. 283-317, abr. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/issue/view/2233>. Acesso em: 02 mar. 2022.
- MACMANUS, Joseph. **Hilbert's Hotel: but the guests are mere mortals**. 2020. Disponível em: <https://jpmacmanus.me/2020/07/26/hilbertshotel.html>. Acesso em: 07 maio 2022.

MONTEIRO, G. L., MONDINI, F. Paradoxos falsídicos: os primeiros enfrentamentos do conceito de infinito no contexto da ciência matemática. **ACTIO**, Curitiba, v. 4, n. 2, p. 30-47, mai./ago. 2019. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio/article/view/9400>. Acesso em: 27 abr. 2022.

MONTEIRO, Gisele de Lourdes. **Considerações históricas sobre o infinito e alguns de seus paradoxos**. 2015. 67 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/139123/000865119.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 20 maio 2022.

MORRIS, Richard. **Uma breve história do infinito**: dos paradoxos de zenão ao universo quântico. Rio de Janeiro: Zahar, 1997. 143 p. Tradução de: Maria Luiza X. de A. Borges.

NERI, Cassio; CABRAL, Marco Aurélio Palumbo. **Curso de análise real**. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2011. 163 p. Disponível em: <https://www.dma.im.ufrj.br/~mcabral/textos/curso-analise-real-a4.pdf>. Acesso em: 7 abr. 2022.

PIMENTEL, Rodrigo; SANTOS, Antonio Aparecido do Prado; MOMETTI, Antonio Luis. **O infinito**: um estudo sobre as diferentes concepções. Interfaces, Suzano, v. 2, n. 10, p. 53-57, out. 2010. Disponível em: https://uniesp.edu.br/sites/suzano/exibe_edicao.php?id_edicao=67. Acesso em: 10 jan. 2022.

SENA, Christiano Otávio de Rezende. **Uma história sobre o infinito atual**. 2011. 30 f. Monografia (Especialização) - Curso de Pós- Graduação em Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/BUBD-9ATLBH/1/monografia_christianoootavio.pdf. Acesso em: 30 dez. 2021.

SENTONE, Francielle Gonçalves. **Paradoxos geométricos em sala de aula**. 2017. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2701/1/CT_PROFMAT_M_Sentone.Francielle%20Gon%C3%A7alves_2017.pdf. Acesso em: 15 abr. 2022.

SIQUEIRA, F. K. da S.; LORIN, J. H. Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras. **ACTIO**, Curitiba, v. 6, n. 2, p. 1-16, mai./ago. 2021. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>. Acesso em: 10 jan. 2022.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**: amatemática do zero ao infinito. Rio de Janeiro: Zahar, 2016. 291 p. Tradução: George Schlesinger

VICTOR, Bruno de Lessa. **Tópicos em análise real**. 1. ed. Curitiba: InterSaberes, 2019. 272 p. ISBN 978-85-227-0137-7.

VIVAN, Luiz Carlos. **O Paradoxo de Zênão**. 2014. Disponível em: <http://recordandomatematica.blogspot.com/search?q=zen%C3%A3o>. Acesso em: 05 mar. 2022.

ZAHN, Maurício. **Análise real**. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2022. 456 p. ISBN 978-65-5506-539-8.