

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO – UEMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL

**ICARO MATEUS DE SOUZA GUIDA**

**MODELOS PARA ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS PAREDE:  
Comparativo entre modelos numéricos e de biela-tirantes**

São Luís  
2019

ICARO MATEUS DE SOUZA GUIDA

**MODELOS PARA ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS PAREDE:  
Comparativo entre modelos numéricos e de biela-tirantes**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação em Engenharia Civil – UEMA, como requisito para obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Me. Clodoaldo César Malheiros Ferreira.

São Luís

2019

Guida, Ícaro Mateus de Souza.

Modelos para análise e dimensionamento de vigas parede: comparativo entre modelos numéricos e de biela-tirantes / Ícaro Mateus de Souza Guida. – São Luís, 2019.

74 f

Monografia (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Me. Clodoaldo César Malheiros Ferreira.

1.Vigas – Parede. 2.Métodos numéricos. 3.Método biela-tirante. I.Título

CDU: 624.04

ICARO MATEUS DE SOUZA GUIDA

**MODELOS PARA ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO DE VIGAS PAREDE:  
Comparativo entre modelos numéricos e de biela-tirantes**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: 06 / 12 / 2019

**BANCA EXAMINADORA:**



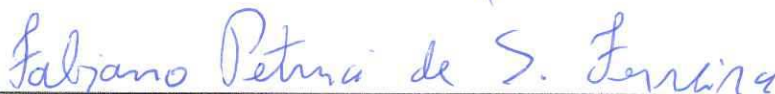
**Prof. Me. Clodoaldo Cesar Malheiros Ferreira (Orientador)**

Universidade Estadual do Maranhão



**Prof. Dr. Iêdo Alves de Souza**

Universidade Estadual do Maranhão



**Prof. Esp. Fabiano Petrucci, de Sousa Ferreira**

Universidade Estadual do Maranhão

À minha mãe Vanusa Maria Bento de Souza  
e aos meus avós Francisco Gomes de Souza  
e Maria Bento de Souza, pelo incentivo e  
forças no decorrer da graduação.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por seu amor e sua bondade infinita de ter concedido a realização de um sonho mesmo em tantas dificuldades que passei nesse decorrer dos 5 anos.

À minha mãe Vanusa Maria bento de Souza, por toda a sua dedicação e trabalho durante todo esse tempo de estudo.

Aos meus avós, Maria Bento de Souza e Francisco Gomes de Souza, por todo o incentivo e ajuda financeira nesse período.

Aos meus tios Conceição de Maria Bento de Souza e Zilmar de Souza morais, por terem me apoiado e me ajudado financeiramente durante esse período de curso

Aos meus padrinhos, Edilene e Arnaldo, por terem também contribuído com minha formação, me apoiando das mais diversas formas.

Aos meus tios por parte de pai, André Rocha Guida e Raimunda Santana Guida, por me apoiarem e me aconselharem sempre que podiam.

Ao meu pai Valberto Rocha Guida, por todo o incentivo ao estudo nesse período.

Ao meu avô por parte de pai, Francisco de Sales Araújo Guida, pelo seu incentivo.

Aos meus primos paternos, Neto Guida e Andreia Aline por me incentivarem durante todos esses anos de graduação, a qual hoje os tenho como irmãos.

Aos meus primos maternos, Riquelmy e João Gabriel por todo o companheirismo e amizade nesses anos de graduação.

Ao meu orientador Prof. Clodoaldo, por todo apoio e ajuda dado neste trabalho.

A todos os professores do curso, em especial a Maria Teresinha por todo o seu incentivo no decorrer da graduação.

Aos meus amigos da UEMA do período 2015.1, em especial a Antonio, Wellysson, Marcus Vale, Vinícius, Judah, João Victor, Caio, Lucas Gabriel, Raphael, Marcos, Yago, Carlos Eduardo, André Linhares, Diego.

Por fim, a todos os meus amigos, tios da igreja que me apoiaram nesse momento.

*“Foi o tempo que dedicaste à tua rosa  
que a fez tão importante ...”*

*Antoine de Saint-Exupéry*

GUIDA, I. M. S. **Modelos para análise e dimensionamento de vigas parede:** comparativo entre modelos numéricos e de biela-tirantes. 2019. 74 f. Trabalho de Graduação ( Acadêmico de Engenharia Civil), UEMA, São Luis.

## **RESUMO**

O presente trabalho trata-se de uma análise de tensões de uma viga parede para um posterior dimensionamento. Essa análise é feita pelo modelo das Bielas e Tirantes e os modelos numéricos: Método dos Elementos Finitos e Microtreliça. Esses modelos servem para investigar as tensões e condições de deformações da peça para evitar o esmagamento do concreto no ato de dimensionar. Além disso foi realizado o dimensionamento de duas vigas parede pelo método das Bielas e tirantes. As análises estruturais serão feitas com o auxílio do programa SAP-2000, e ao fim de todos os processos foi concluído que todos os métodos são eficazes para análise de tensões dando diferenças poucos significativas.

**Palavras Chave:** Vigas Parede, Métodos numéricos e Método biela-tirante.



GUIDA, I. M. S. **Modelos para análise e dimensionamento de vigas parede:** comparativo entre modelos numéricos e de biela-tirantes. 2019. 74 f. Trabalho de Graduação ( Acadêmico de Engenharia Civil), UEMA, São Luis.

### **ABSTRACT**

The present work deals with a stress analysis of a beam wall for later dimensioning. This analysis is made by the Connecting Rods and Tie Rods model and the numerical models: Finite Element Method and Microtrack. These models are used to investigate how stresses and deformation conditions of the workpiece prevent crushing of the concrete when sizing. In addition, the design of two wall beams was performed by the connecting rod and tie method. As the selected statistics will be made with the aid of the SAP-2000 program, and at the end of all processes, the following methods were completed and used for pension analysis with few differences.

**Keywords:** Wall beams, numerical methods and connecting rod method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Detalhamento das armaduras de uma viga-parede .....	20
Figura 2 - Ruptura por flexão em vigas biapoiadas .....	20
Figura 3 - Ruptura por esmagamento da biela em uma viga biapoiada .....	21
Figura 4 - Ruptura por tração diagonal em uma viga biapoiada.....	21
Figura 5 - Ruptura por flexão-cisalhamento .....	22
Figura 6 - Nós contínuos (1) e nós singulares (2) .....	24
Figura 7 - Configurações típicas de campos de tensão de compressão .....	25
Figura 8 - Calculo de $\rho \perp$ pelo método ACI .....	28
Figura 9 - Compressão Uniaxial .....	29
Figura 10 - Compressão Longitudinal e Tração Transversal.....	29
Figura 11 - – Compressão longitudinal e armadura inclinada .....	30
Figura 12 - Modelo de biela e tirante baseado (a) na trajetória de tensões elásticas e (b) na distribuição de tensões na ruptura .....	32
Figura 13 - Modelo de biela- tirante para viga-parede biapoiadas .....	33
Figura 14 - Tensões de compressão na região dos apoio .....	34
Figura 15 - Graus de Liberdade no plano.....	40
Figura 16 - Discretização do modelo da Micro Treliça.....	43
Figura 17 - Não-linearidade geométrica para um elemento de treliça .....	44
Figura 18 - Modelo de discretização para micro treliça .....	45
Figura 19 - Esquema estático de VP1 .....	47
Figura 20 - Esquema estático de VP2.....	47
Figura 21 - Diagrama de momento para VP1 .....	48
Figura 22 - Diagrama de momento para VP2.....	48
Figura 23 - Tabela de armadura à flexão caso 1 .....	50
Figura 24 – Quantidade de elementos para VP1 .....	51
Figura 25 - Trajetória das forças em VP1 .....	52
Figura 26 - Tensões em VP1 .....	53
Figura 27 - Malha de Micro Treliça para VP1 .....	54
Figura 28 - Tensões pelo MCT para VP1 .....	55
Figura 29 - 3D das disposições das barras de VP1 .....	55
Figura 30 - Tabela de armadura longitudinal caso 2 .....	57

Figura 31 - Tabela de armadura longitudinal.....	57
Figura 32 - Quantidade de Elementos para VP2.....	58
Figura 33 - Trajetória das forças em VP2.....	59
Figura 34 - Tensões normais no eixo Z.....	59
Figura 35 - Malha de Elementos de MCT para VP2.....	60
Figura 36 - Tensões axiais para VP2 .....	61
Figura 37 - Comprimento básico de ancoragem .....	62
Figura 38 - Tabela para cálculo de armadura de pele .....	63

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo dos esforços.....	64
Tabela 2 - Dimensionamento a Flexão.....	64
Tabela 3 - Verificações nas tensões .....	64
Tabela 4 - Verificações nas tensões .....	65
Tabela 5 - Verificações nas tensões .....	66
Tabela 6 - Dados de VP1 e VP2 .....	68

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ACI - American Concrete Institute

ELU – Estado Limite Último

MEF – Método dos Elementos Finitos

MMT – Método da Micro Trelença

NBR – Norma Brasileira Regulamentadora

SAP – Structural Analysis Program

UEMA – Universidade Estadual do Maranhão

VP1 – Viga Parede 1

VP2 – Viga Parede 2

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>1.1 Justificativa</b> .....	16
<b>1.2 Objetivos</b> .....	17
1.2.1 Objetivo geral .....	17
1.2.2 Objetivos específicos .....	17
<b>1.3 Metodologia</b> .....	17
<b>2. VIGAS-PAREDE DE CONCRETO ARMADO</b> .....	19
<b>2.1 Definições e aspectos normativos</b> .....	19
<b>2.2 Mecanismos de Ruptura das Vigas-parede</b> .....	20
2.2.1 Ruptura a flexão .....	20
2.2.2 Ruptura por cisalhamento .....	21
2.2.3 Ruptura por flexão-cisalhamento .....	22
<b>3. MODELO DE BIELA TIRANTE</b> .....	23
<b>3.1 Introdução</b> .....	23
<b>3.2 Elementos da Treliça</b> .....	23
3.2.1 Nós .....	23
3.2.2 Bielas .....	24
3.2.3 Tirantes .....	25
<b>3.3 Avaliação da resistência efetiva das bielas, regiões nodais e tirantes</b> 26	
3.3.1 Método ACI 318 (2008) .....	27
3.3.2 Método CEB-FIP Model Code 2010 (2010) .....	29
<b>3.4 Direção das bielas e tirantes.</b> .....	30
<b>3.5 Modelo de Otimização - Lourenço &amp; Almeida (2004)</b> .....	31
<b>3.6 Análise de tensões</b> .....	32
3.6.1 Tensões de compressão .....	33
<b>4. GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)</b> .....	36
<b>4.1 Formulação Geral</b> .....	36
<b>4.2 Graus de liberdade</b> .....	40
<b>4.3 Critérios de Convergência do MEF</b> .....	41
<b>4.4 Matriz de Rigidez Global e Vetor de Cargas</b> .....	42
<b>5. MODELO DE MICRO TRELIÇA</b> .....	43
<b>6. MODELOS DE ANÁLISE DAS VIGAS-PAREDES</b> .....	46
<b>6.1 Cálculo do carregamento da viga parede</b> .....	47
6.1.1 Carga distribuída para VP1 e VP2 .....	47

6.1.2 Cálculo dos esforços nas Vigas .....	47
<b>6.2 Análise dos esforços em VP1 .....</b>	<b>49</b>
6.2.1 Pelo método de bielas e tirantes (NBR-61180) .....	49
6.2.1.1 Armadura à flexão .....	49
6.2.1.2 Tensão de compressão no apoio e na biela.....	50
6.2.2 Tensões pelo método dos elementos finitos .....	51
6.2.3 Tensões pelo método da Micro treliça .....	53
<b>6.3 Análise dos esforços em VP2 .....</b>	<b>56</b>
6.3.1 Pelo método de bielas e tirantes (NBR-61180) .....	56
6.3.1.1 Armadura à flexão .....	56
6.3.1.2 Tensões de compressão no apoio e na biela.....	57
6.3.2 Tensões pelo método dos elementos finitos .....	58
6.3.3 Tensões pelo método da Micro treliça .....	60
<b>7. DIMENSIONAMENTO DAS VIGAS VP1 E VP2 .....</b>	<b>62</b>
<b>7.1 Ancoragem da armadura a flexão .....</b>	<b>62</b>
<b>7.2 Armadura de Pele .....</b>	<b>63</b>
<b>7.3 Dimensionamento de VP1 e VP2.....</b>	<b>63</b>
<b>8 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>66</b>
<b>9 CONCLUSÃO .....</b>	<b>69</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>70</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>72</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico se faz cada vez mais necessário o uso de tecnologias inovadoras que colaborem positivamente no dimensionamento e na execução de estruturas em concreto armado. Esses modelos servem para garantir a estabilidade e a segurança dos projeto bem como a execução de estruturas mais econômicas.

As vigas-parede possuem um comportamento estrutural com características bem específicas quando comparadas as estruturas convencionais (vigas em concreto), dentre elas problemas de estabilidade pois ela não se comporta da forma convencional, devido sua alta inercia o que ocasiona tais problemas (NBR-6118/2014).

Para efeito de dimensionamento devem ser considerados as perturbações geradas por cargas concentradas, aberturas ou engrossamentos. Essas perturbações podem influir significativamente no comportamento estrutural e na sua resistência.

Para dimensionar essas estruturas serão utilizados o modelo de cálculo apresentado pela ABNT NBR – 6118, que contempla de forma clara e objetiva as normas para garantir a estabilização e a segurança da mesma. Existem vários métodos que podem ser empregados, sendo eles: modelo da biela-tirante e o método não-linear, mas os métodos que serão feitos os comparativos serão: método Biela-Tirante e análise computacional utilizando o método dos elementos finitos e microtreliça).

O método da Biela Tirante consiste em uma reprodução discreta dos campos de tensão de tração e compressão nos elementos estruturais, sendo que as bielas representam os esforços de compressão e os tirantes de tração. Uma das grandes vantagens desse método é analisar a estrutura sem a necessidade de separar os esforços solicitantes bem como as forças internas, de modo a equilibrá-las, fazendo um modelo mais realista em relação a outros métodos.

Já o método dos elementos finitos consiste na divisão de um número discreto de subdomínios ou elementos de dimensões finitas interligado por um



conjunto de pontos definidos chamados de nodais, dessa forma é analisado o estado plano de tensões para cada retângulo. O comportamento de cada elemento é feito de forma aproximada e assim se pode analisar a peça como um todo de modo a definir cada situação em cada elemento, averiguando os pontos críticos (maior esforço) e os menos críticos (menor esforço).

O método da micro-treliça baseia-se na inclinação das bielas comprimidas a  $45^\circ$ , e de  $45^\circ$  na direção das tensões principais de tração e, além disso, para a inclinação de  $90^\circ$  para a armadura de cisalhamento. Dessa forma pode ser feita a analogia a uma treliça, e assim realizar um posterior dimensionamento. O estudo mais aprofundado desse método será abordado no projeto que será apresentado.

A ideia do tema é fazer um comparativo entre as análises de tensões e o dimensionamento pelos métodos já citados, dessa forma pode-se adotar modelos de cálculos mais precisos e eficientes, além de verificar a segurança e a estabilidade da estrutura.

### **1.1 Justificativa**

Com o intuito de ampliar os conhecimentos no estudo de concreto armado, é necessário cada vez mais descobrir novas técnicas de dimensionamento que garantam estabilidade, segurança e principalmente um custo baixo no uso dessas peças. É muito importante o Engenheiro garantir a segurança do projeto apresentado, bem como apresentá-lo da forma mais econômica possível a fim de que se torne possível a execução dele. O tema aqui proposto fará uma análise comparativa entre dois dimensionamentos, sendo um pelo método numérico (Método dos elementos finitos e microtreliça) e o outro pelo método das Bielas e tirantes, assim poderá se ter um conhecimento de quais métodos podem ser utilizados de maneira mais eficaz.

Nessa ocasião, para que se tenha um melhor entendimento serão abordados conceitos, classificações, exemplos, materiais utilizados de modo a compreender os mecanismos das vigas-parede e suas fundações básicas, dessa forma trará um acúmulo de conhecimentos apropriados para os alunos de graduação, dando a oportunidade de aplicar os conhecimento adquiridos no

decorrer do curso em exemplos que serão de grande utilidade no mercado de trabalho.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo geral**

Estudar de maneira ampla os aspectos teóricos, bem como as etapas necessárias para análise de tensões e o dimensionamento de vigas-parede fazendo uma análise comparativa entre os métodos numéricos e o método Bielas e tirantes e ainda verificar as condições de segurança e estabilidade da estrutura.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

- Abordar aspectos gerais relacionados à vigas-parede;
- Mostrar as peculiaridades, vantagens e desvantagens desses métodos;
- Apresentar recomendações de projetos, segurança, estabilidade e economia;
- Mostrar as peculiaridades da estruturas quando submetidas aos dois tipos de análise
- Comparar os resultados obtidos a fim de que possa fazer, as observações, recomendações e conclusões necessárias para garantir a eficiência da estrutura.

## **1.3 Metodologia**

O trabalho de conclusão de curso será elaborado através de pesquisas bibliográficas em artigos, monografias, dissertações de mestrado e doutorados, além disso será utilizado livros e programas computacionais que façam a análise de estrutura que utilizem o método dos elementos finitos.

Também será utilizado a NBR-6118/2014 que é uma norma que estuda especificamente os projetos em concreto armado. Essa norma dispõe de cálculos de dimensionamentos de vários tipos de estrutura, de modo a garantir a estabilidade das peças dimensionadas. Além disso, será feito a verificação dos modelos teóricos bem como algumas recomendações importantes para cada método de aplicação.

As análises serão realizadas pelo programa SAP-2000 que é um software de elementos finitos, com interface gráfica 3D orientado a objetos, preparado para realizar, de forma totalmente integrada, a modelação, análise e dimensionamento do mais vasto conjunto de problemas de engenharia de estruturas.

Também será utilizado o Software Ftool, para fazer a análise estrutural das vigas adotadas.

Para o detalhamento do projeto foi utilizado o software Autocad, que é uma ferramenta utilizada para o desenho de diversos produtos em inúmeras áreas, como a indústria automobilística, engenharia, construção civil, arquitetura, informática etc. Foi utilizado a versão estudantil, apenas para o detalhamento das vigas.

## 2 VIGAS-PAREDE DE CONCRETO ARMADO

### 2.1 Definições e aspectos normativos

As vigas-parede são estruturas de concreto armado com uma grande relação (vão/altura) =  $(L / h)$  de modo que a hipótese da seção plana não seja mais válida para o dimensionamento. Para ser considerada uma viga-parede é necessário que: a relação  $(L / h \leq 2)$  para vigas biapoiadas e  $(L / h \leq 3)$  para vigas contínuas (NBR-6118).

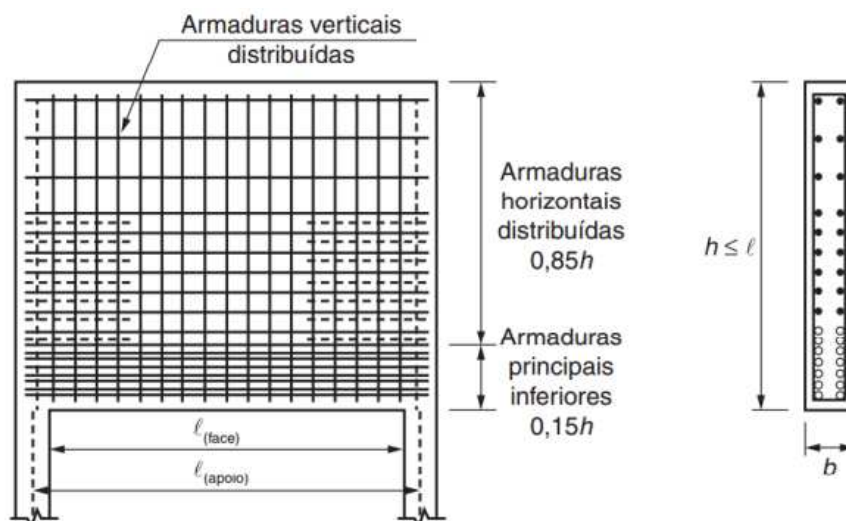
Leonhardt e Monnig conseguiram através de um diagrama de deformação estipular os limites entre as vigas-parede e as vigas comuns. No caso das vigas-parede, não se aplicam as teorias da hipótese de Bernoulli, pois não há uma linearidade na distribuição de tensões e deformações dessas estruturas.

O comportamento estrutural das vigas-parede possui características bem específicas quando comparadas as estruturas convencionais, dentre elas ineficiência a flexão bem como ao cisalhamento também, por serem muito altas possuem problemas de estabilidade como um corpo rígido e algumas vezes estabilidade elástica (NBR-6118, 2014).

Como essas estruturas são de grande responsabilidade, a NBR – 6118 faz recomendações importantes acerca do dimensionamento dessas vigas. É necessário usar um coeficiente de segurança adicional na estrutura de no mínimo 1,1. Outra recomendação é que as armaduras de tração a serem utilizadas não podem ser dispostas em apenas uma camada como nas vigas convencionais, mas sim distribuída em toda a região tracionada, de modo que ela possua 15% da altura total da viga-parede caso seja biapoiada. A armadura mínima é obtida da mesma forma que as vigas convencionais, ou seja, 0,15 % da área da seção da viga a ser calculada, de modo que seja usado sempre a maior área de ferro entre elas para garantir a segurança da peça (NBR-6118, 2014).

A figura mostra como deve ser distribuído a armadura das vigas paredes de modo que possa ocupar na região tracionada no mínimo 15% da altura total da viga. Além disso, a armadura de pele deve estar disposta na estrutura conforme as suas regras de dimensionamento, também é necessário fazer a ancoragem dessas armaduras conforme a recomendação da NBR – 6118.

Figura 1 - Detalhamento das armaduras de uma viga-parede



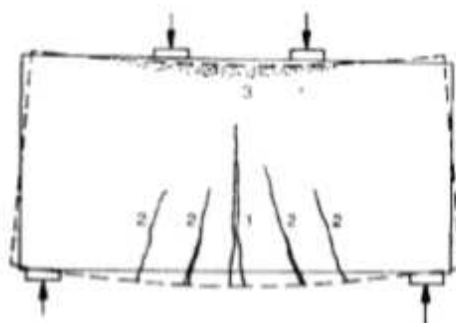
Fonte: ABNT NBR 6118 – 2014

## 2.2 Mecanismos de Ruptura das Vigas-parede

### 2.2.1 Ruptura a flexão

Segundo Leonhardt (1979), quando uma viga parede está submetida a carregamentos que geram esforços de tração e compressão, dependendo da resistência do material, da taxa geométrica de reforço e das condições de contorno são gerados esmagamentos nas zonas comprimidas de concreto ou escoamento da armadura de reforço principal, sendo o último o evento mais frequente. Assim quando a armadura a flexão começa a escoar, são geradas fissuras verticais no ponto de maior momento fletor, e fissuras cada vez mais inclinadas quando aproximadas do apoio. A figura a seguir mostra as fissuras geradas pela flexão e os números representam a ordem delas.

Figura 2 - Ruptura por flexão em vigas biapoiadas

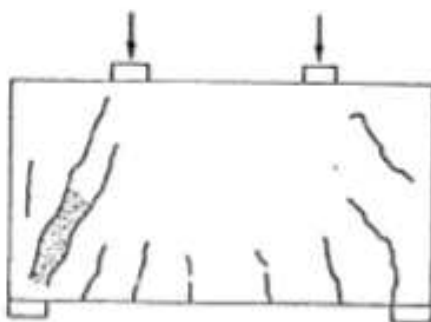


Fonte: Santos (1999)

### 2.2.2 Ruptura por cisalhamento

A Ruptura por cisalhamento se dá nas zonas denominadas bielas de compressão gerando esforços cortantes e de flexão nesses locais e pode acontecer duas formas: ruptura de compressão diagonal e ruptura por tração diagonal. “Neste primeiro modo, após o aparecimento da primeira fissura de cisalhamento entre o apoio e o ponto de aplicação da carga, surgem novas fissuras paralelas a primeira, formando uma biela comprimida, que é esmagada” (NEPOMUCENO, 2012). A imagem a seguir retrata melhor a situação.

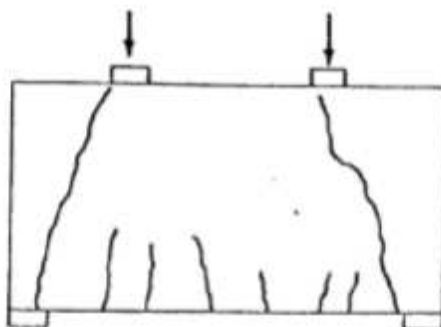
*Figura 3 - Ruptura por esmagamento da biela em uma viga biapoiada*



Fonte: Melo (1984)

“A ruptura por tração diagonal ou fendilhamento ocorre logo após a formação da fissura diagonal, sem esmagamento do concreto. Com o acréscimo de carga, aumentam as forças de compressão na biela e conseqüentemente, a tração indireta transversalmente ao campo de compressão. Este tipo de ruptura é semelhante à ruptura de corpos de prova cilíndricos ensaiados a compressão diametral” (MELO, 1984).

*Figura 4 - Ruptura por tração diagonal em uma viga biapoiada*

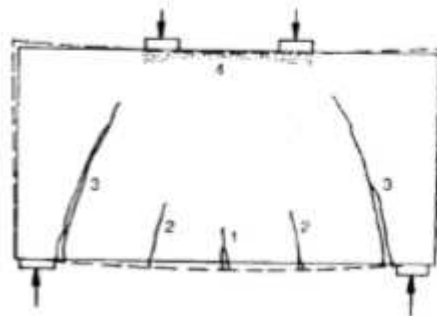


Fonte: Melo (1984)

### 2.2.3 Ruptura por flexão-cisalhamento

Inicia pelo escoamento da armadura à flexão e logo em seguida pelo o esmagamento do concreto na zona comprimida. No entanto, a resistência última do cisalhamento é atingida antes do esmagamento por inteiro do concreto (NEPOMUCENO, 2012).

*Figura 5 - Ruptura por flexão-cisalhamento*



Fonte: Santos (1999)

### **3 MODELO DE BIELA E TIRANTE**

#### **3.1 Introdução**

Segundo Nepomuceno (2012), o modelo Biela Tirante, baseia-se em uma estrutura similar a uma treliça, fazendo sempre a estrutura se comportar da forma mais real possível, dessa modo é montado um sistema baseado em barras comprimidas e tracionadas, unidas por nós de modo a fazer um estudo similar a uma treliça. Em outras palavras o modelo se baseia em uma representação discreta dos campos de tração e compressão nos elementos estruturais, sendo a biela os principais campos de compressão e os tirantes os principais campos de tração desses elementos.

Nepomuceno (2012) diz que uma das grandes vantagens desse método é poder analisar a estrutura de modo mais realista, uma vez que ela não separa os esforços solicitantes e as forças internas para equilibrá-los.

#### **3.2 Elementos da Treliça**

##### **3.2.1 Nós**

Segundo Nepomuceno (2012), os nós idealizam os pontos de interseção da treliça e definem, nesse encontros de barras as tensões são desviadas por certo comprimento.

De acordo com Nepomuceno (2012):

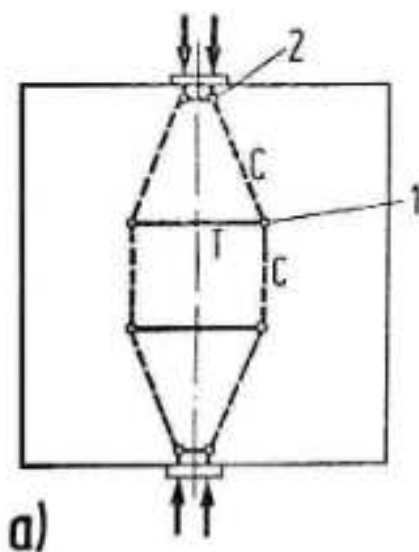
“Em uma estrutura, a maioria dos nós é do tipo contínuo, onde os campos de tensões no concreto se equilibram ou são desviados em comprimentos satisfatórios. Esses nós não são críticos no projeto e é suficiente que seja verificada a ancoragem das barras que nele concorrem”.

Por outro lado, se ocorre concentrações de forças no concreto, o desvio dos esforços ou ancoragem são realizados localizadamente. Esses nós podem ser classificados como singulares ou concentrados. (NEPOMUCENO, 2012):

A figura 6 mostra os tipos de nós:



Figura 6 - Nós contínuos (1) e nós singulares (2)



Fonte: Filho, A. C.(1996, p. 11)

Segundo FILHO (1996):

“Um nó é dito singular se uma das bielas ou dos tirantes, que se ligam em um determinado nó, representa um campo de tensões concentrado. Por outro lado, um nó é distribuído, quando se têm campos de tensão no concreto de certa largura, ligando-se a outros de mesmo tipo ou com tirantes tracionados, que consistam em muitas barras de armadura distribuídas”.

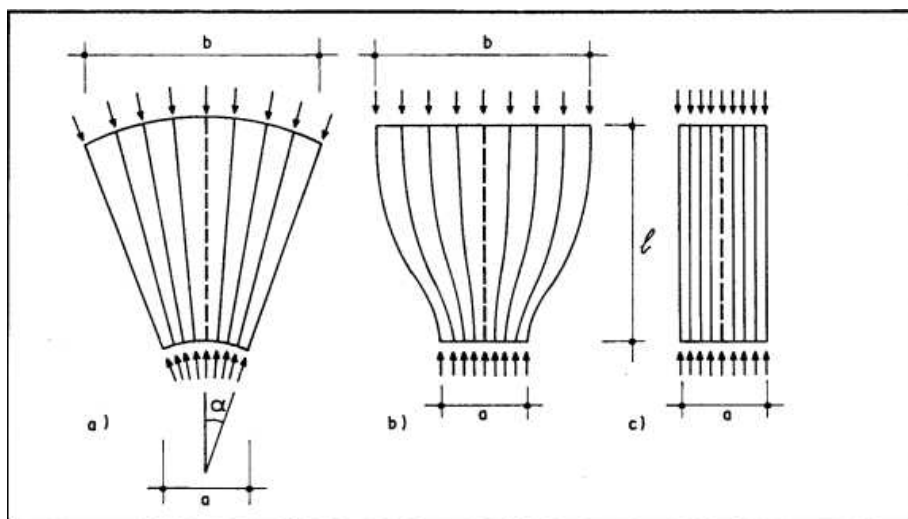
Os nós são nomeados de acordo com a quantidade de bielas e tirantes. No caso de três bielas comprimidas em um único nó, este é chamado de nó CCC, pois todas as barras estão comprimidas. Em outra situação se tiver duas bielas e um tirante esse nó é chamado de CCT, pois possui duas barras comprimidas (CC) e uma barra tracionada (T) (NEPOMUCENO, 2012).

### 3.2.2 Bielas

As bielas são discretizações dos campos de compressão do concreto, trata-se de um modelo mais realista que leva em consideração efeitos que a hipótese da seção plana não leva. Dependendo de como as tensões se distribuem na estrutura, tem-se campos de concentração diferentes. Dessa forma são enumeradas três situações distintas (SILVA, 1991).

A figura 7 mostra como são os três tipos de situações.

Figura 7 - Configurações típicas de campos de tensão de compressão



Fonte: Silva, R. C.(1991, p. 15)

A distribuição de tensões radial ou em leque (fig 7 – a) é uma idealização de um campo com curvatura desprezível que não desenvolve tensão de transversal de tração, além disso as forças são introduzidas de maneira suave (SILVA, 1991).

A distribuição de tensões em linhas curvilíneas ou em “garrafa” (fig 7 – b) ocorre quando as forças são propagadas percorrendo uma curvatura curvilínea acentuada. Essa propagação gera tensões de tração que causam um estado biaxial ou triaxial de tensões. Vale ressaltar que caso não seja feita a análise correta, essas tensões de tração podem levar a ruptura da peça (SILVA, 1991).

A distribuição de tensões paralelas ou prismáticas (fig 7 – c) são quando as tensões são distribuídas de maneira uniforme sem nenhuma perturbação e evidentemente não possui tensões de tração (SILVA, 1991).

### 3.2.3 Tirantes

As força de tração do modelo de biela e tirante normalmente são combatidas por tirantes de barras de aço. Em casos especiais é necessário usar tirantes de concreto como é o caso da distribuição tipo “garrafa” que gera tensões de tração como já citado (NEPOMUCENO, 2012).

De acordo com Nepomuceno (2012), um dos grandes problemas em relação aos tirantes é a ancoragem das armaduras. É importante que sejam usados armaduras mais finas em maior quantidade e dispor estas em camadas de modo a ocupar uma área suficientemente grande para evitar o esmagamento das regiões nodais.

### 3.3 Avaliação da resistência efetiva das bielas, regiões nodais e tirantes

De acordo com Nepomuceno (2012), a resistência efetiva é garantida através do coeficiente de minoração de resistência do aço e são constituídos de uma armadura passiva ou ativa.

$$f_{yd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_s}, \text{ para aços de resistência normal.} \quad (01)$$

Onde:

$\gamma_s$  = Coeficiente de minoração do aço.

$f_{ck}$  = Resistência à compressão característica a 28 dias.

$f_{yd}$  = Tensão de Escoamento do Aço majorada

No entanto, estimar a resistência a compressão das bielas e das zonas onde se encontram os nós, é de suma importância para garantir a segurança estrutural e priorizar o escoamento da armadura longitudinal para que ocorra antes do esmagamento do concreto. Se esse esmagamento não ocorrer pode gerar sérias consequências na peça, gerando uma ruptura drástica, conforme vem sendo observado nas estruturas que se rompem por cisalhamento (NEPOMUCENO, 2012).

“Por este motivo, nas últimas duas décadas, vários pesquisadores têm se dedicado a discutir a resistência efetiva do concreto nas bielas e regiões nodais nos modelos de biela e tirante” (NEPOMUCENO, 2012).

Em geral a resistência efetiva é calculada da seguinte forma:

$$f_c = v f_c' \quad (02)$$

Onde:

$f_c$  = Resistencia efetiva.

$f'_c$  = Resistencia do concreto.

$v$  = fator de eficiência ou fator de redução da resistência do concreto.

A seguir serão abordados dois métodos relativos a avaliação das bielas de compressão do concreto.

### 3.3.1 Método ACI 318 (2008)

“A resistência a compressão efetiva do concreto na biela ( $f_{ce}$ ) deve ser calculada utilizando-se a formulação a seguir”(NEPOMUCENO, 2012).

$$f_{ce} = 0,85 \beta_s f'_c \quad (03)$$

Onde:

$f'_c$  = Resistencia do concreto.

$\beta_s$  = é o fator de eficiência da biela que vale 1 para bielas prismáticas, 0,75 para bielas do tipo garrafas reforçadas de maneira adequada e 0,6 para bielas do tipo garrafa não reforçadas de maneira adequada (NEPOMUCENO, 2012).

$f_{ce}$  = Resistência à compressão efetiva do concreto na biela.

De acordo com Nepomuceno (2012), o fator de eficiência a ser utilizado para bielas do tipo garrafa depende diretamente da taxa de armadura a ser empregado. O propósito dessa ferragem é resistir as tensões de tração transversais que surgem nesse tipo de biela, evitando o aparecimento de fissuras a fim de não comprometer a resistência do concreto. Para definir o fator ser utilizado é necessário que a equação (04) seja satisfeita.

A equação é apresentada a seguir

$$\rho_{\perp} = \sum \frac{A_{si}}{b_s S_i} \sin \alpha_i \geq 0,003 \quad (04)$$

Onde:

$A_{si}$  = “é a área total de armadura com espaçamento  $S_i$  na  $i$ -ésima camada cruzando a biela, formando um ângulo  $\alpha_i$  da armadura com a biela; (NEPOMUCENO, 2012).

$b_s$  = Largura da Biela.

$S_i$  = Espaçamento da armadura na i-ésima camada.

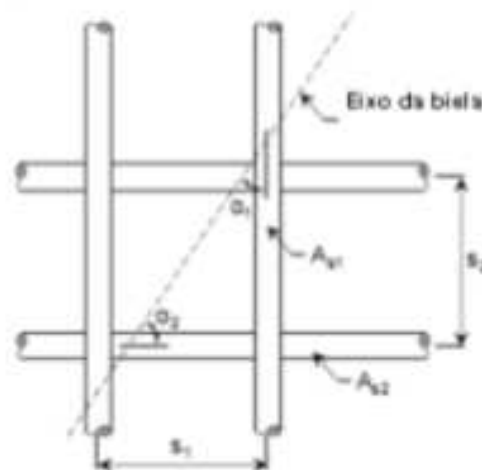
$\alpha_i$  = Ângulo entre a i-ésima camada e o eixo que se encontra a biela.

$\rho_{\perp}$  = Parâmetro que define o fator de eficiência a ser utilizado.

Quando a equação (04) for satisfeita se utiliza fator de eficiência 0,75, caso não obedeça às condições utiliza-se 0,6 (NEPOMUCENO, 2012).

A figura a seguir auxilia melhor o entendimento da equação (04).

Figura 8 - Cálculo de  $\rho_{\perp}$  pelo método ACI



Fonte: ACI 318, 2008

Logo a resistência na região Nodal é calculada da seguinte forma:

$$f_{ce} = 0,85 \beta_n f'_c \quad (05)$$

Onde:

$f'_c$  = Resistência do concreto.

$\beta_n$  = é o fator de eficiência do nó que vale 1,0 para nós do tipo CCC, 0,80 para nós do tipo CCT e 0,60 para nós do tipo CTT e TT (NEPOMUCENO, 2012).

$f_{ce}$  = Resistência à compressão efetiva do concreto na biela.

$f_{ce}$  = Resistência na região nodal.

### 3.3.2 Método CEB-FIP Model Code 2010

Para dimensionar as bielas de compressão, sua resistência a compressão reduzida deve ser utilizada é  $\frac{k_c f_{ck}}{\gamma_c}$ , onde  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração do concreto (NEPOMUCENO, 2012).

O Fator de redução  $k_c$  é obtido da seguinte forma

$$k_c = 1,0 \left( \frac{3}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1,0 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (06)$$

Figura 9 - Compressão Uniaxial

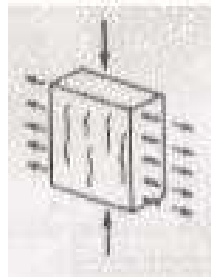


Fonte: CEB-FIB MC, 2010

Válido para compressões uniaxiais ou ainda para regiões onde a tensão de compressão seja na direção transversal. Pode ser calculado da seguinte forma também.

$$k_c = 0,75 \left( \frac{3}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 0,8 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (07)$$

Figura 10 - Compressão Longitudinal e Tração Transversal

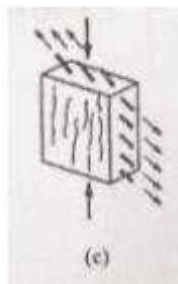


Fonte: CEB-FIB MC, 2010

Válida para bielas com fissuras paralelas a direção de compressão e armadura de tração perpendicular as fissuras. Também pode ser utilizado da seguinte forma:

$$k_c = 0,55 \left( \frac{3}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 0,55 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (08)$$

Figura 11 -- Compressão longitudinal e armadura inclinada



Fonte: CEB-FIB MC, 2010

Válida para bielas onde ocorre armadura inclinada em relação à direção da compressão.

Já no dimensionamento das regiões nodais, a resistência à compressão do concreto deve ser calculado  $\frac{k_c f_{ck}}{\gamma_c}$  onde  $\gamma_c$  é o coeficiente de minoração do concreto (NEPOMUCENO, 2012).

$$k_c = 1,0 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1,0 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (09)$$

Para nós onde não existam tirantes ancorados (09).

$$k_c = 0,75 \left( \frac{30}{f_{ck}} \right)^{\frac{1}{3}} \leq 1,0 \quad (f_{ck} \text{ em MPa}) \quad (10)$$

Para nós onde existam tirantes ancorados em uma ou duas direções (10).

### 3.4 Direção das bielas e tirantes.

Segundo Nepomuceno (2012), a escolha do modelo de biela e tirante a ser usado para dimensionar uma estrutura pode ser feita baseando-se nos critérios abaixo:

- Modelos padronizados por Códigos normativos
- Caminho das cargas das pelas bielas e tirantes
- Utilização do método dos elementos finitos
- Análises não-lineares que considerem a fissuração do concreto
- Pesquisas experimentais
- Algoritmos de otimização estrutural

### 3.5 Modelo de Otimização

Schlaich Et Al. (1987) afirmam que na seleção do melhor modelo deve-se considerar sempre que os esforços tendem a seguir os caminhos mais curtos e com as menores deformações possíveis. E, quando os tirantes são mais deformáveis que as bielas comprimidas de concreto, um modelo que contenha um menor número de tirantes com menor comprimento, será mais útil:

$$\sum F_i l_i \varepsilon_i = \text{mínimo} \quad (11)$$

Baseados na proposição de Schlaich Et Al. (1987), Lourenço & Almeida (2004) propõe um método que se baseia na metodologia da minimização da energia de deformação global dos modelos, e dessa forma definindo a geometria das bielas através dos campos de tensões dentro do modelo.

$$\frac{dU}{dx} = 0 \quad (12)$$

Onde:

$U$  = a energia de deformação

$x$  = variável a ser analisada

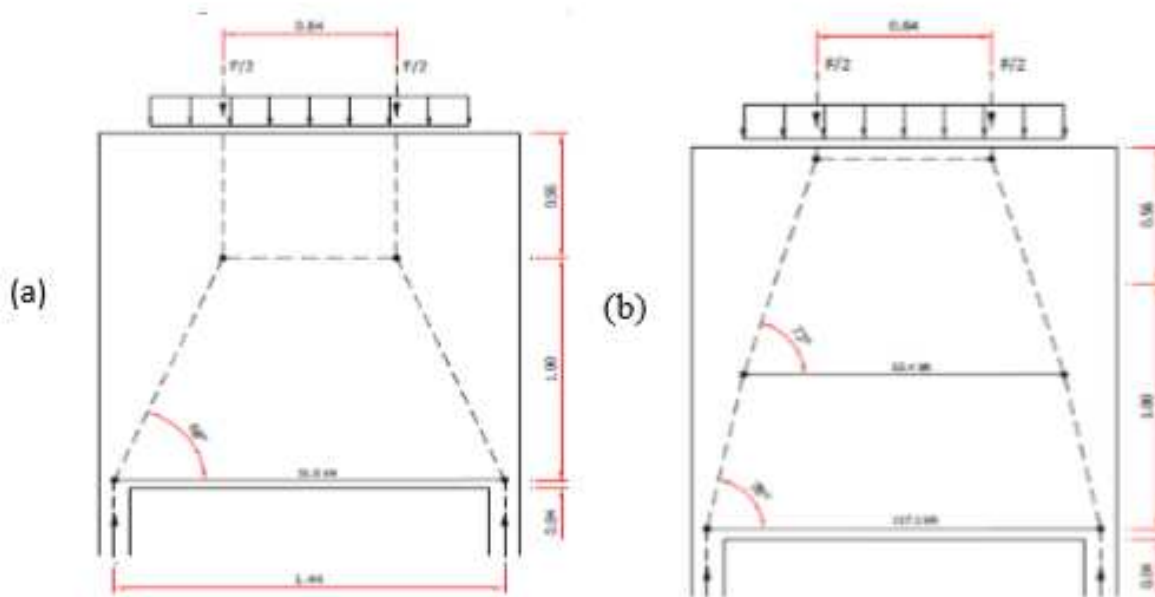
Vale ressaltar que a energia de deformação  $U$  é definida por:

$$U = \int_v \sigma \varepsilon dV \quad (13)$$



O método analisado acima é demonstrado aplicando-se a uma viga parede ensaiada por Leonhardt & Walter. A partir do primeiro modelo, baseado na trajetória de tensões elásticas, obtém-se uma carga de ruptura de apenas 40% da capacidade última da viga, obtida experimentalmente. Com o segundo modelo, baseado na distribuição de tensões na ruptura, obteve-se 94% da carga última do ensaio como observado na figura 12. A previsão do comportamento estrutural na ruptura só poderia ser definida por meio de uma análise não-linear de elementos finitos. Porém, segundo Lourenço & Almeida (2004), baseados na metodologia proposta, do princípio da minimização da energia de deformação do modelo de biela e tirante, consegue-se uma boa aproximação do comportamento estrutural, permitindo, de forma relativamente simples, determinar o campo de tensões na ruptura.

*Figura 12 - Modelo de biela e tirante baseado (a) na trajetória de tensões elásticas e (b) na distribuição de tensões na ruptura*



Fonte: Lourenço e Almeida, 2004

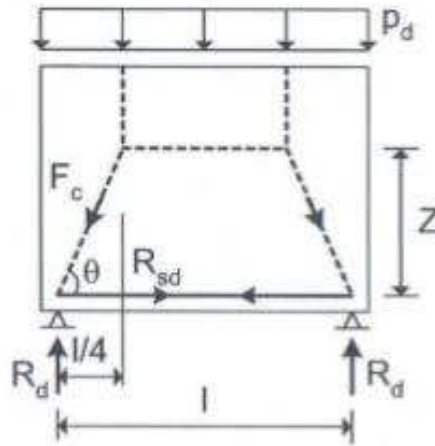
### 3.6 Análise de tensões

Através das bielas e tirantes pode-se encontrar as tensões de tração e compressão na viga parede.

### 3.6.1 Tensões de compressão

A figura 13 mostra uma simplificação do modelo de bielas e tirantes

Figura 13 - Modelo de biela- tirante para viga-parede biapoiadas



Fonte: Araujo, J. M., 2010

A reação de apoio  $R_d$  é calculado como uma viga biapoiada, dada pela equação 14 para uma viga com carga distribuída.

$$R_d = \frac{P_d l}{2} \quad (14)$$

Segundo ARAÚJO (2010), através do modelo citado pode-se descrever a equação de equilíbrio do modelo em questão.

$$R_{sd} Z = R_d \frac{l}{4} \quad (15)$$

Onde:

$Z$  = Braço de alavanca dado pelas expressões

$$Z = 0,15 h \left( 3 + \frac{L}{h} \right), \text{ se } 1 < \frac{l}{h} \leq 2 \quad (16)$$

$$Z = 0,6 l, \text{ se } \frac{l}{h} \leq 1$$

De acordo com ARAÚJO (2010), a inclinação e a força de compressão nas bielas é dado pelas equações 17 e 18.

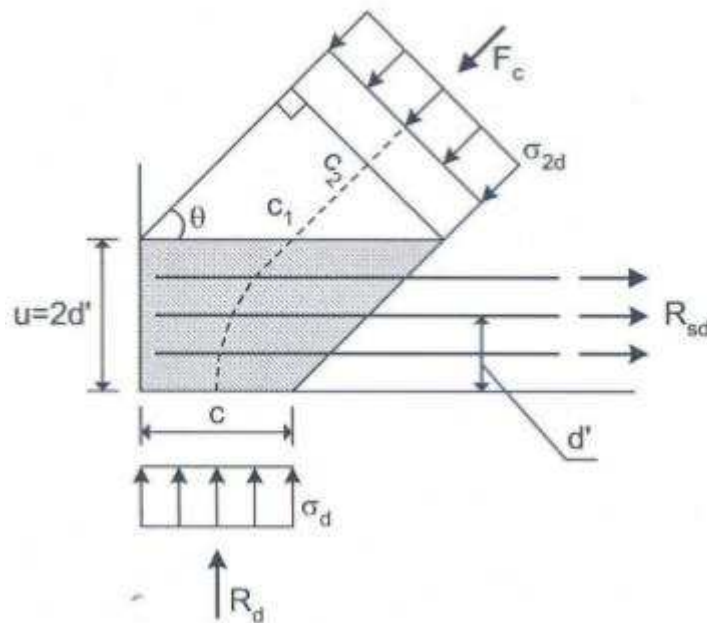
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4Z}{l} \quad (17)$$

$$F_c = \frac{R_d}{\operatorname{sen} \theta} \quad (18)$$

Para evitar o esmagamento do concreto é necessário limitar as tensões de compressão na região dos apoios. Essas tensões são obtidas, observando o nó (ARAUJO, 2010).

A figura 14 retrata melhor tal situação.

Figura 14 - Tensões de compressão na região dos apoios



Fonte: Araujo, J. M., 2010

Observe na figura 14 que o parâmetro “C” representa a largura do apoio,  $d'$  é a distância do centroide da armadura até o banco tracionado, e a altura do nó do apoio é dado por  $u = 2 d'$ . As dimensões  $C_1$  e  $C_2$  são demonstradas pelas equações 19 e 20

$$C_1 = C + u \operatorname{cot} g \theta \quad (19)$$

$$C_2 = (C + u \operatorname{cot} g \theta) \operatorname{sen} \theta \quad (20)$$

Logo as equações 21 e 22 definem a tensão de compressão no apoio e na biela, respectivamente.

$$\sigma_d = \frac{R_d}{bc} \quad (21)$$

$$\sigma_{2d} = \frac{R_d}{b(C + u \cot g\theta) \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{R_d}{b C_2 \operatorname{sen} \theta} \quad (22)$$

Para evitar o esmagamento do concreto é necessário limitar essas tensões de compressão. Para levar em conta a redução da resistência a compressão do concreto provocado pelas tensões de tração transversal e com possibilidade de fissuração do concreto usa-se um valor reduzido (ARAUJO, 2010).

$$\sigma_{2d} \leq f_{cdr} \text{ e } \sigma_d \leq f_{cdr} \quad (23)$$

O valor de  $f_{cdr}$  é dado pela equação 24

$$f_{cdr} = 0,6x \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) x \frac{f_{ck}}{1,4} \quad (24)$$

Onde:

$f_{ck}$  é dado em Mpa

Uma observação importante é que as tensões  $\sigma_d$  e  $\sigma_{2d}$  são relacionadas as compressão no apoio e na biela, bastando somente fazer apenas uma verificação. Quando  $u < c \cdot \cot g(\theta)$  deve verificar a tensão na biela inclinada, pois ela é a maior solicitação, caso contrário verifica-se a tensão no apoio (ARAUJO, 2010).

## 4. GENERALIZAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

### 4.1 Formulação Geral

Segundo AZEVEDO (2003), no âmbito da engenharia de estruturas, o método numérico MEF tem como objetivo principal determinar a tensão e a deformação de um sólido de geometria qualquer sob ação de fatores externos. Esse tipo de cálculo possui uma derivação genérica de análise de estruturas e é empregado no cálculo de uma ponte, edifício, barragens etc. As técnicas aqui utilizadas correspondem as análises de comportamento de estruturas cuja geometria, materiais e ações são conhecidos. A formulação dos elementos finitos é baseado no método dos deslocamentos, podendo ser utilizado também modelos híbridos e mistos ou ainda modelos de equilíbrio. De todos esses métodos, utiliza-se o de maior simplicidade que é o método dos deslocamentos, pois ele se torna mais fácil para programar utilizando o computador.

De acordo com AZEVEDO (2003), é necessário fazer uma análise para utilização do método podendo ser: dinâmica ou estática e Linear ou não-linear. A análise dinâmica leva em consideração cargas diferenciáveis, devendo considerar as forças de inercia sobre o corpo, mas quando essas forças são praticamente desprezíveis, faz-se uma análise estática que também pode ser bastante útil. Quando os deslocamentos são muito pequenos pelas ações exteriores, nessa condição admite-se que não existe influência da geometria das estruturas na distribuição dos esforços ou tensões, dessa forma diz-se que foi feita uma análise não linear geométrica. Quando há deslocamentos relativamente não desprezíveis é necessário fazer uma análise Linear, utilizando de algoritmos específicos para tal cálculo.

A formulação do método, requer o uso de integrais de modo que possa ser substituído sobre um domínio complexo por um somatório de integrais estendidos a subdomínios de geometrias simples. Essa técnica pode ser ilustrada de acordo com a formulação a seguir, que corresponde à integral do volume de uma função  $f$ .

$$\int_V f dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f dV \quad (25)$$

Em (26) pressupõe-se que:

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (26)$$

Caso seja possível calcular todas as integrais no subdomínio  $V_i$  basta efetuar o somatório que corresponde ao segundo membro da equação (25), desse forma obtém-se a integral estendida em todo o domínio. Cada subdomínio  $V_i$  corresponde a geometria simples, que pode ser um triângulo, quadrilátero ou até mesmo um segmento de reta. O somatório apresentado em (25) vai dar origem a estrutura a ser analisada definindo dessa forma vários elementos finitos, que podem ser analisados de forma bidimensional ou tridimensional. (AZEVEDO, 2003)

Para resumir o método serão apresentados subtópicos, de modo a apresentar as equações que serão utilizadas:

- a) A peça contínua é idealizado de acordo com a forma dos elementos, eles podem ser triangulares, quadriláteros e tetraedros, estes por sua vez são ligados por nós que se situam no contorno da peça. (VAZ, 2011)
- b) As matrizes de interpolação para o elemento  $m$ , cujo os parâmetros utilizados são funções conhecida, fornece o campo de deslocamentos dentro dos elementos finitos em função dos deslocamentos nodais  $d_m$ .(VAZ, 2011)

$$u_m = N_m d_m \quad (27)$$

Onde:

$N_m$  = Matriz

$d_m$  = Deslocamentos nodais

$u_m$  = Vetor resultante

- c) De acordo com VAZ (2011), o vetor das deformações dentro de cada elemento pode ser calculado através de uma derivação (em função das coordenadas) dos campos de deslocamentos e dessa forma, obtém-se a seguinte equação.

$$\epsilon_m = B_m d_m \quad (28)$$

- d) As tensões de dentro dos elementos são obtidas a partir das deformações das relações constitutivas. Quando o corpo é homogêneo e se comporta como material linear elástico é possível definir apenas uma matriz constitutiva  $C$ , relacionando as tensões e deformações no elemento, escrita da seguinte forma

$$\sigma_m = C \epsilon_m \quad (29)$$

Quando se trata de um material isotrópico, a matriz  $C$  depende apenas dos seguintes parâmetros mecânicos como o módulo de Elasticidade longitudinal e coeficiente de Poisson. (VAZ, 2011)

- e) “Uma matriz de rigidez (matriz  $K_m$ ) e um vetor de cargas equivalentes nodais  $f_m$  para o elemento podem ser obtidos a partir das matrizes geradas  $N_m$ ,  $B_m$  e  $C$ .” (VAZ, 2011)
- f) “As matrizes de rigidez e as cargas nodais equivalentes de cada elemento são combinadas adequadamente de forma a montar a matriz de rigidez global  $K_g$  e o vetor global de cargas nodais  $f_g$  da estrutura”. (VAZ, 2011)
- g) Os deslocamentos globais são calculados da equação de equilíbrio global da estrutura  $K_g d_g = f_g$  (VAZ, 2011).

A expressão para o elemento finito de número 1 pode ser obtida através da equação abaixo:

$$\int_0^{V_1} \delta \varepsilon_1 \sigma_1 dV_1 = \int_0^{V_1} \delta u_1 q_1 dV_1 + \int_0^{V_1} \delta u_1 p_1 dT_1 + \delta d_1 f_1 \quad (30)$$

As Integrais  $V_1$  e  $T_1$  significam respectivamente integrais no domínio e no contorno do elemento 1. Lendo com atenção os itens de “a” à “g” tem-se para as grandezas virtuais:

$$\delta u = N \delta d \quad (31)$$

$$\delta \varepsilon = B' \delta d \quad (32)$$

Para as grandezas reais tem-se:

$$u = N \cdot d \quad (33)$$

$$\varepsilon = B \cdot d \quad (34)$$

$$\sigma = C \cdot \varepsilon = C \cdot B \cdot d \quad (35)$$

Substituindo a equação (35) e (31) na equação (30), chega-se a seguinte situação:

$$\delta d^T \int_0^{V_1} B^T C \cdot B \cdot d dV_1 = \delta d^T \left( \int_0^{V_1} N^T q_1 dV_1 + \int_0^{V_1} N^T p_1 dT_1 + f_1 \right) \quad (36)$$

Dessa forma, o termo pode ser simplificado, assim a equação fica da seguinte maneira:

$$Kd = fq + fp + f \quad (37)$$

Onde:



$$K = \int_0^V B^T C.B.d dV \quad (38)$$

$$fq = \int_0^V N^T q dV \quad (39)$$

$$fp = \int_0^V N^T p dT \quad (40)$$

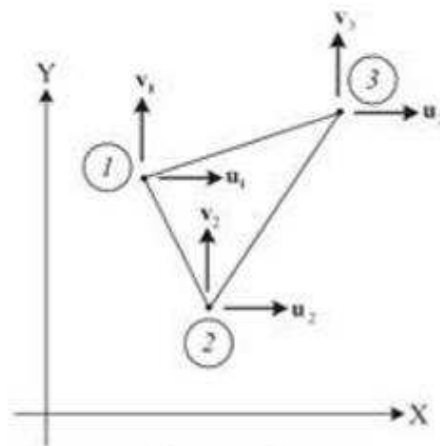
Segundo VAZ (2011), as expressões citadas,  $K$  é a matriz de rigidez do elemento analisado,  $fq$  é o vetor das forças nodais equivalentes às cargas de volume,  $fp$  é o vetor das forças nodais equivalentes às cargas de superfície e  $f$  é o vetor das forças nodais propriamente ditas.

#### 4.2 Graus de liberdade

Segundo Azevedo (2003), num ponto do espaço pertencente a um corpo sujeito a deslocamentos e deformações podem ser considerados seis graus de liberdade (três de deslocamento e três de rotação) .

A figura 15 mostra o grau de liberdade de uma estrutura no plano , onde cada nó possui 2 graus de liberdade sendo eles os deslocamentos em x e y.

Figura 15 - Graus de Liberdade no plano



Fonte: Vaz (2011)

### 4.3 Critérios de Convergência do MEF

“Para que a solução se aproxime da solução exata da estrutura quando se refina a malha com esses elementos, alguns critérios precisam ser satisfeitos” (VAZ, 2011).

Os critérios são apresentados a seguir:

- **Critério 1**

De acordo com VAZ (2011), dentro de cada elemento a função aproximadora precisa possuir um polinômio de grau  $m$ , vale ressaltar que esse polinômio precisa ser completo.

- **Critério 2**

Na fronteira entre os elementos é necessário que haja continuidade entre o polinômio e que suas derivadas possuam uma ordem de no mínimo  $m - 1$  (VAZ, 2011).

- **Critério 3**

Segundo VAZ (2011), para uma estrutura em forma de malha de elementos submetidos as condições de contorno de valores que são constantes de qualquer valor de  $m$  para o polinômio a ser analisado, logo quando há um refinamento da malha, cada elemento deve reproduzir essas deformações constantes.

O critério 1 serve para garantir que o polinômio possua uma malha que seja contínua dentro do elemento, como já mencionado anteriormente, e vale ressaltar que ele é necessário, mas nem sempre o critério 3 é satisfeito. Já o Critério 2, é satisfeito para qualquer malha com elementos compatíveis. Quando os elementos são incompatíveis é necessário fazer um refinamento da malha e dessa forma garantir essa segurança. O critério 3 é satisfeito para a grande maioria dos elementos, e geralmente, ele serve de teste para os critérios 1 e 2 (VAZ, 2011).

#### 4.4 Matriz de Rigidez Global e Vetor de Cargas

“O MEF herdou da análise matricial de estruturas reticuladas a técnica de montagem da matriz de rigidez global da estrutura a partir da contribuição das matrizes de rigidez local de cada elemento da malha” (VAZ, 2011).

De acordo com VAZ (2011), isso só foi possível pelo fato o método dos elementos finitos ter sido baseado na análise matricial de estruturas, ou seja, possui elementos conectados entre si por meio de nós. Na análise matricial são utilizados elementos de barras, no entanto, nesse método se utiliza são polígonos ou poliedros que estão no contorno dos elementos. As ideias básicas para a montagem da matriz de rigidez são:

- a) Associar a cada nó da estrutura graus de liberdade que que seja dependente do número do nó
- b) Associar a numeração local dos nós em cada elemento à numeração global dos nós a nível global, ou seja, da estrutura.

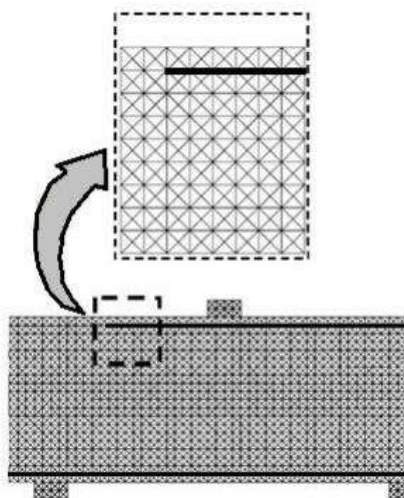
Obedecendo a essas regras a matriz de rigidez pode ser montada adequadamente.

## 5. MODELO DE MICRO TRELIÇA

O Modelo de Micro Treliza (MMT) pode ser considerado como uma generalização do método das Bielas e tirantes e pode ser utilizado para desenvolver modelos mais sofisticados e otimizados, além disso, pode prever respostas não lineares de elementos estruturais de concreto armado (NAGARAJAN et al., 2009).

Segundo SALEM (2004), uma viga parede pode ser discretizada conforme Figura 16, em que essa foi separada em pequenas regiões quadradas as quais possuem dois elementos de treliza em cada sentido, sendo estes horizontais, verticais e diagonais. Os elementos horizontais recebem as tensões normais na direção horizontal, enquanto que os verticais na direção vertical. Os elementos diagonais recebem os esforços cisalhantes através de um mecanismo de compressão, de modo que um elemento puxa o outro.

*Figura 16 - Discretização do modelo da Micro Treliza*



Fonte: Salem (2004)

Com o auxílio desse modelo o autor tinha o objetivo de simular as fissuras advindos da flexão das peças em concreto armado. Dessa forma, espera-se gerar os danos causados pelos os esforços de cisalhamento e de flexão. No entanto, não leva em consideração o bloqueio de agregados, logo não é possível saber o tamanho de falha de corte deslizante e pode não ser capaz de simular o efeito em relação ao tamanho do corte (VIEIRA, 2013).

Ainda na figura 16, pode-se observar a facilidade de simular as armaduras longitudinais na viga. No entanto, é notório observar que as barras de aço são mantidas de maneira vertical, horizontal ou inclinada. O autor SALEM (2004), acredita que essas limitações podem não causar problemas, uma vez que as barras do modelo estão alinhadas.

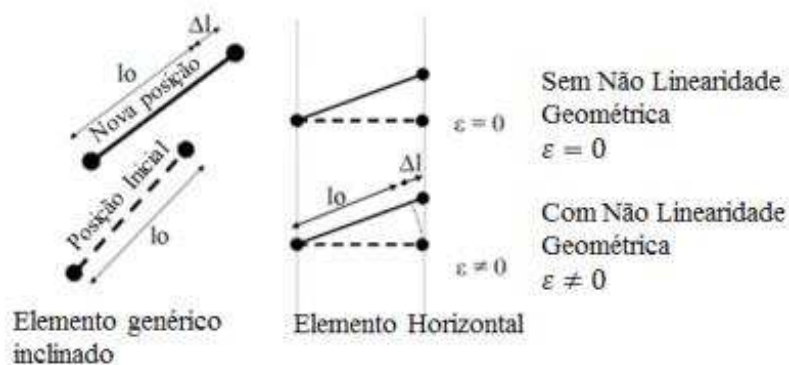
Vale ressaltar que esse método trata a estrutura semelhante a uma treliça considerando elementos de barras. Esse método consiste na montagem da matriz de rigidez de cada elemento de barra e assumindo um deslocamento unitário, conforme estudado no método dos deslocamentos (VIEIRA, 2013).

Neste modelo, as treliças possuem solução através do método da rigidez por meio de uma análise não linear geométrica e física, onde são aplicados modelos constitutivos para o aço e concreto a fim de capturar as respostas elásticas e plásticas desses materiais (SALEM, 2004).

“A não-linearidade geométrica é simplesmente introduzida pela atualização dos deslocamentos a cada iteração, e computado as deformações com base nos deslocamentos mais atuais”(SALEM, 2004).

Um exemplo é mostrado na Figura 17 para um elemento que se encontra na horizontal experimentando apenas o deslocamento vertical em relação à sua extremidade. Se a não-linearidade geométrica não é levada em consideração, a deformação será zero. No entanto, se a não-linearidade geométrica é considerada, em relação ao deslocamento vertical irá causar algum alongamento no membro o que significa que existe deformação normal (SALEM, 2004).

Figura 17 - Não-linearidade geométrica para um elemento de treliça



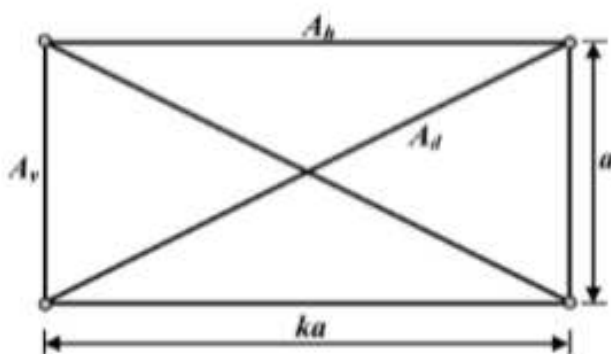
Fonte: Salem (2004)

A discretização do modelo da microtreliça utilizada nos trabalhos de Salem (2004) baseia-se nos trabalhos de Hrennikoff e o padrão de microtreliça abaixo (figura 18), proposto pelo pesquisador em questão é utilizado para desenvolver o modelo de microtreliça para vigas de concreto armado.

Neste padrão os elementos verticais e horizontais representam os esforços normais e as diagonais os esforços cisalhantes. Caso haja a não linearidade física e geométrica é possível prever o comportamento da estrutura como um todo (NEPOMUCENO, 2012).

A figura 18 demonstra o modelo para vigas, proposto por SALEM (2004):

*Figura 18 - Modelo de discretização para micro*



Fonte: Salem (2004)

## 6. MODELOS DE ANÁLISE DAS VIGAS-PAREDES

Nesta etapa será mostrado os modelos reais de análise segundo todos os métodos já citados anteriormente. No total será feita duas análises, sendo a características:

### a) VP1

- $L = 4 \text{ m}$  (comprimento do vão)
- $h = 3 \text{ m ou } 300 \text{ cm}$  (altura da viga)
- $b = 0,20 \text{ m ou } 20 \text{ cm}$  (base da viga-parede)
- C25 (Concreto de resistência 25 MPa a 28 dias de cura)
- CA – 50 (Armadura com tensão de escoamento de 500 Mpa)
- $f_{yd} = 434,8 \text{ MPa}$
- $q_{sobrecarga} = 5 \text{ KN/m}$  (Carga além do peso próprio)
- $\gamma_{concreto} = 25 \text{ KN/m}^3$  (Peso específico do concreto)
- Coeficiente de ponderação do concreto 1,4
- $E_C = 23800 \text{ MPa}$  (Módulo de elasticidade do concreto)

### b) VP2

- $L = 6 \text{ m}$  (comprimento do vão)
- $h = 3 \text{ m ou } 300 \text{ cm}$  (altura da viga)
- $b = 0,20 \text{ m ou } 20 \text{ cm}$  (base da viga-parede)
- C25 ( Concreto de resistência 25 MPa a 28 dias de cura)
- CA – 50 (Armadura com tensão de escoamento de 500 Mpa)
- $f_{yd} = 434,8 \text{ MPa}$
- $q_{sobrecarga} = 5 \text{ KN/m}$  (Carga além do peso próprio)
- $\gamma_{concreto} = 25 \text{ KN/m}^3$  (Peso específico do concreto)
- Coeficiente de ponderação do concreto 1,4
- $E_C = 23800 \text{ MPa}$  (Módulo de elasticidade do concreto)

## 6.1 Cálculo do carregamento da viga parede

### 6.1.1 Carga distribuída para VP1 e VP2

A viga parede possui uma seção retangular, e, portanto, pode-se encontrar o peso próprio através da seguinte equação

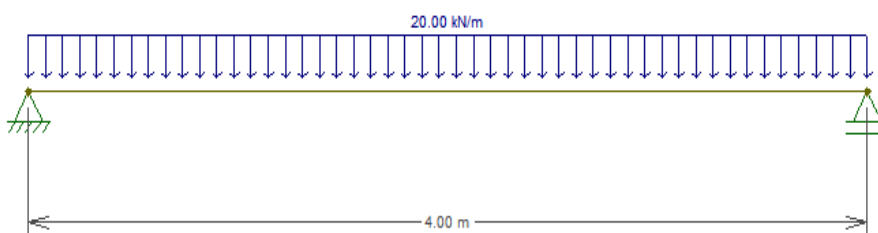
$$q_{\text{peso próprio}} = \gamma_c A_s = 25 \times 0,2 \times 3 = 15 \text{ KN/m} \quad (41)$$

Logo o carregamento total será o somatório de todas ações na estrutura, como mostrada na equação 42.

$$q_{\text{total}} = q_{\text{acidental}} + q_{\text{peso próprio}} = 15 + 5 = 20 \text{ KN/m} \quad (42)$$

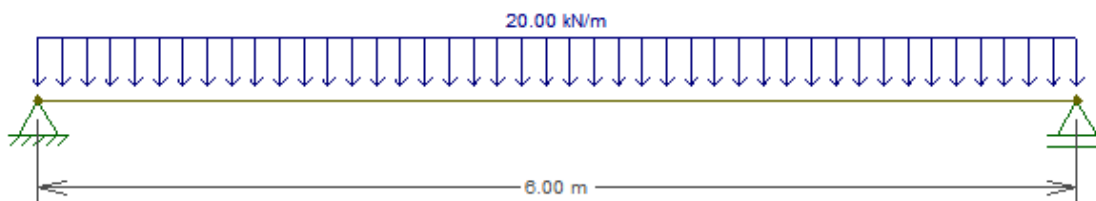
O esquema estático fica da seguinte forma para as vigas VP1 e VP2 respectivamente:

Figura 19 - Esquema estático de VP1



Fonte: O Autor (2019)

Figura 20 - Esquema estático de VP2



Fonte: O Autor (2019)

### 6.1.2 Cálculo dos esforços nas Vigas

Após montar o esquema estático será necessário demonstrar os esforços de VP1 e VP2. Para essa análise de tensões, os esforços importantes serão o de diagrama de momento fletor, demonstrando o maior esforço de flexão e as



reações em cada apoio que serão de suma importância para demonstrar as tensões nas bielas de compressão.

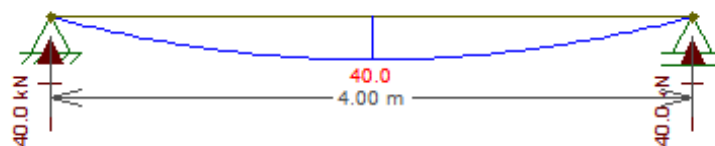
As equações 43 e 44 demonstram os esforços de flexão em VP1 e VP2.

$$M_{VP1} = \frac{q L^2}{8} = \frac{20 \times 4^2}{8} = 40 \text{ KNm} \quad (43)$$

$$M_{VP2} = \frac{q L^2}{8} = \frac{20 \times 6^2}{8} = 90 \text{ KNm} \quad (44)$$

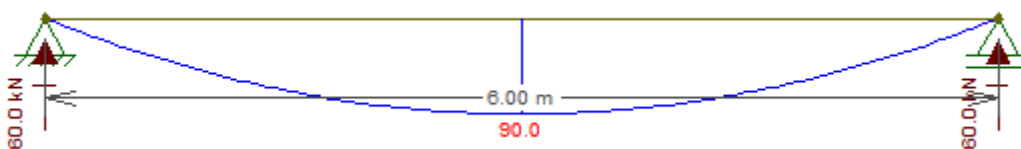
A figuras 21 e 22 a seguir mostram os diagramas de momento fletor de VP1 e VP2.

Figura 21 - Diagrama de momento para VP1



Fonte: O Autor (2019)

Figura 22 - Diagrama de momento para VP2



Fonte: O Autor (2019)

As reações em cada apoio são demonstradas pelas equações 45 e 46, que representam, respectivamente VP1 e VP2.

$$R_{VP1,1} = R_{VP1,2} = \frac{q x L}{2} = \frac{20 \times 4}{2} = 40 \text{ KN} \quad (45)$$

$$R_{VP2,1} = R_{VP2,2} = \frac{q x L}{2} = \frac{20 \times 6}{2} = 60 \text{ KN} \quad (46)$$

## 6.2 Análise dos esforços em VP1

### 6.2.1 Pelo método de bielas e tirantes (NBR-61180)

A primeira etapa é analisar se VP1 é uma viga parede, logo é necessário que seguinte condição da NBR-6118 seja satisfeita, a relação para vigas biapoiadas é demonstrada na equação 47.

$$\text{Para VP1} \quad \frac{L}{h} \leq 2 \rightarrow \frac{4}{3} = 1,333 < 2 \quad (47)$$

Logo, VP1 é uma viga parede

#### 6.2.1.1 Armadura à flexão

Pela equação 49 será calculada a armadura de flexão, primeiramente deve-se aplicar o coeficiente de segurança no momento conforme as recomendações da NBR 6118, os dados estão demonstrados no item 7

$$M_d = 1,4 \times M_{VP1} = 1,4 \times 40 = 56 \text{ KNm} \quad (48)$$

A área da seção da armadura longitudinal é dada por:

$$A_s = \frac{M_d}{Z f_{yd}} \quad (49)$$

Onde  $f_{yd}$  é a tensão de escoamento do aço CA-50 aplicada com o com o coeficiente de segurança e Z é o braço de alavanca, que para vigas biapoiadas é calculado pela equação 39.

$$Z = 0,15 h \left( 3 + \frac{L}{h} \right), \text{ se } 1 < \frac{l}{h} \leq 2 \quad (50)$$

$$Z = 0,15 \times 3 \times \left( 3 + \frac{4}{3} \right) = 1,95 \quad (51)$$

Logo  $A_s$  vale:

$$A_s = \frac{56}{1,95 \times 43,48} = 0,66048 \cong 0,66 \text{ cm}^2 \quad (52)$$

Pela NBR 6118/2014, a taxa de armadura mínima para concreto de 25 MPa utiliza  $\rho_{min} = 0,150 \%$  um deve ser calculada da seguinte forma:

$$\rho_{min} = \frac{A_s}{A_c} \leftrightarrow A_s = \rho_{min} A_c = 0,00150 \times 20 \times 300 = 9 \text{ cm}^2 \quad (53)$$

A figura 23 demonstra o número de barras usada na viga parede através da área de armadura longitudinal

Figura 23 - Tabela de armadura à flexão caso 1

Bitola	Número de barras ou fios						
	1	2	3	4	5	6	7
3,4	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,64
4,2	0,14	0,28	0,42	0,55	0,69	0,83	0,97
5	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,37
6,3	0,31	0,62	0,94	1,25	1,56	1,87	2,18
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50
12,5	1,23	2,45	3,68	4,91	6,14	7,36	8,59
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99
22	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36
32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30

Fonte: Araújo, J. M. (2010)

Através da figura 23 podemos adotar uma armadura 3  $\varnothing 20,0$  ( $9,42 \text{ cm}^2$ ).

### 6.2.1.2 Tensão de compressão no apoio e na biela

Pela equação 54, calcula-se a Reação no apoio aplicando o coeficiente de segurança do concreto.

$$R_d = 1,4 \times R_{VP1,1} = 1,4 \times 40 = 56 \text{ KN} \quad (54)$$

A inclinação da biela de compressão é dada por:

$$\text{tg } \theta = \frac{4Z}{L} = \frac{4 \times 1,95}{4} = 1,95 \rightarrow \theta = 62,85^\circ \cong 63^\circ \quad (55)$$

Nesta etapa é necessário admitir um cobrimento, foi adotado 2,5 cm. Logo a  $d' = 2,5 + (1 + 0,5) = 4 \text{ cm}$  (sendo 1cm metade da armadura e 0,5 bitola do estribo), já que a armadura foi concentrada em apenas uma única camada. A altura do nó ao apoio vale  $u = 2 d' = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$ .

Como  $u = 8 \text{ cm}$  e a  $c \cdot \cotg(\theta) = 20 \times \cotg(62,85^\circ) = 10,25 \text{ cm}$ , logo  $u < c \cdot \cotg(\theta)$ , deve se analisar a tensão na biela somente. Mas por motivo de análise iremos considerar as duas tensões.

$$\sigma_b = \frac{56}{20 \left( 20 + 8 \frac{1}{1,95} \right) \text{sen}^2(62,85)} = 0,147 \text{ KN/cm}^2 \quad (56)$$

$$\sigma_A = \frac{R_d}{bc} = \frac{56}{20 \times 20} = 0,14 \text{ KN/cm}^2 \quad (57)$$

Logo as tensões são  $\sigma_b = 1,47 \text{ MPa}$  e  $\sigma_A = 1,4 \text{ MPa}$ , faz-se necessário calcular a  $f_{cdr}$  para garantir que as não haverá esmagamento do concreto.

$$f_{cdr} = 0,6 \times \left( 1 - \frac{25}{250} \right) \times \frac{25}{1,4} = 9,643 \text{ MPa} \quad (58)$$

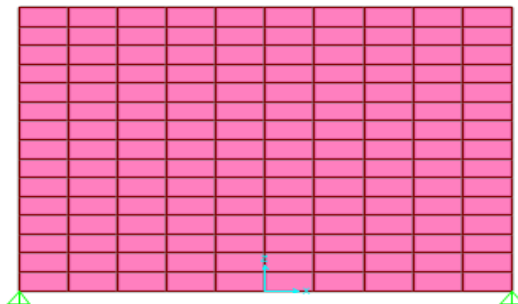
Assim,  $\sigma_b < f_{cdr}$  e  $\sigma_A < f_{cdr}$ , logo não corre risco de esmagamento.

### 6.2.2 Tensões pelo método dos elementos finitos

A modelagem foi realizada no programa SAP 2000, inicialmente foi necessário entrar com os parâmetros da viga parede, já citado no item 7. Uma observação importante é que a malha adotada para esse método foi retangular e possui uma dimensão 20 cm na vertical e 40 cm na horizontal. A seguir a equação 59 mostra a quantidade total de elementos adotados. Vale ressaltar que o vão é de 400 cm e a altura de 300 cm.

$$N_{elementos} = \frac{\text{ÁREA TOTAL}}{\text{ÁREA DO ELEMENTO}} = \frac{400 \times 300}{20 \times 40} = 150 \quad (59)$$

Figura 24 – Quantidade de elementos para VP1



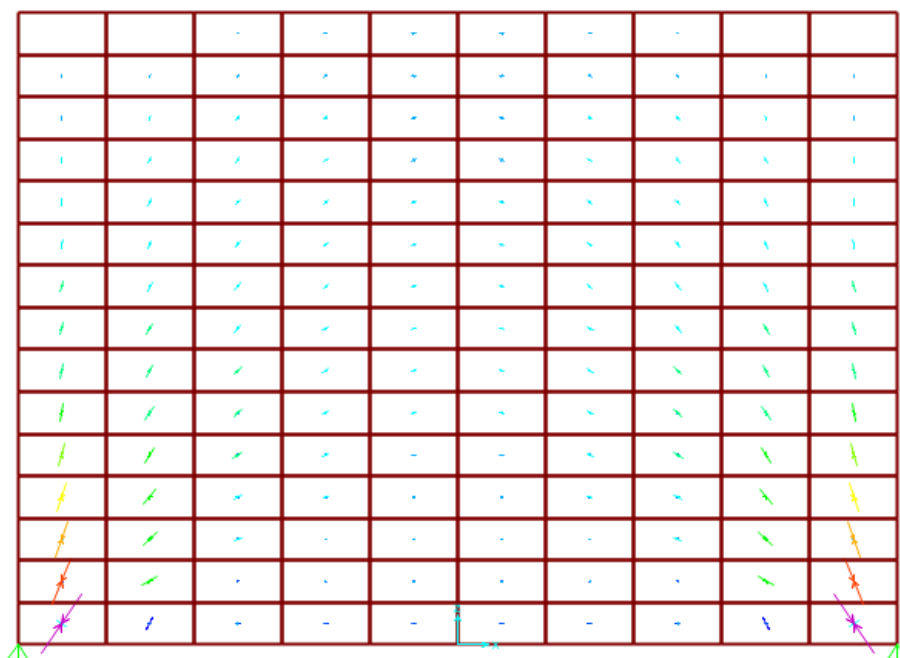
Fonte: O Autor (2019)

A figura 24 a mostra a disposição dos elementos:

A carga adotada 20 KN/m, sendo 15 KN/m o peso próprio e 5 KN/m a sobrecarga adotada. Quanto as vinculações foram definidos apoios com duas restrições (apoio de segundo gênero). Outro fator importante é que é necessário ponderar a carga por 1,4 para garantir a segurança (recomendação da NBR-6118), desse modo a peça ficará no estado limite último de serviço (ELU).

A figura mostra o gráfico da trajetória das forças que chegam até o apoio. Observe que desce transversalmente na posição das bielas.

*Figura 25 - Trajetória das forças em VP1*



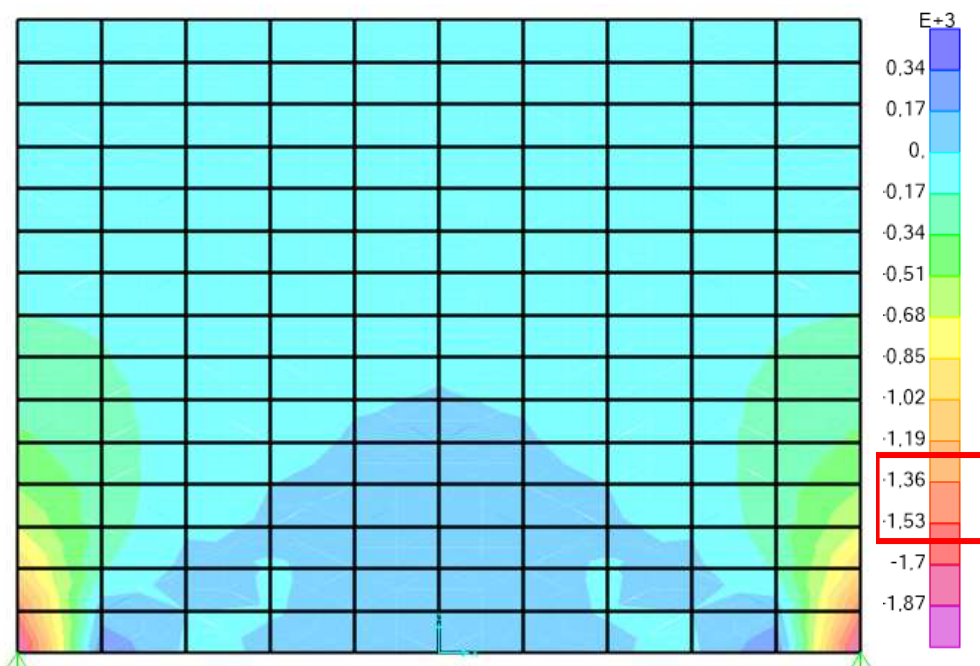
Fonte: O Autor (2019)

A modelagem a seguir mostra as tensões no ELU:

As tensões mostradas na figura 26 são as tensões normais em Z, observe que o sentido das bielas comprimidas seguem até o apoio. É possível ver também que nos apoios são as regiões onde há maior solicitação das tensões de compressão, sendo estes os pontos mais suscetíveis a ruptura.

A modelagem a seguir mostra as tensões no ELU:

Figura 26 - Tensões em VP1



Fonte: O Autor (2019)

A tensão de compressão adotada para comparação será um valor compreendido entre a região demarcada na escala do lado direito da figura 26. O valor adotado para tensão no apoio foi de  $-1,445 \times 10^3 \text{ KN/m}^2$ , que quando transformado para MPa, fica - 1,445 MPa.

Já as tensões de tração no meio do vão de VP1 irão ficar em torno de  $0,24 \times 10^3 \text{ KN/m}^2$ , que quando transformado em MPa, fica em torno de 0,24 MPa.

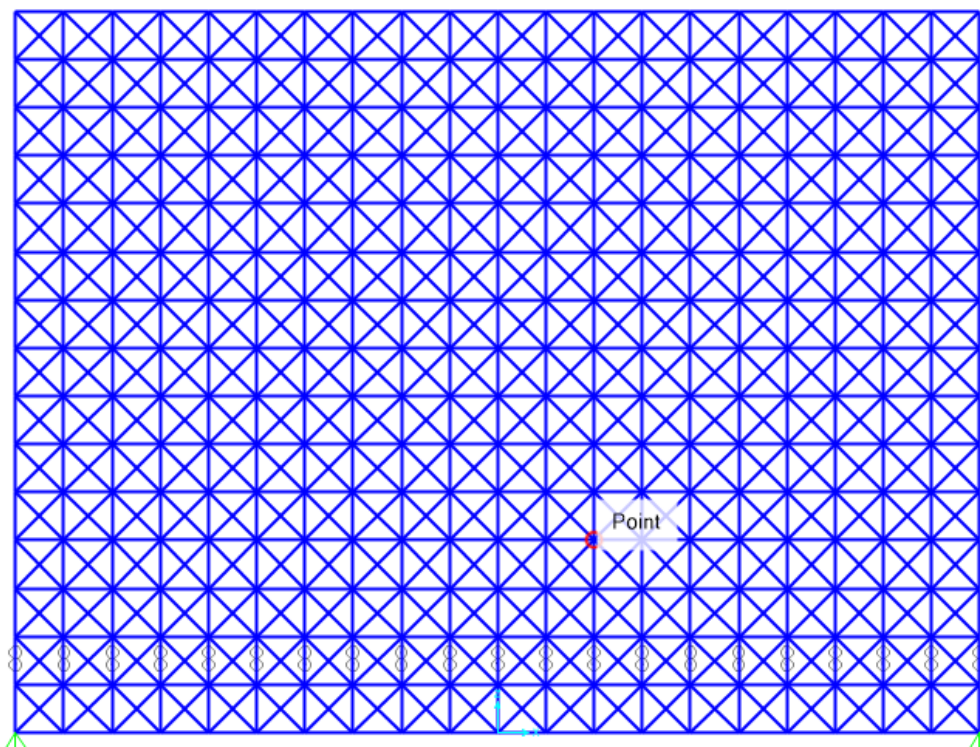
A tensão na biela comprimida será de

$$\sigma_b = \frac{56}{20 \left( 20 + 8 \frac{1}{2,1} \right) \text{sen}^2(64,53)} = 0,144 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2} = 1,440 \text{ MPa} \quad (60)$$

### 6.2.3 Tensões pelo método da Microtreliça

Inicialmente é necessário alimentar o programa também com os dados coerentes, no caso da microtreliça foi definida uma malha 20x20 cm no programa de modo a simular uma treliça com bastante elementos. O vão dessa viga foi de 4 m e sua seção é 20x300 cm. A quantidade total de elementos foi 300 unidades.

Figura 27 - Malha de Micro Treliça para VP1



Fonte: O Autor (2019)

O carregamento adotado foi 20 KN/m (Peso Próprio e Sobrecarga), no entanto se trata de uma treliça e é necessário transformar esse carregamento em cargas pontuais sobre os nós. Como o número de elementos na horizontal é 20, o programa faz a seguinte análise.

$$P_{VP1} = \frac{q_{total} \times L}{N_{ELEMENTOS}} = \frac{20 \times 4}{20} = 4 \text{ KN por nó} \quad (61)$$

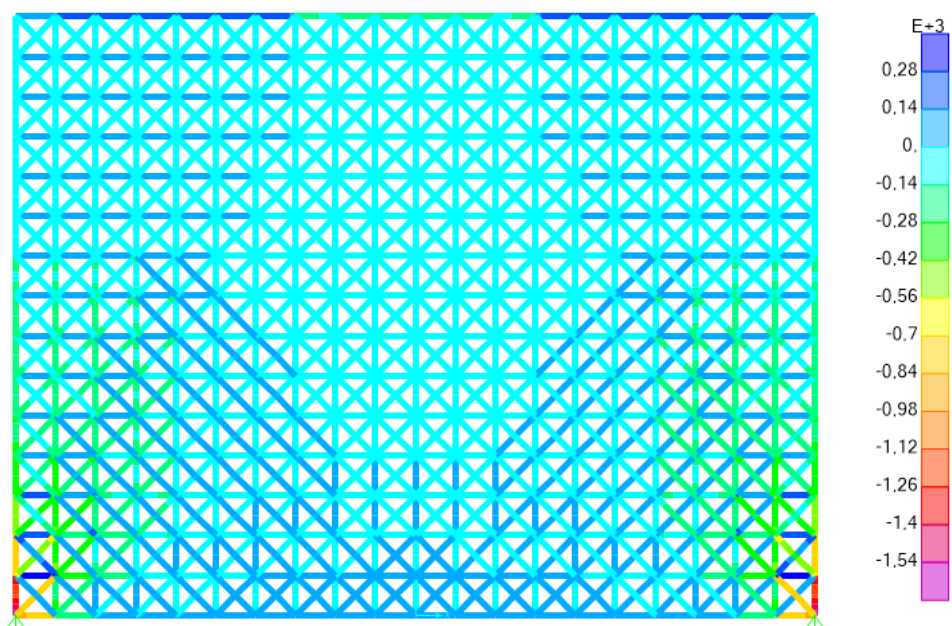
Vale ressaltar que esse é um cálculo aproximado, mas que nos garante uma boa aproximação. O programa SAP 2000 transforma automaticamente em cargas pontuais, não sendo necessário discretizar para adicionar no programa.

Após a análise com o programa e considerando uma seção de 20x12 cm para as barras, foi observando como se comportaram os esforços axiais da estrutura como um todo.

A figura 28 a seguir demonstra em termos de tensões de compressão e tração como as forças atuam na viga VP2



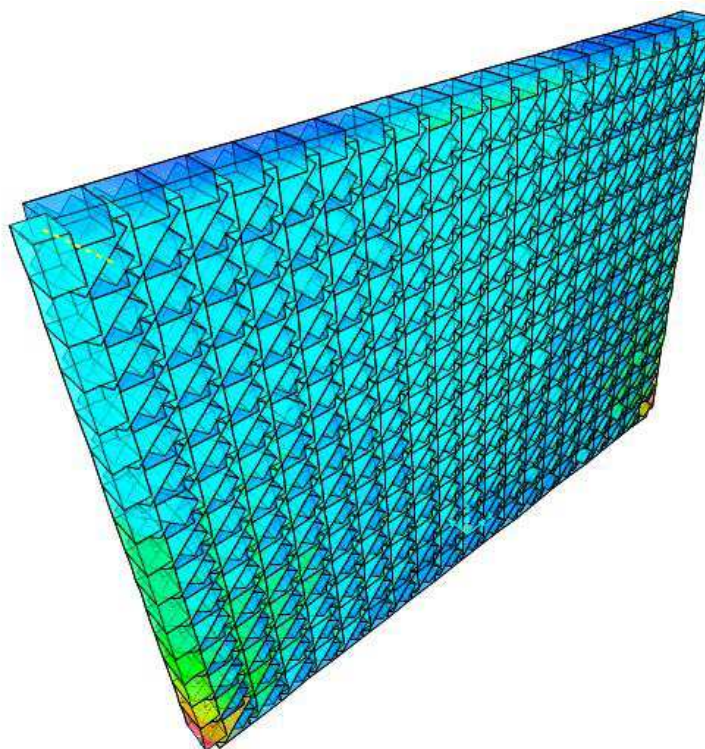
Figura 28 - Tensões pelo MCT para VP1



Fonte : O Autor (2019)

A figura 28 mostra que a maior solicitação são nos apoios no sentido vertical. Após essa análise é possível calcular as tensões de compressão no apoio e na biela, bem como as máximas tensões de tração

Figura 29 - 3D das disposições das barras de VP1



Fonte : O Autor (2019)



As tensões podem ser retiradas através da figura 28

$$\sigma_{APOIO} = \frac{1,4 + 1,26}{21} = 1,33 \times 10^3 \text{KN/m}^2 = 1,33 \text{MPa} \quad (62)$$

$$\sigma_{BIELA} = 1,26 \times 10^3 \text{KN/m}^2 = 1,26 \text{MPa} \quad (63)$$

$$\sigma_{TRAÇÃO} = 0,21 \times 10^3 \text{KN/m}^2 = 0,21 \text{MPa} \quad (64)$$

Vale ressaltar que são valores aproximados, pois é necessário fazer algumas discretizações no modelo apresentado.

### 6.3 Análise dos esforços em VP2

#### 6.3.1 Pelo método de bielas e tirantes (NBR-61180)

Fazendo a análise de VP2 é necessário que a seguinte condição da NBR-6118 seja satisfeita, a relação para vigas biapoiadas é demonstrada na equação 65.

$$\text{Para VP2} \quad \frac{L}{h} \leq 2 \rightarrow \frac{6}{3} = 2 \leq 2 \quad (65)$$

Logo, VP2 é uma viga parede

#### 6.3.1.1 Armadura à flexão

Pela equação 49 será calculada a armadura de flexão, primeiramente deve-se aplicar o coeficiente de segurança no momento conforme as recomendações da NBR 6118, os dados estão demonstrados no item 7

$$M_d = 1,4 \times M_{VP2} = 1,4 \times 90 = 126 \text{KNm} \quad (66)$$

Cálculo do braço de alavanca Z

$$Z = 0,15 h \left( 3 + \frac{L}{h} \right), \text{ se } 1 < \frac{l}{h} \leq 2 \quad (67)$$

$$Z = 0,15 \times 3 \times \left( 3 + \frac{6}{3} \right) = 2,25 \quad (68)$$

Logo  $A_s$  vale

$$A_s = \frac{126}{2,25 \times 43,48} = 1,288 \cong 1,3 \text{ cm}^2 \quad (69)$$

Como a seção é a mesma de VP1, a taxa de armadura será mínima é a mesma, logo a área também vale  $9 \text{ cm}^2$ .

A figura 30 demonstra o número de barras usada na viga parede através da área de armadura longitudinal

Figura 30 - Tabela de armadura longitudinal caso 2

Bitola $\phi$	Número de barras ou fios						
	1	2	3	4	5	6	7
3,4	0,09	0,18	0,27	0,36	0,45	0,54	0,64
4,2	0,14	0,28	0,42	0,55	0,69	0,83	0,97
5	0,20	0,39	0,59	0,79	0,98	1,18	1,37
6,3	0,31	0,62	0,94	1,25	1,56	1,87	2,18
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50
12,5	1,23	2,45	3,68	4,91	6,14	7,36	8,59
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99
22	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36
32	8,04	16,08	24,13	32,17	40,21	48,25	56,30

Fonte: Araújo, J. M. (2010)

Através da figura 30 podemos adotar uma armadura  $3\phi 20\text{mm}$  ( $9,42 \text{ cm}^2$ ).

### 6.2.1.2 Tensões de compressão no apoio e na biela

Pela equação 70 , calcula-se a Reação no apoio aplicando o coeficiente de segurança do concreto.

$$R_d = 1,4 \times R_{VP1,1} = 1,4 \times 60 = 84 \text{ KN} \quad (70)$$

A inclinação da biela de compressão é dada por:

$$\text{tg } \theta = \frac{4Z}{L} = \frac{4 \times 2,25}{6} = 1,5 \rightarrow \theta = 56,31 \quad (71)$$

Foi adotado 2,5 cm. Logo a  $d' = 2,5 + (1 + 0,5) = 4 \text{ cm}$ , já que a armadura foi concentrada em apenas uma única camada. A altura do nó ao apoio vale  $u = 2 d' = 2 \times 4 = 8 \text{ cm}$ .

Como  $u = 8 \text{ cm}$  e a  $c \cdot \cotg(\theta) = 20 \times \cotg(56,31^\circ) = 13,333 \text{ cm}$ , logo  $u < c \cdot \cotg(\theta)$ , deve se analisar a tensão na biela. Mas por motivo de análise iremos considerar as duas tensões.

$$\sigma_b = \frac{84}{20 \left( 20 + 8 \frac{1}{1,5} \right) \text{sen}^2(56,31^\circ)} = 0,2395 \text{ KN/cm}^2 \quad (72)$$

$$\sigma_A = \frac{R_d}{bc} = \frac{84}{20 \times 20} = 0,21 \text{ KN/cm}^2 \quad (73)$$

Logo as tensões são  $\sigma_b = 2,4 \text{ MPa}$  e  $\sigma_A = 2,1 \text{ MPa}$ , faz-se necessário calcular a  $f_{cdr}$  para garantir que as não haverá esmagamento do concreto.

$$f_{cdr} = 0,6 \times \left( 1 - \frac{25}{250} \right) \times \frac{25}{1,4} = 9,643 \text{ MPa} \quad (74)$$

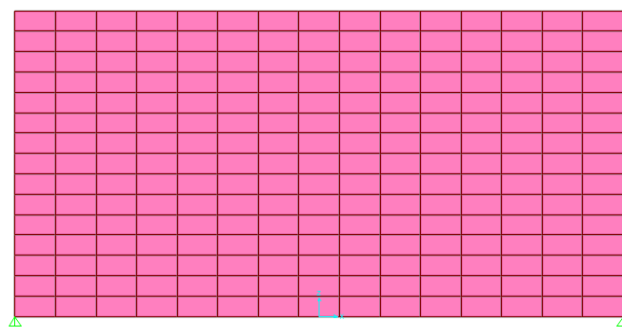
Assim,  $\sigma_b < f_{cdr}$  e  $\sigma_A < f_{cdr}$ , logo não corre risco de esmagamento.

### 6.3.2 Tensões pelo método dos elementos finitos

A modelagem foi realizada no programa SAP 2000, inicialmente foi necessário entrar com os parâmetros da viga parede, já citado no item 7. Uma observação importante é que a malha adotada para esse método foi retangular e possui uma dimensão 20 cm na vertical e 40 cm na horizontal. A seguir a equação 75 mostra a quantidade total de elementos adotados. Vale ressaltar que o vão é de 600 cm e a altura de 300 cm

$$N_{elementos} = \frac{\text{ÁREA TOTAL}}{\text{ÁREA DO ELEMENTO}} = \frac{600 \times 300}{20 \times 40} = 225 \quad (75)$$

Figura 32 - Quantidade de Elementos para VP2



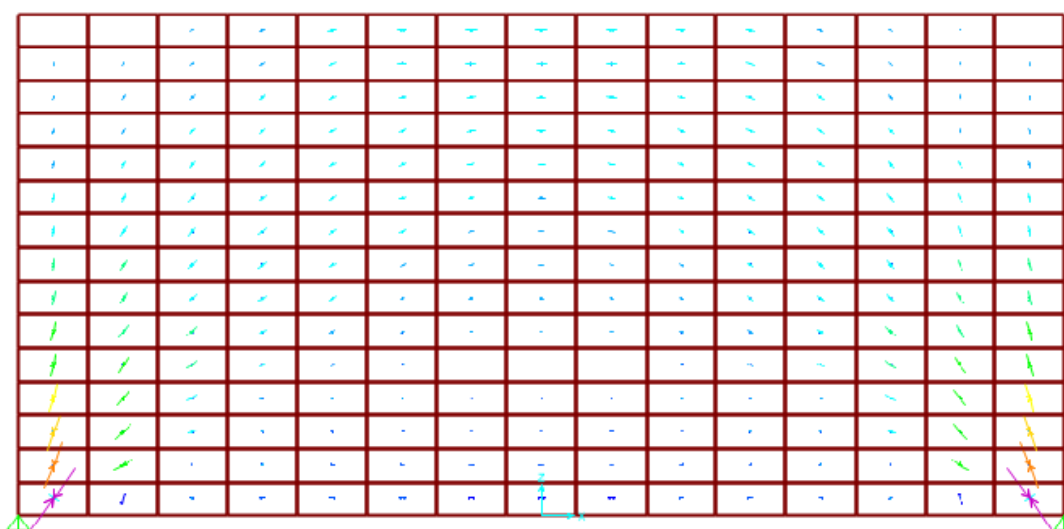
Fonte: O Autor (2019)

A figura 32 mostra a disposição dos elementos:

A carga adotada 20 KN/m, sendo 15 KN/m o peso próprio e 5 KN/m a sobrecarga adotada. Quanto as vinculações foram definidos apoios com duas restrições (apoio de segundo gênero). Outro fator importante é que é necessário ponderar a carga por 1,4 para garantir a segurança (recomendação da NBR-6118), desse modo a peça ficará no estado limite último de serviço (ELU).

A figura mostra o gráfico da trajetória das forças que chegam até o apoio. Observe que desce transversalmente na posição das bielas.

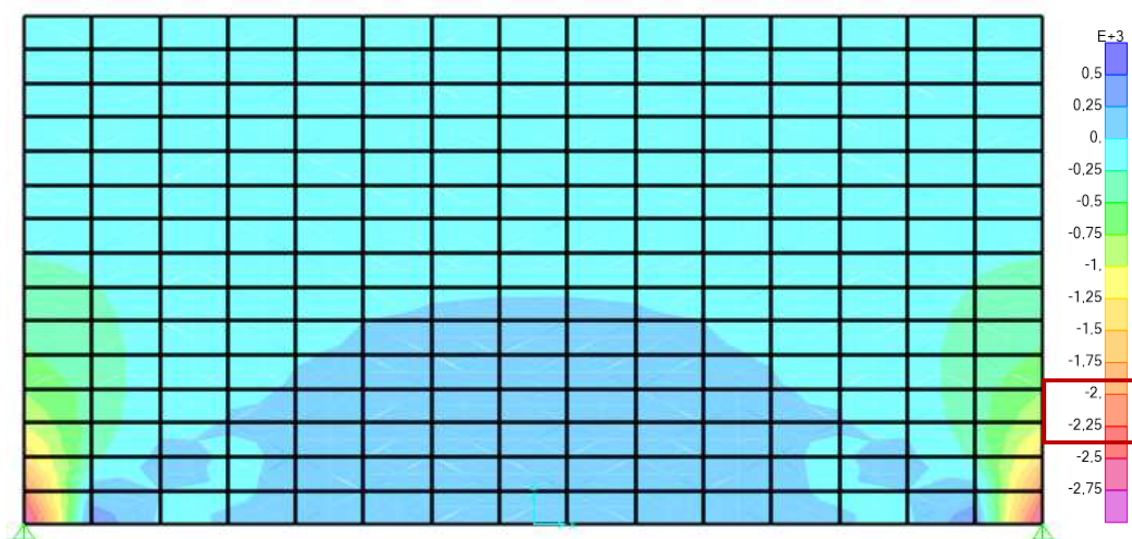
Figura 33 - Trajetória das forças em VP2



Fonte: O Autor (2019)

A modelagem a seguir mostra as tensões no ELU:

Figura 34 - Tensões normais no eixo Z



Fonte: O Autor (2019)

As tensões mostradas na figura 34 são as tensões normais em Z, observe que o sentido das bielas comprimidas seguem até o apoio. É possível ver também que nos apoios são as regiões onde há maior solicitação das tensões de compressão, sendo estes os pontos mais suscetíveis a ruptura.

A tensão de compressão adotada para comparação será um valor compreendido entre a região demarcada na escala do lado direito da figura 34. O valor adotado para tensão no apoio foi de  $- 2,125 \times 10^3 \text{ KN/m}^2$ , que quando transformado para MPa, fica  $- 2,125 \text{ MPa}$ .

Já as tensões de tração no meio do vão de VP2 irão ficar em torno de  $0,5 \times 10^3 \text{ KN/m}^2$ , que quando transformado em MPa, fica em torno de  $0,5 \text{ MPa}$ .

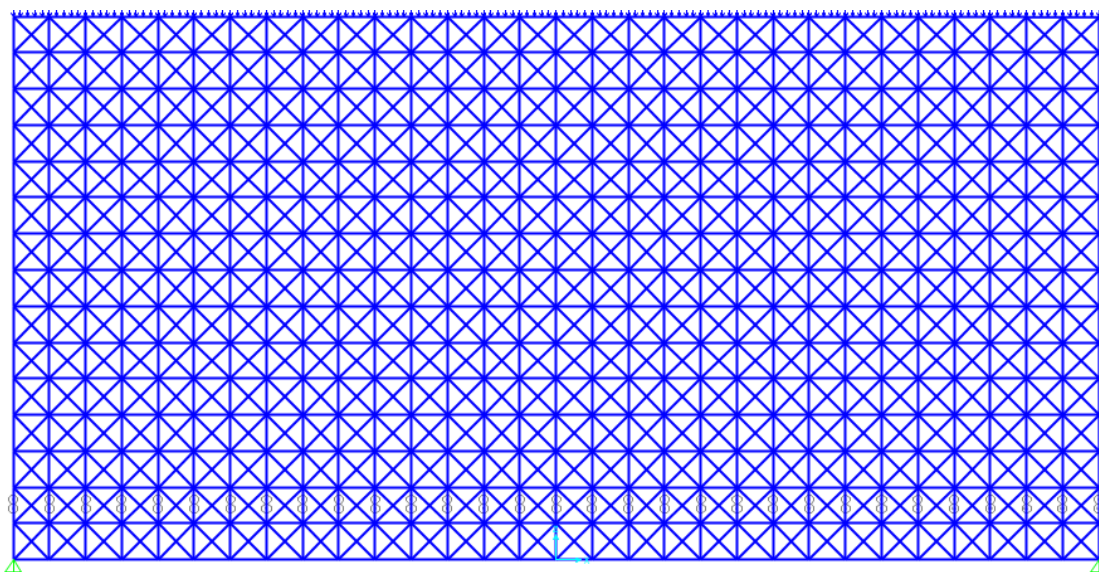
A tensão na biela comprimida vale:

$$\sigma_b = \frac{84}{20 \left( 20 + 8 \frac{1}{1,46} \right) \text{sen}^2(55,71)} = 0,242 \text{KN/cm}^2 = 2,42 \text{ MPa} \quad (76)$$

### 6.3.3 Tensões pelo método da Microtreliça

Alimentando novamente o programa também com os dados da microtreliça para VP2 foi definido uma malha  $20 \times 20 \text{ cm}$  no programa de modo a simular uma treliça com bastante elementos.

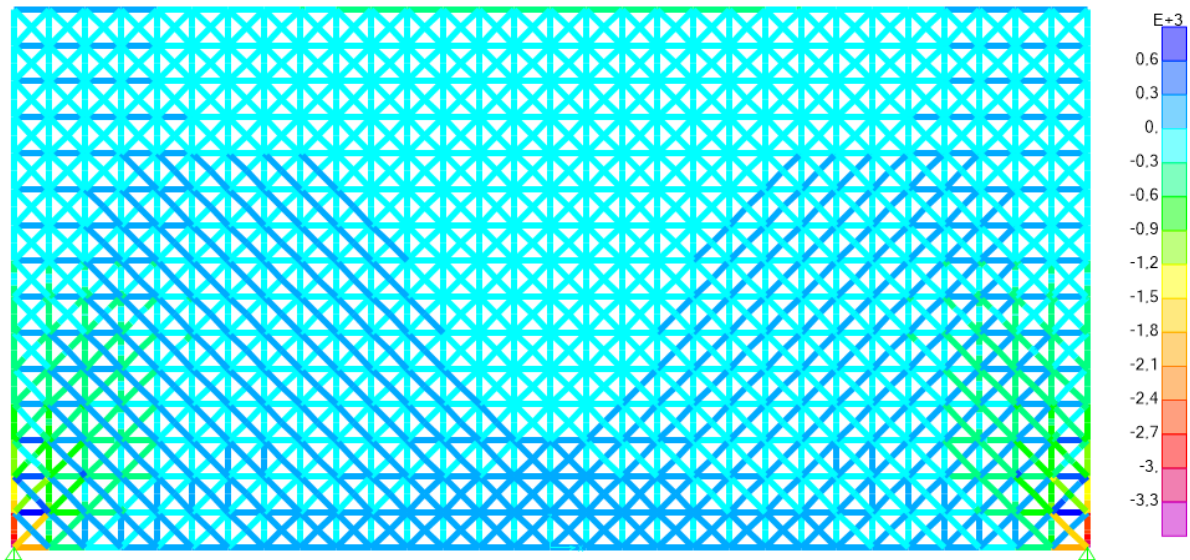
Figura 35 - Malha de Elementos de MCT para VP2



Fonte: O Autor (2019)

O procedimento para o lançamento de cargas sobre as Micro treliças foram iguais a VP1, no entanto a quantidade de elementos foram de 450 já que o vão para VP2 vale 6 m . Após fazer análise de tensões no SAP-2000 chega-se à seguinte conclusão, conforme mostrado na figura 36

Figura 36 - Tensões axiais para VP2



Fonte: O Autor (2019)

As tensões podem ser retiradas através da figura 36

$$\sigma_{APOIO} = \frac{2,7 + 2,4}{2} = 2,55 \times 10^3 \text{KN/m}^2 = 2,55 \text{MPa} \quad (77)$$

$$\sigma_{BIELA} = 2,4 \times 10^3 \text{KN/m}^2 = 2,4 \text{MPa} \quad (78)$$

$$\sigma_{TRAÇÃO} = \frac{0,6 + 0,3}{2} = 0,45 \times 10^3 \text{KN/m}^2 = 0,45 \text{MPa} \quad (79)$$

Vale ressaltar que são valores aproximados, pois é necessário fazer algumas discretizações no modelo apresentado.

## 7. DIMENSIONAMENTO DAS VIGAS VP1 E VP2

Uma parte do dimensionamento já foi demonstrado nos itens 7.2.1 e 7.3.1, a seguir será demonstrado o restante do dimensionamento. Será demonstrado para a viga VP1, e em seguida será feita uma planilha, para os demais exemplos.

### 7.1 Ancoragem da armadura a flexão

Com o auxílio da tabela do Volume 2 do José Milton, obtém-se o comprimento básico de ancoragem.

Figura 37 - Comprimento básico de ancoragem

BOA ADERÊNCIA						
Bitola	$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$		$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$		$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$	
	$l_b$	$l_{be}$	$l_b$	$l_{be}$	$l_b$	$l_{be}$
6,3	28	19	24	17	21	15
8	35	25	30	21	27	19
10	44	31	38	27	34	23
12,5	55	38	47	33	42	29
16	70	49	61	43	54	38
20	88	62	76	53	67	47
25	110	77	95	66	84	59

Fonte: Araújo, J. M. (2010)

Para um diâmetro de 20 mm utiliza-se um gancho de 53 cm

A armadura calculada nos apoios é:

$$A_{S,cal} = 0,8 A_S = 0,8 \times 66 = 0,528 \text{ cm}^2 \quad (80)$$

Logo o comprimento de ancoragem com o gancho fica:

$$l_{b,nec} = 0,7 l_{be} \frac{A_{S,cal}}{A_{se}} = 0,7 \times 53 \frac{0,528}{9,42} = 2,08 \text{ cm} \quad (81)$$

Como  $2,08 \text{ cm} < 6 \text{ cm}$  e  $2,08 < R + 5,5\phi$  a norma recomenda que use no mínimo 19 cm



## 7.2 Armadura de Pele

$$A_{s,p} = 0,1 \times 20 = 2 \text{ cm}^2/\text{m em cada face} \quad (82)$$

Como não há armadura de suspensão, a armadura de pele deve ser usada tanto na vertical, quanto na horizontal.

Figura 38 - Tabela para cálculo de armadura de pele

espaçamento s (cm)	Bitola $\phi$					
	4,2	5	6,3	8	10	12,5
7,0	1,98	2,80	4,45	7,18	11,22	17,53
7,5	1,85	2,62	4,16	6,70	10,47	16,36
8,0	1,73	2,45	3,90	6,28	9,82	15,34
8,5	1,63	2,31	3,67	5,91	9,24	14,44
9,0	1,54	2,18	3,46	5,59	8,73	13,64
9,5	1,46	2,07	3,28	5,29	8,27	12,92
10	1,39	1,96	3,12	5,03	7,85	12,27
11	1,26	1,78	2,83	4,57	7,14	11,16
12	1,15	1,64	2,60	4,19	6,54	10,23
13	1,07	1,51	2,40	3,87	6,04	9,44
14	0,99	1,40	2,23	3,59	5,61	8,77
15	0,92	1,31	2,08	3,35	5,24	8,18
16	0,87	1,23	1,95	3,14	4,91	7,67
17	0,81	1,15	1,83	2,96	4,62	7,22
18	0,77	1,09	1,73	2,79	4,36	6,82
19	0,73	1,03	1,64	2,65	4,13	6,46
20	0,69	0,98	1,56	2,51	3,93	6,14
21	0,66	0,93	1,48	2,39	3,74	5,84
22	0,63	0,89	1,42	2,28	3,57	5,58
23	0,60	0,85	1,36	2,19	3,41	5,34
24	0,58	0,82	1,30	2,09	3,27	5,11
25	0,55	0,79	1,25	2,01	3,14	4,91
26	0,53	0,76	1,20	1,93	3,02	4,72
27	0,51	0,73	1,15	1,86	2,91	4,55
28	0,49	0,70	1,11	1,80	2,80	4,38
29	0,48	0,68	1,07	1,73	2,71	4,23
30	0,46	0,65	1,04	1,68	2,62	4,09

Fonte: Araújo, J. M. (2010)

Dessa forma tem-se  $\phi 6,3$  c. 16 cm.

## 7.3 Dimensionamento de VP1 e VP2

Como os esforços deram semelhantes basta apenas dimensionar utilizando apenas uma tensão



A tabela 1 resume os esforços de VP1 e VP2, já com os coeficientes de ponderação que valem 1,4

*Tabela 1 - Resumo dos esforços*

<b>ESFORÇOS</b>				
<b>VP</b>	<b>M (KNm)</b>	<b>R (KN)</b>	<b>Md (KNm)</b>	<b>Rd (KN)</b>
<b>VP1</b>	40	40	56	56
<b>VP2</b>	90	60	126	84

Fonte: O Autor (2019)

A tabela 2 demonstra o dimensionamento a flexão para os casos.

*Tabela 2 - Dimensionamento a Flexão*

<b>DIMENSIONAMENTO A FLEXÃO</b>					
<b>VP</b>	<b>Z</b>	<b>As (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>As,min (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>As,adt (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>Barras</b>
<b>VP1</b>	1,95	0,66	9	9	3Ø20,00
<b>VP2</b>	2,25	1,28	9	9	3Ø20,00

Fonte: O Autor (2019)

Após essa análise é necessário verificar as tensões de compressão nos apoios e nas bielas de compressão. Isso garante que não haverá o esmagamento do concreto. A tabela 3 mostra todo o roteiro demonstrado nos itens 7.2.1 e 7.2.3.

*Tabela 3 - Verificações nas tensões*

<b>TENSÕES</b>								
<b>VP</b>	<b>Inc. Bielas</b>	<b>θ°</b>	<b>d' (cm)</b>	<b>U (cm)</b>	<b>σ biela (MPa)</b>	<b>σ apoio (MPa)</b>	<b>Fcdr (MPa)</b>	<b>Situação</b>
<b>VP1</b>	1,95	62,85	4	8	1,467	1,4	9,642	OK
<b>VP2</b>	1,5	56,30	4	8	2,395	2,1	9,642	OK

Fonte: O Autor (2019)

Por fim a tabela 4 demonstra os comprimentos de ancoragem e armaduras laterais e verticais, para completar o dimensionamento completo.

Tabela 4 - Verificações nas tensões

<b>Comprimento de Ancoragem e Armadura de pele</b>							
<b>VP</b>	<b>Lbe (cm)</b>	<b>As,cal</b>	<b>lb,nec</b>	<b>Lbmin1 (cm)</b>	<b>lb,nec (adotado)</b>	<b>As,pele (cm<sup>2</sup>)</b>	<b>adotado</b>
<b>VP1</b>	53	0,528	2,081	19 cm	<b>19 cm</b>	2	<b>φ6,3 c. 16</b>
<b>VP2</b>	53	1,030	4,057	19 cm	<b>19 cm</b>	2	<b>φ6,3 c. 16</b>

Fonte: O Autor (2019)

O roteiro de dimensionamento encontra no item 8. O detalhamento será apresentado no apêndice desse trabalho

## 8 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados das tensões são demonstrados na tabela 5.

Tabela 5 - Verificações nas tensões

VIGA PAREDE	Método	$\sigma$ biela (MPa)	$\sigma$ apoio (MPa)	$\sigma$ Tração (MPa)	Fcdr (MPa)	Tensão de Tração (MPa)
VP1	Bielas e tirantes	-1,467	-1,4	0,19	9,64	1,79
	Elementos Finitos	-1,458	-1,445	0,24	9,64	1,79
	Micro Treliza	-1,26	-1,33	0,21	9,64	1,79
VP2	Bielas e tirantes	-2,395	-2,1	0,42	9,64	1,79
	Elementos Finitos	-2,417	-2,13	0,5	9,64	1,79
	Micro Treliza	-2,4	-2,55	0,45	9,64	1,79

Fonte: O Autor (2019)

Uma observação importante é que a tensão de tração que foi tomada por base foi cerca de 1/10 da resistência a compressão do concreto. Essa metodologia é empírica, ou seja, será usada apenas em termos comparativos.

Segundo CARVALHO (2017), para fazer uso do concreto armado como função estrutural, o concreto não é adequado como elemento resistente, pois ele possui uma boa resistência à compressão, no entanto pouco resiste a tração e possui cerca de 1/10 da sua resistência a compressão.

Baseado nessa informação foi calculado a resistência a tração do concreto para verificar as tensões. Como o adotado foi um concreto de 25 MPa, deve-se usar um coeficiente redutor de 1,4 para encontrar a tensão limite no estado último de ruptura.

$$f_{tração} = \frac{25}{1,4} \times \frac{1}{10} \cong 1,79 \text{ MPa} \quad (83)$$

Ainda sobre as tensões admissíveis o  $f_{cdr}$  trata-se da resistência a compressão reduzida do concreto, de modo a evitar o esmagamento e garantir a segurança no dimensionamento.

Observando todas as tensões utilizadas, é notório ver que todos os valores deram próximos, não sendo muito significativas as disparidades entre

elas. Isso mostra que todos os métodos são eficientes no que diz respeito a análise de vigas paredes.

No caso estudado, foram utilizados dois vãos, sendo VP1 de 4 m e VP2 de 6 m, e ainda assim todas as tensões deram próximas. Mas, observando a tensão nas bielas de compressão para VP1, percebe-se que pelo o método da Microtreliça foi encontrado um valor de - 1,26 MPa, enquanto que pelo método MEF e Bielas e tirantes, foi encontrado -1,458 e -1,467 MPa respectivamente. Uma possível explicação para essa disparidade (não muito alta), é a inclinação da biela, uma vez que pelo método da microtreliça a angulação é de 45° e pelo outros métodos foi algo em torno de 63°. A inclinação influencia de forma direta no valor da tensão, conforme foi mostrado em itens anteriores. Para VP2, a situação é semelhante, embora não tenha uma disparidade entre os valores, mas a tensão pelo método da microtreliça tem uma pequena variação, mas que não influencia na análise por essa metodologia.

Vale ressaltar que independente dessa disparidade citada anteriormente, todos deram tensões dentro do limite admissível, sendo a tensão limite para a compressão algo em torno de 9,64 MPa. Ou seja, pelas três metodologias apresentadas, pode-se garantir que não haverá esmagamento do concreto, nem nas bielas de compressão e nem nos apoios.

Observando as tensões no apoio, pode-se notar que novamente pelo método da Microtreliça, houve uma disparidade entre os valores. Analisando VP2, percebe-se que a tensão pela metodologia da Microtreliça é algo em torno de -2,55 MPa, enquanto que pelo método MEF e Bielas e Tirantes as tensões foram -2,13 e -2,1 MPa. Essa diferença, se deu pelo fato de estar trabalhando com elementos de barras apenas com os esforços axiais e ao mesmo tempo fazendo algumas aproximações. Na verdade, a estrutura trabalha como uma barra, mas a viga não é uma estrutura treliçada, e isso de certa forma pode ter influenciado na alteração dos valores. Da mesma maneira é observado para VP1, só que nesse caso o valor foi menor. Ainda sobre esse resultado pode-se perceber também que a tensão foi tirada como uma média entre dois valores de referência, como já citado anteriormente, isso também pode ter influenciado na diferença de tensão.

Observando as tensões de tração, tem-se duas análises: a primeira delas é que para o estudo de Vigas Paredes as tensões de flexão não são um problema. Isso se deve ao fato de terem uma Inércia elevada.

A tabela 5 mostram os dados de VP1 e VP2.

*Tabela 6 - Dados de VP1 e VP2*

<b>Dados</b>	<b>h(cm)</b>	<b>L(m)</b>	<b>b(cm)</b>	<b>Iz (m<sup>4</sup>)</b>
<b>VP1</b>	300	4	20	0,45
<b>VP2</b>	300	6	20	0,45

Fonte: O Autor (2019)

Observe que na tabela 5 a seção é 20x300 cm, e isso garante uma inercia bem alta quando comparada com outras vigas. Iz representa a inercia tanto para VP1 quanto para VP2.

A segunda análise é que por possuírem uma tensão de flexão baixa, é necessário utilizar uma taxa de armadura mínima. Nos dois casos analisados essa taxa de armadura foi a mínima definida pela NBR-6118/2014 logo isso também mostra que a taxa de escoamento será mínima. Vale ressaltar que as tensões de tração não serão atingidas no ELU conforme demonstrado na tabela 5.

Diante do exposto, é notório observar que todos os métodos são eficazes no que diz respeito a análise de vigas paredes. Sendo todos bem próximos e que garante a segurança e a estabilidade. Quanto a escolha do método para dimensionar, todos estão coerentes, como as tensões deram próximas, isso garante que sejam muito semelhantes.

## 9 CONCLUSÃO

Observando os dados analisados, foi verificado que todos as metodologias de análises de vigas paredes são eficientes para análise de tensões. O método das Bielas e tirantes é mais simplificado, no entanto é bem realista. Observando as tensões pelos métodos numéricos averiguou-se que deram valores bem próximos, isso também comprova a eficiência dos métodos da microtreliça e dos elementos finitos.

O método da microtreliça mostrou-se com uma maior disparidade nos resultados, não entanto não são suficientes para descartá-lo como um método menos eficiente, podendo de fato, ser utilizado para dimensionar também essas estruturas, pois a tensão última de ruptura deu bem menor que a tensão limite para biela e o apoio.

Já as tensões de tração foram bem pequenas, dando uma seção de ferro muito baixo e sendo necessário usar a taxa de armadura mínima, da mesma forma as tensões em estado limite último pelos três métodos tanto para VP1 quanto para VP2 também deram bem próximas, comprovando a eficácia das metodologias.

## REFERENCIAS

ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto armado**. Rio Grande: Dunas, 2010. v.2 e v.4 3ed.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-08) and Commentary (ACI 318R-08)**. Farmington Hills: Michigan, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

AZEVEDO, A. F. M. **Método dos elementos Finitos**. 1<sup>o</sup> ed. Porto (Portugal), 2003

BERNARDI, D. F. **Um modelo computacional para a análise global tridimensional da estrutura de edifícios altos de concreto armado com a presença de paredes estruturais**. 2010.135 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de pós-graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. F. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2014. São Carlos: EduFSCar, 2017.

CEB-FIB. **Model Code: First Complete Draft**. v. 1. International Federation for Structural Concrete: Lausanne, Switzerland, 224 p., 1999.

FILHO, A. C. (1996). **Detalhamento das estruturas de concreto pelo método das bielas e dos tirantes**. Rio Grande do Sul, 1996, p. 11. Pós Graduação – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRS).

LEONHARDT, F; MÖNNIG, E. **Construções de concreto**. v.2. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1979.

LOURENÇO, M. S. ALMEIDA, J. F. **Campos de tensões em zonas de descontinuidade**. In: Anais do Encontro Nacional do Betão Estrutural, 2004.

MELO, G. S. S. A. **Análise paramétrica de vigas-parede de concreto armado pelo método dos elementos finitos**. 1984.102 p. Tese (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1984.

NAGARAJAN, P., U. B. Jayadeep, et al. (2009). "**Application of micro truss and strut and tie model for analysis and design of reinforced concrete structural elements.**" Songklanakarin Journal of Science and Technology 31(6): 647-653.

NAPOMUCENO, C. L. **Análise de vigas-parede aplicando modelo de biela e tirante e microtreliça.** 2012. 177 p. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília, 2012.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Cisalhamento em vigas – CAPÍTULO 13.** p. 13, [s.d.].

SALEM, H. M. (2004). "**The Micro Truss Model: An Innovative Rational Design Approach for Reinforced Concrete.**" Journal of Advanced Concrete Technology 2(1): 77-87.

SANTOS, G. G. M. **Análise sistemática de vigas-parede biapoiadas de concreto armado.** 1999. 150 p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1999.

SCHLAICH, J.; SCHAFFER, K.; JENNEWEIN, M. **Toward a consistent design of structural concrete.** Journal of the Prestressed Concrete Institute, v.32, n. 3, p. 74-150, MaiJun 1987.

SILVA, R. C. **Concreto Armado: Aplicação de modelos de Bielas e Tirantes.** 1991. 202 p. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.

VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

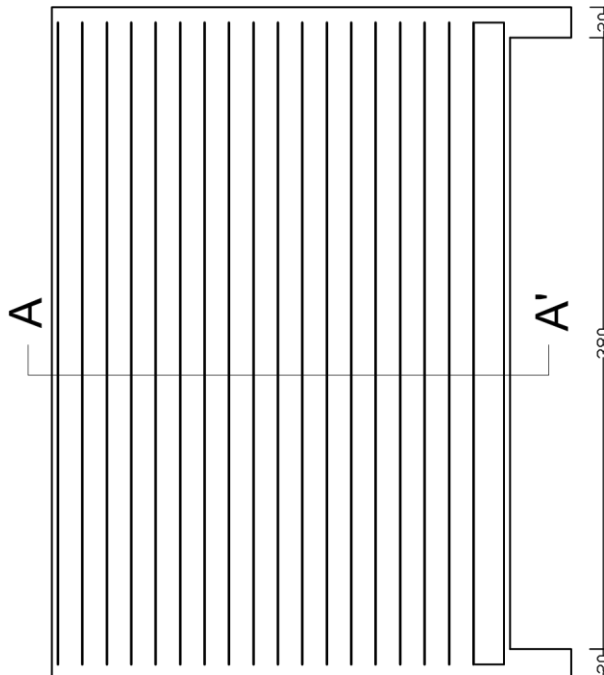
VIEIRA, A. A.; **Modelo de Micro Treliças para dimensionamento de estruturas de Concreto Armado.** Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil. 86p. Publicação E.DM - 16A/13, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental. Universidade de Brasília – UnB. Brasília, DF, 86p.



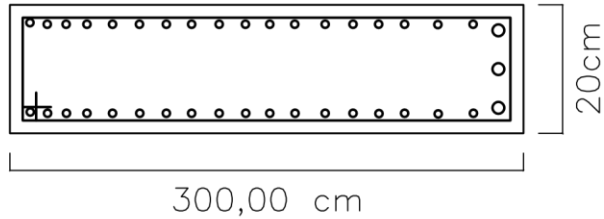
## **APÊNDICES**

# VIGA PAREDE 1 (VP1) (20 x 300)

2x18  $\phi$ 6,3 C=400 (ARMADURA DE PELE)



CORTE A-A'



18  $\phi$ 6.3 C=634

18 c/16

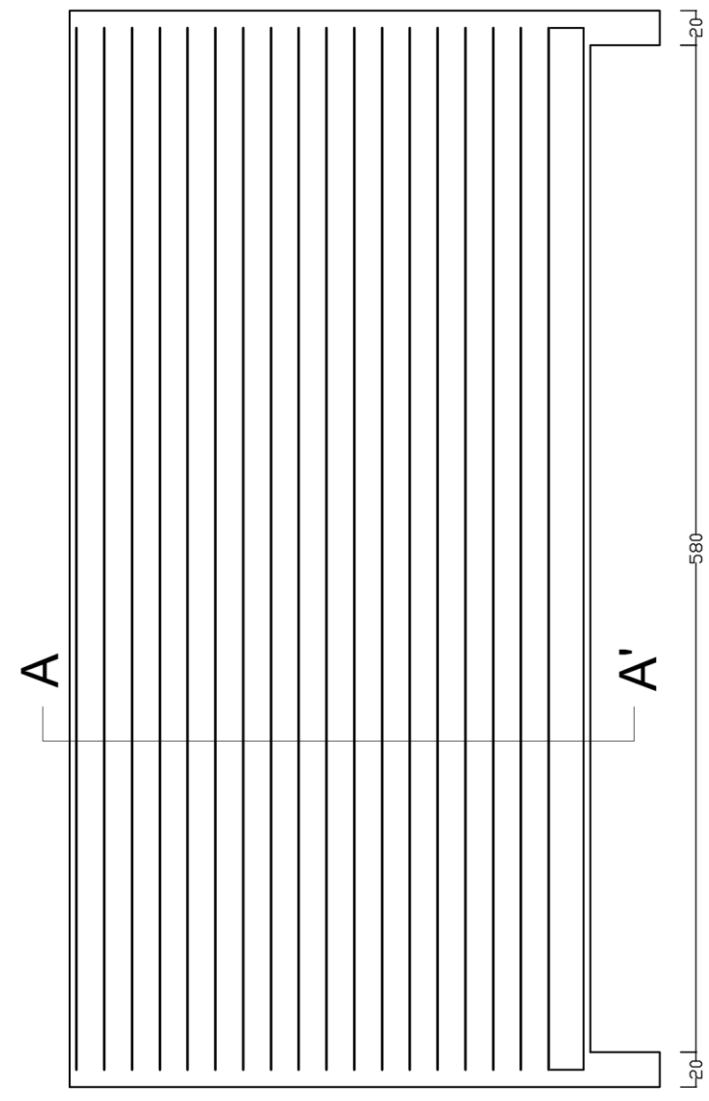
19 | 3  $\phi$ 20 C=400 | 19

438

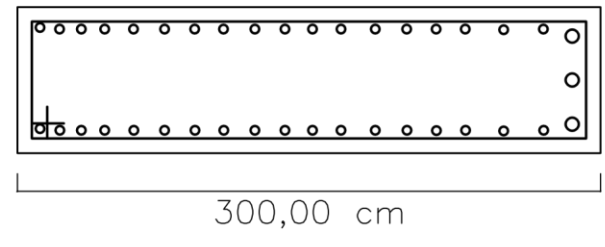
TÍTULO:	DETALHAMENTO DE VP1		ESCALA:	SEM ESCALA	FOLHA:	01/02
ASSUNTO:	TRABALHO DE GRADUAÇÃO		CODIGO:	201511941		
ALUNO	ICARO MATEUS DE SOUZA GUIDA					

# VIGA PAREDE 2 (VP2) (20 x 300)

2x18  $\phi$ 6,3 C=400 (ARMADURA DE PELE)



CORTE A-A'



300,00 cm

20,00 cm

18  $\phi$ 6.3 C=634

295

15

7

36 c/16

3  $\phi$ 20 C=600  
638

TÍTULO:	DETALHAMENTO DE VP2		
ASSUNTO:	TRABALHO DE GRADUAÇÃO	ESCALA:	SEM ESCALA
ALUNO:	ICARO MATEUS DE SOUZA GUIDA	FOLHA:	02/02
		CODIGO:	201511941