UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS - GRADUAÇÃO - PPG

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUCIANO GABRIEL DOS SANTOS

UMA ABORDAGEM NAS PRÁTICAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

São Luís
2022

LUCIANO GABRIEL DOS SANTOS

UMA ABORDAGEM NAS PRÁTICAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada à Universidade Estadual do Maranhão, no Programa de Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, sob orientação da Professora Dr. Marlon Santos Oliveira, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática

São Luís
2022

Santos, Luciano Gabriel dos.
Uma abordagem nas práticas de ensino e aprendizagem de matemática / Luciano Gabriel dos Santos. – São Luís, 2022.
81 f

Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, 2022.

Orientador: Prof. Dr. Marlon César Santos Oliveira.

1.Educação matemática. 2.Materiais didáticos. 3.Práticas matemáticas. I.Título.

CDU: 51:37

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

LUCIANO GABRIEL DOS SANTOS

UMA ABORDAGEM NAS PRÁTICAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Dissertação o apresentada à Universidade Estadual do Maranhão no Programa de Mestrado Profissonal em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, sob orientação da Professor Dr. Marlon Santos Oliveira como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em matemática.

Aprovada em 31 de maio de 2022

BANCA EXAMINADORA:

Marlon Oliveira

Prof. Dr. Marlon Santos Oliveira (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

José Santana C. Costa

Prof. Dr. Jose Santana Campos Costa
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Em memória de minha amada mãe
Lucília Maria dos Santos.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer ao autor da vida, o Senhor Jesus. À minha amada mãe Lucília Maria dos Santos, que infelizmente não está mais aqui nesta Terra, para sempre será minha base e o meu lugar seguro, te amo, mamuska.

Gostaria de agradecer a todo carinho, amor e dedicação da minha amada esposa Thais de Almeida Lopes, te amo, vida.

A todos os professores da UEMA pelos ensinamentos, dedicação e entusiasmos. Em, especial aos professores Prof. Dr. Marlon Santos Oliveira, Prof. Dr.Sergio Nolêto Turibus e Prof. Dr João Coelho Silva Filho. Aos professores da banca examinadora prof Dr. Jose Santana Campos Costa e Prof. Dr.Sergio Nolêto Turibus . Aos meus companheiros de jornada do mestrado, em especial ao Eliabe Rodrigues, Israel Costa e Leonardo Furtado Coqueiro. Ao meu amigo Rafael e Eliabe pelos conselhos em relação à escrita em látex da dissertação. E, agradeço também a CAPES pela concessão da bolsa que custeou os meus estudos.

"Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele tudo fará ".

(Bíblia Sagrada, Salmos 37:5).

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de atividades sobre a disciplina de matemática que auxilia no processo de aprendizagem dos alunos através de recursos feitos de material reciclável. Através de uma metodologia voltada ao ensino de matemática, foram feitos experimentos relacionados aos conteúdos ministrados em sala de aula com as turmas do Ensino Fundamental II do Centro de Ensino Joaquim Gomes de Sousa, escola estadual situada na cidade de São Luís do estado do Maranhão. Apresentou-se uma proposta pedagógica de trabalho em sala de aula com materiais concretos de fácil acesso e baixo custo a fim de facilitar o entendimento tornando-o mais dinâmico em sala de aulas. Foram trabalhados experimentos de Tangram, Torre de Hanoi e Foguetes com garrafas pet, conforme aquilo que orienta a Base Nacional Comum Curricular e de acordo com as novas tendências de Educação Matemática, que ditam que deve-se trabalhar a matemática de forma dinâmica e inovadora.

Palavras-chave: Educação Matemática, Materiais Didáticos, Práticas Matemáticas.

ABSTRACT

The present work presents a proposal of activities on the discipline of mathematics that helps in the students' learning process through resources made of recyclable material. Through a methodology focused on the teaching of mathematics, experiments were carried out related to the contents taught in the classroom with the Elementary School II classes of the Joaquim Gomes de Sousa Teaching Center, a state school located in the city of São Luís in the state of Maranhão. A pedagogical proposal of work in the classroom was presented with concrete materials of easy access and low cost in order to facilitate understanding, making it more dynamic in the classroom. Tangram experiments, Tower of Hanoi and Rockets with pet bottles were worked, according to what guides the National Common Curricular Base and according to the new trends in Mathematics Education, which dictate that mathematics must be worked in a dynamic and innovative way.

Keywords: Math Education, Teaching Materials , Mathematical Practices.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Uma das maiores dificuldades enfrentadas por alunos, sejam eles da rede de pública ou privada, é o domínio da disciplina matemática. Essas dificuldades surgem por vários fatores, dentre eles, o mau ensino da disciplina, aulas monótonas sem uma aplicação onde o aluno possa visualizar utilização do conteúdo no seu dia a dia. De acordo com Almeida (2006), essas dificuldades surgem não apenas pelo nível de abstração da matéria ou pelo fato desses alunos não gostarem, mas por fatores, psicológicos, neurológicos, pedagógicos que relacionam um conjunto de aspectos que precisam ser mais apurados por se tratarem de dificuldades que surgem em qualquer área, e também na matemática.

Segundo Silva (2005), a forma como a matemática é ensinada na sala de aula, perde seu brilho para alguns estudantes, pois não conseguem assimilá-la. Quando têm dificuldades em entendê-la, a disciplina transforma-se num objeto de dissabor por parte dos estudantes. O método de ensino da matemática que muitas vezes é conhecido como "método tradicional", ou seja, o professor da matéria é adepto ao método conteúdista, sem muita preocupação em aplicar os conteúdos no cotidiano, tem contribuido para a rejeição da matéria por parte dos alunos.

Os professores então têm um papel fundamental nesse processo de aprendizagem matemática, pois são eles os responsáveis por intervir ou orientar em determinado momento do processo em que não se está tendo aprendizagem satisfatória. É necessário, então, a implantação de uma nova forma de ensinar matemática, pautada em aspectos práticos, para que o aluno possa compreender a importância da matemática não só no ambiente escolar, mas sua importância no cotidiano. Surge a perspectiva de um ensino da matemática através do uso de materiais didáticos, que possuem a função de ajudar na construção do conhecimento matemático. O laboratório de matemática pode ser um espaço físico onde são encontrados recursos para utilização em aulas práticas, e onde também são confeccionados materiais que auxiliam no processo de aprendizagem. Além disso, o laboratório de matemática pode ser considerado qualquer ambiente em que se desenvolve aprendizagens matemáticas.

Levando em consideração essas informações, esta pesquisa evidenciará aspectos que interferem no aprendizado da matemática em alunos no ensino básico e demonstrará como como o laboratório de matemática como recurso didático pode contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem da matemática nas escolas públicas.

Para isso, esta dissertação está organizada da seguinte forma: primeiramente a introdução com as informações iniciais, logo após está o referencial teórico, onde se fala do ensino da matemática e suas dificuldades, dos objetivos da aprendizagem conforme a Base nacional Comum Curricular, e sobre a importância do uso de materiais didáticos no ensino da matemática nas escolas. Em seguida, apresentamos a construção dos seguintes objetos que podem ser utilizados como auxílio no ensino da metemática: Torre de Hanói, tangram e foguetes de garrafa pet. Logo depois temos a seção com os resultados e discussõeS. Por fim, a conclusão do trabalho onde falamos a respeito dos resultados pós experimentos. Com a utilização desses materiais, pretende-se motivar os alunos a estudarem a matemática e assim contribuir para a construção do processo de ensino e aprendizagem matemática.

Nesse sentido, justifica-se este trabalho na necessidade de aumentar o interesse dos alunos do Ensino Fundamental pela matemática através do uso de recursos de fácil obtenção pelos alunos, professor e escola.

Como objetivo geral, este trabalho visa apresentar uma proposta pedagógica de trabalho em sala de aula com materiais concretos de fácil acesso e baixo custo a fim de facilitar o entendimento tornando-o mais dinâmico em sala de aula.

Os objetivos são:

- Utilizar material reciclável para a construção de recursos paradidáticos;
- Ensinar e construir com os alunos os seguintes objetos com material reciclável: foguete de garrafa pet, um tangram e uma torre de hanoi;
- Despertar o interesse dos alunos nas aulas de matemática.

Para alcançar esses objetivos, trabalhamos com os alunos dos sétimo, oitavo e nono ano do Ensino Fundamental da escola estadual Centro de Ensino Joaquim Gomes de Sousa, localizada na cidade de São Luís, no estado do Maranhão.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Ensino da matemática e suas dificuldades

De acordo com os dados da Fundação Lemman (2021) sobre o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), nos Anos Finais, os dados de 2019 do SAEB mostram que 36% dos estudantes eram proficientes em Português, enquanto apenas cerca 18% podem ser assim considerados em Matemática. Assim como nos anos iniciais, foi registrado um ligeiro aumento no intervalo de dois anos, já que essas taxas eram, respectivamente, 34% e 15% em 2017. No Ensino Médio, a porcentagem de jovens proficientes em Matemática manteve-se estável entre 2017 e 2019: apenas 5%, um índice baixíssimo. Percebemos uma grande defasagem em relação aos resultados do ensino de matemática no ensino básico, que pode ser constatado nos exames internacionais de ensino aprendizagem tais como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) 2018, que pontuou que o Brasil tem baixa proficiência em Leitura, Matemática e Ciências, se comparado com outros 78 países que participaram da avaliação. Os dados da edição 18 revelam que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de Matemática, considerado como o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Em Ciências, o número chega 55% e em Leitura, 50%. Os índices estão estagnados desde 2009. Esse cenário abrange, por exemplo, situações de estudantes incapazes de compreender textos, resolver cálculos e questões científicas simples e rotineiras.

O que ocasiona esses baixos índices vão de fatos sociais a questões de metodologias de ensino. Possivelmente, a falta de relação entre o que é ensinado em sala de aula e o cotidiano do aluno é um fator que conta muito no aprendizado. Portanto, é importante que as metodologias de ensino tenham sempre uma ligação com o concreto, ou seja, com elementos que façam parte do dia a dia da comunidade na qual estão inseridos os alunos.

É necessário que sejamos, desde muito cedo, encorajados a matematizar desde o apitar de nosso despertador, sendo que este sempre usa o principio de contar o tempo, ou ao fazermos o nosso desjejum, nos alimentando da primeira refeição usando desta maneira o conceito de proporção. A forma atual da matemática aplicada ao contexto busca por desvincular a mecânica com que ela era aplicada em anos atrás aos alunos, pois ela era pouco atraente, distanciando os alunos da prática pois não estavam motivados a aprender a matéria.

Com o passar dos anos, as metodologias de ensino da matemática trouxeram inovações em suas formas de ensino e aprendizagem, colocando situações do cotidiano nos seus exercícios e usando dos mais variados contextos. É muito importante que a matemática seja ensinada mostrando-se sua importância e as suas aplicações em nosso dia a dia, explorando os conteúdos matemáticos e os exemplificando com as mais diversas situações em nosso dia a dia. De origem grega especificamente a palavra mátema que quer dizer " ciência, conhecimento ou de certo (modo) maneira como se aprende ". De acordo com Bueno (2007, p.500), "a matemática é a ciência das grandezas e formas no que elas têm de calculável e mensurável, isto é que determina as grandezas uma pelas outras segundo as relações existentes entre elas."

A matemática é muito importante para todos nós. Todas as suas descobertas foram imprescindíveis para que a humanidade crescesse e se desenvolvesse. Por esse motivo é interessante falar para os alunos a respeito de suas curiosidades e descobertas para que esses acontecimentos lhe despertem o interresse. É de suma importância estudarmos a historia da matemática, pois essa ferramenta é imprescindível para a compreendermos melhor. Nessa perspectiva, a história da matemática:

> Torna-se um importante instrumento para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da mesma, possibilitando assim entender conceitos a partir de sua criação, levando em consideração todas suas alterações no decorrer da história, facilitando desse modo à compreensão para os alunos, bem como despertando sua curiosidade e principalmente interesse para futuras pesquisas. (OLIVEIRA; ALVES; NEVES, 2008, p.2017).

Por ser uma ferramenta de extrema utilidade para a sociedade, por estar presente em todas as profissões, todas as áreas da educação, pois nos proporciona respostas e deduções para a solução de problemas.

> Constata-se que a disciplina da matemática é aplicada de forma descontextualizada, distante da realidade vivenciada pelo aluno na sala de aula, comprometendo o processo de ensino e aprendizagem. Enfrentando as dificuldades que surgem, como o espaço físico e a falta de ferramenta

> disponível para trabalhar, verificou-se que o professor é peça fundamental neste contexto de mudança. Ele é o responsável por adotar em suas aulas as inovações contextualizadas que a matemática apresenta nos dias atuais, buscando do aluno a participação ativa com demonstrações e exemplos acoplando com a realidade vivenciada no dia a dia (CUNHA, 2017, p.642).

Constatamos que se a matemática é aplicada fora de contexto, ou seja, muito distante do dia a dia que o aluno vive, isso compromete o processo de ensino e aprendizagem da matemática. Convivendo com as várias dificuldades que surgem em meio ao cotidiano, como falta de espaço físico e até mesmo a falta de itens básicos como pinceis, o professor é a peça fundamental para todo o processo de ensino aprendizagem. O professor deve buscar as soluções e inovações para apresentar a matemática do cotidiano vivido pelo aluno. A verdade é que devemos ter uma nova visão do modelo educacional, principalmente do modelo de educação matemática, sempre fazendo o aluno compreender a importância da matemática e o seu uso no cotidiano do dia a dia, despertando nele a curiosidade e o interesse pela matemática.

1.2 Objetivos na aprendizagem conforme a Base nacional comum curricular

Novos temas e uma nova maneira de organização em áreas são aquilo que de mais novo temos em matemática, conforme a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), documento que norteia o currículo do ensino básico. As mudanças que foram estabelecidas evidenciam a importância da matemática para a vida em sociedade. O foco trazido pela BNCC se encontra naquilo que o aluno precisa desenvolver para que o conhecimento matemático seja ferramenta para a leitura, compreensão e transformação da realidade.

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos, tais como: aritmética, álgebra, geometria, estatística e probabilidade, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações.(BRASIL, 2018, p.265).

Para a BNCC a matemática no ensino fundamental precisa fazer com que os alunos relacionem observações que são empíricas do mundo real, representações tais quais como: tabelas, figuras, esquemas e, façam associações dessas representações a uma atividade matemática. Afinal, o ensino fundamental teve foco no letramento matemático, pois

> Definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso.(fruição). (BRASIL, 2018, p.266).

Todas essas habilidades e competências devem estimular a formação de conjecturas, a formulação e resolução de situações problemas nas suas mais variadas formas, usando conceitos, metodologias, fatos e instrumentos matemáticos. É o letramento matemático que faz com que os alunos reconheçam que o conhecimento em matemática é necessário, para compreender e atuar no mundo de hoje, tal qual, como ele funciona.

Tendo sempre em mente desenvolver o raciocínio lógico e crítico, estimulando o processo no qual se dá a investigação, e, sendo muito prazeroso. O desenvolvimento de todas essas habilidades são um processo congênito no qual as mais diversificadas formas de organização de aprendizagem matemática se dão. Todas elas baseadas em situações (problemas) do cotidiano, de possibilidades de interdisciplinaridade da matemática com outras áreas, e de interação da matemática com a própria matemática, com as suas mais diversificadas áreas.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.(BRASIL, 2018, p.266)

Em relação à temática de números, possui como finalidade o desenvolvimento do pensamento numérico. Segundo a BNCC, “em relação a essa temática é que os alunos resolvam problemas com números naturais e números racionais”, (Brasil, 2018, p. 266). A questão da contextualização quando falamos das quatro operações, vem justamente corroborá com o letramento matemático. Naquilo que diz respeito aos cálculos, temos como expectativa de resultados, que o aluno desenvolva formas diferentes para se obter o cálculo final, por estimativas e cálculos mentais, usando também algoritmos e calculadoras.

Nessa etapa, esperamos também que o aluno consiga desenvolver-se na leitura, na escrita e na ordenação de números naturais e racionais, identificando e compreendendo as características do sistema de numeração decimal. Conforme Brasil (2018, p.269), “Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante coloca-los diante de tarefas , como as que envolvem medições, nas quais os numeros naturais não são suficientes para para resolvêlas , indicando a necessidade dos números racionais”.

Em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, de acordo com Brasil (2018), o objetivo é que os alunos saibam resolver situações problemas com números naturais, inteiros e racionais, sempre envolvendo as operações fundamentais com os seus diferentes significados e usando variadas estratégias. De tal forma que os alunos aprofundem a noção de número e reconheçam a necessidade de outros números, como os números irracionais. Os alunos devem saber calcular porcentagens, porcentagens de porcentagens, juros, acréscimos, decréscimos e descontos, sabendo lidar tambem com o uso de tecnologias digitais. Claro que o desenvolvimento do pensamento numérico, não acontece somente na temática de números. Essa temática é ampliada quando falamos de situações que envolvem a álgebra, a geometria, as grandezas e as medidas e a probabilidade e estatística.

No que diz respeito à área da álgebra, ela tem por finalidade desenvolver a abstração de problemas do mundo real para o contexto matemático. É fundamental desenvolvermos esse pensamento, visto que, segundo a BNCC (Brasil,2018, p.270), “na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e de símbolos”. As principais ideias vinculadas a temática da álgebra são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Para o desenvolvimento dela, por parte dos alunos deve eles reconhecerem as regularidades e padrões numéricos e não numéricos. Devêm os discentes estabelecerem leis matemáticas que forneçam relações de interdependência entre grandezas nas mais variadas situações, interpretar e compreender variadas formas de representações gráficas e de símbolos. Devemos ressaltar a importância também do pensamento computacional, através de algoritmos e fluxogramas. Segundo a Brasil (2018, p.271), “um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema”. A linguagem de algoritmos possui muitos pontos em comum à linguagem da álgebra, principalmente no que diz respeito a noção de variáveis. Outra parte comum a matemática é o pensamento computacional, para que os alunos identifiquem padrões e estabeleçam generalizações.

Compete a temática da geometria para a BNCC um conjunto de conceitos e procedimentos que servem para resolver situações problemas do mundo em que vivemos e diversas áreas do conhecimento. A partir dessa concepção, Brasil (2018, p.271) diz que “nessa unidade temática, estudar posição e deslocamento no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais”. Tudo isso é feito para que se possa desenvolver os conhecimentos e pensamentos geométricos dos alunos. Esses conhecimentos e pensamentos se fazem necessário para:

- Investigar propriedades;
- Fazer conjecturas;
- Produzir argumentos geométricos.

É importante também falar de simetrias e do aspecto funcional do estudo da geometria. Construir, representar e interdepender são as principais ideias dessa temática. Usar as principais tecnologias (tais como tablets , smartphones, folha de papel milimetrada) para se identificar e estabelecer pontos de referência para se localizar e deslocar objetos, construir espaços conhecidos e mensurar distâncias. Conforme o que diz a BNCC,

> A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume, nem as aplicações numéricas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em relação a feixe de retas paralelas cortadas por retas secantes ou teorema de pitagóras. (BRASIL, 2018, p. 272)

Ainda conforme a BNCC (2018), o uso do cálculo de áreas por equivalência já era feito há muitos milhares de anos pelos povos da mesopotâmia e da Grécia antiga sem usar fórmulas. Mensurar grandezas relativas ao nosso mundo físico é algo que é imprescindível para um melhor entendimento da nossa realidade. O uso da temática de grandezas e medidas, conforme Brasil (2018), favorece a interdisciplinariedade permitindo a integração da matemática a outras areas do conhecimento. A partir dessa concepção, a BNCC diz que:

> A expectativa é que os alunos reconheçam que medir é comparar uma grandeza com uma unidade e expressar o resultado da comparação através de um número. Alem disso, devem resolver problemas oriundos de situações cotidianas que envolvem grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, area (de triangulos e retângulos e volume (de sólidos formados por blocos retangulares, sem uso de fórmulas, recorrendo, quando necessário, as transformações entre unidades de medidas padronizadas mais usuais . (BRASIL, 2018, p. 273)

Na seção seguinte, iremos apresentar discussões a respeito do material didático para uso nos experimentos, como recursos para se desenvolver ideias sobre conceitos de assuntos matemáticos. Sempre buscando diálogo com alguns dos pesquisadores da temática.

1.3 A importância do uso de materiais didáticos no ensino da matemática nas escolas

Muitos educadores da matemática defendem que as manipulações e visualizações de objetos concretos fornecem um excelente auxílio no processo de ensino e aprendizagem. Lorenzato (2016, p.3) diz que, "a ação do indivíduo sobre o objeto é básica para a aprendizagem".

Foram muitos os educadores que ao longo dos séculos estavam preocupados com a aprendizagem do estudante, como uma ação direta sobre os indivíduos. Dentre eles, podemos dar um destaque para Comenius (1592-1671), Rosseau (1712-1778), Montessory (1870-1952), Decroly (1871-1932), entre tantos outros pensadores. Silva (2012, p.15) diz que ,"a utilização de materiais didáticos de manipulação não deve ser restrita à manipulação dos alunos de forma não estruturada, mas faz-se necessária uma ação mediadora do professor em relação à construção do processo de ensino-aprendizagem da matemática".

Também podemos citar outros pesquisadores, como Lorenzato (2006) e Silva (2012) que afirmam que o uso de os materiais didáticos para a construção de idéias matemáticas constituem um método para que os processos de ensino e aprendizagem se deem de forma efetiva. Segundo Brito (2016, p.14), "a abordagem dada à aula de matemática, apresentando situações que permitam ao aluno explorar de forma concreta alguns modelos matemáticos que comportem uma maior compreensão de conceitos abstratos".

Quando o assunto é laboratório de matemática e materiais manipuláveis, damos destaques para Lorenzato (2006), Bezerra (1956) como referências, tanto no laboratório de ensino de matemática quanto em experimentos de matemática.

Nos dias atuais, percebe-se altos índices de desistência e de reprovação de alunos. De acordo com a reportagem de Souza (2021) ao correio Braziliense, a tríade formada por reprovação, abandono escolar e distorção de idade (alunos com idades inapropriadas para a série) é definida como "fracasso escolar." Segundo Souza (2021), de acordo com os dados de estudo divulgado pelo Fundo das Nações Unidas para a Infância (UNICEF), o ciclo começa com a primeira reprovação. Sem incentivo e cuidado, o estudante pode reprovar novamente e uma terceira vez, até abandonar os estudos. Por fim, ele retorna à escola, com idade inapropriada para a série, o que já constitui novos motivos para não aprender ou desistir de vez. Surge então os seguintes questionamentos: como podemos melhorar esse cenário? O que podemos fazer para mudarmos essa conjuntura atual? De acordo com Lorenzato (2012), uma possível resposta para tais indagações é o uso de metodologias alternativas, ou seja, materiais didáticos de manipulação ou experimentos com materiais alternativos.

Ao falarmos de experimentos, devemos ter em mente que se trata de um contexto complexo, pois há muitos caminhos diferentes que existem em metodologias, quer seja na formação inicial ou continuada dos professores. Nas duas etapas, o uso de experimentos serve para que os alunos possam interessarem-se e assim diminuírem as dificuldades dos alunos na disciplina de matemática.

1.3.1 LEMs (Laboratórios de Ensino)

A fim de desenvolver o trabalho de melhor forma possível, as atividades executadas por profissionais em nossa sociedade exigem que haja condições de trabalho que sejam consideradas apropriadas. Em outras palavras, o desempenho de todo profissional está ligado ao seu ambiente de trabalho e às ferramentas que dispõe. Na área da educação matemática,é importante que existam ambientes onde os alunos possam praticar atividades e aplicar definições e propriedades referentes a conteúdos estudados em sala de aula.

Nesse sentido, surgem os laboratórios de ensino, com uma proposta de estudar a matemática de uma forma mais prática, fugindo da forma monótona como são ensinados, na maioria das vezes, os conteúdos de matemática. A utilização de laboratórios de ensino ainda hoje não é bem vista por muitos professores. Segundo Lorenzato(2012), ainda é possível ensinar assuntos abstratos para alunos sentados em carteiras enfileiradas e com o professor dispondo apenas do quadro negro, ou seja, esse modelo de aula ainda é comum nas escolas.

Existem muitas e diferentes concepções a respeito do que é um LEM. Lorenzato diz o seguinte:

> Inicialmente, poderia ser um local para guardar materiais essenciais, tornando-os acessíveis para as aulas. Nesse caso, é um depósito / arquivo de instrumentos para confeccionar materiais didáticos. (LORENZATO, 2012, p. 6)

Além de ser um local para confeccionar instrumentos que auxiliam no aprendizado da matemática e guardar materiais, esse espaço físico no ambiente escolar serve como uma troca de conhecimento entre professores e alunos. Serve também para que os professores planejem suas atividades no laboratório, aulas , projetos , dentre outros. O principal objetivo do LEM é tornar a matemática mais prática, de forma a melhorar o entendimento dos conteúdos ministrados em sala de aula. Lorenzato (2012) diz que para muitos professores, todas as aulas e salas de aula devem ser um laboratório, onde se dão as aprendizagens matemáticas. Para o uso de um LEM, é necessário o conhecimento em matemática e metodologia de ensino pois como diz Lorenzato (2012, p.7), “é preciso acreditar naquilo que se deseja fazer, transformar ou construir”.

2 ATIVIDADES DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, mostraremos atividades que auxiliam na aprendizagem da matemática, atraves do uso de materiais de baixo custo. Conseguimos elaborar e construir jogos de tangram (no 7º ano), jogos de torre de hanói (no 8º ano) e foguetes com garrafas pet (no 9º ano). Todos os experimentos foram realizados nas dependências do Centro de Ensino Joaquim Gomes de Sousa, que é uma escola de educação básica da rede de ensino estadual, tendo em vista que o laboratório de matemática ainda está em processo de construção.

2.1 O Tangram

O Tangram é um quebra cabeça geométrico chinês formado por sete peças chamadas tans, sendo dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo, conforme a Figura 2.1:

Figura 2.1: Tangram

Fornari (2014)

Com ele pode-se formar centenas e até milhares de figuras de objetos, animais, pessoas e etc.

Conforme Motta (2006), o Tangram é um jogo que milenar que exige astúcia e reflexão. Da sua simplicidade nasce sua maior riqueza; pelo corte de um quadrado, sete peças criam, juntas, formas humanas, abstratas e objetos de diversos formatos. Originário da China, e anterior ao século 18, pouco se sabe da verdadeira origem do Tangram.

Não se sabe ao certo a origem do Tangram, mas acredita-se que tenha sido inventado na China pela dinastia Song, e trazido à Europa pelos navios mercantes do comércio no começo do século XIX, onde ganhou popularidade.

2.1.1 Tangram e Jogos

Há muitas lendas que falam a respeito da origem do Tangram. Uma delas diz que uma pedra preciosa se desfez em sete pedaços e que com ela era possível formar várias figuras. Outra nos diz que um certo jovem despediu-se de seu mestre, pois começaria uma longa viagem ao redor do mundo. Ao se despedir, o mestre lhe entregou um espelho e disse que ali seria registrado tudo o que aconteceria na viagem, para que ele pudesse ver. Porém, o jovem, sem entender como um espelho poderia registrar todas as coisas que aconteceriam na viagem, por um descuido, deixou o espelho cair, e este se partiu em sete pedaços. Então o mestre disse que ele registraria tudo o que visse formando figuras com os sete pedaços do espelho. E assim, segundo a lenda, surgiu o tangram. O jogo do Tangram, é usado pelos professores em várias situações dentre elas:

- Identificar formas geométricas;
- Representar frações;
- Compor e decompor figuras geométricas;
- Trabalhar conceitos de áreas e perímetros;
- Trabalhar relações entre áreas e perímetros:
- Teorema de Pitágoras:
- Proporcionalidade, entre outros.

Há muitas discussões entre os educadores matemáticos sobre como podem ser as práticas de ensino que devem ser adotadas nas escolas e como deve ser a relação entre professor e aluno. A geometria faz parte do componente curricular de ensino, conforme o que está previsto nos parâmetros curriculares nacionais - PCN, e conteúdos que devem ser ensinados na matéria de matemática, que devem ser trabalhados de forma dinâmica e que instigue a curiosidade do aluno.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada o mundo que vive. (BRASIL, 1997, p.55).

Os professores devem mediar a aprendizagem usando novas metodologias, buscando, sempre que possível, introduzir na prática docente os materiais lúdicos capazes de desenvolver o raciocínio e melhorar o entendimento da matéria. Segundo Pontes e Lopes (2016), o objetivo é formar alunos participantes, reflexivos, críticos, dinâmicos e capazes de enfrentar desafios.

Existem mitos em relação a prática de jogos como ferramenta de aprendizagem matemática, porém, segundo Starrepravo (2009), a prática de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir os bloqueios apresentados pela maioria dos alunos que temem a matemática. Dessa forma, a utilização de jogos como ferramenta de ensino faz com que os alunos estejam diante de situações que os insentivem a criar suas próprias soluções, estimulando a criatividade e imaginação.

Conciliar diversão e ensino de matemática é a certeza de melhoraria em relação a aprendizagem dos alunos em sala de aula, pois proporciona trabalhar uma diversidade de assuntos que vão de geometria, raciocínio lógico, frações, dentre outros. Segundo Araújo (2011), tentando trabalhar novas metodologias de ensino que torne o ambiente da sala de aula mais agradável e propício ao aprendizado de matemática, desenvolvemos o Tangram.

2.1.2 Construção do Tangram: Por Dobraduras.

Para construir um Tangram por meio de dobraduras, deve-se seguir os seguintes passos:

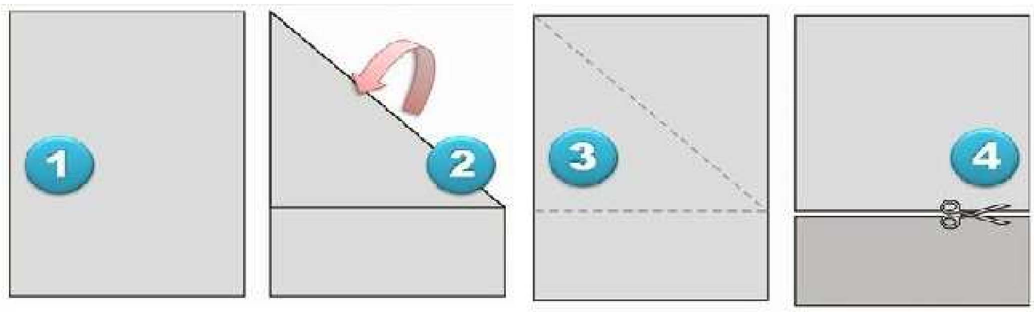
1) Obter um quadrado a partir de uma folha de papel A4.

2) Dobra-se a folha.

3) Observa-se as marcas que se formaram e nota-se que se formam 2 triângulos e 1 retângulo ou 1 quadrado.

4) Recortamos o retângulo sobressalente. Os quatro primeiros passos são mostrados na Figura 2.2.

Figura 2.2: Passos 1, 2, 3 e 4.



Fonte: Hartung e Meirelles (2010).

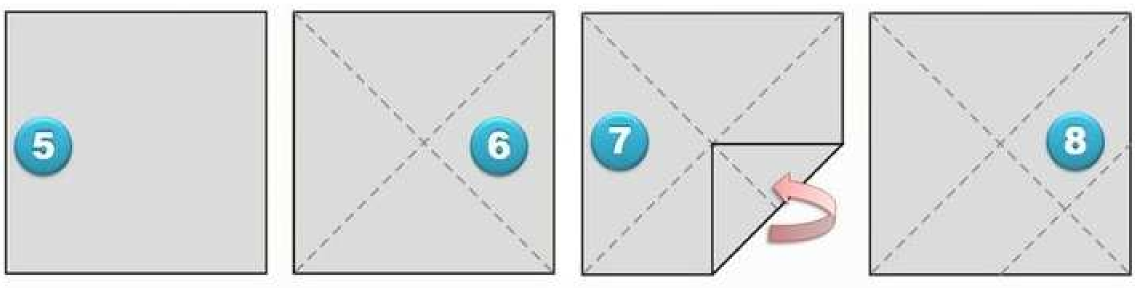
5) Obtém-se um quadrado.

6) Dobra-se o quadrado pelas diagonais.

7) Dobra-se a ponta inferior direita de forma que coincida com o meio do quadrado.

8) Observa-se as marcas que foram formadas através das dobragens. Os passos 5, 6, 7 e 8 são mostrados a Figura 2.3.

Figura 2.3: Passos 5, 6, 7 e 8.



Fonte: Hartung e Meirelles (2010).

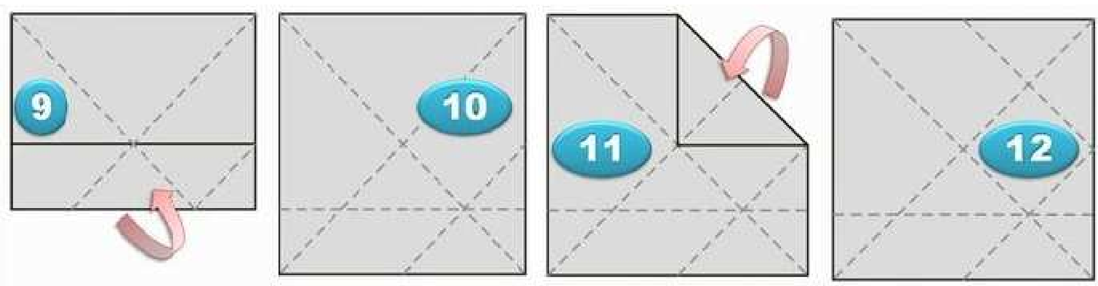
9) Dobra-se a folha de forma que a borda coincida com a parte do meio do quadrado.

10) Desdobra-se a folha.

11) Dobra-se a ponta superior direira, coincidindo com o meio do quadrado.

12) Desdobra-se a folha e formam-se todas as marcas que darão formas às figuras que compõem o Tangram. Os passos 9, 10, 11 e 12 são mostrado na Figura 2.4.

Figura 2.4: Passos 9, 10, 11 e 12.

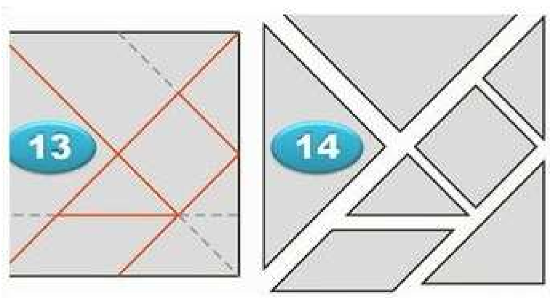


Fonte: Hartung e Meirelles (2010).

13) Com o auxílio de uma caneta ou piloto, marca-se as linhas da imagem 12 da Figura 2.4.

14) Recorta-se de acordo com as marcações e separamos as figuras. Os passo 13 e 14 são mostrados na Figura 2.5.

Figura 2.5: Passos 13 e 14.

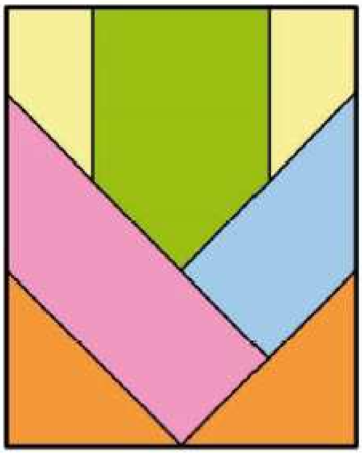


Fonte: Hartung e Meirelles (2010).

Existem outros tipos de Tangram, além do tradicional (chinês) como por exemplo o **Tangram pitagórico**, o **Tangram triangular**, e o **Tangram russo**.

O tangram pitagórico, que é usado para a demonstração do teorema de Pitágoras, é produzido a partir de um quadrado e é formado por dois triângulos retângulos isósceles, quatro trapézios retângulos e um pentágono irregular, conforme a Figura 2.6

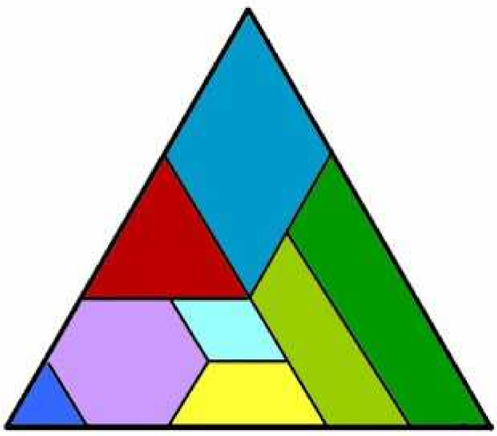
Figura 2.6: Tangram pitagórico



Fonte: Espaço Educar

O tangram russo é formado por dois triângulos equiláteros, dois paralelogramos, três trapézios isósceles e um hexágono regular, conforme a Figura 2.7:

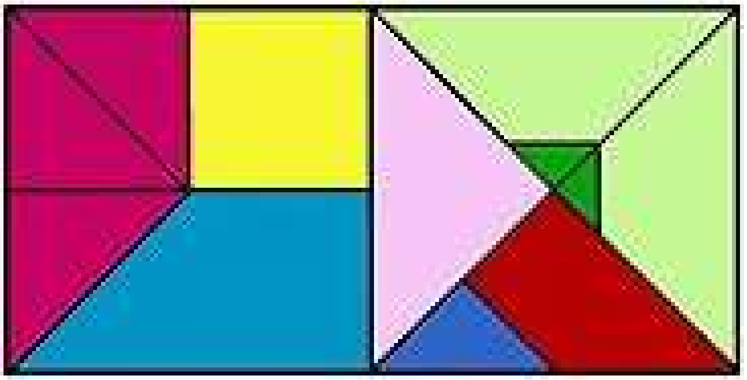
Figura 2.7: Tangram pitagórico



Fonte: Espaço Educar

Já o tangram russo é composto a partir de um quadrado e possui seis triângulos retângulo isosceles, dois trapézios isósceles, um triangulo retângulo isósceles, um quadrado e dois trapézios retangulares, conforme a Figura 2.8

Figura 2.8: Tangram pitagórico



Fonte: Mello (2012)

De acordo com Vigotsky (2006), o material concreto, quando trabalhado de forma objetiva e clara se torna mais eficaz no desenvolvimento do aprendiz. Ao desenvolvermos, o Tangram tradicional vai decompor e recompor muitas formas geométricas, variando às sete peças de posição e por de lado a lado, sem sobrepô-las, criando: letras, pessoas, objetos, animais e dentre outras das mais variadas formas. Isso parece ser algo muito simples, mas há muita riqueza em sua proposta.

2.1.3 Descrição do experimento realizado

O experimento com o Tangram foi realizado nos dias primeiro e dois de novembro de 2021 em sala de aula da escola, com a turma do sétimo ano (turma 700), no turno vespertino, da escola C.E Joaquim Gomes de Sousa, com 32 alunos, divididos em 8 grupos de 4 alunos. Primeiramente foi feito um pequeno questionário com os alunos, que está disponíveis no apêndice deste trabalho.

Após a aplicação do questionário, confeccionamos o Tangram utilizando material de isopor, estilete e tintas, como pode ser observado nas Figuras 2.9, 2.10, 2.11. Propusemos aos alunos após a confecção do tangram a montagem de figuras de formas geométricas com determinadas quantidades de peças. Essas formas foram triângulos, quadrados e retângulo. Permitir que o aluno experimente, em um processo de tentativas e erros é algo inerente ao próprio processo de se fazer ciência. Essa metodologia deve ser repassada, incentivada para que os alunos possam desenvolver a capacidade cognitiva.

Figura 2.9: Retângulo com seis peças construído pelos alunos

Fonte: Autoria própria

Figura 2.10: Retângulo com sete peças construído pelos alunos

Fonte: Autoria própria

Figura 2.11: Retângulo com três peças construído pelos alunos

Fonte: Autoria própria

Não houve dificuldades quanto as formas geométricas a serem montadas, mas houve dúvidas em relação à quantidade de peças usadas para a montagem das formas. Nesse momento houve a minha intervenção, avisando que tinham que montar as figuras com a quantidade de peças que se pediam. Após esse momento usamos a noção de medida, pedindo aos alunos para medir as demais peças usando o menor triangulo. Foram levantados os seguintes questionamentos: Um triângulo médio é coberto por quantos triângulos pequenos? E o triângulo grande? Explorando assim os conceitos de unidade referentes ao tamanho do menor triângulo. Nesse aspecto, os alunos apresentaram dificuldades, e, não conseguiram visualizar sozinhos. O triângulo grande no caso é correspondente a $\frac{4}{16}$, pois podemos decompor o tangram em 4 triângulos grandes, sendo que o menor dos triângulos decompõe o Tangram em 16 triângulos menores, logo obtemos como fração $\frac{4}{16}$. Neste momento, foi explicado aos alunos tais conceituações.

2.2 Torre de Hanói

O nosso principal objetivo aqui é mostrar o jogo torre de Hanói como ferramenta para o ensino aprendizagem da matemática. Falando um pouco da História do surgimento da torre de hanoi: o jogo possui origem em um mito indiano, no qual o centro do mundo está sob a cúpula de um templo localizado na cidade de Benares, na Índia.

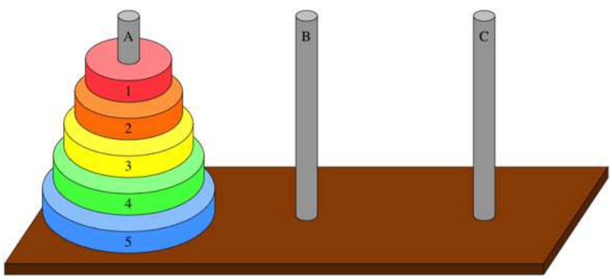
> Neste centro haveria uma placa de latão onde estariam fixados três pinos de dia-mente. Ao criar o mundo o deus Brahma teria colocado em um desses pinos sessenta e quatro discos de ouro, apoiados um sobre o outro de diâmetros decrescentes, estando o maior junto à placa e o menor no topo da pilha. Esta seria a Torre do Brahma. Segundo as leis imutáveis criadas por ele, os sacerdotes teriam sido incubidos de transferir a pilha de discos para um dos outros pinos, trabalhando desde então, dia e noite sem sessar. Segundo o mito a vida decorrerá durante a realização de tal tarefa de transferência e, antes que os sacerdotes consigam levar a cabo a missão que receberam, o templo transformar-se-á em pó e o mundo desaparecerá, com um estrondo de trovão. (RUFINO, 2011, p.11)

Há muitas variações dessa lenda. Sendo que em algumas outras histórias, o templo é um mosteiro e os sacerdotes seriam monges.

2.2.1 Dos objetivos e regras do jogo

O jogo é composto por três pinos e uma torre, com discos (de tamanhos diferentes), empilhados em ordem decrescente, como mostra a Figura 2.12.

Figura 2.12: Torre de Hanói



Fonte: Khan Academy.

Objetivo: Mudar todos os discos de uma pino para outro utilizando, ou não, o menor número de movimentos.

Regras:

i) Mudar apenas um disco de cada vez;

ii Um disco maior não pode ficar em cima de um disco menor;

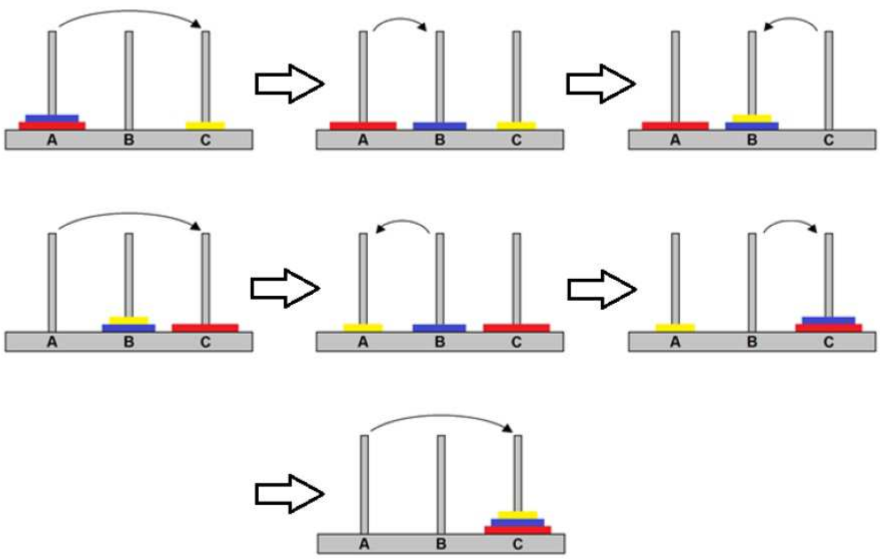
Para se resolver a torre de Hanói com um disco, por exemplo, basta mover esse disco para o último pino, e assim apenas um movimento é necessário. Com dois discos, precisaremos de três movimentos. Já com três discos, precisaremos de sete movimentos e assim por diante. Consideremos agora uma torre com n discos, onde cada disco é enumerado de 1 até n, onde 1 é o menor disco e n, o maior. Para que possamos remover o n-ésimo disco, termos que retirar os $n-1$ discos que estão acima do disco n, os colocando em uma das hastes. Após isso, movemos o disco n para a haste que resta. Conforme as regras, movemos os $n-1$ discos para a haste na qual está o disco n. Dessa forma, podemos deduzir:

i) Movemos os $n-1$ discos duas vezes;

ii) Movemos n discos apenas uma vez.

A Figura 2.13 mostra como se seguem os movimentos dos discos para uma Torre de Hanói com três discos.

Figura 2.13: Torre de Hanói



Fonte: Oliveira (2019).

Em termos matemáticos, considere j_n o número mínimo de jogadas para mover os n discos e j_{n-1} o número mínimo de jogadas para $n-1$ discos. Então, temos que

$$\begin{aligned} j_n &= j_{n-1} + 1 + j_{n-1} \qquad (2.1)\\ j_n &= 2j_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Como j_n é o número mínimo de movimentos, podemos observar o seguinte

$$\begin{aligned} j_1 &= 2j_0 + 1 = 1; \qquad (2.2)\\ j_2 &= 2j_{2-1} + 1 = 2j_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3; \qquad (2.3)\\ j_3 &= 2j_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7; \qquad (2.4)\\ j_4 &= 2j_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15; \qquad (2.5)\\ j_5 &= 2j_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31. \end{aligned}$$

Dessa maneira, descobrimos o número mínimo de movimentos para n discos, se soubermos o número de $n-1$.

Tabela 2.1: Quantidade de discos e movimentos em uma torre de Hanói.

Número de discos	**Qnt mínima de movimentos**
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a Tabela 2.1, temos que para a quantidade de movimentos, a quantidade acrescentada ao número de movimentos segunite é sempre o dobro do anterior, ou seja, de 1 para 3, é somado dois, e de 3 para 7, foi somado quatro e assim sucessivamente. Podemos observar também é a relação entre o número de movimentos com a soma, ou seja, do 1 para o 3 foi somado 2, do 3 para o 7 foi somado 4, sempre somando o sucessor do número. Dessa forma, temos que o resultado do número mínimo de movimentos é um a menos do que o número que foi somado.

Pela Tabela 2.2, temos que o número que é somado é um número da forma 2^n, e assim temos a sequência que forma a seguinte P.G. de razão $q = 2$: (2,4,8,16,32,34...).

Tabela 2.2: Quantidade de discos e movimentos em uma torre de Hanói.

Número de discos	Qnt mínima de movimentos	número a ser somado
1	1	$-1 \longleftarrow +2$
2	3	$-1 \longleftarrow +4$
3	7	$-1 \longleftarrow +8$
4	15	$-1 \longleftarrow +16$
5	31	$-1 \longleftarrow +32$

Fonte: Dados do trabalho

Dessa forma, temos que a quantidade mínima de movimentos é igual a $2^n - 1$ e por conseguinte, $j_n = 2^n - 1$. O princípio matemático ao qual podemos recorrer para provar essa fórmula é a indução finita ou indução matemática.

2.2.2 Princípio de Indução Matemática

De acordo com Hefez (2014), o princípio de indução matemática é um instrumento poderoso usado na demosntração de teoremas que envolvem números inteiros e que vem sendo usado de uma forma implícita desde a antiguidade.

Teorema 2.1. (**Princípio de Indução Matemática**). Seja $P(n)$ uma sentença aberta em $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq n_0\}$, tal que

i) $P(n_0)$ é verdadeira;

ii) Para todo $n \geq n_0$, se $P(n)$ é verdadeira, implica que $P(n+1)$ é verdadeira. Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq n_0$.

Demonstração. Seja $F = \{n \in \mathbb{Z}; n \geqslant n_0$ e $P(n)$ é falso $\}$. Queremos mostrar que F é vazio. Suponhamos por absurdo que $F \neq \emptyset$. Como o conjunto F é limitado inferiormente (por n_0), pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que F possui um menor elemento, digamos b. Como $b \in F$, temos que $b \geq n_0$, mas, por i), temos que $n_0 \notin F$, logo $b \neq n_0$ e, portanto, $b > b_0$. Sendo b o menor elemento de F, temos que $b - 1 \notin F$, logo $P(b-1)$ é verdadeira. De (ii), segue-se então que $P(b)$ é verdadeira e, portanto, $b \notin F$, o que é uma contradição.

$\square$

Prova da fórmula

Pelo Teorema 2.1, para $n = 1$ temos que

$$j_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1;$$

Por hipótese, suponhamos que $j_n = 2^n - 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$, onde $n > 1$. Queremos provar que vale para $n + 1$. Note que,

$$j_n = 2j_{n-1} + 1.$$

De forma equivalente, temos

$$j_{n+1} = 2j_n + 1. \tag{2.6}$$

Usando a hipótese de indução na Equação 2.6, temos

$$j_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 \tag{2.7}$$

$$j_{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 1 \tag{2.8}$$

$$j_{n+1} = 2^{n+1} - 1.$$

Dessa forma, pelo Princípio de Indução, temos que

$$j_n = 2^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ com } n > 1.$$

Por tanto, provamos a fórmula que nos fornece a quantidade de movimentos que temos que fazer para resolver a torre de Hanói.

Como visto na Seção 2.2, existem alguns conteúdos que podem ser explorados através do jogo torre de Hanói. Dentre esses assuntos, destacamos a indução matemática, potenciação, noções de ordem lógica e padrões numéricos.

Dsecrição do experimento realizado

O experimento realizado no dia 22 de outubro de 2021, com os alunos da turma 800 vespertino, da escola C.E Joaquim Gomes de Sousa, teve por objetivo principal o desenvolvimento de estratégias e observação de padrões numéricos para a resolução de problemas.

Se esse experimento fosse aplicado no ensino médio, poderíamos abordar assuntos como função exponencial, progressão geométrica, sequências recursivas, princípio de indução finita, dentre outros. Aqui, no entanto, trabalhamos apenas o conhecimento sobre potenciação. Iniciamos o experimento com um questionário a respeito do conhecimento dos alunos em relação ao jogo. Após isso, iniciamos a leitura de um texto sobre a torre de Hanói. Os principais aspectos abordados nesse texto foram as lendas associadas ao surgimento do jogo, as regras, os objetivos e curiosidades em geral.

O próximo passo do experimento foi a confecção da torre de Hanói. Utilizamos os materiais tais como isopor, estilete, tinta guache, compasso (algumas equipes usaram tampas de diferentes tamanho), régua e hidrocor.

Após a confecção da torre e dos discos (trabalhamos com cinco discos), os alunos começaram a tentar resolver o problema. Inicialmente, com apenas um disco. Não houve problema em relação a resolução da torre para um disco. Para dois discos, todos conseguiram resolver também. Já para três e quatro discos, os alunos encontram dificuldades em encontrar o número mínimo de jogadas. Alguns conseguiram resolver o problema, porém, fora do número mínimo de jogadas.

Ao colocar mais um disco, a torre agora passa a ter cinco discos e os alunos não conseguiram resolver, sendo necessária a intervenção do professor para que eles pudessem perceber a relação entre a quantidade de discos da torre e quantidade de movimentos mínimos que eram necessários para que se movessem todas as peças da haste inicial para a haste final. Prosseguimos para o próximo passo, que foi o preenchimento da Tabela 2.3, que associa a quantidade de discos à quantidade de movimento que foi observada por cada aluno. Nesse momento, os alunos preencheram de acordo com suas percepções, com base no que foi observado por cada um ao manusear o jogo.

Tabela 2.3: Relação entre discos e movimentos em uma torre de Hanói.

Número de discos	**Número mínimo de movimentos**
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: Dados do trabalho

Foi perguntado aos alunos a quantidade mínima de movimentos, na proporção que aumentava-se a quantidade de discos. Para 1 e 2 discos, a maioria acertou. Quando Para 3 discos, alguns alunos responderam que precisava de 7 movimentos mínimos. Já para 4 discos, alguns responderam $13, 15$ e 19 movimentos. Com 5 discos, obtemos como respostas $36, 40$ e 60. A partir daí, foi falado que existe uma maneira de determinar a quantidade mínima de jogadas para resolver o problema.

Foram levantados os seguintes questionamentos: "O que vocês fizeram para resolver o problema?" Alguns alunos responderam: "Observando as peças e testanto. Outra pergunta: "Vocês utilizaram outra estatégia, sem ser a de testes?" Os alunos responderam que não haviam pensado nessa possibilidade. Explicamos que se a quantidade de discos for um número par, começamos colocando o menor disco na haste que usamos como suporte.

Também foi perguntado aos alunos se eles ja haviam estudado o conteúdo de potenciação. Os alunos respoderam que sim e então foi mostrado a eles que há uma relação com o cálculo de potências de base 2 com o número de movimento mínimos do problema. Por exemplo, $2^1 = 2$, dá um total de apenas uma jogada, $2^2 = 4$, apenas três jogadas, $2^3 = 8$ são sete jogadas e assim sucessivamente.

Perguntamos aos alunos qual a relação existente e responderam que sempre se subtrai o número um ao final de cada passo, para se obter a quantidade de movimenos mínimos. Fizemos o seguinte qestionamento: "E se tivermos agora 8 discos? qual será a quantidade mínima de movimentos?". Os alunos não souberam responder. Os alunos consultaram uma tabela de potências de base 2 e chegaram a conclusão de que era o número $2^8 = 216$, o qual subtraímos 1 e assim temos 215 jogadas. Mostramos aos alunos agora a fórmula para resolver o problema com n discos que é dada por $2^n - 1$. Ao final, dividimos a turma em grupos e fizemos uma competição entre os grupos para ver quem resolvia em menos tempo e agora, com a utilização da fórmula para se obter a quantidade mínima de jogadas.

Podemos observar nas Figuras 2.14, 2.15 e 2.16, na página a seguir, alguns exemplares da torre de Hanói confeccionadas pelos alunos.

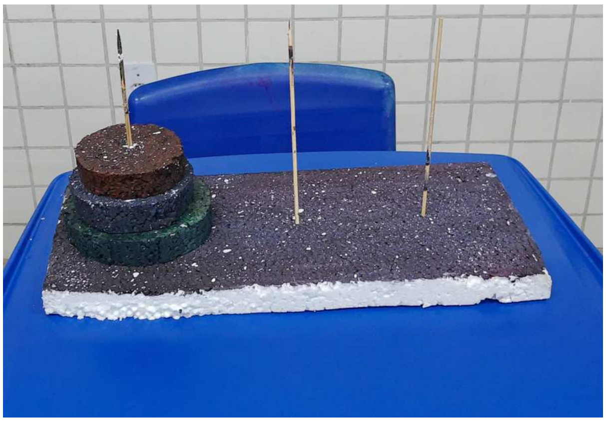
2.2.3 Construindo a Torre de Hanoi

Antes de falarmos do experimento, falaremos do embasamento teórico de tal abordagem que é a função de segundo grau. Claro que admitimos no momento do experimento que o aluno já sabe os conceitos de função e de suas respectivas propriedades. Essa seção será dividida em quatro subseções: interdisciplinariedade no ensino, noções matemáticas, noções físicas e descrição do experimento.

Figura 2.14: Torre de Hanói confeccionada com isopor e palito.

Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.15: Torre de Hanói confeccionada com isopor e palito.



Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.16: Torre de Hanói confeccionada com isopor e palito.

Fonte: Autoria Própria.

2.2.4 Interdisciplinariedade no Ensino e Uso de Materiais Recicláveis

Quando falamos em interdisciplinariedade, normalmente relacionamos a conteúdos de outras disciplina que são trabalhados a partir de projetos que fazem com que os alunos pesquisem, elaborem possíveis soluções, correlacionando as disciplinas. A matemática e física dependem uma da outra, pois a matemática é a ferramenta principal que a física se utiliza.

Segundo Yared (2008), a Interdisciplinariedade significa, de modo geral, a relação entre as disciplinas. Em outras palavras, são as disciplinas se relacionando entre si. Ocorreram muitas mudanças no ambiente escolar que hoje em dia dá preferência a metodologias de ensino multidisciplinar. Com a lei 9493/96, os parâmetros curriculares nacionais e a reformulação dos currículos escolares, se faz necessária a presença da interdisciplinariedades nas práticas escolares dos docentes. Os PCNs nos dizem, de certa forma, que há ainda um certo tradicionalismo que impera sobre a interdisciplinariedade por diretores e professores que temem e não arriscam a mudança. Mas claro que essa visão tradicionalista deve ser renovada em uma visão que mostre a importância do trabalho interdisciplinar, que é uma metodologia necessária para um aprendizado significativo dos alunos. Pensando nisso, com o objetivo de motivar a interdiciplinaridade, descrevemos uma experiência com a utilização de lixo reciclado.

As escolas normalmente descartam uma grande quantidade de lixo, sendo que grande parte desse lixo pode ser reciclado. Conscientizar os alunos e a comunidade escolar a respeito da sustentabilidade ambiental é, com toda certeza, papel e dever da escola. Cuidar do meio ambiente, do lixo de maneira prática, não somente abordando a teoria, é necessário e fundamental para educarmos os alunos para o futuro. Papeis, restos de alimentos, sacos plásticos, embalagens, copos são exemplos de lixos que normalmente a escola produz. Falar a respeito do caminho que o lixo percorre até ser descartado é muito importante e vale destacar o papel que a separação do lixo de materiais recicláveis dos não recicláveis faz, pois dessa forma, se descarta de maneira correta o que não se pode aproveitar e aproveita-se aquilo que se pode reutilizar.

Unir as aulas teóricas com aulas práticas de coleta de lixo seletiva faz com que os alunos reflitam sobre a poluição mundial. Embora os recursos do mundo existam de formas abundantes, eles não são infinitos. Por isso devemos cuidar das nossas fontes de água, fontes animais, fontes vegetais e fontes minerais. Caso contrário, esses recursos acabarão se extinguindo. Materiais como sacolas plásticas levam no mínimo cem anos para se degradarem, quando jogadas diretamente no meio ambiente. E, enquanto ela não se degrada ela pode matar animais e contaminar rios, lagos e mares. Mas, se fizermos a reciclagem correta, esses materiais não irão para a natureza e voltarão a ser usados em suas funções antigas ou de outras maneiras.

2.3 Foguete de Garrafa Pet

Um outro exemplo de material que pode ser recilcado é a garrafa pet, que leva entre de 200 e 600 anos para se decompor se for descartada na natureza, sendo que se for reciclada, pode ser usada para inúmeras finalidades, que vão de objetos de arte e até mesmo para se construir foguetes para o ensino de física e matemática.

Assim, reciclar se faz necessário pois é conscientizando as futuras gerações que preservaremos o mundo e assim preservaremos a vida na Terra.

2.3.1 Noções matemáticas sobre o lançamento de foguetes: Equação do Segundo Grau

Elon lages (2006) define, " uma função $f : X \to Y$, cujo o domínio é o conjunto X e o contradomínio é o conjunto Y, é uma correspondencia que estabelece, sem exceções e nem ambiguidades, para cada elemento x em X sua imagem $f(x)$ em Y ".

Definição 2.1. Função quadrática é toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para a,b e c pertencentes aos numeros reais, com $a \neq 0$, de tal modo que $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}$. Note que,

1) A função $f(x) = x^2 - 5x + 4$ é quadrática , onde $a = 1, b = -5$ e $c = 4$;

2) A função $f(x) = x^2 - 4x$ é quadrática , onde $a = 1$ e $b = -4$ e $c = 0$;

3) A função $f(x) = x^2$ é quadrática , onde $a = 1$ e $b = c = 0$;

4) A função $f(x) = x + 1$, não é quadrática pois $a = 0$.

A Forma Canônica

Seja $ax^2 + bx + c$ um trinômio, com a, b, e c pertencentes aos reais e com $a \neq 0$. Colocando o coeficiente a da equação em evidencia e usando o método de completar os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}\right]\\
&= \left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-(\frac{b}{2a})^2\right]\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Assim, reescrevendo a lei de formação de $f(x)=ax^2+bx+c$, temos

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

De modo equivalente, escrevemos

$$f(x)=a(x-x_0)^2+y_0. \tag{2.9}$$

A Equação 2.9 é chamada de **forma canônica da função quadrática**, onde

$$x_0=-\frac{b}{2a} \text{ e } y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

$1°$ **propriedade: valor máximo e mínimo**

Seja n um número real, chamamos $f(n)$ de valor máximo de função f, $f(x)\leq f(n)$ para todo x, e de valor mìnimo se para todo $f(x)\geq f(n)$ para todo x.

Note que a forma canônica é composta por dois termos: o primeiro varia com x e o segundo é $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$ que é constante. Seja $a>0$. Logo, $a(x-x_0)^2\geq 0$, onde $a(x-x_0)^2\geq 0+y_0$. Portanto $f(x)\geq y_0$, e f atingirá o menor valor quando $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$, no momento em que $x=x_0$. Se $a<0$, então

$$a(x-x_0)^2\leq 0 \text{ e } a(x-x_0)^2+y_0\leq 0+y_0.$$

Assim, $f(x)\leq 0$, e f atingirá o seu maior valor (valor de máximo) quando $y_0=\frac{4ac-b^2}{4a}$, no momento em que $x-x_0=0$, ou seja, quando $x=x_0$. Dessa forma, concluímos que no ponto do domínio $x_0 = \frac{-b}{2a}$, encontramos o maior valor (quando $a < 0$) ou menor valor (quando $a > 0$). São os valores de x para os quais $f(x) = 0$ (sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$). Usaremos a forma canônica para determinarmos os zeros da função quadrática ,ou seja,

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

onde $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Essa é a estratégia mais usada em nossas escolas, embora se deva apresentar outras alternativas para os alunos encontrarem as raízes de uma equação do segundo grau. Uma das alternativas é o método do completamento de quadrados. Partindo dessa fórmula podemos obter informações interessantes sobre as raízes da equação do segundo grau. Resumindo teremos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Dessa forma, teremos

- Se $\Delta > 0$, a função possui dois zeros reais;
- Se $\Delta < 0$, a função não possui zeros reais;
- Se $\Delta = 0$, a função possui um unico zero real.

Forma Fatorada da Função Quadrática

Sejam α e β as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Então, temos que

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Seja s a soma das raízes α e β. Então, temos

$$\begin{aligned} s &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Considere agora p como sendo o produtos das raízes α e β. Logo, temos:

$$\begin{aligned}
p &= \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&= -\left[\frac{\left(b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}\right]\\
&= -\left[\frac{-b^2+b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= \frac{c}{a}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Pela Equação 2.9, colocando a em evidência e usando as Equações 2.10 e 2.11, temos

$$\begin{aligned}
f(x) &= a\left[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]\\
&= a\left[x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta\right]\\
&= a\left[x(x-\alpha)-\beta(x-\alpha)\right]\\
&= a\left[(x-\alpha)(x-\beta)\right]. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

A Equação 2.12 é chamada de forma fatorada da equação quadrática.

2° **propriedade: sinal da função**

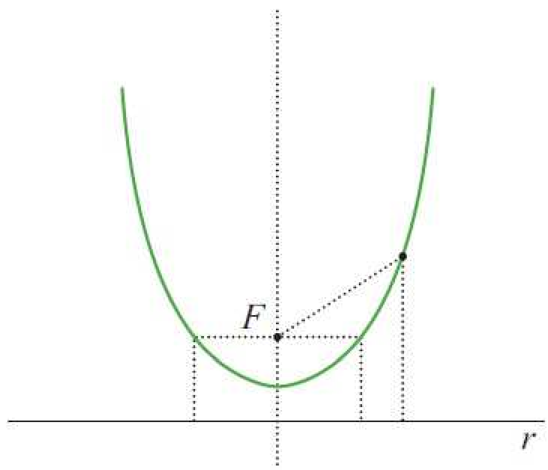
Fazer o estudo do sinal da função quadrática f é encontrar os valores de x para os quais $f(x)$ são negativos ou positivos. Considere α e β as raízes da função $ax^2+bx+c=0$ e vamos supor que α é menor que β. Seja $\alpha < x < \beta$. O produto $(x-\alpha)(x-\beta)$ é negativo, assim pela foma fatorada de f, o sinal de f é diferente de a. Para os demais valores $x<\alpha$ ou $x>\beta$, o produto $(x-\alpha)(x-\beta)$ é positivo e pela forma fatorada de f, o sinal de f é igual ao de a. Se $\alpha=\beta$, pela forma fatorada teremos que $f(x)=a(x-\alpha)^2$, sendo que a função será nula, sempre que $x=\alpha$ e tem o mesmo sinal de a, para todo $x\in\mathbb{R}$, pois $(x-\alpha)$ é positivo, $\forall x\neq\alpha$. Se a função não possuir zeros reais, não se pode escrever a forma fatorada, e, o estudo do sinal se faz pelo valor máximo e mínimo assumido pela função. Seja $a>0$ e $f(x)=ax^2+bx+c$. Como visto anteriormente, a função terá valor mínimo de $-\frac{\Delta}{4a}$, e, tendo em vista que não possui raízes. Se $\Delta<0$, o valor mínimo é positivo, e, $f(x)\geqslant 0; \forall x\in\mathbb{R}$. Da mesma forma, $a<0$ e $f(x)=ax^2+bx+c$, com $f(x)$ não tendo raízes reais logo f admite valor máximo $-\frac{\Delta}{4a}$. Se $\Delta<0$, o seu valor máximo será negativo e $f(x)<0$ não tem raiz, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Gráfico de uma Parábola

Definição 2.2. Seja r uma reta e F um ponto no plano $\mathbb{R}^2$, de tal forma que F não pertença a reta r. Chamamos de parábola p de foco F e reta diretriz r, (Figura 2.17), o conjunto dos pontos P que são equidistantes de F e de r, ou seja,

$$p = \{P \in \mathbb{R}^2; d(P,F) = d(P,r)\}.$$

Figura 2.17: Parábola p de foco F.



Fonte: Bezerra e Ivan (2010).

A parábola no plano cartesiano é descrita por meio de uma equação algébrica, ou seja, podemos considerar uma parábola qualquer como sendo o conjunto de pontos (x,y) do plano cartesiano de tal forma que suas coordenadas x e y satisfazem uma determinada equação. A parábola é a primeira cônica que é apresentada aos alunos, ainda no ensino fundaental como sendo uma curva que representa o gráfico de uma função quadrática no plano cartesiano.

Definição 2.3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Essa função é denominada de quadrática (ou do 2° grau), se, e somente se, existir constantes reais a,b e c, com a $\neq 0$, tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

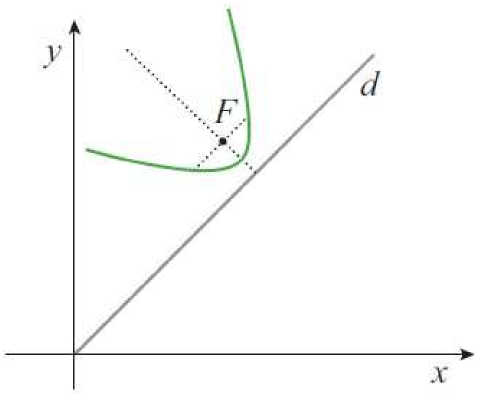
Observação 2.1. Nem toda parábola será o gráfico de uma função quadrática.

Exemplo 1. Obteremos uma equação para a parábola de foco $F(-1,1)$ e diretriz $r : y = x$. Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer dessa parábola, temos

$$d(P,F) = d(P,r) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|y-x|}{\sqrt{2}} = x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0.$$

A equação do Exemplo 1 não é uma equação de função quadrática, pois para um valor arbitrário de x, existem dois valores possíveis para y. Esboçamos o gráfico, cujo os eixos de simetria não são paralelos aos eixos cartesianos, como mostra a Figura 2.18.

Figura 2.18: Gráfico da função do Exemplo 1.



Fonte: Bezerra e Ivan (2010).

Exemplo 2. Vamos obter uma equação para a parábola de foco $F = (0,p)$ e reta diretriz $r : y = -p, p > 0$. Seja $P(x,y)$ é um ponto arbitrário dessa parábola. Então, temos $d(P,F) = d(P,r)$, $\sqrt{(x-0)^2 + (y+\frac{3}{4}) = (y+p)^2}$ e $x^2 - 4yp = 0$. Para $p = \frac{1}{4a}$, então a parábola é $y = ax^2$. Logo o foco e a diretriz da parábola $y = ax^2$ são $(0,\frac{1}{4a})$ e $r : y = -\frac{1}{4a}$.

O eixo de uma parábola é definido como sendo a reta perpendicular a sua diretriz que passa pelo seu foco. O eixo divide a parábola de forma simétrica (pela própria definição, a parábola resulta em uma figura simétrica em relação à reta que passa pelo foco e é perpendicular à reta diretriz). O eixo da parábola é uma reta vertical se, e somente se, a diretriz dessa parábola for uma reta horizontal. O eixo de seimetria da parábola a intercepta em um ponto que recebe o nome de *vértice*. Mostraremos que a equação de uma parábola é da forma $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, se, e somente se, o eixo de simetria é paralelo ao eixo das ordenadas. De acordo com Bezerra (2010), o gráfico de uma função quadrática é uma parábola, onde o eixo é paralelo ao eixo das ordenadas. De fato, considere $y = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com $a \neq 0$ e a,b e $c \in \mathbb{R}$. Podemos reescrever a equação $y = ax^2 + bx + c$ da seguinte forma

$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c.$$

Tomando o termo $b^2 - 4ac = \Delta$, podemos escrever

$$y + \frac{\Delta}{4a} = a(x + \frac{\Delta}{2a})^2. \tag{2.13}$$

Chamando $y' = y + \frac{\Delta}{4a}$ e $x' = x + \frac{\Delta}{2a}$ na Equação 2.13, reescrevemos a Equação 2.13 como sendo

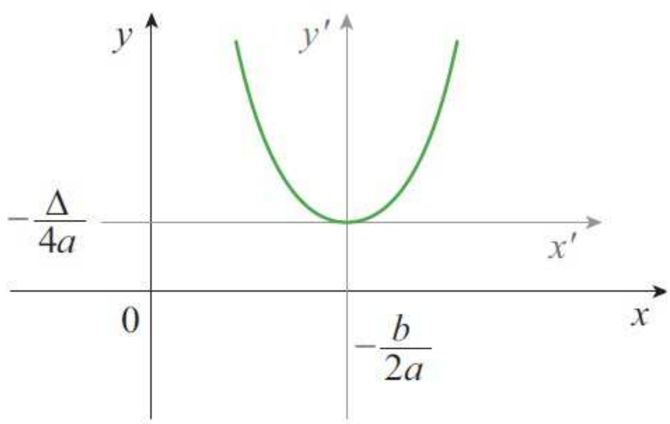
$$y' = a(x')^2,$$

que equivale a uma parábola cujo foco e a reta diretriz no eixo Ox' e Oy' são, respectivamente:

$$F(0,\frac{1}{4a}) \text{ e } r : y = -\frac{1}{4a}.$$

Como mostrado na Figura 2.19.

Figura 2.19: Parábola com foco $F(0,\frac{1}{4a})$ e reta diretriz $r : y = -\frac{1}{4a}$.



Fonte: Bezerra e Ivan (2010).

Desta forma, no sistema $oxoy$, $y = ax^2 + bx + c$ é uma equação da parábola cujo foco é o ponto $F(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta+1}{4a})$ e cuja a reta diretriz é $r : y = \frac{-\Delta-1}{4a}$.

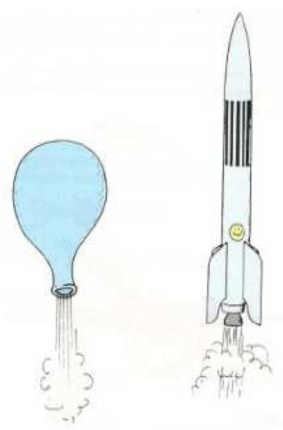
2.3.2 Noções Físicas Sobre o Lançamento de Foguetes

Analisar aspectos de um foguete de garrafa pet é um estudo importante para os alunos, pois envolve vários conceitos físicos tais como trajetória, movimento, força, momento e etc. A participação do aluno no experimento no processo de ensino aprendizagem faz com que ele aprenda a contextualizar o assunto ao perceber a conexão entre matemática e físca, além de estimular a criatividade e a curiosidade por temas da astronomia e astronáutica.

> Os primeiros foguetes que surgiram na humanidade eram de tubos de bambu cheios de uma espécie de pólvora que eram utilizados em festividades religiosas na China. Os chineses foram os primeiros a experimentar tubos cheios de pólvora com arcos para fins militares. Nestes lançamentos, acabaram descobrindo que os tubos contendo pólvora poderiam lançar-se com a impulsão dos gases liberados pela reação Química. Nascia o primeiro foguete. Os foguetes mais desenvolvidos que surgiram, conhecidos como mísseis balísticos, foram destinados para fins militares. Somente na transição do século XIX para o século XX, surgiram os primeiros cientistas que utilizaram os foguetes como forma de propulsor para veículos espaciais para o desenvolvimento da Astronomia. (OLIVEIRA, 2008, p.4).

A respeito de propulsão de foguetes, pode-se explicar com o uso de um balão, como mostra a Figura 2.20. Quando enchemos um balão de ar e soltamos o ar desse balão, o balão se movimentará no sentindo que é contrário ao da saída de ar. No momento em que disparamos um foguete ele funcionará do mesmo modo, pois os foguetes são baseados na terceira lei de Newton (lei da ação e da reação).

Figura 2.20: Princípio do funcionamento de um balão e do foguete.



Fonte: Hewitt 2008.

Os foguetes são projeteis que carregam combustíveis sólidos ou líquidos dentro deles. Sendo que esses combustíveis são descarregados e expelidos para trás, fazendo com que o foguete se movimente para frente. Para um foguete de garrafa pet precisamos de:

- Disparador (base);
- Bomba de ar (com um manômetro);
- Foguete da garrafa pet.

Para se manter um foguete estabilizado é necessário o centro de massa e do centro de pressão. Definimos o centro de pressão como o ponto onde atuam a resultante das forças aerodinâmicas, que atuam no foguete. O ponto de pressão depende do ponto de comprimento da ponta do foguete, do tamanho e formas das aletas (asas do foguete). Já a estabilidade do foguete depende de o centro de pressão ficar abaixo de seu centro de massa, dessa forma o foguete manterá a sua estabilidade.

A ciência que faz os estudos das forças que atuam nos corpos que se deslocam em meios fluidos é chamada aerodinâmica. A aerodinâmica é imprescindível para se construir aviões, edifícios, foguetes, automóveis entre outros. Um corpo que se desloca com uma certa velocidade v em meio fluido sofrerá a ação de uma força que se oporá ao movimento feito pelo corpo. O nome dessa força é força de resistência fluida, e é dada pela Equação 2.14:

$$F_{rf} = k_n v^n, \text{ com } \; n = 1 \text{ ou } n = 2. \tag{2.14}$$

Já o coeficiente de arraste de um corpo é a forma como um corpo se desloca no ar. A área de um corpo e o seu movimento tem relação direta com o seu corpo. Por exemplo se soltarmos uma folha de papel sem ser amassada ela chegara ao chão depois de uma folha que está amassada.

Um outro fator que influencia nos movimentos dos corpos em meios fluidos é a densidade do ar, pois dependendo do local ela oferecerá menor ou maior resistência. A velocidade relativa de um corpo em relação ao fluido influi diretamente na força de resistência do ar. A aceleração da gravidade esta diretamente relacionada com a altitude. Fatos este que podemos observar na Equação 2.15:

$$g = GM/d^2, \text{ onde, } d = h + R. \tag{2.15}$$

Considerando um foguete na superfície da terra sujeito a uma força de gravidade F_{g_0}, calculamos pela Expressão 2.16:

$$F_{g_0} = G\frac{Mm}{R^2} \text{ e } F_{g0} = mg_0 \Rightarrow g_0 = G\frac{M}{R^2}, \tag{2.16}$$

Sendo o g_0 a aceleração da gravidade na superfície da terra; G a constante de gravitação universal, m massa do foguete, M massa do planeta Terra e R raio do planeta Terra. Quando temos a altitude em relação à Terra, o foguete ficará sujeito de uma força gravitacional F_g calculada através da Equação 2.17, onde o único dado diferente das outras formulas é o h, que é a altura do foguete.

$$F_g = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \text{ e } F_g = mg \Rightarrow g = G\frac{M}{(R+h)^2}, \tag{2.17}$$

O raio do planeta Terra será sempre muito maior quando o compararmos a altura do foguete. Essa aproximação nos faz concluir que a intensidade da aceleração da gravidade, em uma h menor que o raio do planeta Terra, é equivalente a sua intensidade na superfície do planeta Terra.

De acordo com Haler (2022), lançar um foguete consiste no envio de um veículo espacial, tripulado ou não, para fora da atmosfera terrestre. Lançamos foguetes artificiais com várias finalidades, dentre elas, levar astronautas ao espaço, reparar instrumentos meteorológicos, exploração espacial para o uso nas telecomunicações, dentre outras. Um veículo com motor jato capaz de levar pessoas e equipamentos até o espaço é uma definição que pode ser dada a um foguete.

Como no espaço não há oxigênio, os foguetes são construídos com motores especiais. Normalmente, os foguetes espaciais usam a sua própria reserva de oxigênio, para causar a combustão para movimentar-se. A maioria dos foguetes usam combustíveis químicos, que podem estar no estado líquido ou sólido. Os combustíveis quando estão no estado sólido usam pó compactado por grandes pressões. O pó mistura-se com oxidantes, que são capazes de liberar grandes quantidades de oxigênio.

Quando os combustíveis são líquidos, há câmaras divisórias onde estão os combustíveis líquidos e os oxidantes, que se misturam durante o processo de ignição.

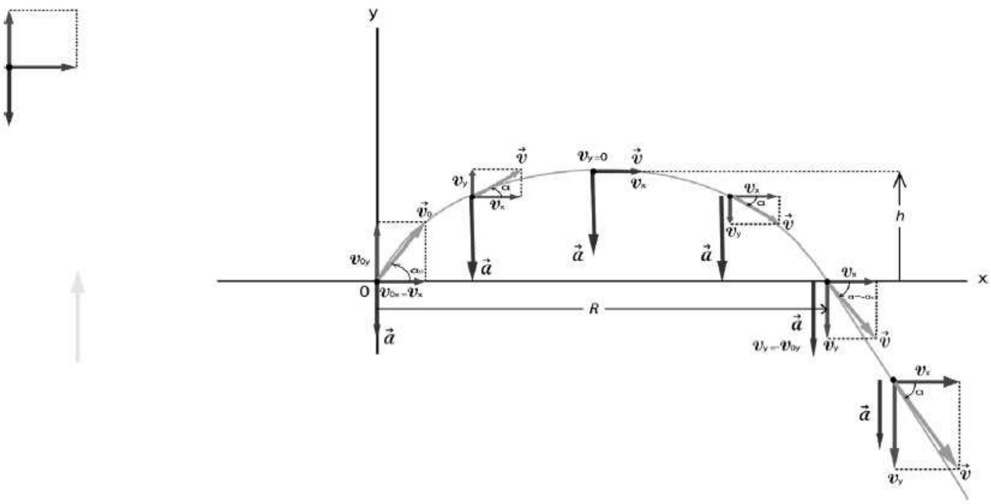
A Figura 2.21, mostra um foguete lançado no espaço:

Figura 2.21: Foguete no espaço

Fonte: Helerbrock (2018).

Como dito anteriormente, o princípio no qual é baseado o lançamento de foguetes é a 3^a Lei de Newton. Funciona com um foguete expelindo para baixo grandes quantidades de jatos de gás aquecido. Conforme a lei da ação e reação, os gases agem empurrando o foguete para o alto. Porém, o aspecto que iremos abordar, trata-se do lançamento oblíquo de foguetes, onde $\overrightarrow{v_0}$ representa a velocidade inicial, e α é o ângulo formado com o eixo x, como mostra a Figura 2.22.

Figura 2.22: Trajetória de um projétil em que R é o alcance horizontal.



Fonte: Sales e Maia (2011).

Quando desprezamos a resistência do ar, o corpo descreve uma tranetória parabólica por causa da força gravitacional exercida pela terra. O movimento oblíquo é resultante da composição de dois movimentos: um na direção horizontal ox e outro na direção vertical

oy. Conforme Bonjorno (2001):

1) O módulo da velocidade vertical $\overrightarrow{vy}$ diminui durante a subida e aumenta na descida.

2) No ponto de altura máxima (h_{max}), o módulo da velocidade no movimento vertical é zero ($v_y = 0$).

3) A distância horizontal entre o ponto de queda do corpo é donominada alcance (X_{max}). Nesse ponto, $y = 0$.

4) A posição do corpo é determinada pelas coordenadas x e y. Por exemplo, $P(x,y)$.

5) A velocidade num dado instante é obtida através da soma vetorial das velocidades vertical e horizontal, isto é, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_{ox}} + \overrightarrow{v_y}$. O vetor $\overrightarrow{v}$ é tangente à tragetória em cada instante.

2.3.3 Descrição do experimento realizado

O trabalho foi realizado em sala de aula, com alunos do 9º ano, da turma 900, no dia 10 de dezembro de 2021. Apresentou-se formas práticas de construção de foguetes utilizando materiais recicláveis, como garrafa pet. A ideia era construir um foguete com materiais fáceis de serem encontrados, seguindo à risca os princípios que tratam da estabilidade em voos de foguetes e da segurança para quem irá lançá-lo.

Materiais utilizados

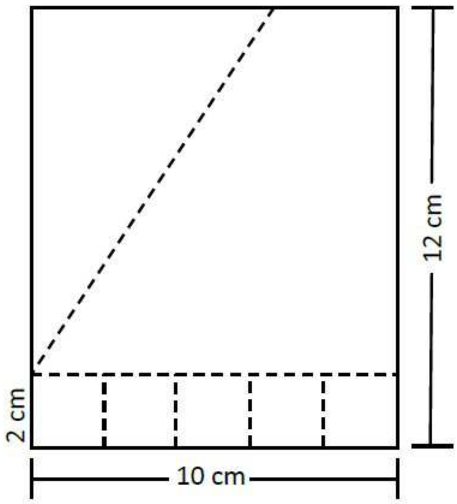
Foram utilizados os seguintes materiais para a realização do experimento:

- Duas garrafas pet de dois litros;
- Estilete e tesoura;
- Régua e caneta marcadora
- Fita adesiva;
- Papelão, cartolina e escancelas;

Montando os foguetes

Os alunos cortaram a parte superior de uma das garrafas, porque esta parte seria o bico do foguete. Colaram com fita adesiva na parte inferior de uma das outras garrafas. Da garrafa que foi cortada, os alunos retiraram da parte central uma tira de 10 cm de largura que foi usada para fazer a saia do foguete. Na Figura 2.23 temos o molde para fazer as asas do foguete.

Figura 2.23: Molde das asas do foguete.



Fonte: Brito (2016)

Com o auxílio da fita adesiva, foram fixadas as aletas na fuselagem do foguete. As aletas fora feitas com escacelas. Seguindo os passos, os alunos construíram os foguetes, como mostram as Figuras 2.24, 2.25, 2.26 e 2.27 :

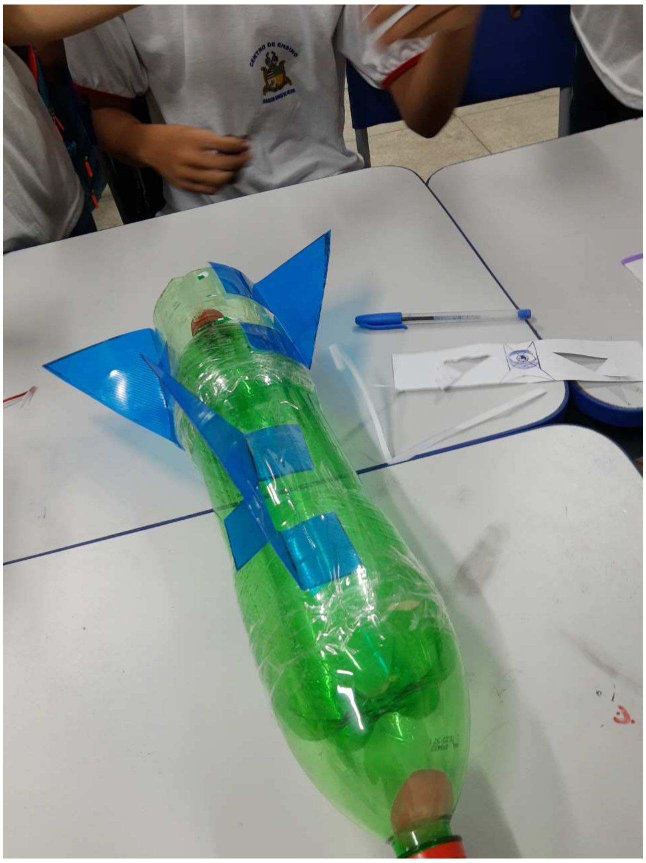
Figura 2.24: Construção de foguete com garrafa pet

Fonte: Autoria própria.

Figura 2.25: Construção de foguete com garrafa pet

Fonte: Autoria própria.

Figura 2.26: Construção de foguete com garrafa pet



Fonte: Autoria própria.

Figura 2.27: Construção de foguete com garrafa pet

Fonte: Autoria própria.

Existem outras formas de se construir um foguete de garrafa pet. A garrafa pet suporta uma pressão de 40 libras por litro em seu interior, fator que nos garante a segurança no lançamento.

Construção da Base

A base de lançamento foi construída de forma a ficar firme, para suportar o peso do foguete. Existem vários formatos de base de lançamento de foguetes pet. O impotante nas bases é considerar o seu funcionamento de gatilho de disparo e possíveis vasamentos.

Materiais utilizados

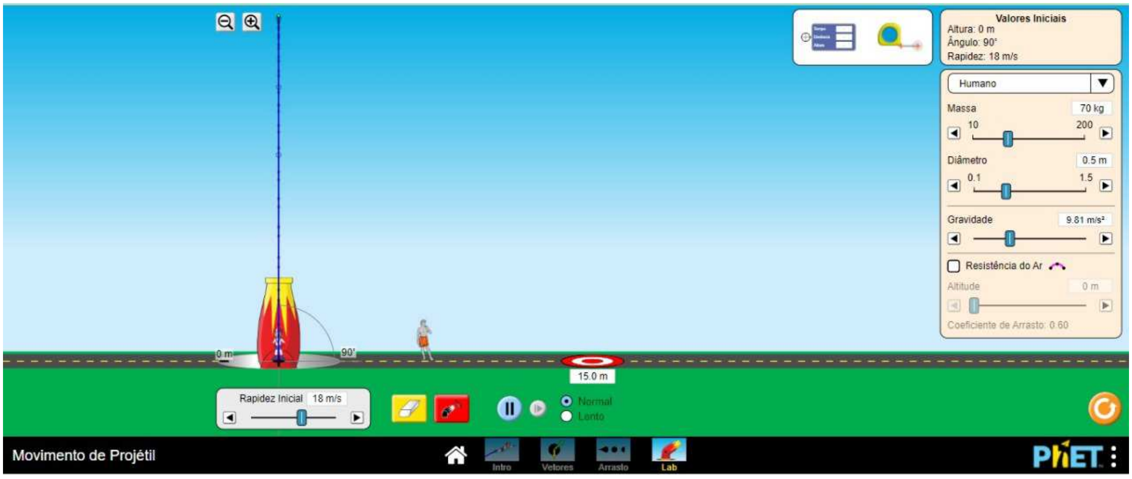
Para a construção da base, foram utilizados:

- “T’s”, joelhos e pedaços de cano;
- Válvula de pneu de bicicleta;
- Taps, luva e cola para cano;
- Registro;

- Fita veda rosca;
- Abraçadeiras de aço e de nylon;
- Régua;
- Isopor;

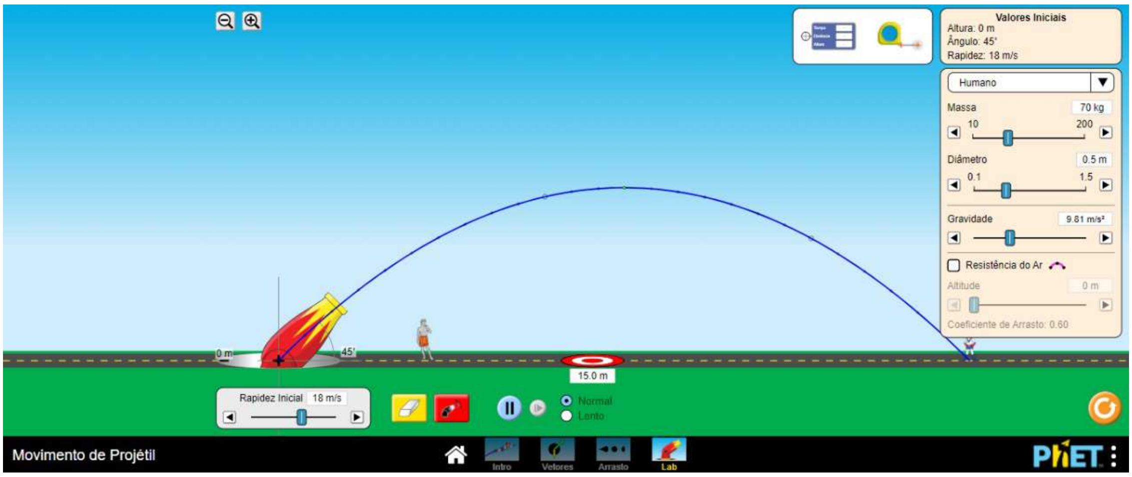
Antes dos alunos começarem a montar a base, utilizaram o aplicativo "phet" para lançamentos oblíquos, e testaram o lançamento para os ângulos 90° e 45° graus, para ver qual lançamento atingiria alcance máximo, como mostra as Figuras 2.28 e 2.29.

Figura 2.28: Lançamento de foguete com ângulo 90° graus.



Fonte: Aplicativo "Phet."

Figura 2.29: Lançamento de foguete com ângulo 45° graus.



Fonte: Aplicativo "Phet."

Os alunos iniciaram a montagem pelo suporte da base, ou seja, a parte da base que fixa no plano, que no caso, é o chão. Para fazer esse suporte, foram utilizados dois pedaços de cano de 40 cm e dois joelhos. Na extremidade principal, foi utilizado um cano de tamanho 30 cm, que é fixado em um T e dois canos de tamanho 8,5 cm, que são fixados em cada uma das abertura do T e que também são fixados nos dois joelhos do suporte da base. Para unir os dois suportes e a extremidade principal, ajustou-se um ângulo de 45°, entre a extremidade principal e o solo e os ajustes finais com o registro e a válvula de pneu. A Figura 2.30 mostra o resultado dessa construção.

Figura 2.30: Base de lançamento de foguete de garrafa pet

Fonte: Aplicativo “Phet.”

O experimento de lançamento de foguetes, fez com que os alunos:

- Relacionassem os assuntos abordados em sala de aula em situações práticas;
- Aplicassem conceitos como simetria e ornamentação das artes;
- Relacionassem conceitos da matemática e física, no lançamento de foguetes de garrafa pet;
- Aprendesse as leis da física aplicáveis em um lançamento de foguete;
- Construíssem um protótico para simular uma situação real;
- Aprendessem conceitos da astronáutica.

Logo após a confecção dos foguetes e bases pelos alunos, realizou-se os testes de lançamentos, onde se verificou a estabildiade dos foguetes de garrafa pet. Realizou-se teste também para se verificar qual a maior distância e a quantidade de combustível que deveria ser usado em cada foguete, como pode ser observado nas Figuras 2.31, 2.32, 2.33 e 2.34.

Figura 2.31: Lançamento de foguete de garrafa pet

Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.32: Lançamento de foguete de garrafa pet

Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.33: Lançamento de foguete de garrafa pet

Fonte: Autoria Própria.

Figura 2.34: Lançamento de foguete de garrafa pet

Fonte: Autoria Própria.

Na Tabela 2.4 estão os resultados do lançamento de quatro equipes. Cada equipe teve três tentativas. O experimento foi realizado no dia 20 de dezembro de 2021.

Tabela 2.4: Distância percorrida pela foguete.

Equipe	**Tentativa** 1	**Tentativa** 2	**Tentativa** 3	**Posição**
1	40m	20	38 m	1° lugar
2	8,0m	42	1 m	3° lugar
3	− − −	20	− − −	4° lugar
4	60 m	− − −	1 m	2° lugar

Fonte: Autoria própria

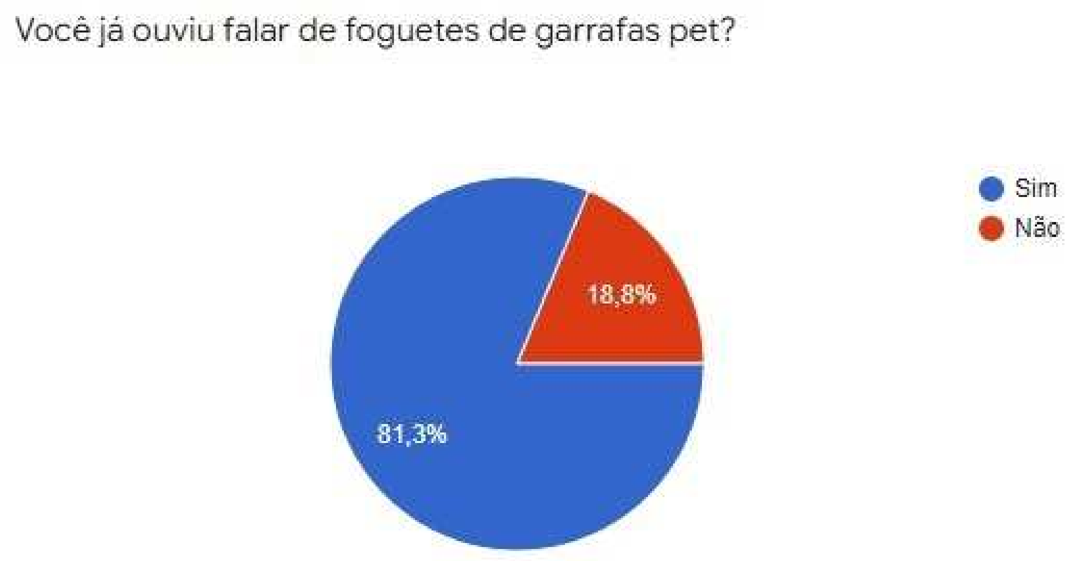
Com a prática desse experimento, pode-se ensinar equações e funções do segundo grau, objetivando o entendimento do aluno e evitando com que o aluno decore conceitos e fórmulas. A construção de cada etapa do experimento serviu para fixar os conceitos, priorizando o raciocínio lógico e aplicando os conteúdos visto em sala de aula.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Foi aplicado um questionário, que está disponivel no Apêndice, para coletar informações acerca do entendimento dos alunos no assunto. A pesquisa foi feita antes e depois do experimento, para comparar os resultados e descobrirmos se o experimento contribuiu para o entendimento do conteúdo. Ao todo, participaram da pesquisa um total de 17 alunos.

Com relação aos foguetes de garrafa pet, fizemos a seguinte pergunta: "Você já ouviu falar sobre foguetes de garrafa pet?". A maioria, cerca de 81,3%, respondeu que já haviam ouvido falar, como mostra a Figura 3.1.

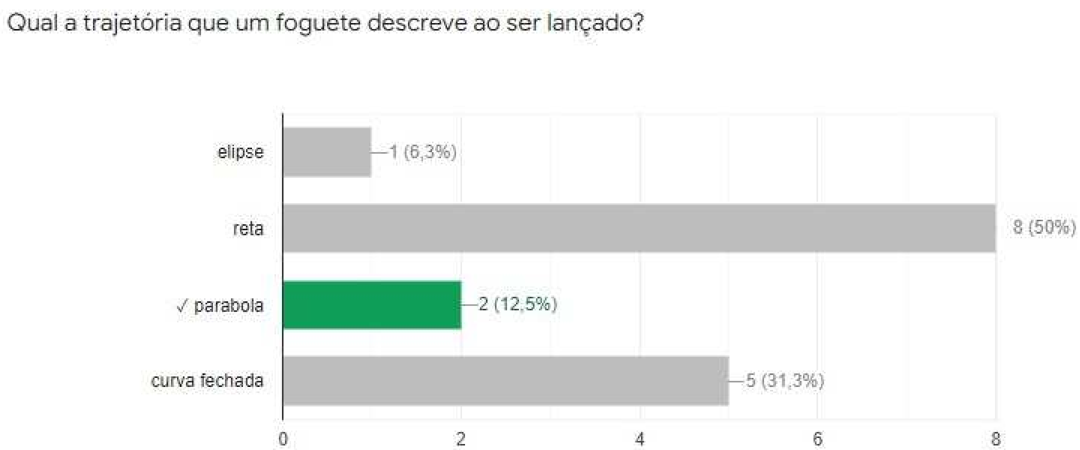
Figura 3.1: Percentual de alunos que já ouviram falar sobre foguetes de garrafa pet



Fonte: Autoria Própria

Quando perguntados, antes do experimento, sobre a trajetória que o foguete percorria, apenas 12,5% sabiam que se tratava de uma parábola, (Figura 3.2) mesmo após esse fato ter sido falado inúmeras vezes em sala de aula. O que pode ter ocasionado o baixo percentual de acertos, talvez tenha sido falta de atenção ao preencher o formulário. Um outro possível motivo pode ter sido o tempo, ou também o fato de, no começo do experimento, durante as aulas teóricas, os alunos estavam agitados, e isso fez com que houvesse um período de adaptação com eles.

Figura 3.2: Percentual de alunos que sabem qual é a trajétoria do foguete.

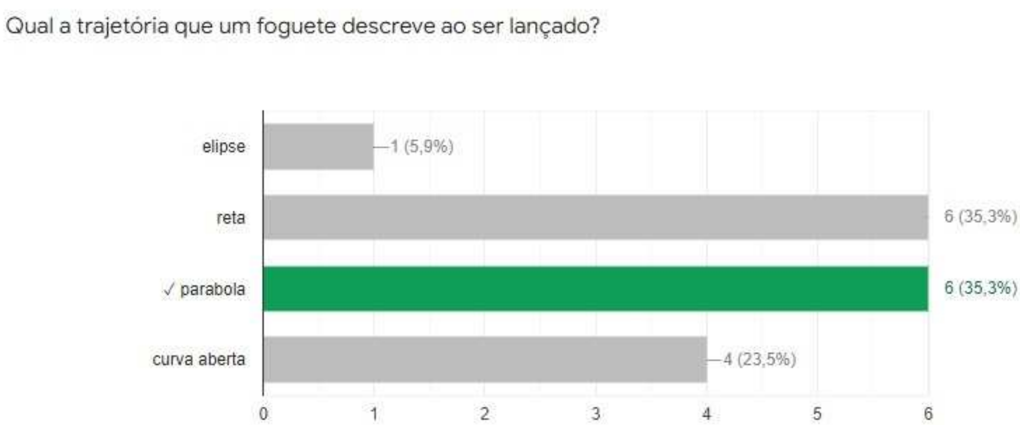


]

Fonte: Autoria Própria

Após o experimento, esse número aumentou para 35,3% dos alunos que agora sabem se tratar de uma parábola. Um dado que revela uma melhora em relação a esse conceito, como é mostrado na Figura 3.3:

Figura 3.3: Percentual de alunos que sabem qual é a trajétoria do foguete

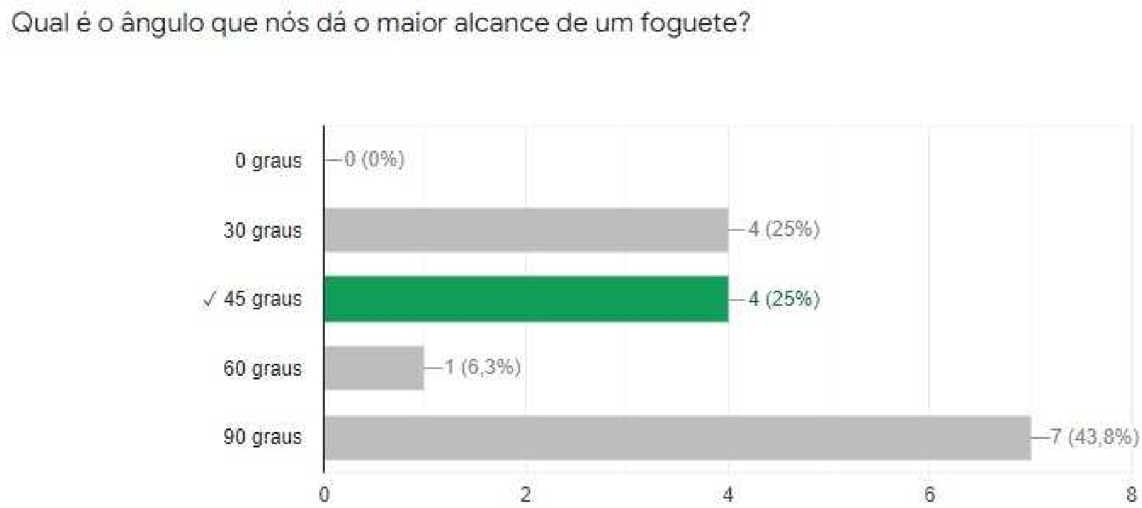


Fonte: Autoria Própria.

Houve também muitos alunos com enormes dificuldades e falta de interresse pela matemática, mas que durante a execução do projeto mudaram as suas opiniões. Claro que se imaginou que em algum ponto tivessem dificuldades, mas isso foi um aspecto que precisava reforçar a mais com eles, pois pensávamos que isso havia ficado claro. Percebendo que eles tiveram dificuldades, vimos o quanto é fundamental durante a execução de um experimento aplicar os questionários.

Quando perguntados sobre qual o ângulo dá o maior alcance no lançamento de um foguete, antes do experimento, cerca de 43,8% dos alunos achavam que era o ângulo de 90°, como mostra a Figura 3.4.

Figura 3.4: Percentual de alunos que sabem qual é o ângulo que dá o maior alcance no lançamento de foguete.



Fonte: Autoria Própria.

Após o experimento, cerca de 76,5% dos alunos constataram que na verdade, o ângulo de 45° graus era o ângulo que dava o maior alcance no lançamento do foguete, o que revela uma aprendizagem significativa por parte dos alunos, como pode ser observado na Figura 3.5. Esse fato demonstra o quanto pode ser efetivo o uso de material concreto para o aprendizado dos alunos. É importante ressaltarq que entendemos que não é possível este uso em todas as aulas e em todos os assuntos trabalhados em sala de aula, no entanto, o uso esporádico para assuntos estratégicos pode ajudar muito o professor no processo de ensino e aprendizagem.

Figura 3.5: Percentual de alunos que sabem qual é o ângulo que dá o maior alcance no lançamento de foguete.

Fonte: Autoria Própria

Os demais resultados da nossa pesquisa estão nos gráficos 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 e **??** abaixo. O que podemos perceber deles é que grande parte dos alunos nunca havia trabalhado com experimentos de matemática, e que a aceitação e a aprendizagem foram significativas.

Figura 3.6: Você conhece a história do tangram?

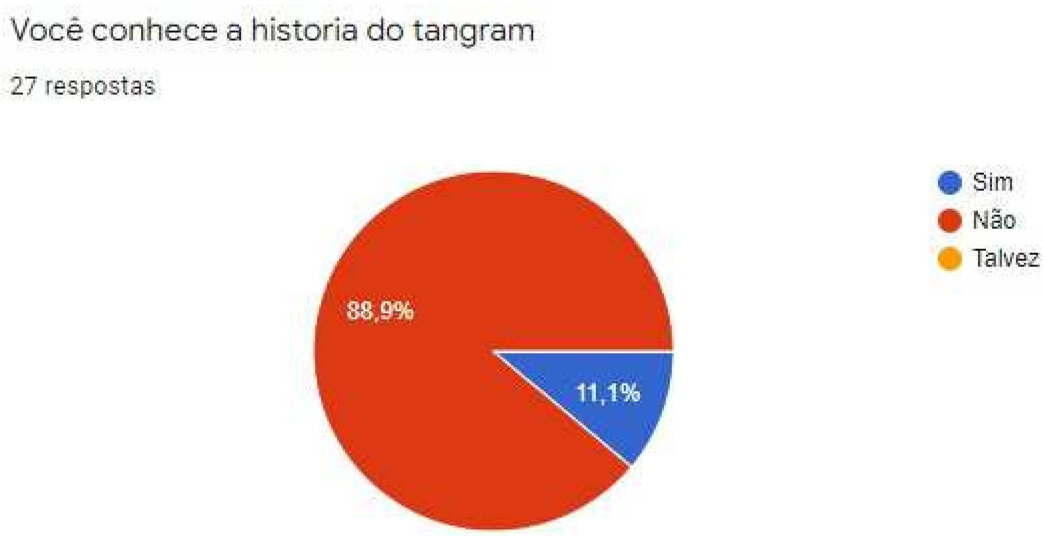


Figura 3.7: Algum professor de matemática já falou antes para você sobre o tangram?

Figura 3.8: Você sabe quais as formas geométricas podemos formar com o tangram?

Figura 3.9: Você sabe resolver uma torre de hanoi para três discos?

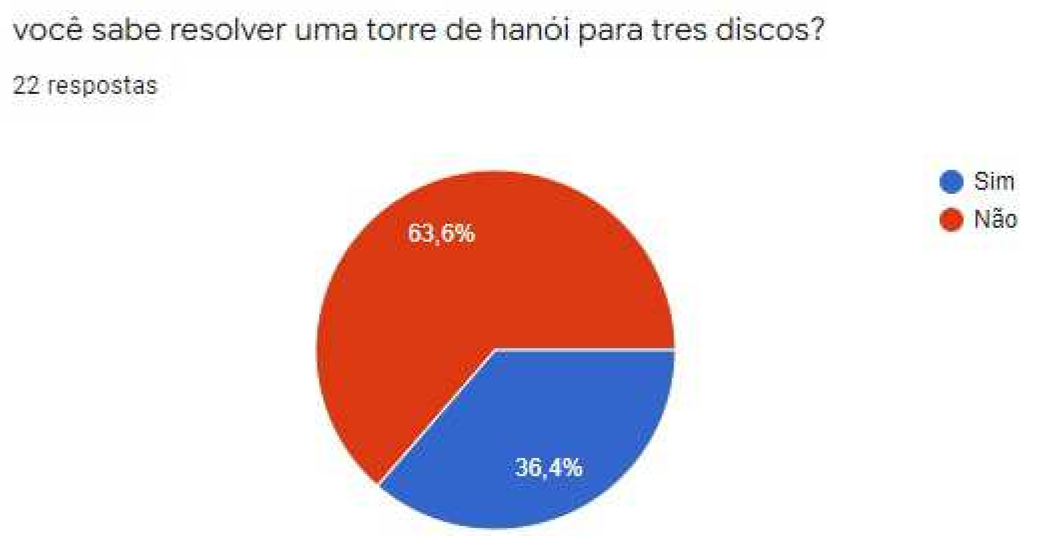
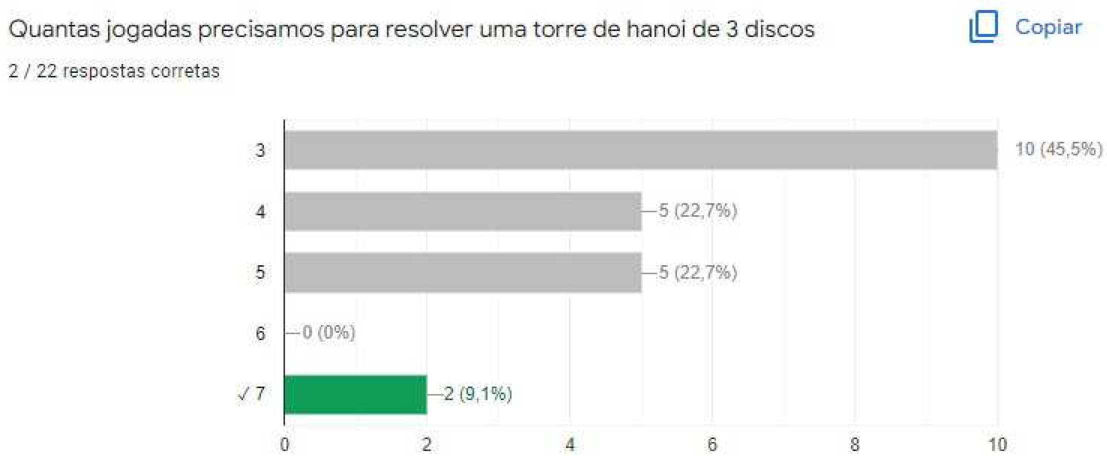


Figura 3.10: Quantas jogadas precimos para resolver uma torre de 3 discos?



4 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou o uso de laboratório de matemática através da construção de materiais didáticos que auxiliaram no processo de aprendizagem do aluno. Tomando por base o que propõe a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no que se refere ao letramento matemático, aplicamos uma linguagem mais acessível aos alunos e isso melhorou bastante o processo de ensino e aprendizagem da discipina a matemática.

Concluimos, então, que as práticas contribuiram para a formalização do conhecimento matemático. Ao trabalharmos com a definição de laboratório de matemática em forma de experimentos, conseguimos suprir a necessidade existente que o aluno tem de relacionar o dia a dia com a matemática. Criamos, assim, um ambiente próprio para a realização de experiências que enfatizam a aprendizagem através do conhecimento científico.

Ressaltamos que a construção de materiais didáticos visou a interdisciplinariedade, uma vez que envolveu outras áreas do conhecimento como as disciplinas de artes, física, astronáutica e engenharia. E na matemática, conseguimos trabalhar com efetividade conteúdos como geometria, equações do segundo grau, gráfico de uma função quadrática, potências e raciocínio lógico.

Utilizamos como ferramentas de aprendizagem a Torre de Hanói, Tangram e Foguete de Garrafa Pet, que foram construídos com o uso de materiais recicláveis pelos próprios alunos, o que possibilitou aos mesmos a reflexão sobre o desenvolvimento das atividades e explanação dos conteúdos de uma forma mais prática.

Todo o processo resultou também na motivação dos alunos, que passaram a estudar a disciplina com mais vontade e a trabalharem em equipe em nome de um objetivo em comum. Juntos eles puderam verificar, na prática, resultados matemáticos e validar a teoria que foi exposta em sala de aula.

De maneira geral, notamos que as turmas apresentaram maior interesse pela disciplina, que por sua vez melhorou o entendimento dos assuntos ministrados e isso resultou em melhores resultados nas avaliações. E durante o processo notamos que o despertar da curiosidade dos alunos sobre profissões que envolvem a a área de matemática e ciências.

Nesse sentido, afirmamos que o laboratório de matemática contribuiu positivamente para o desenvolvimento do ensino da matemática na escola pois permitiu que o ensino da matemática se desse de uma forma mais dinâmica. O uso de materiais didáticos enriqueceu a experiência docente, melhorou o desempenho dos alunos ao mesmo tempo que ajudou na conscientização do uso de materiais recicláveis.

O experimento proporcionou aos alunos uma atividade diferente do que normalmente é feito em sala de aula, pois pode-se trabalhar assuntos não só da matemática, como de outras disciplinas, como a física, artes e astronáutica. De acordo com Neves, Caballero e Moreira (2006), o trabalho experimental tem suma importância na aprendizagem de ciências, amplamente aceita entre a comunidade científica e pelos professores como metodologia de ensino. Através deste experimento, pudemos abordar o conteúdo de equações do segundo grau, por meio do completamento de quadrados, fórmula canônica e o método da "fórmula de bháskara". Apresentamos também os conceitos de função quadrática, onde estudamos forma canônica, valor máximo e valor mínimo, zeros da função, forma fatorada, análise de sinais e gráfico.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, M, S, R. **Utilizando o Tangram para introduzir conteúdos matemáticos.** 2011.53f. Monografia (Especialização em ensino de Matemática Básica) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologias, 2011.

ALMEIDA, C. S. de. **Dificuldades de aprendizagem em Matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. Universidade Católica de Brasília, Brasília, 1º semestre de 2006. Disponível em: https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12006/CinthiaSoaresdeAlmeida.pdf. Acesso em: 01 de jan. de 2022.

BEZERRA, L. H; IVAN, P. C. S. **Geometria Analítica**. 2.ed. Florianópolis:UFSC/EAD/CED/CFM, 2010. 170p.

BONJORNO, R, A. **Física completa**. vol. único, 2 ed. São Paulo: FTD, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. **Base Nacional Comum Curricular**, Brasília, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação, (1997). **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.** Brasília, MEC/SEF.

BRITO, L. L. **Laboratório de matemática no museu: Usos e perspectivas.** 2016. 134 f. Dissertação (Mestrado acadêmico em ensino de ciencias e educação matemática.) - Universidade Estadual da Paraíba, 2016.

BUENO, S.F. **Minidicionário da Língua Portuguesa**. 2.ed. São Paulo: FTD, 2007.

CUNHA, C.P. A impotância da matemática no cotidiano. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento,** 2.ed. Ano 2, V.1, p. 641 – 650, Jul. 2017. Disponível em: https://www:nucleodoconhecimento:com:br/matematica/matematicano-cotidiano. Acesso em: 19 de set. de 2021.

FORNARI, E, L, S. **Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor PDE.** v.2. Paraná,2014. Disponível em:http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes-pde/2014/2014-unicentro-mat-pdp-elaine-lima-da-silva-forn ari.pdf. Acesso em: 04 de maio de 2022.

LIMA, E. L. **A matemática do ensino médio** v. 1, 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

Tipos de Tangram: Quais os tipos de Tangram existentes? Tangram oval, tangram coração, tangram triangular etc. **Espaço Educar**. Disponível em:https://www.espacoeducar.net/2016 /05/tipos-de-tangram-quais-os-tipos-de.html. Acesso em: 04 de de maio de 2022.

HARTUNG, G.E; MEIRELES, R. A Geometria do Tangram. **Portal do Professor**, 2010. Disponível em: http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25696. Acesso em: 04 de maio de 2022.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra.** v.1, 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

SALES, G, L; MAIA, M.C. **Física Básica I**. Fortaleza, 2011.

HELER, B. R. Como funciona o lançameto de um foguete? **Brasil Escola**, 2022. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/como-funciona-o-lancamento-de-um-foguete.html. Acesso em: 14 de abr. de 2022.

HELERBROCK, R. Como funciona o lançamento de um foguete. **Brasil Escola.** Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/como-funciona-o-lancamento-de-um-foguete.htm. Acesso em: 04 de maio de 2022.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, São Paulo: Autores associados, 2006.

NEVES, M, S; CABALLERO, C; MOREIRA, M, A. **Repensando o papel do trabalho experimental na aprendizagem da Física em sala de aula- um estudo exploratório**. Investigações no Ensino de Ciências, vol. 11, n.3, $p.383-401$, 2006. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/490/292. Acesso em: 16 de abr. de 2022.

OLIVEIRA, E, P. **As diversas maneiras de explorar a matemática através do jogo de Torres de Hanói.** 2019. 69 f. Dissertação (Mestrado) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemtica em Rede Nacional, Mestrado Profissional - PROFMAT. Universidade Federal da Paraíba, Natal, 2019.

OLIVEIRA, J. S. B; ALVES, A. X; NEVES, S. S. M. **História da Matemática:** contribuições e descobertas para o ensino-aprendizagem de matemática. Belém: SBEM, 2008.

OLIVEIRA, M. A. S. **Os aspectos físicos e matemáticos do lançamento do foguete de garrafa PET**. 2008. 29f. TCC (Graduação) - Curso de Física, Universidade Católica de Brasília, Brasília, 2008. Disponível em: http://wp.ufpel.edu.br/pibidfisica/files/2013/03/OS-ASPECTOS-FÍSICOS-EMATEMÁTICOS-DO-LANÇAMENTO-DO-FOGUETE-DE-GAR

RAFA-PET.pdf. Acesso em: 05 de maio de 2022.

Pisa 2018 revela baixo desempenho escolar em Leitura, Matemática e Ciências no Brasil. **Ministério da Educação**, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/ultimas-noticias/211 − 218175739/83191-pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil Acesso em: 26 de mar. de 2022.

Movimento de projétil. **Phet Interactive Simulations**. Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt-BR/simulations/projectile-motion. Acesso em: 04 de maio de 2022.

PONTES, D, F, N; LOPES, S, C, C. Uso do Tangram como material lúdico em sala de aula. **Educação Matemática na Comtemporaneidade: desafios e possibilidades,** p.1 − 9, jul. 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/7241-4187-ID.pdf. Acesso em : 04 de maio de 2022.

QEDu é atualizado com dados do Saeb 2019. **Fundação Lemann**, 2021. Disponível em: https://fundacaolemann.org.br/noticias/qedu-e-atualizado-com-dados-do-saeb-2019 #:%E2%88%BC:text=Nos%20Anos%20Finais%2C%20os%20dados,%25%20e% 2015 %25%20em%202017. Acesso em: 26 de mar. de 2022.

MELLO, R. M. Tangram. **Pb Works**, 2012. Disponível em: http://estagiocewk.pbworks.com /w/page/36489535/Tangram. Acesso em: 04 de maio de 2022.

RUFINO, E. O. **Torre de Hanoi: jogando com a Matemática**. Maio 2011. Disponível em: https://pt.slideshare.net/eellzziimmaarr/torre-de-hanoi-jogando-com-a-matemtica. Acesso em: 03 de abr. de 2022.

SILVA, J.A.F. **Refletindo sobre as Dificuldades de Aprendizagem na Matemática:** Algumas Considerações, Brasília, set. 2005. Disponível em: http://www.ucb.br/textos2/732/2SemestreDe2005/ . Acesso em : 01 de maio de 2022.

SILVA, R. A. **O uso de material didático de manipulação no cotidiano da sala de aula de matemática.** 2012. 125 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, Campina Grande, 2012.

SOUZA, T.D. Unicef: Oito milhões de estudantes brasileiros têm fracasso escolar. **Correio Braziliense**, 2021. Disponível em: https://www.correiobraziliense.com.br/euestudante/educacao-basica/2021/01/4903077-unicef-8milhoes-de-estudantes-brasileiros-tem-fracasso-escolar.html. Acesso em: 26 de mar. de 2022.

STARREPRAVO, A, R. **Jogando com a matemática: números e operações.** Curitiba: Aymará, 2009.

Torres de Hanói. **Khan Academy**,2019. Disponível em: https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi. Acesso em: 04 de maio de 2022.

VYGOTSKY, L. **A formação social da mente: Interação entre aprendizado e desenvolvimento.** 7.ed. São Paulo: [s.n.], 2006. Disponível em: www.egov:ufsc:br/portal/sites/default/files/vygotsky-a-formac3a7c3a3o-social-da-mente:pdf. Acesso em: 08 de jan. de 2022.

YARED, I. **O que é interdisciplinariedade?** In: Ivani Fazenda (org). São Paulo: Cortez, 2008.

APÊNDICES

QUESTIONÁRIOS UTILIZADOS COM OS ALUNOS

IDENTIFICAÇÃO

*Obrigatório

1. NOME COMPLETO *

QUESTIONARIO 1

2. Você conhece o tangram ? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

3. Você conhece a historia do tangram *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

4. Você sabe da onde veio o tangram ? *

Marcar apenas uma oval.

- brasil
- japão
- koreia
- china

IDENTIFICAÇÃO

*Obrigatório

1. NOME COMPLETO *

QUESTIONARIO 2

2. Você gostou do jogo de tangram *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

3. Você acha que conseguiu aprender alguma coisa com o jogo *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

4. Algum professor do fundamental 2 trabalhou com jogos matematicos com voce? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

IDENTIFICAÇÃO

*Obrigatório

1. NOME COMPLETO *

QUESTIONÁRIO 3

2. você conhece a torre de hanoi? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

3. você conhece a história da torre de hanoi? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

4. você gostaria de conhecer a torre de hanói? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

IDENTIFICAÇÃO

*Obrigatório

1. NOME COMPLETO *

QUESTIONÁRIO 4

2. Algum professor do fundamental 2 trabalhou jogos de matematica com voces antes? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não
- Talvez

3. Você sabe resolver uma torre de hanói para tres discos? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

4. Quantas jogadas precisamos para resolver uma torre de hanoi de 3 discos *

Marcar apenas uma oval.

- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

IDENTIFICAÇÃO

*Obrigatório

1. Nome completo *

QUESTIONÁRIO 6

2. Você já ouviu falar de foguetes de garrafas pet? *

Marcar apenas uma oval.

- Sim
- Não

3. Você sabe quais os combustíveis que podemos usar em foguetes de garrafas pets? *

Marcar apenas uma oval.

- sim
- não

4. Qual a trajetória que um foguete descreve ao ser lançado? *

Marcar apenas uma oval.

- elipse
- reta
- parabola
- curva aberta