

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
CENTRO DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GUSTAVO HENRIQUE COLINS MARQUES

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS E A EQUAÇÃO DO CALOR

SÃO LUÍS – MA
2022

GUSTAVO HENRIQUE COLINS MARQUES

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS E A EQUAÇÃO DO CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Educação, Ciências Exatas e Naturais da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Sandra Imaculada Moreira Neto

Marques, Gustavo Henrique Colins.

Separação de variáveis e a equação do calor / Gustavo Henrique Colins Marques. – São Luís, 2022.

56 f

Monografia (Graduação) - Curso de Matemática Licenciatura, Universidade Estadual do Maranhão, 2022.

Orientadora: Profa. Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto.

1.Equação do calor. 2.Separação de variáveis. 3.Equações diferenciais parciais. I.Título.

CDU: 517.95

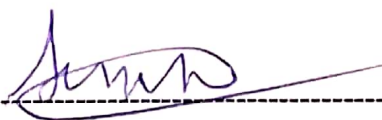
GUSTAVO HENRIQUE COLINS MARQUES

SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS E A EQUAÇÃO DO CALOR

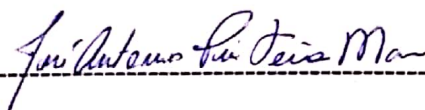
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática do Centro de Educação, Ciências Exatas e Naturais da Universidade Estadual do Maranhão, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 18 / 08 / 2022 Horário: 14:00

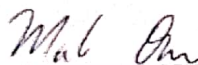
BANCA EXAMINADORA



Prof.^a Dr.^a. Sandra Imaculada Moreira Neto (Orientadora)
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA



Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Maranhão
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA



Prof. Dr. Marlon Cesar Santos Oliveira
Universidade Estadual do Maranhão - UEMA

*"Dedico este trabalho a minha mãe,
Conceição de Maria Castelo Branco Colins".*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus, pela vida, pela saúde, pelas bênçãos que ele vem realizando na minha vida. A minha família, em especial a minha mãe Conceição de Maria e minha madrinha Marinalva Colins pelo amor incondicional, pelos incentivos, pelas preocupações que tiveram a respeito de meus trabalhos, pelas condições de estudos que me proporcionaram, enfim por tudo.

Agradeço a todo corpo docente do curso de matemática que contribuíram na minha jornada acadêmica. Em particular gostaria de agradecer a minha orientadora Prof.^a Dra. Sandra Imaculada Moreira Neto pelos ensinamentos, por compartilhar um pouco de sua experiência e sabedoria, por tirar tantas dúvidas e pelos conselhos de vida acadêmica que levarei para vida.

Agradeço também aos membros da banca examinadora pelo interesse e disponibilidade.

Enfim gostaria de agradecer a todos que participaram diretamente e indiretamente da minha trajetória acadêmica.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo apresentar o método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais através de uma aplicação na equação do calor. Para isso abordamos alguns tópicos relacionados à análise no \mathbf{R}^n , álgebra linear e séries de Fourier. Além disso utilizamos o *software* Geogebra como facilitador na representação gráfica da série de Fourier e para a representação gráfica do comportamento da solução da equação do calor em uma barra finita.

Palavras Chaves: Equação do calor. Separação de variáveis. Equações diferenciais parciais.

Abstract

The present work aims to present the method of separating variables for partial differential equations through an application in the heat equation. For that we approach some topics related to the analysis in \mathbf{R}^n , linear algebra and Fourier series. In addition, we use the Geogebra software as a facilitator in the graphic representation of the Fourier series and for the graphic representation of the behavior of the solution of the heat equation.

Key Words: Heat equation. Separation of variables. Partial differential equations.

Lista de Figuras

1.1	Aproximação de f para $k = 1$	22
1.2	Aproximação de f para $k = 10$	23
1.3	Aproximação de f para $k = 1$	23
1.4	Aproximação de f para $k = 20$	24
1.5	Aproximação de f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$ para $k = 1$	25
1.6	Aproximação de f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$ para $k = 6$	25
1.7	Aproximação de f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$ para $k = 28$	26
1.8	Aproximação de f no ponto de descontinuidade $x = 0$	26
2.1	Interpretação geométrica do problema	37
2.2	Interpretação geométrica do problema quando $t = 200$	38
2.3	Interpretação geométrica do problema quando $t \rightarrow \infty$	39

Sumário

Introdução	1
1 Noções Preliminares	3
1.1 Alguns Resultados de Análise	3
1.2 Alguns Resultados de Álgebra Linear	5
1.3 Noções Gerais de Equações Diferenciais Parciais	11
1.4 Alguns Resultados de Séries de Fourier	19
2 Separação de Variáveis	30
2.1 O Método de Separação de Variáveis	30
3 A Equação do Calor	40
3.1 De Volta ao Problema de Transmissão de Calor	40
Conclusão	45
Referências Bibliográficas	46

Introdução

Em matemática, existe um método chamado de separação de variáveis que resolve algumas equações diferenciais, ele permite reescrever a equação de tal forma que possamos separar as variáveis em lados opostos da equação. Em particular será abordado ao longo deste trabalho o método de separação de variáveis para equações do calor, onde aliás este método também é conhecido como método de Fourier.

Segundo Carslaw (1921) esta teoria foi desenvolvida no século XVIII (por volta de 1750), após as primeiras tentativas de resolver o problema de vibração de uma corda, hoje conhecida como equação da onda unidimensional, onde intuitivamente a ideia era decompor funções quaisquer em funções trigonométricas simples, o que causou grande movimentação no cenário matemático. A expressão obtida

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \cos(nct),$$

por Daniel Bernoulli (1700-1782), em 1723, como solução para o problema de vibração da corda. De acordo com Figueiredo (2014) as primeiras tentativas de resolver o problema foram realizadas por Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), em 1747 e Leonhard Euler (1707-1783), em 1748 e todos chegaram à conclusão que

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct),$$

seria a solução do problema. Já em 1759 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) mostrou que a solução da equação da onda era dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y) \cos(n\pi ct)] f(y) dy \\ &+ \frac{2}{c\pi} \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi y) \operatorname{sen}(n\pi ct)] g(y) dy, \end{aligned}$$

onde temos que a posição inicial é dada por $f(x)$; o comprimento da corda é 1 e a velocidade inicial dada por $g(x)$. Vale ressaltar que Euler também já tinha previsto essa análise, no entanto o mesmo não especificou os coeficientes das séries acima.

Foi então que em 1811, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em sua *Théorie mathématique de la chaleur* (Teoria Matemática de Condução do Calor) determina tais coeficientes que logo ficaram conhecidos como coeficientes de Euler-Fourier.

Segundo Eves (2011), Jean Baptiste Joseph Fourier foi um notável Matemático e Físico francês, nascido no ano de 1768 em Auxerre, comuna francesa localizada no nordeste do país. Órfão de pai e mãe ainda quando criança, foi internado e educado em uma Escola Militar dirigida por beneditinos. Apoiou fortemente a causa da Revolução Francesa, de modo que ajudou a promovê-la, recebendo então como recompensa uma cadeira na recém fundada Escola Politécnica Francesa. Tempos depois, acabou renunciando ao cargo para poder acompanhar Napoleão Bonaparte e Gaspar Monge a uma expedição ao Egito. Estando lá, foi indicado Governador do Baixo Egito, retornando à França por volta do ano de 1801, após as vitórias britânicas e a rendição francesa. Começou então suas experiências com o calor onde deu início ao seu trabalho *Théorie analytique de la chaleur* em Grenoble em 1807 e completou-a em Paris em 1822. Fourier afirmou que qualquer função (contínua ou descontínua) de uma variável $f(x)$ poderia ser representada por uma série da forma:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

conhecida na época de série trigonométrica, hoje conhecida como série de Fourier, onde foram expressos na obra os coeficientes

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Embora o objetivo inicial de Fourier era resolver a equação do calor, após o método ser aperfeiçoado, hoje ele é utilizado para resolver diversos problemas físicos e matemáticos e é extremamente importante nas áreas de engenharia elétrica, acústica, óptica, processamento de sinais entre outros. Feita essa análise histórica, apresentaremos a seguir a disposição geral desse trabalho.

Apresentamos no Capítulo 1, alguns resultados preliminares relacionados aos tópicos de análise no \mathbf{R}^n , álgebra linear, equações diferenciais parciais e séries de Fourier que são essenciais para o estudo dos capítulos posteriores.

No Capítulo 2, aplicamos o método de separação de variáveis na resolução da equação do calor, onde durante a aplicação do método usamos diversos resultados vistos no Capítulo 1. Ainda nesse capítulo utilizamos o *software* GeoGebra para representação gráfica do comportamento da solução da equação do calor.

Para finalizar, no Capítulo 3, fazemos o estudo da convergência e unicidade da solução da equação do calor, utilizando para isso teoremas de convergência da série de Fourier e integrais de energia.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Apresentaremos inicialmente alguns conceitos básicos sobre análise no \mathbb{R}^n relacionados à terminologias, notações e algumas definições que serão de grande importância no decorrer deste trabalho. Além disso, mostraremos alguns resultados de Álgebra linear, Equações diferenciais parciais e Séries de Fourier. Vale ressaltar que não iremos nos aprofundar nos resultados deste capítulo. Daremos ênfase apenas as partes que servirão como base para os próximos capítulos. Para maiores detalhes sugerimos as referências (IÓRIO, 2005), (FIGUEIREDO, 1977) e (LIMA, 2009).

1.1 Alguns Resultados de Análise

Daremos início introduzindo algumas terminologias, notações e apresentando algumas definições. Vamos denotar o conjunto dos números inteiros por \mathbb{Z} , o conjunto dos números complexos por \mathbb{C} e consideraremos o conjunto dos números naturais como sendo

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}.$$

O espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n é o produto cartesiano de n fatores iguais a \mathbb{R} , isto é $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Assim seus elementos são sequências (ou listas) de n termos reais $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ e para cada $i = 1, 2, \dots, n$ o termo x_i é dito a i -ésima coordenada de x . Dados dois pontos (ou vetores) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ em \mathbb{R}^n a distância entre x e y é dada por

$$|x - y| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Definição 1.1.1. Chamaremos o conjunto de todos os pontos a uma distância menor do que $r > 0$ de um ponto fixo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ de bola aberta centrada em x_0 de raio r e denotaremos por $B(x_0, r)$, ou seja,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}.$$

Analogamente, a bola fechada centrada em x_0 de raio r é o conjunto $B[x_0, r]$ dado por

$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}.$$

Definição 1.1.2. Dizemos que um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, dado qualquer $x_0 \in \Omega$, existe uma bola aberta centrada em x_0 inteiramente contida em Ω . Por outro lado, dizemos que um subconjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se seu complementar é aberto, isto é, se

$$\mathbb{R}^n - F = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin F\}$$

é aberto.

Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que o fecho de A , denotado por \bar{A} , é o menor conjunto fechado que o contém, enquanto que o interior de A , denotado por $\text{int}(A)$ é o maior conjunto aberto contido em A e para finalizarmos dizemos que o bordo ou fronteira de A , denotado por ∂A , é

$$\partial A = \{x \in \bar{A} : x \notin \text{int}(A)\}.$$

Definição 1.1.3. Uma função f é dita seccionalmente contínua em $[a, b]$ se existir uma partição $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ do intervalo $[a, b]$ tal que f seja contínua em cada subintervalo (x_j, x_{j+1}) e que $f(x)$ tenda a um limite finito quando $x \in (x_j, x_{j+1})$ tende a x_j ou a x_{j+1} , $0 \leq j \leq n - 1$.

A seguir apresentaremos alguns resultados relacionados a convergência que serão de grande relevância para os próximos capítulos. Maiores detalhes as provas dos teoremas podem ser encontrada na referência [9].

Definição 1.1.4. Diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge pontualmente em I se para cada x_0 fixado no intervalo I a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge. Ou equivalentemente, dados $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$ existe um número N , dependendo de ε e x_0 tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x_0) \right| < \varepsilon$$

para todo $n < m$, com $n \geq N$, ou ainda, quando a sequência das somas parciais converge.

Definição 1.1.5. Diremos também que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente quando, dado $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $N(\varepsilon)$, que não depende de x , tal que

$$\left| \sum_{j=n}^m f_j(x) \right| < \varepsilon$$

para todo $m > n \geq N$, ou equivalentemente, quando a sequência das somas parciais converge.

Observação 1.1.1. Dada uma sequência (f_n) de funções, a partir dela formamos uma nova sequência (s_n) , onde

$$s_1 = f_1, \quad s_2 = f_1 + f_2, \dots, \quad s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n.$$

As funções s_n chamam-se as reduzidas ou somas parciais da série $\sum f_n$ e (s_n) a sequência das somas parciais da $\sum f_n$.

Teorema 1.1.1. Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ então f é integrável e

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Noutras palavras: $\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$.

Teorema 1.1.2. (Derivação termo a termo) Se cada $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , se $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente em $[a, b]$ e se, para algum $c \in [a, b]$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(c)$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $(\sum_{n=1}^{\infty} f_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$.

Teorema 1.1.3. (Teste M de Weierstrass) Seja $I \subset \mathbb{R}$ e $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, Suponhamos que existam números $M_n > 0$ tais que $|f_n(x)| \leq M_n$ para todo $x \in I$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge. Então a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente e absolutamente em I .

1.2 Alguns Resultados de Álgebra Linear

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados de álgebra linear que serão fundamentais no decorrer deste trabalho. Utilizamos nesta seção as referências (IÓRIO, 2005) e (HOFFMAN, 1971).

Definição 1.2.1. Um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} é um conjunto V , cujos elementos são chamados de vetores, e um par de operações:

$$\begin{aligned} \text{adição: } & + \quad x \in V, \quad y \in V \Rightarrow x + y \in V \\ \text{multiplicação por escalares: } & \cdot \quad \alpha \in \mathbb{K}, \quad x \in V \Rightarrow \alpha \cdot x \in V, \end{aligned}$$

com as seguintes propriedades:

- (i) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$ (Propriedade associativa da adição).
- (ii) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$ (Propriedade comutativa da adição).
- (iii) Existe $0 \in V$, tal que $x + 0 = x$, $\forall x \in V$ (elemento neutro da adição).

(iv) Para cada $x \in V$, existe $(-x) \in V$, tal que, $x + (-x) = 0$ (simétrico ou inverso aditivo de x).

(v) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall x \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(vi) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$.

(vii) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$ (elemento neutro da multiplicação).

(viii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall x \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Definição 1.2.2. Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo \mathbb{K} . Uma transformação linear de V em W é uma função $T : V \rightarrow W$ tal que :

$$\begin{aligned} T(v + w) &= T(v) + T(w), \quad \forall v, w \in V \\ T(\alpha v) &= \alpha T(v), \quad \forall v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Em particular, se a transformação linear for de V em V , isto é, $T : V \rightarrow V$, então dizemos que T é um operador linear.

Definição 1.2.3. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} . Um produto interno sobre V é uma aplicação

$$\begin{aligned} (\cdot | \cdot) : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\mapsto (u|v), \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) Para cada $v \in V$, a aplicação $u \mapsto (u|v)$ é linear, ou seja,

$$(\lambda u + w|v) = \lambda(u|v) + (w|v),$$

quaisquer que sejam $u, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(ii) $(u|v) = \overline{(v|u)}$ onde a barra indica conjugação complexa.

(iii) $(u|u) \geq 0$ e $(u|u) = 0$ se, e só se, $u = 0$.

Definição 1.2.4. Sejam $u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Então

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

é um produto interno sobre \mathbb{R}^n , denominado produto interno canônico.

Proposição 1.2.1. Seja $V = C_{\mathbb{C}}([0, l])$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas de $[0, l]$ em \mathbb{C} . Se $f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$, então

$$(f|g) = \int_0^l f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.1)$$

é um produto interno em $C_{\mathbb{C}}([0, l])$, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $(f|f) \geq 0, \quad \forall f \in C_{\mathbb{C}}([0, l]);$
- (ii) $(f|f) = 0 \iff f \equiv 0;$
- (iii) $(\alpha f + g|h) = \alpha(f|h) + (g|h), \quad \forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l]), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C};$
- (iv) $(f|g) = \overline{(g|f)}, \quad \forall f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l]).$

Demonstração.

- (i) Seja $f \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$, então, por hipótese, temos

$$(f|f) = \int_0^l f(x)\overline{f(x)} dx = \int_0^l |f(x)|^2 dx.$$

Como $|f(x)|^2 \geq 0$, para todo $x \in [0, l]$, concluímos que $\int_0^l |f(x)|^2 dx \geq 0$. Logo, $(f|f) \geq 0$ para todo $f \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$.

- (ii) Suponhamos agora que $(f|f) = 0$, então

$$\int_0^l |f(x)|^2 dx = 0 \Rightarrow |f(x)|^2 = 0,$$

para todo $x \in [0, l]$. Assim, temos que $f(x) = 0$, isto implica $f = 0$ para todo $x \in [0, l]$.

- (iii) Seja $f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ então temos

$$\begin{aligned} (\alpha f + g|h) &= \int_0^l [\alpha f(x) + g(x)]\overline{h(x)} dx \\ &= \int_0^l [\alpha f(x)\overline{h(x)} + g(x)\overline{h(x)}] dx \\ &= \int_0^l \alpha f(x)\overline{h(x)} dx + \int_0^l g(x)\overline{h(x)} dx \\ &= \alpha \int_0^l f(x)\overline{h(x)} dx + \int_0^l g(x)\overline{h(x)} dx \\ &= \alpha(f|h) + (g|h). \end{aligned}$$

Portanto $(\alpha f + g|h) = \alpha(f|h) + (g|h)$ para todo $f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

- (iv) Para finalizarmos, seja $f, g \in C_{\mathbb{C}}([0, l])$, então obtemos

$$(f|g) = \int_0^l f(x)\overline{g(x)} dx. \quad (1.2)$$

Por outro lado, como $\overline{g(x)\overline{f(x)}} = \overline{g(x)} \overline{\overline{f(x)}}$ e tendo em vista que $\overline{\overline{f(x)}} = f(x)$ é imediato que

$$\overline{(g|f)} = \int_0^l \overline{g(x)\overline{f(x)}} dx = \int_0^l \overline{g(x)} \overline{\overline{f(x)}} dx = \int_0^l \overline{g(x)} f(x) dx. \quad (1.3)$$

Portanto, de (1.2) e (1.3) concluímos $(f|g) = \overline{(g|f)}$.

□

Proposição 1.2.2. *Seja $V = C([0, l])$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[0, l]$ em \mathbb{R} . Se $f, g \in C([0, l])$, então*

$$(f|g) = \int_0^l f(x)g(x) dx \quad (1.4)$$

é um produto interno em $C([0, l])$.

Demonstração. A prova segue de maneira análoga a Proposição 1.2.1. □

Definição 1.2.5. *A função $\|\cdot\|$ definida por $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$, $\forall f \in SC([-l, l])$ é uma semi-norma em $SC([-l, l])$, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(i) \|f\| \geq 0, \quad \forall f \in SC([-l, l]);$$

$$(ii) \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|, \quad \forall f \in SC([-l, l]), \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$(iii) \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad \forall f, g \in SC([-l, l]) \quad (\text{Desigualdade triangular.})$$

Proposição 1.2.3. *Seja V um espaço vetorial com produto interno e $f, g \in V$, então vale $|(f|g)| \leq \|f\| \|g\|$.*

Demonstração. Como $(f + \alpha g|f + \alpha g) \geq 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, por definição de produto interno então temos

$$\alpha^2 \|g\|^2 + 2\alpha(f|g) + \|f\|^2 \geq 0,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Assim como que o discriminante Δ da equação do segundo grau $\alpha^2 \|g\|^2 + 2\alpha(f|g) + \|f\|^2 = 0$ na variável α é menor ou igual a zero, segue que

$$\Delta = 4(f|g)^2 - 4\|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0,$$

que implica em

$$(f|g)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0.$$

Por fim, como a raiz crescente concluímos que $|(f|g)| \leq \|f\| \|g\|$.

□

Definição 1.2.6. *Sejam f e g vetores num espaço vetorial V com produto interno. Dizemos que f e g são ortogonais se $(f|g) = 0$.*

Definição 1.2.7. *Seja S um subconjunto de V . Dizemos que S é um conjunto ortogonal se dois vetores distintos quaisquer em S são ortogonais. Se além disso, todos os vetores em S são unitários, dizemos que S é um conjunto ortonormal.*

Proposição 1.2.4. *Seja $\varphi_n(x) = \sin(\frac{n\pi x}{l})$ e $\psi_n(x) = \cos(\frac{n\pi x}{l})$. O conjunto $\{\psi_n : n \in \mathbb{Z}^+\} \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto ortogonal em $[-l, l]$ e valem as seguintes relações de ortogonalidade:*

(i)

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m, n \in \mathbb{Z}^+, m \neq n, \\ l, & \text{se } m = n \in \mathbb{N}, \\ 2l, & \text{se } m = n = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

(ii)

$$\int_{-l}^l \psi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

(iii)

$$\int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n, \\ l, & \text{se } m = n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Demonstração. Provaremos (1.7). A prova de (1.5) e (1.6) segue de maneira análoga. Considerando as identidades trigonométricas

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b \quad (1.8)$$

e

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b. \quad (1.9)$$

Subtraindo as equações (1.8) e (1.9), temos

$$\cos(a - b) - \cos(a + b) = 2 \text{sen } a \text{sen } b,$$

que implica

$$\text{sen } a \text{sen } b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]. \quad (1.10)$$

Aplicando a fórmula (1.10) na integral (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx &= \int_{-l}^l \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{l} \right) dx \\ &= \int_{-l}^l \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(n - m)\pi x}{l} \right) - \cos \left(\frac{(n + m)\pi x}{l} \right) \right] dx. \end{aligned}$$

Se $n \neq m$ e sabendo-se que a função seno é ímpar, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^l \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[\cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(m-n)\pi} \operatorname{sen} \frac{(m-n)\pi x}{l} - \frac{l}{(m+n)\pi} \operatorname{sen} \frac{(m+n)\pi x}{l} \right]_{-l}^l \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{l}{(m-n)\pi} [\operatorname{sen} [(m-n)\pi] - \operatorname{sen} [(m-n)(-\pi)]] \right. \\
&\quad \left. - \frac{l}{(m+n)\pi} [\operatorname{sen} [(m+n)\pi] - \operatorname{sen} [(m+n)(-\pi)]] \right] \\
&= \frac{l}{2\pi} \left[\frac{1}{(m-n)} [\operatorname{sen} [(m-n)\pi] - \operatorname{sen} [(-1)(m-n)\pi]] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(m+n)} [\operatorname{sen} [(m+n)\pi] - \operatorname{sen} [(-1)(m+n)\pi]] \right] \\
&= \frac{l}{2\pi} \left[\frac{1}{(m-n)} [\operatorname{sen} [(m-n)\pi] + \operatorname{sen} [(m-n)\pi]] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(m+n)} [\operatorname{sen} [(m+n)\pi] + \operatorname{sen} [(m+n)\pi]] \right] \\
&= \frac{l}{\pi} \left[\frac{1}{(m-n)} [\operatorname{sen} [(m-n)\pi] + \frac{1}{(m+n)} [\operatorname{sen} [(m+n)\pi]] \right] = 0
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $n = m$ então considerando a identidade $\operatorname{sen}^2 a = \frac{1}{2}[1 - \cos 2a]$ e tendo em vista que a função seno é ímpar, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-l}^l (\varphi_n(x))^2 dx &= \frac{1}{2} \left[\int_{-l}^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[x - \operatorname{sen} \left(\frac{2n\pi x}{l} \right) \frac{l}{2n\pi} \right]_{-l}^l \\
&= \frac{1}{2} \left[l - (-l) - \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} (2n\pi) + \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} ((-1)2n\pi) \right] \\
&= l - \frac{l}{4n\pi} \operatorname{sen} (2n\pi) - \frac{l}{4n\pi} \operatorname{sen} (2n\pi) \\
&= l - \frac{l}{2n\pi} \operatorname{sen} (2n\pi) \\
&= l.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.2.8. Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se periódica quando existe uma constante $T > 0$ tal que $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.2.5. Dado $n \in \mathbb{N}$, as funções $\varphi_n(x)$ e $\psi_n(x)$ definidas na Proposição 1.2.4, respectivamente, são periódicas com período fundamental $T = 2l/n$. Em particular, $2l$ é um período comum a todas essas funções.

Demonstração. Mostraremos inicialmente que $T = 2l/n$ é um período para $\psi_n(x)$. De fato, pela Definição 1.2.8, temos

$$\psi_n(x + T) = \cos\left(\frac{n\pi(x + T)}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x + n\pi T}{l}\right)$$

que implica

$$\psi_n(x + T) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + \frac{n\pi T}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2\pi\right).$$

Aplicando a identidade trigonométrica $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, obtemos

$$\psi_n(x + T) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l} + 2\pi\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \psi_n(x).$$

Por outro lado, se T' for outro período para $\psi_n(x)$, então temos $\psi_n(x + T') = \psi_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim temos

$$\cos\left(\frac{n\pi(x + T')}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

tomando a identidade trigonométrica novamente, segue que

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Fazendo $x = l/n$, obtemos

$$\cos\left(\frac{n\pi T'}{l}\right) = 1,$$

logo existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{n\pi T'}{l} = 2k\pi$ que implica $T' = \frac{k2l}{n} = kT$. Portanto T é o menor período positivo de $\psi_n(x)$. A demonstração para $\varphi_n(x)$ segue de maneira análoga. \square

1.3 Noções Gerais de Equações Diferenciais Parciais

Apresentaremos neste seção uma breve introdução ao estudo de equações diferenciais parciais seguindo a referência (IÓRIO, 2005). No decorrer desta seção foram utilizados diferentes notações para indicar derivadas parciais, por exemplo $\frac{\partial u}{\partial x}$, $D_1 u$ e u_x denotam a derivada de ordem 1 da função u na variável x .

Definição 1.3.1. Dizemos que uma equação a derivadas parciais ou equação diferencial parcial (EDP) é uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes x, y, z, t, \dots e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x, y, z, t, \dots)$, ou seja, uma EDP em n variáveis independentes x_1, x_2, \dots, x_n é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0 \quad (1.11)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , F uma função dada e $u = u(x)$ uma função que queremos determinar.

Note que assim como na classificação das equações diferenciais ordinárias (EDOs), podemos também classificar as EDPs de diversas formas, entre elas podemos analisar a ordem e a linearidade.

Definição 1.3.2. Dizemos que a ordem de uma EDP é dada pela derivada parcial de maior ordem que ocorre na equação.

Definição 1.3.3. E uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação, caso contrário a EDP é dita não linear.

De maneira geral, podemos escrever uma EDP linear de primeira ordem da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) D_i u + b(x)u + c(x) = 0, \quad (1.12)$$

onde algum dos coeficientes a_j não é nulo. Para EDPs de segunda ordem temos,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \quad (1.13)$$

onde algum dos coeficientes a_{ij} não é nulo. Para duas variáveis independentes, temos que as equações (1.12) e (1.13) ficam

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u + D(x, y) = 0 \quad (1.14)$$

e

$$A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u + G(x, y) = 0, \quad (1.15)$$

respectivamente.

Podemos classificar as EDPs também, considerando sua homogeneidade, isto é,

Definição 1.3.4. Dizemos que uma EDP linear é homogênea se o termo que não contém a variável dependente é identicamente nulo, caso contrário a EDP linear é dita não homogênea.

Em muitos casos, a derivada de maior ordem de uma EDP determina algumas propriedades das soluções, essa é chamada a *parte principal* da EDP. A parte principal das equações (1.12) e (1.13) são dadas respectivamente por

$$A(x, y)u_x + B(x, y)u_y \quad \text{e} \quad A(x, y)u_{xx} + 2B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy}.$$

Quando uma EDP é não linear, mas sua parte principal é linear, dizemos que a EDP é *semilinear*.

Exemplo 1.3.1. A equação $xu_x - yu_y = \sin xy$ é uma EDP linear não homogênea de primeira ordem. De fato, pela Definição 1.3.4 como a equação é de primeiro grau com relação a variável u e suas derivadas parciais, então ela é linear. Por outro lado como $\sin xy \neq 0$ e a derivada de maior ordem é a primeira, concluímos que ela é não homogênea e de primeira ordem.

Exemplo 1.3.2. A equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y)$$

é uma equação linear de segunda ordem, não homogênea se a função $h(x, y)$ não for identicamente nula. Caso $h \equiv 0$ a equação é dita homogênea e chamada de equação de Laplace.

Exemplo 1.3.3. A equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.16}$$

onde $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ e α^2 é uma constante é uma equação de segunda ordem, linear e homogênea.

Consideraremos a partir de agora, apenas EDPs lineares de primeira ou segunda ordem, com n variáveis independentes, no entanto os resultados podem ser estendidos para EDPs lineares de qualquer ordem. Vamos considerar também, a notação vetorial $x = (x_1, \dots, x_n)$ e uma equação do tipo (1.13). Denotaremos por k a ordem da equação, ou seja, $k = 1$ ou $k = 2$. Veja que se, $a_{ij} \equiv 0$ então, quaisquer que sejam $i, j \in 1, 2, \dots, n$ existe um j onde $1 \leq j \leq n$ tal que $b_j \neq 0$. Considerando

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_j u(x) + c(x)u(x) \tag{1.17}$$

podemos reescrever a equação (1.13) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_j u + c(x)u + d(x) &= 0 \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x)D_j u + c(x)u &= -d(x) \end{aligned}$$

e fazendo $f(x) = -d(x)$ temos

$$Lu = f \quad (1.18)$$

onde a cada função suficientemente diferenciável u , corresponde uma função Lu , ou seja, definimos uma *transformação* L . Assim, seja Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e vamos supor que as funções a_{ij} , b_j e c com $1 \leq i$ e $j \leq n$ são contínuas em Ω e tomam valores reais, logo podemos definir

$$\begin{aligned} L : C^k(\Omega) &\longrightarrow C(\Omega) \\ u &\longmapsto Lu \end{aligned}$$

onde Lu é dado por (1.17) e $C^k(\Omega)$ (respectivamente $C(\Omega)$) é o conjunto das funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, k vezes continuamente diferenciáveis (respectivamente contínuas) em $C(\Omega)$. Como a função L está definida no espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis, isto é, para cada $u \in C^k(\Omega)$ com determinadas propriedades L associa a uma outra função Lu , dizemos que L é um *operador* ou *transformação*, em particular para este caso, dizemos que L é um *operador diferencial parcial*.

Tendo em vista que a equação (1.13) é linear, então o operador L é dito *operador linear*, isto é, L associa a função identicamente nula nela mesma e vale a seguinte expressão

$$L(u + \alpha v) = Lu + \alpha Lv \quad (1.19)$$

para todo $u, v \in L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} L(u + \alpha v) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j (u + \alpha v) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j (u + \alpha v) + c(x)(u + \alpha v) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j \alpha v + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u \\ &\quad + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j \alpha v + c(x)u + c(x)\alpha v \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x)u \\ &\quad + \alpha \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j v + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j v + c(x)v \right) \\ &= Lu + \alpha Lv. \end{aligned} \quad (1.20)$$

De forma análoga ao caso das EDOs, podemos também associar as EDPs não homogêneas a uma EDP linear homogênea

$$Lu = 0 \quad (1.21)$$

que é chamada *equação homogênea associada* a equação (1.18). Se aplicarmos a linearidade do operador L e indução, podemos ver que a combinação linear das soluções da equação (1.21) e também outra solução para (1.21) e esse resultado é conhecido como *princípio da superposição* e será provado em seguida.

Proposição 1.3.1. *Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ é um conjunto de funções da classe C^k em Ω satisfazendo a EDP linear homogênea (1.21) e que $\{\alpha\}_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série*

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \quad (1.22)$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω . Então u satisfaz (1.21).

Demonstração. Provaremos apenas para os casos em que $k = 1$ ou $k = 2$. No entanto, a proposição é válida para o caso geral. Seja L definido por

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) \quad (1.23)$$

e tendo em vista por hipótese que para qualquer $x \in \Omega$, com $1 \leq i$ e $j \leq n$ temos

$$u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x). \quad (1.24)$$

Derivando parcialmente a equação (1.24) em ambos os membros, obtemos

$$D_j u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_j u_m(x). \quad (1.25)$$

e

$$D_i D_j u(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x), \quad (1.26)$$

onde pelo Teorema 1.1.2 ambas as séries convergem. Substituindo as equações (1.24), (1.25) e (1.26) na equação (1.23), temos

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u(x) + c(x) u(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m D_j u_m(x) + c(x) \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m u_m(x) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_m \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u_m(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u_m(x) + c(x) u_m(x), \right] \end{aligned}$$

onde por (1.21) obtemos

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_m (Lu_m)(x) = 0, \quad (1.27)$$

o que finaliza a demonstração. \square

Para que possamos garantir a unicidade da solução de uma EDO ou EDP, são necessárias informações adicionais a respeito da equação. Para as EDOs lineares a solução geral sempre aparece acompanhada com uma ou mais constantes arbitrárias e

para determiná-las, impomos condições iniciais, isto é, fixamos os valores da solução e suas derivadas. Para as EDPs esse processo não funciona, pois envolve funções arbitrárias das variáveis independentes e o espaço é multidimensional, ou seja, as soluções estão definidas em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, em particular quando $n = 1$, basta substituir os extremos do intervalo pelo bordo ou fronteira $\partial\Omega$ da região Ω .

Quando impomos condições sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo da região, dizemos que é um *problema de valores de contorno* ou *problema de contorno*.

No caso de *condições iniciais* para EDPs, como temos mais de uma variável independente, fixamos uma das variáveis e impomos o valor da solução e de suas derivadas parciais com relação a variável fixa em função das outras variáveis. Quando são impostas tanto condições de contorno, quanto condições iniciais, o problema é dito *problema misto*. Em muitos casos, encontramos condições do tipo

$$\alpha u(x) + \beta \frac{\partial u}{\partial n}(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.28)$$

onde α e β são constantes, f é uma função dada em $\partial\Omega$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ é a derivada direcional normal a $\partial\Omega$. Quando $\beta = 0$, dizemos que a condição (1.28) é chamada *condições de Dirichlet* e quando $\alpha = 0$, dizemos que é uma *condição de Neumann*.

Exemplo 1.3.4. *O problema*

$$\begin{cases} xu_x - yu_y = x^2 + y^2 & \text{em } \mathbb{R}^2 \\ u(t^3, t^5) = t^2 + 1, & t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

é um problema de Cauchy. De fato, a condição $u(t^3, t^5) = t^2 + 1$, $t \in \mathbb{R}$ é uma condição inicial.

Exemplo 1.3.5. *O problema*

$$\begin{cases} t^2 u_{xx} - xu_t - u = f(x, t), & t > 0, x \in (0, 1), \\ u(0, t) = \alpha(t), u(1, t) = \beta(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \gamma(x), & x \in [0, 1], \end{cases}$$

é um problema misto. Com efeito, como as condições $u(0, t) = \alpha(t)$ e $u(1, t) = \beta(t)$ com $t \geq 0$ estão sendo impostas no bordo da região temos que as condições são de contorno. Enquanto que $u(x, 0) = \gamma(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ é uma condição inicial.

A seguir faremos uma breve introdução a dedução da equação do calor. Considere inicialmente uma barra de comprimento L , cuja secção transversal tem área A feita de material homogêneo condutor uniforme de calor e onde a superfície lateral da barra esteja isolada termicamente não permitindo transferências de calor com o meio externo. Aplicando a lei de resfriamento de Fourier, utilizando a expressão de quantidade de calor

em função do calor específico e considerando a temperatura uma função cujas derivadas parciais até a segunda ordem são funções contínuas na região do plano (x, t) , dada por $0 < x < L$ e $t > 0$, temos que

$$u_t = \alpha^2 u_{xx},$$

onde α^2 é a difusibilidade térmica. Para maiores detalhes sugerimos os livros (FIGUEIREDO, 1977), (IÓRIO, 2005) e (BOYCE, 2010).

Exemplo 1.3.6. *A equação do Calor em uma dimensão espacial*

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & \text{em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l]. \end{cases}$$

é um problema misto. De fato, a condição $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $t \geq 0$ é uma condição de contorno, enquanto que a condição $u(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in [0, l]$ é uma condição inicial. Note que para que haja solução, f tem que satisfazer a seguinte condição

$$f(0) = 0 = f(l),$$

conhecida como condição de compatibilidade, pois quando se trata de problemas mistos as condições de contorno e iniciais não são inteiramente independentes. Para uma análise física desse problema temos que a temperatura $u(x, t)$ no ponto $x \in [0, l]$ e no instante t , com $t \geq 0$ de um sólido feito de material homogêneo e colocado em um reservatório térmico matido a uma temperatura constante igual a zero (condição de contorno) com distribuição inicial de temperatura $f(x)$ (condição inicial).

Para as equações diferenciais parciais semilineares de segunda ordem existe ainda um tipo de classificação especial. Esta classificação é baseada numa transformação afim que leva as variáveis x e y em novas variáveis ξ e η , onde neste caso a equação pode ser escrita na sua forma canônica de uma parábola, hipérbole ou elipse em termos das novas variáveis. Classificaremos as EDPs semilineares de segunda ordem com duas variáveis independentes. Como visto anteriormente, uma EDP semilinear com duas variáveis independentes pode ser expressa da seguinte forma

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1.29)$$

onde a, b e c são funções arbitrárias e cuja parte principal é dada pelo operador

$$Lu = a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy}. \quad (1.30)$$

Vamos analisar o discriminante da equação (1.29), considerando a, b e c funções contínuas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e que não se anulam simultaneamente, assim temos

$$4b^2(x, y) - 4a(x, y)c(x, y) = 0 \Rightarrow 4(b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)) = 0.$$

Logo podemos definir o discriminante da equação (1.29) como sendo $\delta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y).$$

A definição a seguir apresenta a classificação para diferentes valores assumidos por δ .

Definição 1.3.5. *O operador diferencial L dado em (1.30) e a EDP (1.29) são ditos:*

- (i) *parabólicos no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) = 0$;*
- (ii) *hiperbólicos no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) > 0$;*
- (iii) *elípticos no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) < 0$.*

Observação 1.3.1. *A equação (1.29) pode mudar de domínio de definição dos coeficientes, neste caso diremos que a EDP assim como o operador associado é do tipo misto.*

Exemplo 1.3.7. *A equação do Calor*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

é do tipo parabólica. De fato, tendo em vista que $u_{tt} = u_{xt} = 0$, assim pela Definição 1.3.5 temos, $b^2(x, t) = c(x, t) = 0$ e $a(x, t) = -\alpha^2$, logo

$$\delta(x, t) = b^2(x, t) - a(x, t)c(x, t) = 0$$

Exemplo 1.3.8. *A equação da Onda*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

é do tipo hiperbólica. Com efeito, como $u_{xt} = 0$, aplicando Definição 1.3.5, temos $b^2(x, y) = 0$, $c(x, y) = 1$ e $a(x, y) = -c^2$, assim obtemos

$$\delta(x, t) = b^2(x, t) - a(x, t)c(x, t) = 0 - (-c^2) \cdot 1 = c^2 > 0.$$

Exemplo 1.3.9. *A equação de Laplace*

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

é do tipo elíptica. Com efeito, como $u_{xy} = 0$, temos pela Definição 1.3.5, que $b^2(x, y) = 0$, $c(x, y) = 1$ e $a(x, y) = 1$, logo

$$\delta(x, t) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0 - 1 \cdot 1 = -1 < 0.$$

Exemplo 1.3.10. *A equação de Tricomi*

$$y u_{xx} + u_{yy} = 0$$

é do tipo misto. De fato, é elíptica no semiplano $y > 0$, pois como $u_{xy} = 0$, pela Definição 1.3.5, temos $b^2(x, y) = 0$, $c(x, y) = 1$ e $a(x, y) = y$, donde obtemos

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0 - y \cdot 1 = -y < 0.$$

É hiperbólica no semiplano $y < 0$, onde temos

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0 - (-y) \cdot 1 = y > 0$$

e para finalizarmos é parabólica no eixo dos x , onde temos $y = 0$, portanto

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 0 - 0 \cdot 1 = 0.$$

1.4 Alguns Resultados de Séries de Fourier

Apresentaremos nesta seção, alguns resultados sobre as séries de Fourier que serão de grande importância para fundamentar os conceitos que serão apresentados nos próximos capítulos. Para maiores detalhes sugerimos os livros (IÓRIO, 2005) e (FIGUEIREDO, 1977).

Suponhamos que uma função possa ser expressa da seguinte forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sen \frac{n\pi x}{l} \right). \quad (1.31)$$

Para que a igualdade acima seja válida, os coeficientes a_0, a_n e b_n devem estar relacionados com a função $f(x)$. Assim neste momento, encontraremos formas de calcular tais coeficientes e portanto descobrir quais funções podem ser representadas de tal forma. Reescrevendo a equação (1.31) em termos das funções φ_n e ψ_n temos

$$f = \frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n). \quad (1.32)$$

Seja f uma função conhecida, então calculando formalmente o produto interno (Proposição 1.2.2) de f com ψ_0 em $[-l, l]$ com auxílio da Proposição 1.2.4 temos

$$\begin{aligned} (f|\psi_0) &= \left(\frac{a_0}{2}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \psi_n + b_n \varphi_n] \mid \psi_0 \right) \\ &= \frac{a_0}{2}(\psi_0|\psi_0) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\psi_n|\psi_0) + b_n(\varphi_n|\psi_0)] \\ &= \frac{a_0}{2}(\psi_0|\psi_0). \end{aligned}$$

Calculando o produto interno $(\psi_0|\psi_0)$, tendo em vista que $\psi_0 = 1$ segue que

$$(\psi_0|\psi_0) = \int_{-l}^l dx = x|_{-l}^l = l - (-l) = 2l.$$

Assim obtemos

$$(f|\psi_0) = \frac{a_0}{2}(\psi_0|\psi_0) = a_0l,$$

logo

$$a_0 = \frac{1}{l}(f|\psi_0) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \psi_0(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (1.33)$$

De maneira análoga, fazendo o produto interno de f com ψ_n , com $n \in \mathbb{Z}^+$ segue que

$$(f|\psi_n) = a_n(\psi_n|\psi_n) = a_nl,$$

que implica

$$a_n = \frac{1}{l}(f|\psi_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \psi_n(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{Z}^+. \quad (1.34)$$

E novamente fazendo o produto interno de f com φ_n , com $n \in \mathbb{N}$ temos

$$(f|\varphi_n) = b_n(\varphi_n|\varphi_n) = b_nl,$$

portanto,

$$b_n = \frac{1}{l}(f|\varphi_n) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \varphi_n(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.35)$$

As equações (1.33), (1.34) e (1.35) são conhecidas como as *fórmulas de Euler-Fourier*. Assim seja $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2l$ e integrável então pelos resultados acima podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right] \quad (1.36)$$

onde a expressão do lado direito recebe o nome de Série de Fourier da f . Note que colocamos o simbolo (\sim), no lugar do sinal de igualdade, pois nem sempre a relação entre a $f(x)$ e sua série de Fourier e de igualdade, podendo ocorrer até a divergência da série. A seguir enunciaremos alguns resultados que nos fornecem condições suficientes para que a função $f(x)$ seja igual a sua série de Fourier. Antes, porém, apresentaremos algumas definições e exemplos importantes para o estudo das séries de Fourier.

Definição 1.4.1. *Sejam $l > 0$ e $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. A série de Fourier de f é a série*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right] \quad (1.37)$$

onde os coeficientes a_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ e b_n , $n \in \mathbb{N}$ são dados pelas fórmulas de Euler-Fourier e chamados de coeficientes de Fourier de f .

Exemplo 1.4.1. Vamos calcular a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Com efeito, como $l = 1$ aplicando as fórmulas de Euler-Fourier, equações (1.33), (1.34) e (1.35), temos

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = \frac{-x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1; \quad (1.38)$$

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 -x \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= \left(-\frac{x \operatorname{sen}(n\pi x)}{\pi n} - \frac{\cos(n\pi x)}{\pi^2 n^2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x \operatorname{sen}(n\pi x)}{\pi n} + \frac{\cos(n\pi x)}{\pi^2 n^2} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{\pi^2 n^2} + \frac{\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} + \frac{\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \\ &= 2 \frac{\cos(n\pi)}{\pi^2 n^2} - 2 \frac{1}{\pi^2 n^2} \\ &= 2 \frac{\cos(n\pi) - 1}{\pi^2 n^2} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Fazendo $\cos(n\pi) = (-1)^n$, pois $\cos(n\pi) = 1$ se $n = 2, 4, 6, \dots, 2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $\cos(n\pi) = -1$ se $n = 1, 3, 5, \dots, 2k - 1$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo

$$a_n = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}. \quad (1.40)$$

Por outro lado temos

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \int_{-1}^0 -x \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_0^1 x \operatorname{sen}(n\pi x) dx = 0. \quad (1.41)$$

Substituindo (1.38), (1.40) e (1.41) em (1.37), obtemos

$$S[f] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi x).$$

Como para todo $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$ temos que $(-1)^n - 1 = 0$ então fazendo $n = 2k + 1$, implica $(-1)^n - 1 = -2$, logo

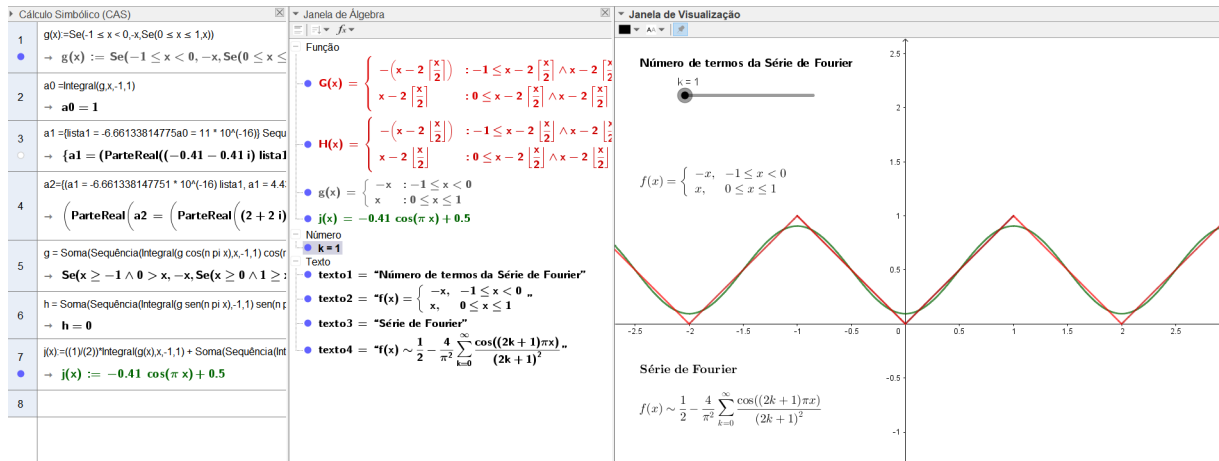
$$S[f] = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} 2 \frac{(-2)}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos((2k+1)\pi x)$$

donde concluímos

$$S[f] = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}. \quad (1.42)$$

Apresentaremos agora o software Geogebra que utilizaremos para as representações gráficas das funções, assim como os gráficos das séries de Fourier das mesmas. O GeoGebra é um aplicativo de matemática dinâmico criado por Markus Hohenwarter, que combina conceitos de geometria e álgebra em uma única interface gráfica do utilizador (GEOGEBRA, 2021). Por ser um aplicativo de fácil acesso, livre, simples manipulação e ainda possuir diversas aplicabilidades fazem com que o mesmo seja uma importante ferramenta em diversas áreas. Em particular, utilizaremos apenas as janelas de Álgebra, a janela de Visualização e a janela CAS do GeoGebra. Por meio das janelas de Álgebra e Visualização poderemos visualizar os gráficos, enquanto que para janela CAS realizaremos as operações algébricas entre as funções (GEOGEBRA, 2021). Para maiores detalhes sugerimos a referência [11]. Na Figura 1.1, temos

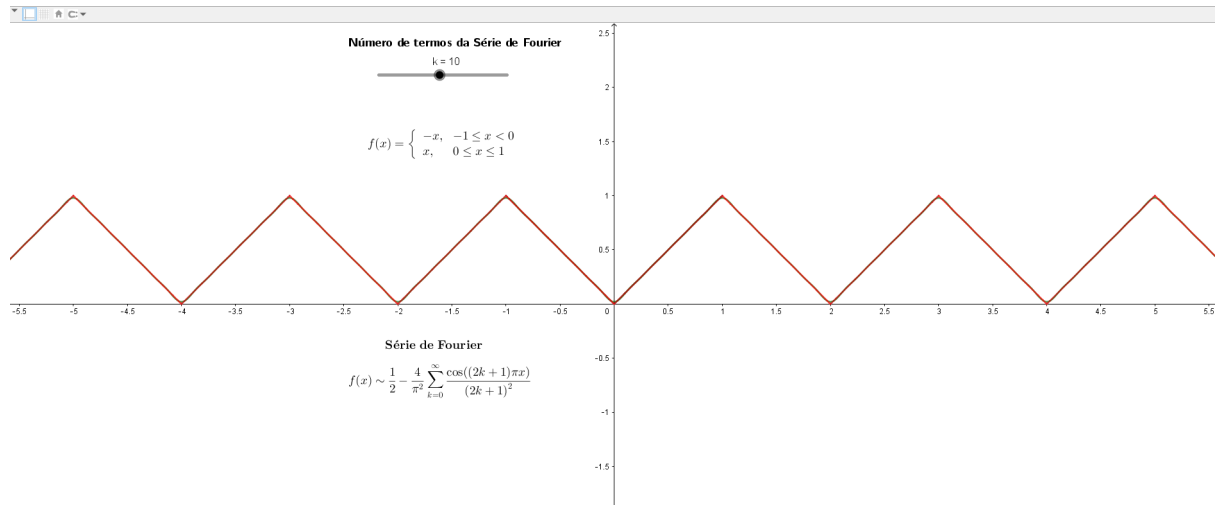
Figura 1.1: Aproximação de f para $k = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na janela de Álgebra definimos as funções e o período; na janela Cálculo Simbólico (CAS), são realizadas todas as operações algébricas entre as funções, em particular é nesta janela que são realizadas as operações que definem os coeficientes de Euler-Fourier e por fim na janela de Visualização temos os gráficos da função f (Gráfico em Vermelho) e sua série de Fourier $S[f]$ (Gráfico em Verde). Note que se aumentarmos o número k de termos da série de Fourier, obtemos uma melhor aproximação para a função f . Veja a Figura 1.2, para $k = 10$.

Figura 1.2: Aproximação de f para $k = 10$.



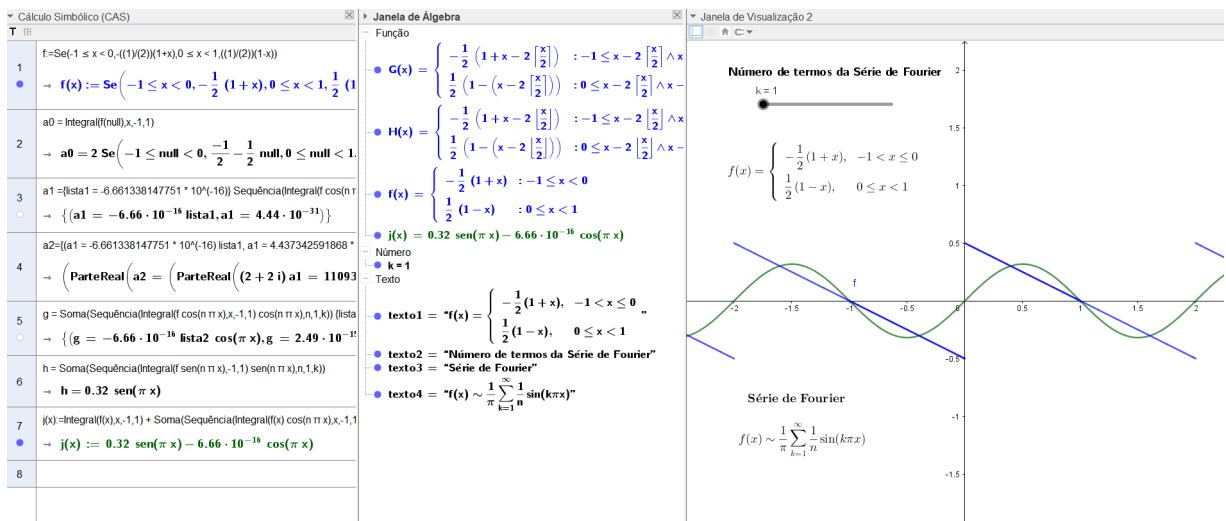
Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 1.4.2. Vamos calcular agora a série de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1+x) & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1+x) & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Para este exemplo, utilizaremos a janela CAS do Geogebra para realização de todos os cálculos dos coeficientes de Fourier e assim obter a série de Fourier da função f . Ressaltamos que as fórmulas utilizadas na janela CAS são as mesmas, isto é, as fórmulas de Euler-Fourier. Veja Figura 1.3, para $k = 1$.

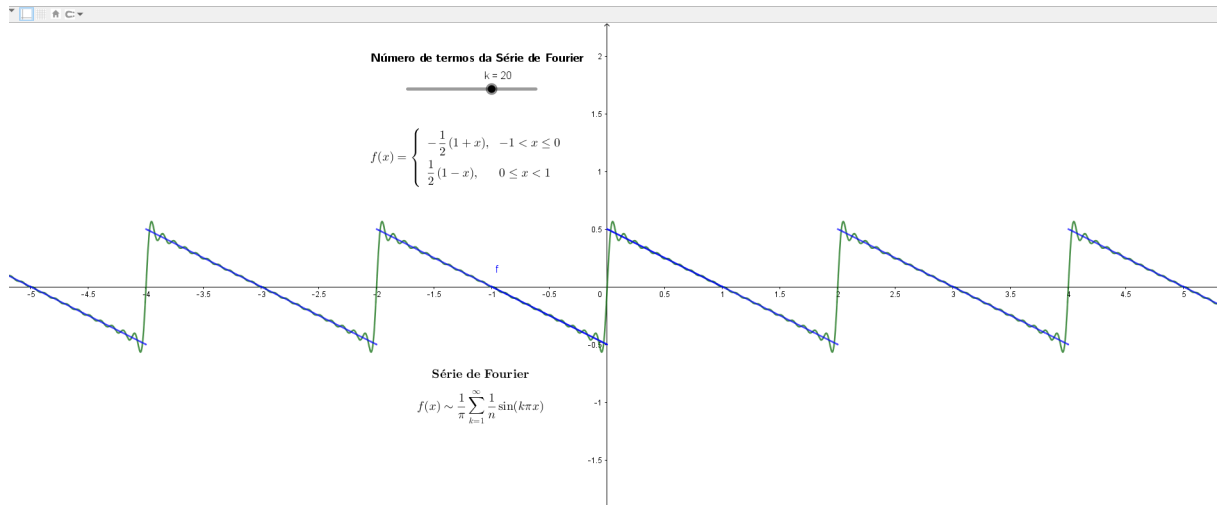
Figura 1.3: Aproximação de f para $k = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tomando $k = 20$ na série de Fourier $S[f]$ (Gráfico em Verde), obtemos uma melhor aproximação para f (Gráfico em Azul). Observe a Figura 1.4.

Figura 1.4: Aproximação de f para $k = 20$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisaremos neste momento a convergência das séries de Fourier. Inicialmente nosso objetivo é obter condições suficientes sobre a função f tal que garanta a convergência de sua série de Fourier em um ponto fixado, por este motivo recebe o nome de convergência pontual.

Denotaremos por $SC_{per}(2l)$ ou $SC([-l, l])$ o espaço das funções reais periódicas de período $2l$ que são seccionalmente contínuas em qualquer intervalo $[a, b]$. De maneira análoga, denotaremos por $C_{per}(2l)$ ou $\{f \in C([-l, l]); f(-l) = f(l)\}$ o espaço das funções reais contínuas e periódicas de período $2l$.

Seja $f \in SC_{per}(2l)$ e consideremos $x_0 \in \mathbb{R}$ então vamos denotar por $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ os limites laterais abaixo

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Teorema 1.4.1. *Seja $f \in SC_{per}(2l)$ e suponha que f é diferenciável, a menos de um número finito de pontos em $(-l, l)$, com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f no ponto x converge a $(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2$.*

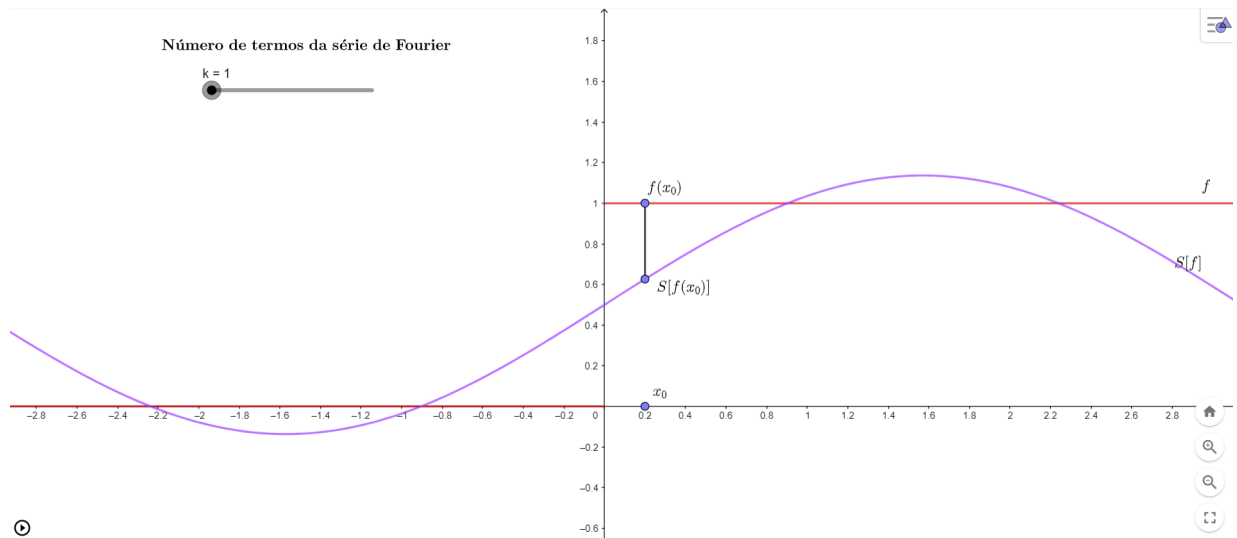
Demonstração. A prova pode ser encontrada em [8]. □

Através do teorema é possível assegurar que quanto mais aumentarmos o número de termos da série de Fourier mais próximos estamos da função f num ponto. Para uma interpretação geométrica desse fato, definimos uma função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ 0, & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

e analisaremos o comportamento da série de Fourier da f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$. Veja a Figura 1.5.

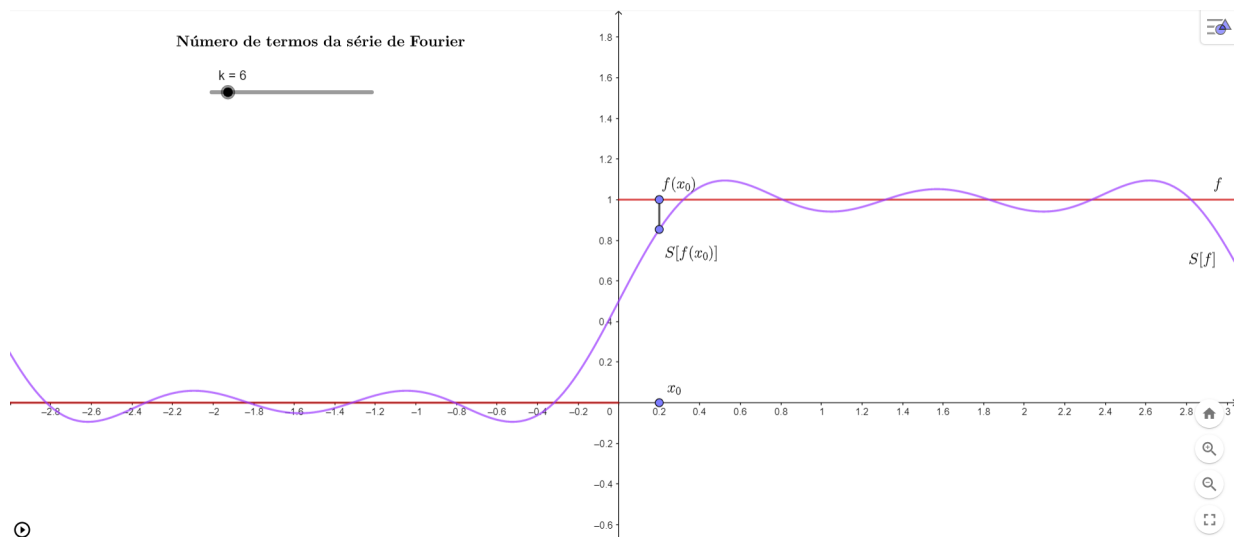
Figura 1.5: Aproximação de f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$ para $k = 1$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe que aumentando o número k de termos da série de Fourier $S[f]$ (Gráfico em Roxo) então a distância entre as imagens da $S[f(x_0)]$ e $f(x_0)$ diminui. Veja a Figura 1.6.

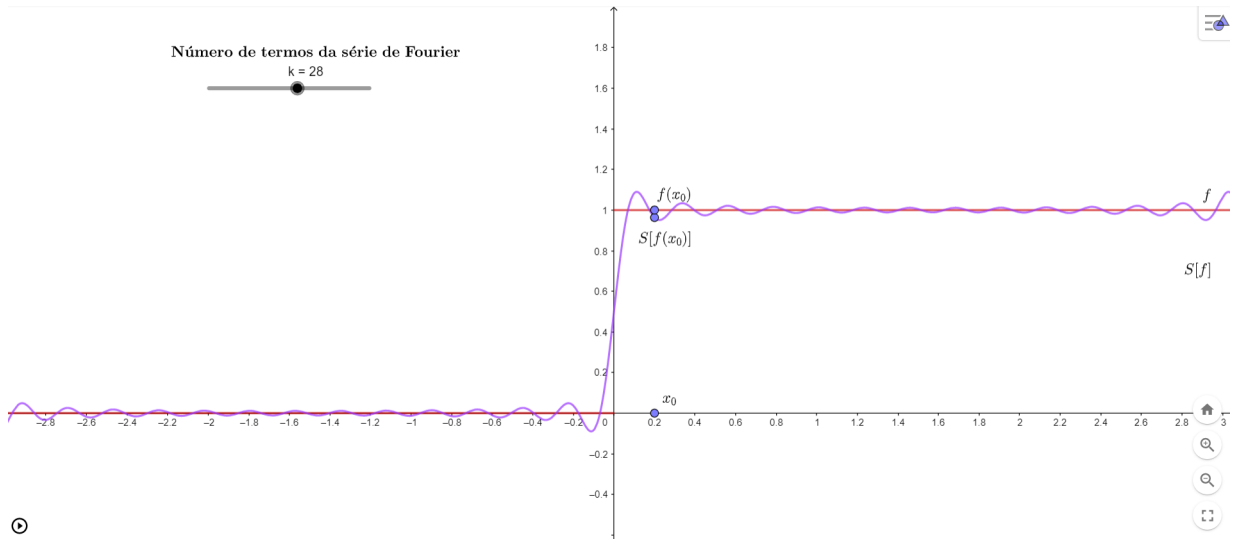
Figura 1.6: Aproximação de f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$ para $k = 6$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim observamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que se tomarmos $k > k_0$ então $|S[f(x_0)] - f(x_0)| < \varepsilon$, ou seja, $S[f]$ está convergindo pontualmente para f num ponto x_0 . Veja a Figura 1.7.

Figura 1.7: Aproximação de f no ponto fixo $x_0 \in (-\pi, \pi)$ para $k = 28$.



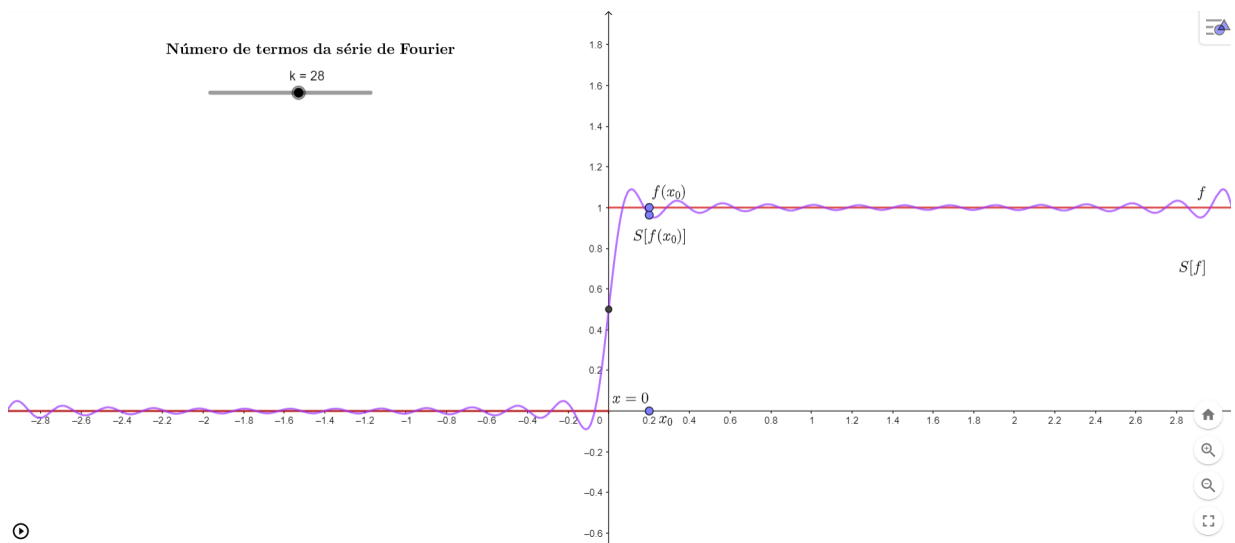
Fonte: Elaborada pelo autor.

Observação 1.4.1. Note que a função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 0$, assim pelo Teorema 1.4.1 temos que como $f(0^+) = 1$ e $f(0^-) = 0$ assim a série de Fourier de f no ponto $x = 0$ converge para

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Veja a ilustração disso na Figura 1.8.

Figura 1.8: Aproximação de f no ponto de descontinuidade $x = 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 1.4.3. *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1. \end{cases}.$$

Pelo Exemplo 1.4.1, vimos que a série de Fourier de f é dada por

$$S[f] = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2}.$$

Tendo em vista que f é contínua e diferenciável em $(-1, 0) \cup (0, 1)$ com $f' \in SC([-1, 1])$, pois

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Assim pelo Teorema 1.4.1 a série de Fourier $S[f]$ converge para $(f(x_0^+) + f(x_0^-))/2 = f(x)$, visto que f é contínua, logo temos

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)\pi x)}{(2k+1)^2} \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Estudaremos agora condições suficientes sobre a função f periódica de período $2l$ que garanta a convergência uniforme de sua série de Fourier. Para isso enunciaremos duas proposições, cuja prova pode ser encontrada em [8] e logo em seguida apresentaremos e provaremos o teorema de convergência uniforme da série de Fourier.

Proposição 1.4.1. *Suponha que $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então os coeficientes de Fourier de f e f' são dados por*

$$a'_0 = 0, \quad a'_n = \frac{n\pi b_n}{l}, \quad b'_n = -\frac{n\pi a_n}{l}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 1.4.2. *Seja $f \in SC([-l, l])$ e seja*

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

sua série de Fourier. Então as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

convergem e vale a desigualdade de Bessel

$$l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \right) \leq \|f\|^2. \quad (1.43)$$

Outro resultado fundamental para teoria das séries de Fourier é o chamado lema de Riemann-Lebesgue. A prova pode ser encontrada em [5].

Corolário 1.4.1. Se $f \in SC([-l, l])$ e

$$S[f] = \frac{a_0}{2} \psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \psi_n + b_n \varphi_n)$$

é sua série de Fourier, então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Enunciaremos e provaremos a seguir o primeiro teorema sobre a convergência uniforme da série de Fourier.

Teorema 1.4.2. Suponha que $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC_{per}(2l)$. Então a série de Fourier de f converge uniformemente em \mathbb{R} para f .

Demonstração. Seja $\psi_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ e $\varphi_n = \sin \frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Como as funções ψ_n e φ_n são limitadas, temos

$$|a_n \psi_n| \leq |a_n| \quad \text{e} \quad |b_n \varphi_n| \leq |b_n|.$$

Mostraremos que a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \tag{1.44}$$

converge e então pelo teste M de Weierstrass (Proposição 1.1.3) a série de Fourier de f converge uniformemente. Note que $f \in C_{per}(2l)$ é diferenciável em $(-l, l)$ a menos de um número finito de pontos e que $f' \in SC_{per}(2l)$, assim pela Proposição 1.4.1, obtemos

$$a'_n = \frac{n\pi b_n}{l}, \quad b'_n = -\frac{n\pi a_n}{l}, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde a'_n e b'_n são os coeficientes de Fourier da função f' . Reescrevendo os coeficientes acima, temos

$$a'_n = \frac{n\pi b_n}{l} \quad \Rightarrow \quad b_n = \frac{la'_n}{n\pi}$$

$$b'_n = -\frac{n\pi a_n}{l} \quad \Rightarrow \quad -a_n = \frac{lb'_n}{n\pi}.$$

Logo as somas parciais de ordem n da equação (1.44) podem ser expressas por

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{l}{k\pi} |b'_k| + \frac{l}{k\pi} |a'_k| \right) = \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|). \tag{1.45}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores no \mathbb{R}^n , temos

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j d_j \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n c_j^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n d_j^2 \right)^{1/2},$$

assim podemos majorar a expressão em (1.45), isto é

$$\frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (|a'_k| + |b'_k|) \leq \frac{l}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|) \right)^{1/2}. \quad (1.46)$$

Por outro lado temos

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \Rightarrow 2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$$

ou ainda

$$(|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2). \quad (1.47)$$

Aplicando (1.47) em (1.46),

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_n| + |b_n|) &\leq \frac{l}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k| + |b'_k|) \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2}l}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

e, portanto

$$\sum_{k=1}^n (|a_n| + |b_n|) \leq \frac{\sqrt{2}l}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n (|a'_k|^2 + |b'_k|^2) \right)^{1/2}.$$

Note que as séries

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n (|a'_k|^2 + |b'_k|^2)$$

convergem, pois se trata de uma p-série com $p = 2 > 0$ e a segunda devido a desigualdade de Bessel (Proposição 1.4.2). Logo, pelo Teste da Comparação temos que a série em (1.44) converge. \square

Capítulo 2

Separação de Variáveis

Neste capítulo temos como objetivo introduzir a ideia fundamental do método de separação de variáveis. Para isso usaremos a equação do calor em uma dimensão espacial e os livros (IÓRIO, 2005) e (FIGUEIREDO, 1977).

2.1 O Método de Separação de Variáveis

Mostraremos a seguir um método clássico para resolução de EDPs lineares de coeficientes constantes com condições iniciais e/ou de contornos conhecido como método de separação de variáveis ou método de Fourier. Dado um problema do tipo

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & \text{em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \end{cases} \quad (2.1)$$

vimos no Exemplo 1.3.6 do primeiro capítulo que $u(x, t)$ é a temperatura no instante t no ponto x de uma barra de comprimento l mantido em um reservatório térmico com temperatura constante igual a zero, cuja distribuição inicial é dada por f e que deve satisfazer a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(l)$. Tendo em vista a equação (2.1) e a análise física do problema vamos procurar soluções, isto é, uma função

$$u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times (0, +\infty)).$$

Note que o problema de valores de contorno é linear e homogêneo, assim o espaço das soluções do problema

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & \text{em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

é dado por um subespaço vetorial $C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times (0, +\infty))$. Logo pelo princípio da superposição (Proposição 1.3.1) basta procurar uma família de soluções $\{u\}_{n=1}^{\infty}$

do problema (2.2) que possam ser dadas por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \quad (2.3)$$

considerando uma noção de convergência adequada. Assim impondo a condição inicial obtemos a sequência de números reais $\{\alpha\}_{n=1}^{\infty}$, isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n(x, 0) \quad (2.4)$$

e a solução geral de (2.1) será dada por (2.3) e (2.4). Vamos então resolver o problema (2.1) e para isso, vamos encontrar inicialmente as soluções do problema (2.2), assim suponhamos que a solução do problema seja da forma

$$u(x, t) = \varphi(x) \psi(t). \quad (2.5)$$

Derivando a equação (2.5) com relação a x e com relação a t obtemos

$$u_{xx} = \varphi''(x) \psi(t) \quad \text{e} \quad u_t = \psi'(t) \varphi(x), \quad (2.6)$$

e substituindo a equação (2.6) na EDP (2.1), temos

$$\psi'(t) \varphi(x) = \alpha^2 \varphi''(x) \psi(t),$$

dividindo agora por $\alpha^2 \varphi(x) \psi(t)$ ambos os membros da equação anterior nos pontos onde $\varphi(x) \neq 0$ e $\psi(t) \neq 0$, segue que

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)}. \quad (2.7)$$

Como ambos os membros da equação (2.7) são iguais e o lado direito depende de x enquanto que o lado esquerdo depende de t , estes devem portanto serem iguais a mesma constante, que denotaremos por $-\lambda$ (mais adiante justificaremos porque tomamos $-\lambda$).

Assim

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda \quad \text{e} \quad \frac{1}{\alpha^2} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = -\lambda,$$

isto é, obtemos duas EDOs

$$\begin{aligned} -\varphi''(x) &= \lambda \varphi(x) \\ \psi'(t) &= -\alpha^2 \lambda \psi(t). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que estamos procurando soluções $u \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times (0, +\infty))$ assim como $x \in [0, l]$ e $t \geq 0$ temos que

$$\varphi \in C^2((0, l) \cap C([0, l]) \quad \text{e} \quad \psi \in C^2((0, +\infty)) \cap C[0, +\infty)).$$

Aplicando a condição de contorno, obtemos

$$u(0, t) = 0 \Rightarrow \varphi(0) \psi(t) = 0 \Rightarrow \varphi(0) = 0$$

e

$$u(l, t) = 0 \Rightarrow \varphi(l) \psi(t) = 0 \Rightarrow \varphi(l) = 0,$$

assim temos

$$\varphi(0) = 0 = \varphi(l) \quad \forall t \geq 0.$$

Note que se $\psi(t) = 0$ então a solução seria sempre trivial, isto é, $u(x, t) = 0$ o que não nos interessa. Como as soluções que buscamos não são identicamente nulas, temos que φ é solução do problema

$$\begin{cases} \varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0, & 0 < x < l \\ \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

e ψ é qualquer solução do problema

$$\psi'(t) + \alpha^2 \lambda \psi(t) = 0. \quad (2.9)$$

Os valores de λ para a equação (2.8) para os quais não admite solução trivial são chamados de *autovalores* e as soluções não triviais correspondentes são chamadas de *autofunções*. Como buscamos soluções reais e tendo em vista que $-\lambda$ é igual a ambos os membros da equação (2.7) só nos interessam casos em que $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 2.1.1. *Note que buscamos soluções reais para as EDP's. No entanto em alguns casos usaremos funções complexas auxiliares para complementar alguma teoria. Assim se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, então existem funções reais unicamente determinadas $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$f(x) = u(x) + iv(x), \quad \forall x \in \Omega;$$

$u = \operatorname{Re} f$ é a parte real de f e $v = \operatorname{Im} f$ é a parte imaginária de f . Onde temos que a função f é contínua (respectivamente diferenciável) em x se e somente se, u e v são contínuas (respectivamente diferenciável) em x . Além disso, a função f pode ser integrada em relação a uma das variáveis, por exemplo x_1 , no intervalo $[a, b]$ se e somente se, u e v são integráveis e vale

$$\int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 = \int_a^b u(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 + i \int_a^b v(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1.$$

Veremos que os autovalores do problema (2.8) são sempre reais e positivos, visto que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor e se φ for uma autofunção associada ao autovalor então $\varphi \in C_{\mathbb{C}}^2((0, l)) \cap C_{\mathbb{C}}([0, l])$. Sendo $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ e como $\varphi'' = -\lambda \varphi$ temos que existem os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi''(x) = -\lambda \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = -\lambda \varphi(0) = 0,$$

e

$$\lim_{x \rightarrow l^-} \varphi''(x) = -\lambda \lim_{x \rightarrow l^-} \varphi(x) = -\lambda \varphi(l) = 0.$$

Por outro lado, como φ é contínua em um intervalo fechado temos

$$\lambda \int_0^x \varphi(y) dy = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^x \varphi''(y) dy = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\varphi'(x) - \varphi'(a)]$$

e

$$\lambda \int_x^l \varphi(y) dy = \lim_{b \rightarrow l^-} \int_x^b \varphi''(y) dy = \lim_{b \rightarrow l^-} [\varphi'(b) - \varphi'(x)],$$

portanto os limites

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \varphi'(a) \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow l^-} \varphi'(b),$$

existem. Logo podemos integrar as funções φ'' e φ' no intervalo $[0, l]$. Então considerando a Proposição 1.2.1, usando a EDP (2.1) e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \lambda(\varphi|\varphi) &= (\lambda \varphi|\varphi) = (-\varphi''|\varphi) = - \int_0^l \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} \int_a^b \varphi''(x) \overline{\varphi(x)} dx \\ &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} \left[\varphi'(x) \overline{\varphi(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) \overline{\varphi'(x)} \right] \\ &= - \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} [\varphi'(b) \overline{\varphi(b)} - \varphi'(a) \overline{\varphi(a)}] + \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx \\ &= (\varphi'|\varphi'). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Como a única solução constante do problema (2.8) é $\varphi = 0$ temos que $(\varphi'|\varphi') > 0$ logo $\lambda > 0$. Note que se φ_1 e φ_2 são autofunções de (2.8) correspondentes a autovalores λ_1 e λ_2 distintos então φ_1 e φ_2 são ortogonais com relação ao produto interno (1.1), isto é $(\varphi_1|\varphi_2) = 0$. Assim aplicando o produto interno (1.1), integrando por partes duas vezes e

tomando a condição de contorno $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\varphi_1|\varphi_2) &= (\lambda_1 \varphi_1|\varphi_2) = (-\varphi_1''|\varphi_2) = -\int_0^l \varphi_1''(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \\
&= -\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} \int_a^b \varphi_1''(x) \overline{\varphi_2(x)} dx \\
&= -\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} \left[\varphi_1'(x) \overline{\varphi_2(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \varphi_1'(x) \overline{\varphi_2'(x)} dx \right] \\
&= -\lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow l^-}} [\varphi_1'(b) \overline{\varphi_2(b)} - \varphi_1'(a) \overline{\varphi_2(a)}] - \int_0^l \varphi_1'(x) \overline{\varphi_2'(x)} dx \\
&= -\int_0^l \varphi_1'(x) \overline{\varphi_2'(x)} dx \\
&= \varphi_1(x) \overline{\varphi_2'(x)} \Big|_0^l - \int_0^l \varphi_1(x) \overline{\varphi_2''(x)} dx \\
&= \varphi_1(l) \overline{\varphi_2'(l)} - \varphi_1(0) \overline{\varphi_2'(0)} - \int_0^l \varphi_1(x) \overline{\varphi_2''(x)} dx \\
&= -\int_0^l \varphi_1(x) \overline{\varphi_2''(x)} dx \\
&= (\varphi_1| -\varphi_2'') = (\varphi_1|\lambda_2 \varphi_2) = \lambda_2(\varphi_1|\varphi_2).
\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ temos que $(\varphi_1|\varphi_2) = 0$. Assim consideraremos a existência de autovalores e autofunções reais para o problema (2.8). Então considerando $\lambda > 0$ temos $\varphi''(x) + \lambda \varphi(x) = 0$, $0 < x < l$, onde aplicando o método da equação característica obtemos

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Assim a solução geral da EDO (2.8) é dada por

$$\varphi(x) = c_1 \cos(x\sqrt{\lambda}) + c_2 \sen(x\sqrt{\lambda}), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

Usando as condições de contorno dadas na equação (2.8), obtemos

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(0\sqrt{\lambda}) + c_2 \sen(0\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow c_1 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

e

$$\varphi(l) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(l\sqrt{\lambda}) + c_2 \sen(l\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Como $c_1 = 0$ temos que

$$c_2 \sen(l\sqrt{\lambda}) = 0,$$

logo $c_2 = 0$ ou $\text{sen}(l\sqrt{\lambda}) = 0$. Se $c_2 = 0$ então obtemos novamente a solução trivial. Por outro lado se $\text{sen}(l\sqrt{\lambda}) = 0$ então como $\varphi \neq 0$ e $c_2 \neq 0$, temos

$$\text{sen}(l\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2.$$

Portanto

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

são os autovalores do problema (2.8) e

$$\varphi_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l] \quad (2.13)$$

são as autofunções associadas. Resolvendo agora a EDO (2.9) para $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\psi'(t) + \alpha^2 \lambda \psi(t) = 0.$$

Aplicando o método de separação de variáveis para EDOs, obtemos a seguinte solução

$$\psi(t) = ke^{-\alpha^2 \lambda t} \Rightarrow \psi_n(t) = k \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

Portanto a solução para a equação (2.1) considerando apenas as condições de contorno é dada por $u(x, t) = \varphi(x) \psi(t)$, substituindo as equações (2.13) e (2.14) em $u(x, t)$ obtemos uma solução para cada n isto é,

$$u_n(x, t) = k \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

$k \in \mathbb{R}$. Usando o princípio da superposição (Proposição 1.3.1), obtemos

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t\right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0. \quad (2.16)$$

Note que sem a análise da convergência e da diferenciabilidade termo a termo de u , (2.16) é candidato a solução do problema (2.8). Aplicando a condição inicial, ou seja, $u(x, 0) = f(x)$ temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} 0\right)$$

que implica

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad x \in [0, l]. \quad (2.17)$$

Veja que obtemos uma série de Fourier de senos, ou seja, para resolver o problema (2.1) temos que as funções $f \in C[(0, l)]$ devem ser expressas por uma série de Fourier de senos. O cálculo dos coeficientes b_n conhecendo a f são dados pela equação (1.35), isto é,

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \text{sen}\frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Uma outra forma de calcular os coeficientes b_n é usando as autofunções φ_n e φ_m com $m \neq n$ visto que como correspondem a autovalores distintos elas são portanto ortogonais com relação ao produto interno (1.1). Assim tomando o produto interno de φ_n e f , aplicando a Proposição 1.2.4 e sabendo que $\varphi_m = \text{sen} \frac{m\pi x}{l}$ temos

$$\begin{aligned}(f|\varphi_n) &= \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \varphi_m \right) | \varphi_n \right) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\varphi_m | \varphi_n) \\ &= b_n (\varphi_n | \varphi_n) = b_n \int_0^l \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx \\ &= b_n \frac{l}{2}\end{aligned}$$

portanto,

$$(f|\varphi_n) = b_n \frac{l}{2} \Rightarrow b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx. \quad (2.18)$$

Como $f \in C([0, l])$ temos que os coeficientes b_n , $n \in \mathbb{N}$ estão bem definidos. Note também que não foram feitas nenhuma análise sobre a convergência das séries (2.16) e (2.17). No próximo capítulo faremos esta análise. Portanto obtemos um candidato a solução do problema (2.1)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0, \quad (2.19)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.20)$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [0, l]. \quad (2.21)$$

Exemplo 2.1.1. *Determine a temperatura $u(x, t)$ em cada ponto de uma barra de comprimento, 50 cm que satisfaz a equação diferencial:*

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & \text{em } (0, 50) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0 = u(50, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 20, & x \in [0, 50]. \end{cases},$$

onde temos que as extremidades $x = 0$ e $x = 50$ são mantidas à temperatura 0°C , para todo $t > 0$; a barra está inicialmente à temperatura 20°C , uniforme em toda a barra e a barra é feita de um material cuja difusividade térmica é $\alpha^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$. Com efeito, como a difusividade térmica é $\alpha^2 = 1 \text{ cm}^2/\text{s}$; o comprimento da barra é $l = 50 \text{ cm}$ e a temperatura inicial é de 20°C , ou seja, $F(x) = 20$, basta então calcular apenas os coeficientes b_n . Logo

aplicando a equação (2.20) temos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) dx = \frac{2}{50} \int_0^{50} 20 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) dx \\ &= \frac{40}{50} \int_0^{50} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{50} \right) dx = \frac{40}{50} \left(-\frac{50}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{50} \right) \Big|_0^{50} \\ &= -\frac{40}{n\pi} (\cos(n\pi) - 1). \end{aligned}$$

Note que

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots, 2k + 1 \\ 1 & \text{se } n = 0, 2, 4, \dots, 2k, \end{cases}$$

$k \in \mathbb{N}$. Assim se $n = 2k$ então $\cos(n\pi) - 1 = 0$ o que não nos interessa. Por outro lado, fazendo $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ obtemos $\cos(n\pi) - 1 = -2$. Portanto

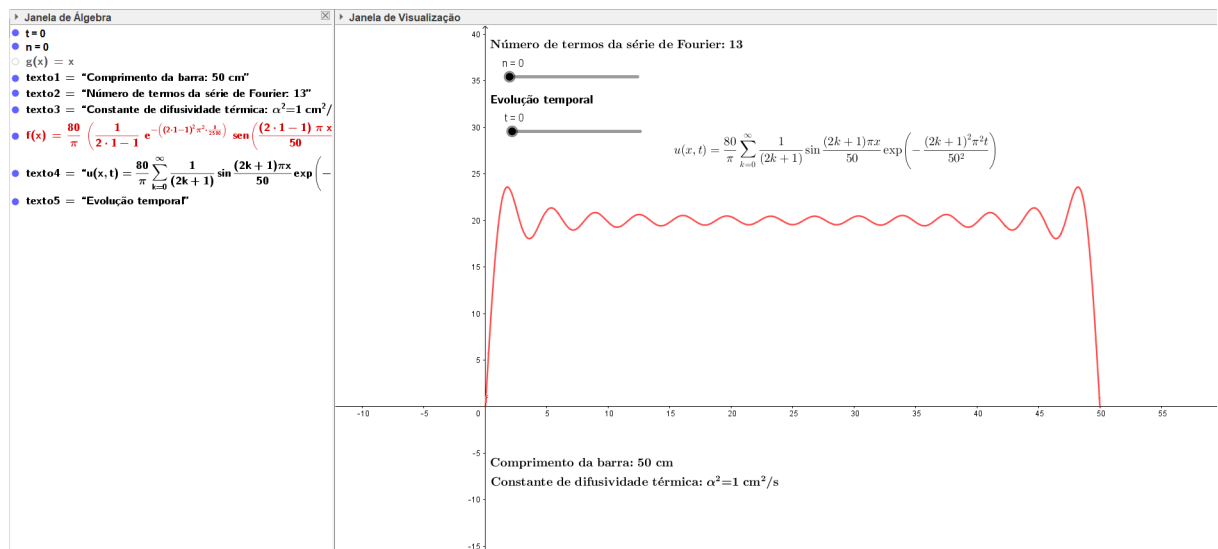
$$b_n = -\frac{40}{n\pi}(-2) \Rightarrow b_n = \frac{80}{(2k + 1)\pi}. \quad (2.22)$$

Substituindo a equação (2.22) juntamente com os dados do problema na equação (2.19), temos a solução geral do problema

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k + 1} \operatorname{sen} \left(\frac{(2k + 1)\pi x}{50} \right) \exp \left(-\frac{(2k + 1)^2 \pi^2}{50^2} t \right), \quad x \in [0, 50], \quad t \geq 0. \quad (2.23)$$

Para a interpretação geométrica do Exemplo 2.1.1 utilizando o Geogebra veja a Figura 2.1.

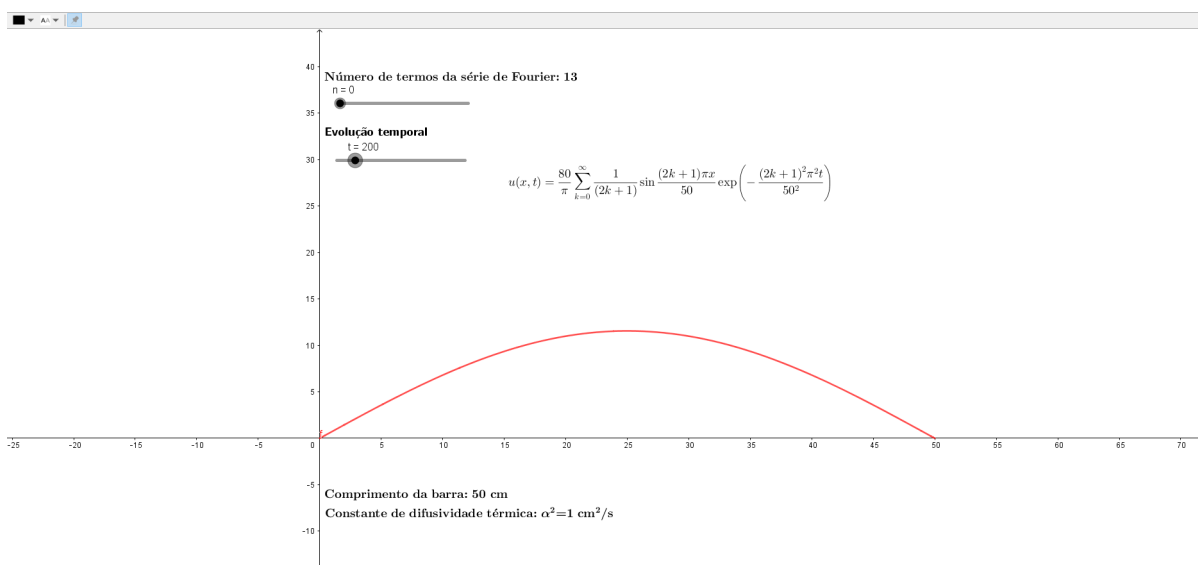
Figura 2.1: Interpretação geométrica do problema



Fonte: Elaborada pelo autor.

Intuitivamente temos que a equação do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ representa que em cada ponto $x \in [0, 50]$ a taxa de variação da temperatura é proporcional à concavidade x do gráfico. Note também que na janela de Álgebra definimos a solução geral da equação do calor, no entanto avaliamos a situação no instante $t = 0$, isto é, a temperatura inicial da barra que é $20^\circ C$. Note que para cada t fixado obtemos o gráfico do perfil de temperatura $u(x, t)$ em cada ponto $x \in [0, 50]$. Veja a Figura 2.2, para $t = 200$.

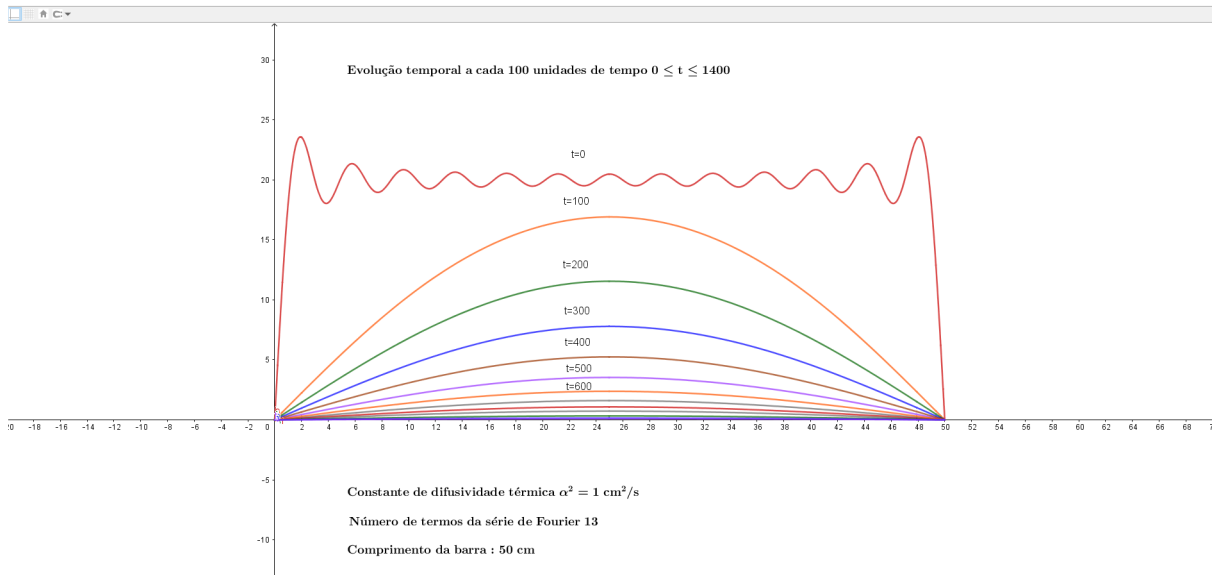
Figura 2.2: Interpretação geométrica do problema quando $t = 200$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A medida que o tempo vai evoluindo temos que a curva do gráfico vai convergindo para uma linha reta, que é o equilíbrio térmico, ou seja, a temperatura $u(x, t)$ no ponto x no instante t (Gráfico em Vermelho) vai diminuindo. Veja a Figura 2.3

Figura 2.3: Interpretação geométrica do problema quando $t \rightarrow \infty$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim se tomarmos $t \rightarrow \infty$ então temos que toda a barra tende ao equilíbrio térmico, isto é, a barra encontra-se sobre a mesma temperatura em cada ponto $x \in [0, 50]$.

Capítulo 3

A Equação do Calor

Neste capítulo complementaremos alguns resultados que foram vistos no capítulo anterior, sobretudo problemas envolvendo a equação do calor a uma dimensão espacial. Para isso utilizaremos aqui os livros de (IÓRIO, 2005) e (FIGUEIREDO, 1977).

3.1 De Volta ao Problema de Transmissão de Calor

Vimos no capítulo anterior o seguinte problema da equação do calor a uma dimensão espacial

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & \text{em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ u(0, t) = 0 = u(l, t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, l] \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $f \in C([0, l])$ satisfaz a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(l)$. Aplicando o método de separação de variáveis obtivemos um candidato a solução do problema (3.1) que é dado por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0, \quad (3.2)$$

onde

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.3)$$

e

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [0, l]. \quad (3.4)$$

No entanto não foram feitas nenhuma análise a respeito da convergência das séries (3.2) e (3.4). Assim enunciaremos e provaremos a seguir dois importantes resultados sobre a equação do calor. No primeiro veremos que o candidato a solução do problema (3.1) converge para u , enquanto que no segundo resultado mostraremos que ele é único.

Teorema 3.1.1. *Seja $f \in C([0, l])$ satisfazendo a condição de compatibilidade $f(0) = 0 = f(l)$ e suponha que f é diferenciável em $[0, l]$ a menos de um número finito de pontos com $f' \in SC([0, l])$. Então a série em (3.2) converge uniformemente em $[0, l] \times [0, +\infty]$ para uma função $u \in C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$ que é solução do problema (3.1)*

Demonstração. Suponhamos que a série (3.4) converge em todo o intervalo $[0, l]$. Tendo em vista que a função seno é ímpar e que o termo geral da série (3.4) é dado por

$$b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [0, l]$$

então fazendo a extensão ímpar e periódica de período $2l$ da f , temos que a série (3.4) é a série de Fourier da F , onde F é a extensão ímpar e periódica de período $2l$ da f , além disso ela convergirá em toda a reta a uma função ímpar e periódica de período $2l$. Por outro lado, pelo Lema de Riemann-Lebesgue (Corolário 1.4.1) a sequência $\{b_n\}$ dada por

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right), \quad n \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

dos coeficientes de Fourier reais da F é limitada e como

$$\exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow +\infty$$

temos que a série (3.2) converge uniformemente em $[0, l] \times [\varepsilon, +\infty]$ para todo $\varepsilon > 0$. Assim substituindo (3.5) em (3.2) podemos reescrever a equação (3.2) para o caso em que $t > 0$, isto é

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^n b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \\ &= \sum_{n=1}^n \frac{2}{l} \int_0^l f(y) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) dy \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \\ &= \int_0^l f(y) \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \right] dy \end{aligned}$$

onde fazendo

$$k(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{l} \sum_{n=1}^n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

temos

$$k(x, y, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right). \quad (3.6)$$

Assim obtemos

$$u(x, t) = \int_0^l f(y) k(x, y, t) dy,$$

onde $k(x, y, t)$ é denominado núcleo do calor do problema (3.1). Veja que a série em (3.6) converge uniformemente em $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$ para quaisquer $\varepsilon > 0$ e além disso

$k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty))$. Tendo em vista que $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos em particular que $k \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, +\infty))$. Portanto derivando dentro do sinal da integral (Teorema 1.1.1) temos que $u \in C^\infty([0, l] \times (0, +\infty))$. Por outro lado derivando a série (3.6) termo a termo (Teorema 1.1.2) temos que k satisfaz a equação do calor

$$k_t = \alpha^2 k_{xx}. \quad (3.7)$$

De fato, derivando k com relação a t temos

$$k_t = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \right) \quad (3.8)$$

e derivando k com relação a x duas vezes, obtemos

$$k_{xx} = -\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2}. \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.8) e (3.9) em (3.7) temos

$$\begin{aligned} k_t - \alpha^2 k_{xx} &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \right) \\ &\quad - \alpha^2 \left[-\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right] \\ &= -\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \left(\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} \right) \\ &\quad + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{l} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) \left(\frac{n^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto u satisfaz a equação do calor em $[0, l] \times (0, +\infty)$. Note também que usando (3.2), com $t > 0$ temos $u(0, t) = u(l, t) = 0$, pois

$$u(0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi 0}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) = 0$$

e

$$u(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi l}{l} \right) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

que implica em

$$u(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} (n\pi) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right).$$

Como $\operatorname{sen} (n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$u(l, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} (n\pi) \exp \left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{l^2} t \right) = 0.$$

Se $t = 0$ então temos que a equação (3.2) fica

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{l} \right), \quad x \in [0, l].$$

Como por hipótese f é diferenciável a menos de um número finito de pontos em $(0, l)$ com $f' \in SC([0, l])$, então pelo Teorema da convergência uniforme da série de Fourier (Teorema 1.4.2) temos que a série de Fourier da f converge uniformemente e portanto a série (3.2) converge uniformemente em $[0, l] \times [0, +\infty)$. Assim concluímos que u é contínua no segmento de reta $t = 0$ com $0 \leq x \leq l$ e satisfaz o problema (3.1). \square

Observação 3.1.1. *Se no entanto $f \in SC([0, l])$ em vez de contínua, com $f' \in SC([0, l])$ e considerarmos que*

$$f(x) = \frac{[f(x^+) + f(x^-)]}{2}, \quad \text{para todo } x \in (0, l),$$

e $f(0) = f(l) = 0$ então a série de Fourier converge pontualmente para f . Note que ainda que a convergência não seja uniforme a série (3.2) converge uniformemente em $\mathbb{R} \times [\varepsilon, +\infty)$ e define uma função contínua em $C^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ que é solução de (3.1). Maiores detalhes poderão ser encontrados em (IÓRIO, 2005).

Definição 3.1.1. *Sejam $f(x, y)$ uma função real e $y : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Definimos a integral de energia $E(y)$ como sendo*

$$E(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx,$$

em que $y = y(x)$.

Teorema 3.1.2. *Se o problema (3.1) tiver solução em $C([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C^2((0, l) \times (0, +\infty))$ ela será única.*

Demonstração. Suponhamos que $u \in C^2([0, l] \times [0, +\infty)) \cap C([0, l] \times (0, +\infty))$ é solução do problema (3.1), então aplicando a teoria das integrais de energia, isto é,

$$E(t) = \int_0^l (u(x, t))^2 dx, \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

temos que E é contínua em $[0, +\infty)$ e diferenciável em $(0, +\infty)$. Assim derivando a equação com relação a variável t , usando a EDP do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_0^l 2u(x, t) u_t(x, t) dx = \int_0^l 2\alpha^2 u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= 2\alpha^2 \int_0^l u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= 2\alpha^2 \left[(u(x, t) u_x(x, t)) \Big|_0^l - \int_0^l u_x(x, t) u_x(x, t) dx \right] \\ &= 2\alpha^2 \left[(u(l, t) u_x(l, t) - u(0, t) u_x(0, t)) - \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como $u(l, t) = u(0, t) = 0$, obtemos

$$E'(t) = -2\alpha^2 \int_0^l (u_x(x, t))^2 dx \leq 0. \quad (3.12)$$

Logo a função E é decrescente. Em particular temos que

$$0 \leq E(t) = \int_0^l (u(x, t))^2 dx \leq E(0) = \int_0^l (f(x))^2 dx, \quad (3.13)$$

pois, como $u(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in [0, l]$ segue que

$$E(0) = \int_0^l (u(x, 0))^2 dx = \int_0^l (f(x))^2 dx.$$

Por outro lado se $v \in C^2((0, l) \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$ é outra solução de (3.1) então pelo Princípio da Superposição (Proposição 1.3.1) temos que $w = u - v$ é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx}, & \text{em } (0, l) \times (0, +\infty), \\ w(0, t) = 0 = w(l, t), & t \geq 0, \\ w(x, 0) = 0, & x \in [0, l]. \end{cases} \quad (3.14)$$

Note que o problema acima é do mesmo tipo do problema (3.1) com $f \equiv 0$, assim vale a equação (3.13) com $w = u$ e $f = 0$, isto é

$$0 \leq E(t) = \int_0^l (w(x, t))^2 dx \leq E(0) = \int_0^l (f(x))^2 dx = 0.$$

Logo temos que $w \equiv 0$ que implica em $u \equiv v$.

□

Conclusão

Neste trabalho podemos observar a importância de diversos resultados que geralmente ficam implícitos no estudo de equações diferenciais, em particular para este trabalho, equações diferenciais parciais. Tópicos relacionados a análise no \mathbf{R}^n , álgebra linear e séries de Fourier que são primordiais no estudo de EDPs em muitos casos não são trabalhados e tornam o estudo de EDPs mecânico, utilizando apenas as aplicações e deixando de lado toda parte teórica. Vale ressaltar que o estudo de EDPs é muito amplo e abrange muitos tópicos além dos já mencionados.

Vimos também um método de resolução de EDPs, conhecido como método de separação de variáveis, que nos permitiu reescrever a EDP em uma nova equação de tal forma que conseguimos separar as variáveis em lados opostos da equação e caímos em duas EDOs e após manipulações chegamos em uma série trigonométrica, e aí usamos das séries de Fourier para chegar na solução do problema.

Neste trabalho utilizamos o software Geogebra como um facilitador para o estudo e análise gráfica das séries de Fourier, além disso apresentamos um exemplo que nos ajudou a entender um dos teoremas de convergência das séries de Fourier. Usamos também o Geogebra para observar o comportamento gráfico da solução da equação do calor à medida que o tempo vai aumentando.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, Willian E; DiPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9^a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [2] BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 315-340.
- [3] CARSLAW, Horatio Scot. **Introduction to the theory of Fourier's series and integrals**. 2nd ed. London: Mcmillan, 1921. p. 196-280.
- [4] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.
- [5] FIGUEREIDO, Djairo Guedes de. **Análise de Fourier e Equações diferenciais parciais**. 4^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1977.
- [6] GEOGEBRA. **O que é o Geogebra**. Disponível em: <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 29 ago. 2021.
- [7] HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. 2.ed. New Jersey: PRENTICE-HALL, INC. Englewood Cliffs, 1971.
- [8] IÓRIO, Valéria. **EDP: Um curso de graduação**. 2.ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2005.
- [9] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**; v.1. 12^a ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2009.
- [10] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**; v.2. 12^a ed. Rio de Janeiro; IMPA, 2009.
- [11] SÃO PAULO, I. G. **Sobre o Geogebra**. Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia (PUC-SP). Disponível em: <http://www.pucsp.br/Geogebra/Geogebra.html>. Acesso em: 20 de maio de 2021.
- [12] VARRIALE, Maria Cristina. **Equações Diferenciais Parciais**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/czrab7ju>. Acesso em: 20 de maio de 2022.