UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO – PPG
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

OLEGARIO KLEITON COSTA PENHA

AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES NO MODELO EPIDÊMICO SIR

São Luís
2021

OLEGARIO KLEITON COSTA PENHA

AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES NO MODELO EPIDÊMICO SIR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus.

São Luís

2021

Penha, Olegario Kleiton Costa.

As funções exponenciais e suas aplicações no modelo epidêmico SIR / Olegario Kleiton Costa Penha. – São Luís, 2021.

52 f

Dissertação (Mestrado Profissional) – Curso de Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual do Maranhão, 2021.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Nolêto Turibus.

1.Função exponencial. 2.Epidemia. 3.Modelo SIR. I.Título.

CDU: 517.518.83

Elaborado por Giselle Frazão Tavares - CRB 13/665

OLEGARIO KLEITON COSTA PENHA

AS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E SUAS APLICAÇÕES NO MODELO EPIDÊMICO SIR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Estadual do Maranhão (UEMA), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus.

São Luís - MA, 28 de outubro de 2021

BANCA EXAMINADORA

Sergio Nolêto Turibus

Prof. Dr. Sergio NolêtoTuribus
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Felix Silva Costa

Prof. Dr. Felix Silva Costa
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Valeska Martins de Souza

Profª. Drª. Valeska Martins de Souza
Universidade Federal do Maranhão - UFMA

Dedico este trabalho a minha família e amigos que sempre me incentivaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pelo dom da vida e por guiar-me até aqui, por permitir a conclusão de mais um sonho realizado, ser mestre do saber matemático.

Agradeço à minha mãe Osmarina Costa Penha pelo incentivo constante desde dos primeiros anos iniciais escolar até o presente momento, aos meus irmãos Delfino Costa Penha, Janaína Costa Penha e de forma muito especial, Adeildo Costa Penha que não está mais conosco neste plano, mas está eternizado na minha vida com uma frase que me disse quando eu tinha apenas 12 anos: “ eu estudo porque o conhecimento é a única coisa que levarei quando partir. ”

Agradeço à minha esposa Andrea Sousa Cutrim Penha pela força constante sem a qual seria muito difícil chegar até aqui e aos meus filhos Benjamin e Olivia, presentes de Deus na minha vida e a minha cunhada Alessandra Sousa Cutrim pelo incentivo e apoio durante a elaboração do trabalho.

Agradeço ao meu orientador profº. Sergio Noleto Turibus pelas preciosas orientações e pela paciência no decorrer da elaboração dessa dissertação. Sem o seu olhar de especialista e intervenções precisas não teria chegado no produto final.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro, indispensável para suprir a demanda do curso.

Agradeço aos meus amigos da turma do PROFMAT 2019 pelo apoio constante, encorajamento e parceria que deu muito certo ao longo desses dois anos de estudo.

Agradeço à minha Igreja Presbiteriana Independente pela orações e incentivo, sem os quais teria desistido de chegar ao final dessa jornada acadêmica.

Obrigado Deus mais uma vez pelo privilégio de concluir mais um objetivo de vida.

“Mas, como está escrito: Nem olhos viram, nem ouvidos ouviram, nem jamais penetrou em coração humano o que Deus tem preparado para aqueles que o amam".

(1 Cor 2.9)

RESUMO

Este trabalho consiste em apresentar diversas aplicações das funções exponenciais no âmbito interdisciplinar e os seus descritores segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nesse sentido, utiliza-se da modelagem matemática que pode servir como ferramenta essencial para a resolução de problemas que afetam a humanidade, assim como também a epidemiologia matemática. Esta se concentra em quantificar aspectos biológicos da propagação de epidemias, enquanto que o modelo matemático epidêmico SIR (suscetíveis, infectado e recuperado) consiste em mostrar o resultado a curto, médio e longo prazo de uma pandemia através de equações diferenciais, parâmetros, função exponencial, gráficos e simulações, usando a linguagem *Python*, através do *Google Colaboratory* ou *Google Colab*. Essas simulações gráficas foram feitas usando os dados reais da Covid-19 nos municípios de São Luís, São José de Ribamar, Paço do Lumiar e Raposa. Posteriormente, foi feita a análise dos gráficos, realizando-se a comparação dos resultados para o alcance de conclusões do comportamento da doença em cada cidade e um ajuste de curvas.

Palavras-chave: Função Exponencial. Epidemia. Modelo SIR.

ABSTRACT

This work consists of presenting several applications of exponential functions in the interdisciplinary scope and their descriptors according to the Base Nacional Comum Curricular (BNCC) - Common National Curriculum Base (CNCB). In this sense, it uses mathematical modeling that can be served as an essential tool for solving problems that affect humanity, as well as mathematical epidemiology. It focuses on quantifying biological aspects of the spread of epidemics, while the SIR epidemic mathematical model (susceptible, infected and recovered) consists of showing the short, medium and long-term results of a pandemic through differential equations, parameters, exponential function, graphics and simulations, using the python language, through *Google Colaborative* or *Google Colab*. These graphic simulations were made using real data from Covid-19 in the municipalities of São Luís, São José de Ribamar, Paço do Lumiar and Raposa. Subsequently, the graphs were analyzed, comparing the results to reach conclusions about the behavior of the disease in each city and a curve fitting.

Keywords: Exponential function. Epidemic. Model SIR.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho consiste em tratar da relevância das funções exponenciais em um contexto mais amplo, interligando-as com outras áreas do conhecimento como na Biologia, na Física e em outros assuntos da própria Matemática.

Além disso, visa mostrar a possibilidade de aplicações práticas na vida do discente que podem vir a motivá-lo a estudar as funções com mais interesse, uma vez que estarão ligadas diretamente a sua vida social, conforme determina os parâmetros curriculares nacionais (PCN's).

Nesse sentido, para Dante e Viana (2020) uma das aplicações das funções exponenciais refere-se ao comportamento da curva da doença Covid-19, causada por um vírus, do grupo corona vírus, chamado Sars-CoV-2 (*severe acute respiratory syndrome*, síndrome respiratória aguda grave, em português), mostrada todos os dias nos meios midiáticos como jornal e internet nas cidades do mundo. Particularmente, este trabalho propõe mostrar a curva de crescimento da Covid-19 nas cidades de São Luís, São José de Ribamar, Paço do Lumiar e Raposa, do estado do Maranhão, através da simulação usando a linguagem de programação *Python* por meio da ferramenta *Google Colab.*

A palavra epidemiologia etimologicamente vem do grego,epi (sobre) demos (povo) e logos (estudo), assim significa o estudo sobre a população, mas também podemos caracterizá-la como o estudo sobre a ciência das epidemias. Para Martcheva (2015, p1), a epidemiologia é o estudo de padrões de saúde/doença e fatores associados, relativos ás populações humanas.

Na prática, a epidemiologia Matemática trata-se de quantificar hipóteses dos fenômenos relacionados a propagação de doenças e fatores determinantes no avanço da disseminação. Além disso, o comportamento desses fenômenos é estudado por diversos modelos epidêmicos dos quais o que mais se destaca é o modelo SIR (suscetíveis - S; infectados - I; recuperados - R), que utiliza as equações diferenciais ordinárias ou equação diferença e funções exponenciais para análise de dados e conclusões.

Neste trabalho foi usado o modelo SIR para o estudo da pandemia da Covid-19, nas cidades de São Luís, São José de Ribamar, Paço do Lumiar e Raposa, municípios do estado do Maranhão que compõem a região metropolitana da ilha de

São Luís. Nesse sentido, foi feito um comparativo do avanço da doença nessas cidades, fazendo simulações que auxiliaram na compreensão da curva de crescimento ou da queda da pandemia. Dessa forma, a partir desses resultados e análise, pode-se projetar uma realidade futura para cada cidade em estudo.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 As funções exponenciais no ensino médio

As funções elementares de modo geral têm sua relevância na Matemática do ensino médio, tendo em vista que dão suporte em outras áreas do conhecimento. Embora seja dada um destaque maior às funções afim e quadrática, devido suas diversas aplicabilidades, a função exponencial também tem sua importância e aplicabilidade, embora muita das vezes não é ensinada, devido ser uma das últimas funções da grade curricular do 1º ano do ensino médio.

Uma dessas aplicabilidade, segundo Lima (2013, p. 110),

> [...] ocorre quando se estuda a desintegração radioativa. Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio e o urânio, por exemplo) tendem a se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se noutra substância. As partículas emitidas não alteram significativamente a massa total do corpo, mas, com o passar do tempo, a quantidade da substância original diminui (aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada.

Essa situação é apresentada em maiores detalhes no decorrer desse trabalho, para tanto faz-se necessário rever potenciação para que haja um entendimento da função exponencial.

2.1.1 Potenciação

Antes de apresentar o conteúdo, normalmente é feito uma revisão geral de potenciação, tratando do conceito, propriedades e uma sequência de exercícios de fixação, que facilitarão na compreensão e resolução dos problemas envolvendo função exponencial.

Potenciação é a operação Matemática que envolve o produto de fatores iguais. Assim sendo, temos: seja a um número real e n um número natural maior do que 1:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}_{n\ vezes} \tag{1}$$

Normalmente nos livros didáticos aparecem as propriedades da potenciação e radiciação, mas Lopes (1998), em seu livro Manual das funções exponenciais e logarítmicas, chama de propriedades da função exponencial. Considerando $0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1, m, n \in N$ e $x, y \in \mathbb{R}$:

i. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
ii. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
iii. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ e $a^0 = 1$;
iv. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
v. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;
vi. $(a^x)^y = a^{x.y}$;
vii. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$;
viii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
ix. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

Com conhecimento dessas propriedades supracitadas é possível avançarmos nos estudos das funções exponenciais, sem maiores problemas.

2.1.2 Conceito e abordagem

Seja a um número real tal que $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$. Chama-se função exponencial de base a à função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ que associa a cada número real x o único número real a^x. Segue a notação da função:

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ & x \mapsto f(x) = y = a^x \end{aligned} \tag{2}$$

O domínio da função são os números reais e o contradomínio é o conjunto dos reais positivos, pois $a > 0$ e $a^x > 0$ para todo x pertencente aos reais. Seguem alguns exemplos de funções exponenciais:

$$y = 2^x; \quad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \tag{2.1}$$

No tocante ao gráfico da função exponencial $f(x) = a^x$, Machado (2010) na sua obra Temas e Metas, faz uma análise do domínio dos naturais aos reais, observando a construção do gráfico, ponto a ponto, até finalmente chegar a curva, ao considerar o domínio os reais. Interessante essa abordagem para o aluno para que ele entenda melhor a definição e a construção gráfica.

Nesse estudo, há dois tipos de comportamento da curva. Quando $a > 0$ e $a \neq 1$, temos duas possibilidades: $a > 1$ e $a < 1$. Nos casos em que $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é sempre crescente e se $a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é sempre decrescente. Como mostra os exemplos 2.1 e 2.2.

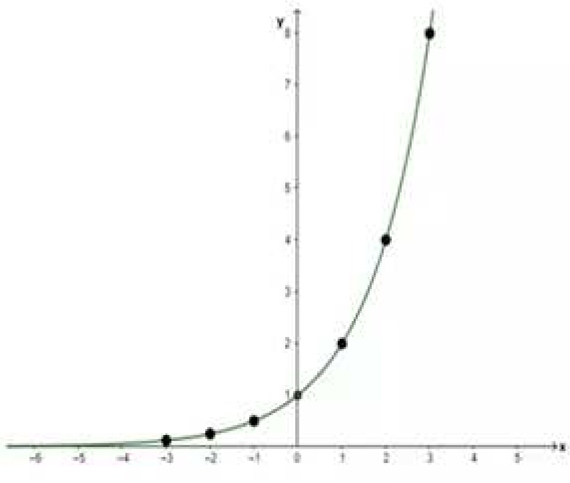
Exemplo 2.1:Seja $f(x) = 2^x$ para encontrar 7 pares ordenados pertencentes ao gráfico da função, é usado alguns valores de x como mostra a tabela 2.1.

Tabela 2.1 — $f(x) = 2^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8

Fonte: O autor (2021)

Figura 2.1 — Representação gráfica da função $f(x) = 2^x$



Fonte: O autor (2021)

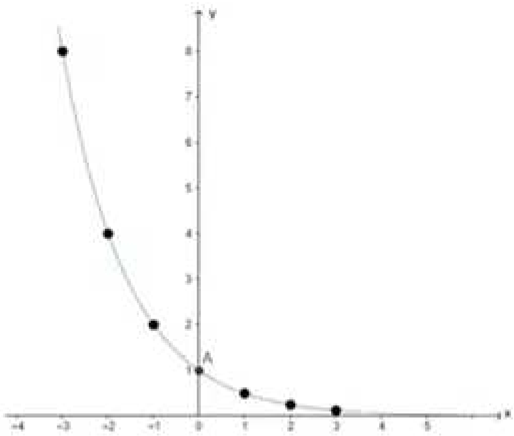
Exemplo 2.2: Seja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ para encontrar 7 pares ordenados pertencentes ao gráfico da função, é usado alguns valores de x como mostra a Tabela 2.2.

Tabela 2.2 — $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8

Fonte: O autor (2021)

Figura 2.2 — Representação gráfica da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Fonte: O autor (2021)

Observa-se em ambos os gráficos que o domínio $\mathbb{R}$ e o contradomínio $\mathbb{R}_+^*$. O que implica dizer que o gráfico não intercepta o eixo x, pois é uma assíntota em relação a curva exponencial e a função f é injetora e sobrejetora, logo é bijetora, admitindo a sua inversa.

Analisando as figuras 2.1 e 2.2 é possível verificar as seguintes propriedades para funções exponenciais, tais como:

1. Para $a > 0$ e $a \neq 1$, vale $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
2. A função $f(x) = a^x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$. Daí, temos: $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

3. A função $f(x) = a^x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$. Daí, temos: $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.

A primeira propriedade é usada para resolver as equações exponenciais enquanto que a segunda e a terceira são usadas para resolver inequações exponenciais.

Ainda existe um outro modelo de função exponencial $f(x) = ba^x$, denominada função tipo exponencial, muito comum aparecer em situações problemas da sociedade, como em aplicações financeiras. Por isso, é fundamental a compreensão dos seus coeficientes que na maioria das vezes não são trabalhados no ensino médio, a não ser quando aparecem nos problemas.

Nesse sentido, segue a análise dos coeficientes. Note que para $x = 0$, teremos $f(0) = b$. O valor de b representa o valor inicial da função, admitindo que a contagem inicia com $x = 0$. No entanto, a função do "a" demanda um estudo mais cauteloso e analítico. Para facilitar a compreensão, Alves (2019) apresenta um exemplo simples para fixar ideias: Se aplicarmos $R\$\ 1.000{,}00$ e terminamos com $R\$\ 1.200{,}00$, qual o significado da conta $\frac{1200}{1000} - 1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2 = \frac{20}{100}$? É obvio que o valor 0,2 representa o ganho percentual da aplicação.

Agora, com essa mesma ideia, faz-se o quociente com função exponencial, vejamos:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1 = \frac{b \cdot a^{x+h}}{b \cdot a^x} - 1 = a^h - 1 \qquad (2.2)$$

Isso significa que o quociente não depende de x, mas exclusivamente da variação de h. Considerando $h = 1$ e $\frac{f(x+h)}{f(x)} = a^h$, substituindo teremos o valor igual a "a", o que implica dizer que variando uma unidade em x, a função fica multiplicada por a, uma vez que $f(x+1) = f(x).a$.

Dessa forma nas funções tipo exponencial, a razão entre o valor final e o valor inicial é constante, o que se traduz em crescimento percentual igual para incrementos iguais. Para ratificar essa conclusão, tomando como exemplo a função $f(x) = 2^x$ e fazendo $\frac{f(1+1)}{f(1)} - 1 = 2^1 - 1 = 1$, isso se repete sempre que fizermos a razão em que x varia uma unidade. Vale ressaltar ainda que a função aumenta 100% ou simplesmente fica multiplicada por 2, valor de a.

2.2 Aplicações das funções exponenciais

As funções exponenciais de maneira geral têm uma conexão com diversas áreas do conhecimento como a Biologia, a Química, a Economia e em diversos assuntos da Matemática. Além disso tem aplicabilidade em várias situações do cotidiano, como no caso da curva de crescimento da covid-19 que será enfatizado nesse estudo, como também na estimativa do crescimento ou decrescimento populacional como veremos a seguir.

2.2.1 Aplicações

Tratando-se do número de habitantes de uma cidade, a análise das relações entre taxas de natalidade e de mortalidade; excluindo-se fatores externos, tais como: taxa de emigração e imigração, desastres naturais ou guerras; determina se uma população vai crescer ou decrescer exponencialmente. Dessa forma, o crescimento exponencial se caracteriza por um aumento percentual constante em um período determinado de tempo.

Nesse sentido, atribuindo valores às variáveis dessa função, pode-se partir para o cálculo de equação exponencial e elaborar as projeções de população que poderão impactar na economia, no planejamento das cidades, para os investimentos nos estados e nos municípios e muito mais.

No campo da Matemática, a função exponencial se aplica, principalmente no ramo da matemática financeira, em especial, em juros compostos. A fórmula que é usada para calcular juros compostos sobre um certo capital c, ao longo de um período t e uma taxa i, é dado por $M = c\,(1 + i)^t$, onde M é o valor final. Essa fórmula tem a característica de uma função tipo exponencial da forma $f(x) = b.a^x$, já que o nome “exponencial” é usado para funções da forma $f(x) = a^x$.

Para exemplificar o assunto, suponhamos uma aplicação financeira sobre um capital C de 10% ao ano, qual o valor do capital ao final de n anos? Com um aumento de 10% corresponde a multiplicar o valor inicial por $1{,}1\,(1 + 0{,}1)$. Deste modo, concluímos que para n períodos de 1 ano, iremos multiplicar o capital por $1{,}1^n$, ou seja, $M = c(1{,}1)^n$, que é um tipo de função exponencial.

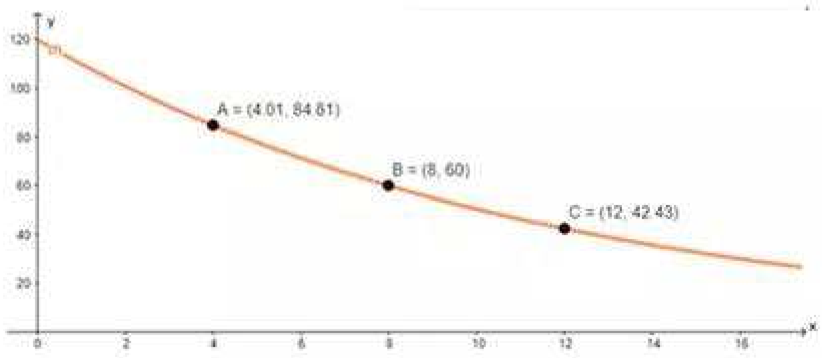
Para mostrar uma aplicação de função exponencial na Química, ALVES (2019, p.7) fez uso de uma situação problema como podemos observar a seguir: considere uma amostra de $120g$ de Iodo 131, cuja meia vida é de 8 dias. Qual será a massa de Iodo 131 após 8 dias? Qual será a massa do Iodo 131 após 4 dias? Qual a função matemática descreve a massa m de Iodo 131, em função do tempo t?

Para resolver esse problema não é preciso fazer uso da fórmula da química, mas sim usar conhecimento conceitual sobre meia vida. Meia vida é o tempo necessário para a massa se reduzir à metade. Logo em 8 dias, a massa de Iodo será $\frac{120}{2} = 60g$. A lógica seria que em 4 dias, reduziria a metade, $30g$. Daí a massa seria $120 - 30 = 90g$. Esse raciocínio seria correto se a redução da massa fosse proporcional ao número de dias, mas este problema não segue um modelo linear. Uma vez que o número de emissões de partículas radioativas por unidade de tempo deve ser proporcional à quantidade de material radioativo presente na amostra e, com o passar do tempo, a liberação das partículas radioativas faz com que o número de átomos instáveis reduza. O problema sugere oito dias divididos em dois intervalos de tempos iguais, 4 dias cada. O primeiro intervalo eliminará uma massa maior do que no segundo, pois há maior quantidade de massa. Isso sugere que há uma constante que é multiplicada em ambos os intervalos, como segue:

$$120 \cdot k \cdot k = 60 \ \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ k = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2.3)$$

Assim, para cada intervalo basta multiplicar a massa por k. Logo para 4 dias, temos $120\, x \frac{1}{\sqrt{2}} = 85g$. observa-se que a redução de 120 para 85 foi de $35g$, enquanto que do $4^{\underline{o}}$ dia para o $8^{\underline{o}}$ a 60, ou seja, $25g$. Como para $t = 8$ dias devemos ter $n = 1$ meia-vida, isso implica em uma proporção direta $t = 8n$ ou $n = \frac{t}{8}$. Usando uma notação mais tradicional na Química temos $m(t) = m_0 . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$, onde $m_o = 120$ e t é o tempo . Essa expressão é um tipo de função exponencial supracitada

Figura 2.3 — Curva da função do tipo exponencial



Fonte: O autor (2021)

Assim, observa-se como a função exponencial está presente no nosso meio social, permeando vários caminhos do conhecimento. Essa interdisciplinaridade com outras áreas vem sendo muito enfatizada para a aprendizagem significativa dos alunos a fim de torna-los jovens protagonistas na aquisição do seu próprio conhecimento segundo a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.2.2 Os descritores relacionados a função exponencial

A BNCC é um documento norteador para o desenvolvimento dos currículos da educação básica no país, conforme está definido na lei de diretrizes e bases da educação nacional (LDB, Lei N°9.394/1996), a base norteará os currículos e sistemas das redes de ensino das unidades federativas, como também as propostas pedagógicas de todas a escolas públicas e privadas de educação infantil, ensino fundamental e ensino médio em todo o Brasil.

Nela contém um currículo mínimo e obrigatório a ser seguido no período escolar, permitindo a inclusão de outros saberes peculiares de cada região do nosso país. Dessa forma, não tira a autonomia de gestores e professores que poderão, de comum acordo com a comunidade escolar, inserir um complemento na grade curricular.

Nesse sentido, a BNCC assegura um conjunto de competências e habilidades que possibilitarão ao estudante desenvolver o seu protagonismo e autonomia ao longo da sua vida escolar.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (2018, p.7):

> [...] competência é definida como a mobilização de conhecimento (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Nesse sentido, a BNCC traz dez competências gerais aplicadas a todas as áreas do conhecimento da educação básica. No ensino médio, abrange as quatro áreas: linguagens e suas tecnologias, matemática e suas tecnologias, ciências da natureza e suas tecnologias e ciências humanas e sociais aplicadas.

Além disso, a BNCC apresenta competências específicas de cada área de conhecimento. No ensino médio, estas estão ligadas às competências especificas do ensino fundamental, fazendo algumas adequações. Para cada competência atribui um conjunto de habilidades que asseguram a aprendizagem essencial dos estudantes.

Nesse sentido, faz-se necessário tratar das competências e habilidades acerca das funções exponenciais na BNCC para o ensino médio. Na competência específica 3 da BNCC que trata da utilização de estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

A BNCC estabelece algumas habilidades para assegurar a aprendizagem dos estudantes, tais como:

- EM13MAT303 (EM - ensino médio;13 - a habilidade pode ser desenvolvida em qualquer série do ensino médio, conforme definição do currículo; MAT - matemática; 3 - competência específica à qual se aplica a habilidade; 03 - numeração no conjunto de habilidade relativa a cada competência): interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso;

- EMMAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da matemática financeira, entre outros.

A fim de fortalecer essas habilidades, este trabalho já apresentou uma aplicação supracitada no campo da matemática financeira, em juros compostos.

Além dessas habilidades, existe mais uma na competência específica 4 e mais uma na competência 5 que registram:

- EM13MAT403: analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponenciais e logarítmicas expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento de cada função);
- EM13MAT508: identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Diante de todas dessas habilidades registradas na BNCC, constata-se a grande relevância dessa temática para a vida dos nossos estudantes para serem jovens transformadores da realidade em que vivem, fazendo uso dos conhecimentos aplicados da função exponencial para resolver problemas sociais como o que será apresentado nesse trabalho.

2.2.3 História da Modelagem Matemática: sua relação com as epidemias

A Modelagem Matemática se apresenta como um instrumento para a solução de problemas do cotidiano. No que concerne a isso BURAK (1992, p. 62) discorre que essa se apresenta como "o conjunto de procedimentos cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões". Seguindo essa mesma linha BASSANEZI (2002, p. 17) afirma que a Modelagem Matemática seria "a arte de transformar temas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Dessa forma, podemos perceber como a modelagem traz como importante contribuição a ampliação do alcance do conhecimento matemático, para além do seu universo restritivo de área específica do conhecimento humano.

Aos estudiosos da história da Matemática não é nenhuma novidade o uso do conhecimento matemático como instrumento para a resolução de dificuldades presentes no cotidiano do ser humano. De acordo com Biembengut e Hein (1999, p. 8) “a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos”. A título de exemplo podemos citar Tales de Mileto (639-568 a.C) que fazia uso de triângulos para realizar o cálculo da altura das pirâmides.

Não podemos discordar que, mesmo que de forma prática, a Modelagem Matemática sempre tenha tido um protagonismo na história desta ciência, no entanto a sua denominação terminológica não remonta aos tempos antigos, o uso do termo Modelagem Matemática para se referir a aplicação do conhecimento matemático para a resolução de problemas do cotidiano é bem mais recente.

> Analisando por um contexto histórico, desde o século XX a expressão “Modelagem Matemática” com o mesmo significado com o qual é empregada na atualidade, já era utilizada. Mas, internacionalmente, maiores discussões sobre suas aplicações na educação ocorreram com um movimento denominado “utilitarista”, por volta de 1960. Tal movimento desencadeou movimentos educacionais que influenciaram o Brasil na mesma época (BIEMBENGUT; HEIN, 1999, p. 9) apud MOURÃO, 2020, p. 9).

Essa visão da Matemática enquanto modelagem é embasada pelo estruturalismo, corrente de pensamento que defende a realidade social como o resultado de um combinado de relações.

Essa tendência contribuiu para o surgimento de um novo ramo dentro da própria Matemática, chamado de Matemática Aplicada, onde os matemáticos emprestam sua capacidade de generalização para a criação de modelos que possam explicar fenômenos aparentemente não matemáticos. (FERREIRA; SILVEIRA; DA SILVA, p. 12)

Assim sendo, o uso da Matemática para a resolução de questões que inicialmente se apresentam como situações aquém a essa ciência tem uma base teórica e conceitual que leva em conta que a mesma não se trata de um conhecimento restrito, mas, pelo contrário, extremamente amplo e possível de oferecer contribuições relevantes nas mais diversas situações e em correlação com diferentes áreas de conhecimento.

2.2.4 A modelagem e o ensino da matemática

Ao conceituar a Modelagem Matemática ficou claro que ela se destaca por responder e/ou solucionar demandas do cotidiano. Isso permite que a Matemática, enquanto disciplina, alcance a tão almejada interdisciplinaridade, pois acaba adentrando outras áreas do conhecimento como ferramenta na busca da eficácia em resultados. Assim sendo, não é por acaso que a Modelagem Matemática se tornou uma área de investigação que tem despertado o interesse de pesquisadores que tem seu foco direcionado para o ensino da matemática.

No que concerne à educação brasileira, a Modelagem Matemática passou a ser aplicada ao ensino já na década de 80 do século XX, “[...], sua aplicação ao ensino teve como precursores os professores Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Bassanezi, ambos da Universidade de Campinas” (SOUZA; BISOGNIN, 2014).

Devido a sua comprovada relevância para o ensino da Matemática, atualmente existem diversas pesquisas voltadas exatamente para esta vertente.

> Na década de 1980 surgem os primeiros Cursos de Pós-graduação em Modelagem Matemática, a partir daí, a Modelagem Matemática ganha proporções maiores como estratégia de ensino aprendizagem e em 2001 a Sociedade Brasileira de Educação Matemática, SBEM, cria o Grupo de Trabalho (GT) de Modelagem Matemática. Em Blumenau, Santa Catarina, surge, em 2006, o Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino, CREMM. (FERREIRA; SILVEIRA; DA SILVA, p. 13).

A partir destas mobilizações as pesquisas voltadas para a Modelagem Matemática avançaram exponencialmente no cenário da Educação Matemática brasileira, se tornando um tema de interesse para pesquisadores e professores que atuam em sala de aula, sendo estes um dos seus focos na elaboração de projetos de ensino.

Quanto a isso MOURÃO (2020, p. 11) destaca:

> No que tange as várias visões sobre a Modelagem é imprescindível salientar suas contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática, bem como

> seu viés integrador que permeia a relação professor-aluno na construção significativa de um conhecimento que converge para um meio social[..]

Desse modo, podemos constatar que ela pode ser utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem de forma eficaz em sala de aula, trazendo a esse processo importantes contribuições, pois ela rompe com o ensino tradicional da matemática, levando o aluno para além do uso comum das práticas reprodutivistas. Demonstrando assim a sua relevância para a aplicação da corrente pedagógica socioconstrutivista, que defende que a aprendizagem de um novo conhecimento matemático deve ser feito por meio da resolução de uma situação problema.

2.2.5 A modelagem matemática e as epidemias

Para além do Ensino da Matemática, a Modelagem Matemática também pode servir como ferramenta essencial para resolução de problemas que afetam a humanidade, como ocorre no caso da epidemiologia Matemática.

De acordo com Ana Marília de Souza e SOUZA e BISOGNIN (2014, p. 31):

> A epidemiologia matemática fundamenta-se em hipóteses matemáticas que quantificam alguns aspectos biológicos da propagação de epidemias. Para isso, é utilizado o processo de desenvolvimento de modelagem matemática, principalmente para descrever as infecções de transmissão direta.

A epidemiologia Matemática se apresenta como um ramo da Biomatemática, e tem por principal objetivo o uso da Modelagem Matemática para o alcance da compreensão e contenção das epidemias.

Uma epidemia se caracteriza por ser uma doença que acomete um grande número de indivíduos de forma simultânea em uma determinada localidade, sendo capaz de levar uma grande parcela dessas pessoas a morte. Assim sendo, é compreensível que a humanidade faça uso de todas as estratégias possíveis para lidar com esse mal; e considerando a que se propõe a Modelagem Matemática, é natural que a mesma seja vista como um instrumento importante no alcance desse propósito.

Assim sendo, a busca de somente entender como as doenças funcionam, sintomas e tratamentos não se mostra suficiente na busca por conter seu avanço, faz-se “necessário também considerar o problema da doença do ponto de vista quantitativo, a fim de decidir sobre vacinações ou outras medidas imprescindíveis para sua contenção” (BARROS, 2015, p. 62). O uso da Modelagem Matemática tem por objetivo entender como ocorre o contágio e disseminação da doença e de que forma isso afeta o aumento gradual de infectados, para contribuir para o controle e avaliação do impacto das epidemias.

Entretanto, para que isso ocorra:

> É preciso desenvolver modelos matemáticos dinâmicos que considerem fatores como temperatura, condições socioeconômicas, características da propagação de microrganismos e diversos outros fatores, inclusive a interação entre três grupos distintos de indivíduos: infectados, recuperados e suscetíveis. (MATEMÁTICA, 2001, p. 34)

O intuito é entender como todo esse processo ocorre para só então conseguir, através dessa compreensão, elaborar estratégias para conter o avanço dessas doenças. Pois o abalo que uma epidemia causa em uma sociedade vai além da significativa diminuição populacional, as repercussões se estendem para as diversas áreas que estruturam as dinâmicas sociais.

Barros (2021, p. 63) Barros (2015, p. 63) ressalta que:

> Algumas epidemias tiveram (e têm) reflexos históricos importantes, afetando a economia e o comportamento social. Como exemplo, podemos citar a Grande Peste que assolou Londres, em 1655, quando a mortalidade chegou a 20% da população londrina e dois em cada três estabelecimentos comerciais fecharam.

As perdas envolvem também mão de obra especializada, destaque para os profissionais da área da saúde que ficam na linha de frente no combate as doenças, como podemos verificar no atual contexto da pandemia da Covid-19. Por esse motivo é justificável o surgimento da epidemiologia como uma vertente de estudo da biomatemática. No entanto, cabe destacar que essa vertente de estudo da matemática tem origem antiga “Os passos iniciais já haviam sido dados em 1760 com um trabalho do suíço Daniel Bernoulli (1700-1782)” (MATEMÁTICA, 2001, p. 35). Ele fez um ensaio sobre as mortes causadas pela varíola e as vantagens oferecidas pela vacinação na prevenção dessa doença.

Com o decorrer do tempo outros pesquisadores passaram a fazer uso de modelos matemáticos na busca de entender e controlar a disseminação de doenças epidêmicas.

> No início do século XX, alguns cientistas investigaram a transmissão de doenças por meio de modelos matemáticos e postularam que a propagação de uma epidemia depende da taxa de contato entre indivíduos não infectados e indivíduos infectados. Essa noção tornou-se um importante conceito na aplicação de matemática em epidemiologia, conhecido como princípio de ação de massa. (SOUZA; BISOGNIN, 2014, p. 31)

O princípio de ação de massa é um conceito que demonstra que existe uma proporcionalidade entre a taxa de transmissão e o produto da densidade de indivíduos suscetíveis e infectados (SOUZA; BISOGNIN, 2014, p. 31). Este princípio se destacada como um marco importante para as pesquisas epidemiológicas.

Kemarck e Mckendrick são os responsáveis pela realização de importantes estudos que resultaram no Teorema do Limiar, que defende que para que uma doença seja considerada uma epidemia faz-se necessário que vá além de um número mínimo de suscetíveis, seus estudos tratam da propagação de doenças infecciosas por meio de contato direto entre os indivíduos infectados e não infectados. Este teorema juntamente com o princípio de ação de massa se destacam como os dois principais fundamentos dos estudos da epidemiologia matemática moderna.

Durante o decorrer do século XX as pesquisas foram avançando:

> [...] nos anos 60, pode-se enfatizar uma revolução na epidemiologia com a introdução da computação eletrônica na área o que desencadeou ainda mais a sua relação intrínseca com a matemática (MOURÃO, 2020, p. 20).

Portanto, podemos observar que os estudos nessa área permaneceram em constante evolução por todo o século XX e nessas duas décadas do século XXI, e certamente sofrerão um avanço ainda mais acelerado devido o advento da pandemia da Covid-19. Certamente as medidas de contensão e análise dessa situação globalmente vivenciada a partir do ano de 2019 tem por base os conhecimentos desenvolvidos nessa longa trajetória de pesquisas infecciosas ao longo da história.

2.3 Modelo epidêmico SIR

Antes de tratar sobre o modelo SIR, vale destacar que cada modelo é usado de acordo com as características do vírus que causa a doença. Por exemplo, o modelo SI (suscetível, infectado), é utilizado para situação em que uma pessoa contaminada não consegue se recuperar e fica com a doença até vir a óbito, como ocorre com a Aids.

Outro é o modelo SIS (suscetível, infectado, suscetível) usado no caso de doença como a gripe, em que o indivíduo é infectado, depois se recupera e volta ao estágio de suscetível depois de um período, sem imunidade.

Como já visto, os modelos matemáticos buscam uma forma de padronizar uma situação real a fim de oferecer um caminho na compreensão do comportamento do mesmo. Nesse sentido, através da epidemiologia matemática surgiram diversos modelos epidêmicos já mencionados, dentre eles, se destaca o modelo epidêmico compartimentado SIR, introduzido por Kemarck e McKendrik em 1927, 1932 e 1933, com a publicação de três artigos que posteriormente foram republicados em 1991.

Esse modelo criado por Kemarck e Mckendrik propõe uma divisão de classes disjuntas, tais como: Suscetíveis (S) - representam a classe dos indivíduos saudáveis, sujeitos a exposição de uma eventual contaminação; Infectados (I) – representam a classe dos indivíduos que estão infectados e que são possíveis causadores de novas infecções; Recuperados (R) – representam os indivíduos recuperados da doença, passando assim a se tornarem imunes a uma nova infecção. Vale ressaltar que o estudo para a doença infecciosa Covid-19 aponta para a reinfecção, o que não vai ser considerado neste trabalho.

Tratando-se do modelo epidêmico SIR, consideremos que o número de indivíduos em cada uma das classes muda em relação ao tempo, logo, $S\,(t)$, $I\,(t)$ e $R\,(t)$ são funções dependentes do tempo. Assim, pode-se afirmar que a população total é a soma do número de suscetíveis, número de infectados e número de recuperados. O modelo SIR mais simples apresenta as seguintes equações:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N} \qquad (2.4)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta IS}{N} - \gamma I \qquad (2.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I \qquad (2.6)$$

Resolvendo as equações diferenciais 6, 7 e 8, segundo Bohner at al (2019), teremos:

$$S(t) = S_0 \cdot e^{-\beta k\left(\frac{t-t_0}{1+k}\right)} \qquad (2.7)$$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\beta k\left(\frac{t-t_0}{1+k}\right)} \qquad (2.8)$$

$$R(t) = N - (S_0 + I_0) \cdot e^{-\beta k\left(\frac{t-t_0}{1+k}\right)} \qquad (2.9)$$

Das equações, vale destacar que β é a taxa de propagação e γ é a taxa de recuperação e a população total é dada pela expressa $N = S + I + R$. Além disso, a taxa de variação dos suscetíveis ao longo do tempo é $\frac{dS}{dt}$; a taxa de variação dos infectados ao longo do tempo é $\frac{dI}{dt}$ e a taxa de variação dos recuperados (ou por morte) ao longo do tempo é $\frac{dR}{dt}$.

Entende-se que quando há contato de pessoas entre as classes, haverá mudança na quantidade de indivíduos, pois o contato entre uma pessoa suscetível com um infectado aumenta a probabilidade de contaminação consideravelmente no caso da doença infecciosa Covid-19, devido ao vírus Sars-CoV-2 ter maior poder de propagação, o que provoca uma redução na primeira classe e um aumento na segunda classe. De modo semelhante acontece com as classes de infectados e recuperados.

Usando o modelo SIR, o trabalho consiste em usar os dados reais do número de suscetíveis, infectados e recuperados afim de gerar curvas exponenciais e posteriormente fazer ajustes e simulações com esses dados a fim de projetar uma realidade no decorrer da pandemia.

2.4 A linguagem de programação – *Python*

A linguagem de programação *Python* surgiu no início da década de 90, feita com base na linguagem ABC, com sintaxe derivada da linguagem C, criada pelo programador holandês *Guido Van Rossum* para homenagear um grupo de comédia britânico *Monty Python*, o que era comum naquela época. Os criadores de programas denominavam seus programas conforme aquilo que gostavam ou algo que condizia com o contexto que vivenciavam á época.

Através dessa linguagem de programação foram desenvolvidos programas para atender a ciência dos dados. Nesse sentido, contribuindo para os pesquisadores na análise e organização de dados em grande escala através dos recursos disponibilizados.

Em 1991, surgiu a primeira versão 0.9.0 com intuito de facilitar a programação para todos devido a simplicidade dos códigos e já apresentar funções como *list, dict, str* e outras. Em 1994, com um fórum sobre o *Python*, expandiu a quantidade de usuários e novas versões foram criadas como 1.0, depois 1.2, 1.4 até o ano 2000.

Em 2000, os programadores da Python buscaram parcerias como a dcopen e a digital *creations*, criaram a versão 2.0, depois 2.7. Mais tarde, no ano 2008, criaram a versão 3.0 e a partir daí com expansão expressiva no mercado digital, a Python começou a influenciar vários mercados de consumo e sistemas operacionais, devido a sua facilidade e ao uso de poucos códigos para criar um programa comparado com outras linguagens de programações.

Como a linguagem python é livre, código aberto, *open source*, ou seja, qualquer programador pode contribuir para o aperfeiçoamento, ela tornou-se uma linguagem de programação de altíssimo nível (*VHLL- very high level language*), seguindo o objetivo inicial de seu criador em torná-la acessível a todos. Presente em vários sistemas operacionais como *Windows, Linux, Mac, Netflix, Phillips*, Celulares e em outros sistemas.

Python é uma linguagem orientada a objetos, ou seja, possibilita o controle da estabilidade dos projetos quando estes começam a tomar grandes proporções.

Mesmo que esse paradigma ainda seja visto com alto grau de complexidade, a linguagem permite ao usuário programar de forma gradual, com pouco conhecimento de programação.

Como a linguagem Python requer um programa interpretador de código para responder linha por linha ao invés de compilador, dependendo do projeto isso pode levar um pouco de tempo para executar, esse comportamento é visto como uma desvantagem na programação. Mas não interfere na sua qualidade e facilidade de usar um espaço bem menor de linhas de codificação para criar um programa.

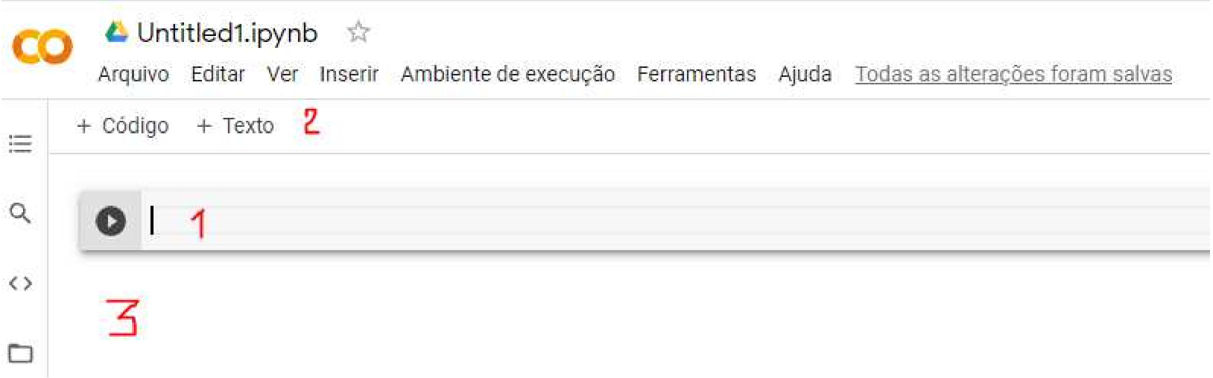
Portanto, como a linguagem permite o uso de grandes quantidades de dados numéricos para uma pesquisa de larga escala como propõe esse trabalho, com uma programação simples é possível gerar os gráficos. A comunidade científica faz uso deste programa em suas pesquisas de forma muito assertiva na busca de clareza de resultados.

2.4.1 A ferramenta Google Colaboratory

A empresa *Google* vem investimento na área da ciência dando sua contribuição para a comunidade científica. Como prova disso, desenvolveu a ferramenta *Google Colaboratory* ou *Google Colab* como é mais conhecida, é um serviço de nuvem gratuito armazenado pelo próprio *Google* para incentivar a pesquisa de aprendizado em máquina e inteligência artificial (*machine learning*).

O *Colab* é uma lista de células de códigos, chamada de *notebook* que podem conter textos explicativos ou códigos executáveis e suas respectivas saídas. A figura 2.4 mostra um notebook aberto e para usá-lo é importante entender pelo menos os três itens em destaque.

Figura 2.4 — Interface do colaboratory (colab)



Fonte: http/www.python-Brasil.com.br

Para iniciar no *notebook* (caderno), o recorte 01 é a primeira linha, chamado de célula, local onde escreve os códigos ou textos e executa no indicador do *play* ou *shift* enter. A partir daí, há um campo livre para criar um *software* e compartilhar com outros programadores. O item 02, tem a opção +code, que é inserir uma outra linha de código e o +*text*, que é inserir texto. Por último temos o item 03, ícone de uma pasta. Lá tem opção de salvar arquivo, fazer cópias de *notebook*, similar ao sistema *Linux*.

Todo suporte computacional necessário para executar o *software* programado que necessite de uma grande quantidade de dados como o que foi feito nesse trabalho de pesquisa, é fornecido pela nuvem da *Google* gratuitamente.

Um detalhe muito importante, visto como desvantagem, quando o código é executado pela primeira vez, demora um pouco mais para rodar porque o *Colab* cria uma máquina exclusiva para o programador no seu servidor *Google* que aparece no *notebook* no canto superior direito as especificações de RAM e de um HD. Ao passar o cursor por cima deste ícone, aparecerá as configurações da “máquina”.

A partir desse comando, o programa executa com uma precisão incrível e muito rápido comparado com os outros diferentes da linguagem *Python*.

Essa ferramenta apresenta diversas vantagens, a primeira delas é o acesso, basta ter um navegador com internet e uma conta Google; a segunda, como roda na máquina do *Google* não precisa ser instalado nem configurado, além disso, pode ser compartilhado como qualquer arquivo no *drive* em tempo real com outro programador, dando a opção de leitor, comentarista ou editor.

O *Colab* dispõe de várias bibliotecas que são extensões que permitem ao programador a possibilidade de chegar ao resultado desejado com menos linha de código comparado com outros programas que executariam a mesma função.

Portanto, optamos pela ferramenta *Colab* pela sua simplicidade de uso, por ser gratuito, sem necessitar de instalação e de configuração, e gerar os gráficos com dados reais e simulações das funções com menos linha de código.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada correspondeu a uma pesquisa quali-quantitativa, ou seja, visa compreender alguns parâmetros a partir dos dados numéricos obtidos. No momento inicial do estudo, foi feita uma pesquisa nos livros didáticos sobre as aplicações das funções exponenciais.

Depois, foi feita a pesquisa de campo para coleta de dados diários da Covid-19, de março a agosto de 2020, nos municípios de São Luís, São José de Ribamar, Paço do Lumiar e Raposa, visitando os órgãos competentes de saúde.

A partir daí a pesquisa concentrou-se em buscar os dados na secretaria de saúde do estado do Maranhão (SES), através dos boletins diários do número de suscetíveis, infectados e recuperados, pelo portal da pandemia Covid-19 (www.saude.ma.gov/boletins-Covid-19).

Com posse dos números reais da pandemia em cada município, os valores foram organizados em uma planilha de modo acumulativo, aplicados no modelo matemático SIR. Depois foi feito simulações usando a linguagem *Python*, através do *Colab notebook* e suas bibliotecas, uma ferramenta do Google, que armazena tudo em nuvem, mostrando as curvas exponenciais.

Comparando as curvas geradas pelos dados reais e as simulações a partir do caso 43, através do modelo SIR, foi possível fazer uma interpretação dos dados de maneira mais clara e precisa.

4 RESULTADO E DISCUSSÕES

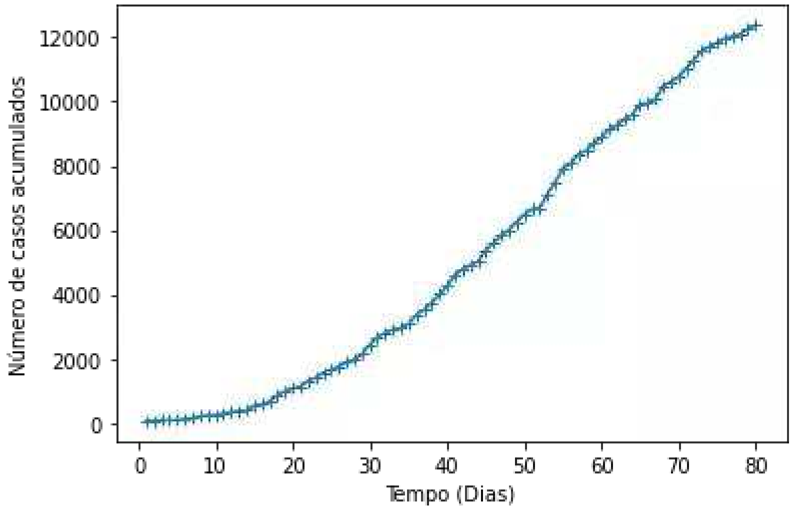
Depois de coletar os dados dos números dos suscetíveis, infectados e recuperados de março a agosto de 2020, de cada município, agrupamos de forma conveniente e consistente certa quantidade. De maneira acumulada para construirmos e analisarmos os gráficos dos dados reais, ajustes de curva e simulações, usando a linguagem *Python*, através do *Colab*.

No modelo epidêmico SIR, alguns parâmetros são muito importantes na análise dos gráficos plotados. Define-se: o parâmetro β como a taxa de infecção, ou seja, o número de indivíduos infectados após o contato com o grupo de suscetíveis; o parâmetro γ é a taxa de recuperação, dada por $\frac{1}{t_e}$, onde t_e é o tempo de recuperação do indivíduo.

Na literatura atual, esse tempo varia em torno de 5 dias, 14 dias ou 21 dias. Para o nosso trabalho, consideramos 18 dias, o que implica na taxa $\gamma = \frac{1}{18}$. Ainda temos o parâmetro mais importante na simulação dos dados da Covid-19, a taxa de reprodutibilidade basal R_o, definida como $R_o = \frac{\beta}{\gamma}$, sendo que em uma pandemia esse indicador é muito importante. Se $R_o > 1$, indica que a pandemia não está controlada e necessita de uma maior atenção pelos órgãos competentes, se $R_o = 1$, a pandemia continua, mas com certo controle sobre o crescimento da doença e se $R_o < 1$, o melhor índice da pandemia, significa que em um período curto, a doença será erradicada.

A partir dos dados disponibilizados pela secretaria de saúde foi realizada a simulação referente ao município de São Luís, no dia 31/3, para que tivéssemos uma compreensão da curva mais adequada, até 12.384, no dia 18/6, contabilizando 80 dados reais da doença da Covid-19. Com base nessa informação, foi feito o gráfico de crescimento da doença nesse período como segue:

Figura 2 — Simulação da curva dos dados reais a partir do caso 50 – São Luís

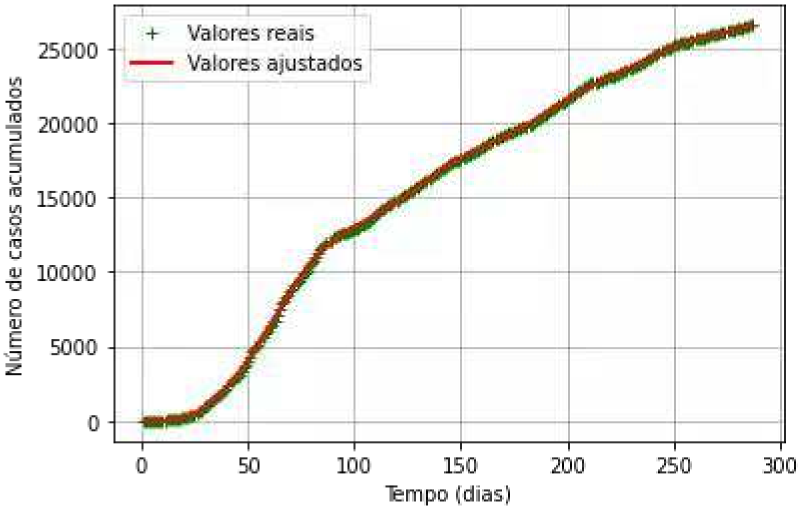


Fonte: Dados da pesquisa, 2021

De acordo com o gráfico da figura 2, verifica-se um crescimento exponencial acelerado do número de infectados nesse período e a curva tem a característica do gráfico de uma função exponencial, não na sua totalidade, pois em alguns períodos de tempo, o crescimento não acompanha a curva exponencial.

Posterior a essa análise, foi feito um ajuste de curva usando uma função polinomial de 16° para ratificar o que afirmamos anteriormente. A curva da Covid-19 tem a semelhança do gráfico da função exponencial, como segue:

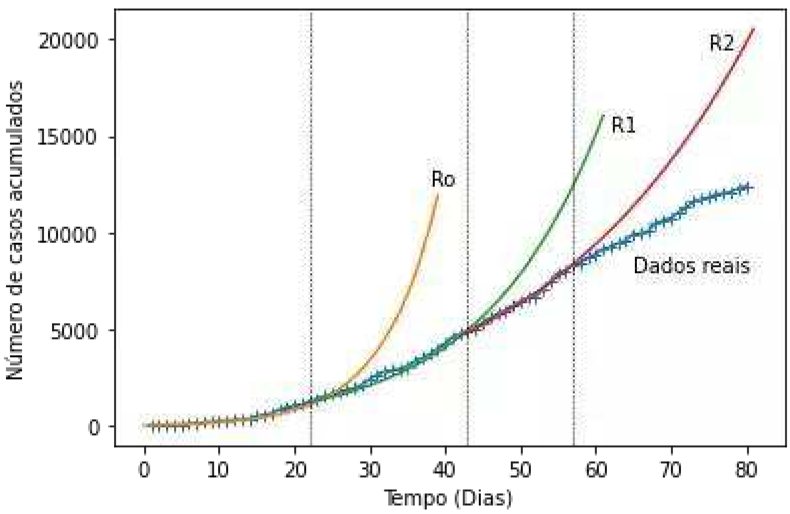
Figura 3 — Ajuste de curva para o número de casos acumulados do Covid-19 da cidade de São Luís



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Depois, realizou-se algumas simulações a partir do caso 50, inserindo o número de suscetíveis, número de infectados e o número de recuperados, gerando R_o, R_1 e R_2, analisamos os parâmetros supracitados: taxa de infecção, taxa de recuperação e taxa de reprodutibilidade basal, em cada período que mostrará bem a curva exponencial. O gráfico a seguir mostrará essas simulações.

Figura 4 — Simulação da curva a partir do caso 50 – São Luís



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

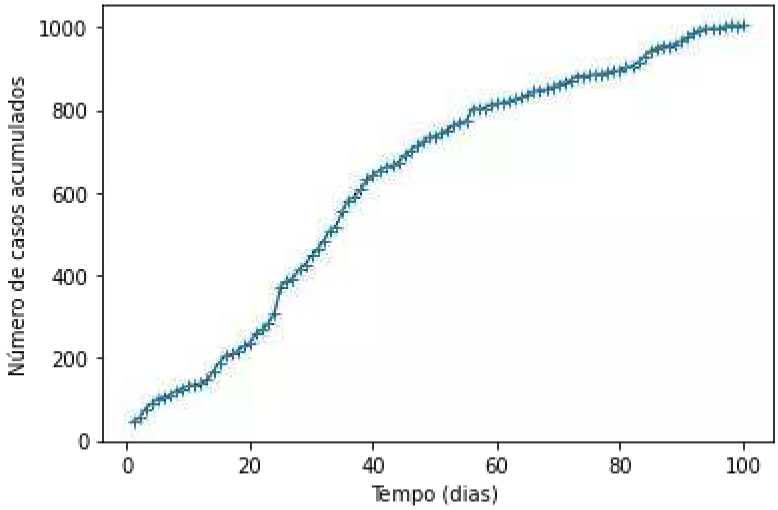
Fez-se três simulações para três períodos de dias diferentes para compararmos. Para os primeiros 22 dias a partir do caso 50, para $\gamma = \frac{1}{18}$, a taxa de reprodutibilidade basal $R_o = 3{,}3$, para obter a taxa de infecção seria $\beta\ = R_o.\gamma$. Esta taxa de reprodução está muito alta e se fosse constante, o gráfico R_o ilustra o crescimento exponencial acelerado e esse indicador servirá de alerta para as autoridades tomarem providencias de combate para o futuro, pois cada infectado pode contaminar no mínimo mais três pessoas em contato com outras pessoas suscetíveis.

Para o segundo período, 23° dia ao 42° dia, pode-se observar uma leve queda no crescimento da curva, o que aponta para uma queda no parâmetro $R_1 =\ 2{,}0$, ainda é um pouco alta para controlar a pandemia, cada pessoa infectada poderá infectar mais duas em contato com pessoas suscetíveis. Se R_1 fosse constante, a curva exponencial é ilustrada no gráfico.

Para o último estágio da curva, do 43° dia em diante, a curva teve um crescimento mais lento comparado com a curva dos dados reais. O parâmetro $R_2 =\ 1{,}5$, mostrando que está ocorrendo uma diminuição do número de casos, por conseguinte na taxa de infecção. O R_2 indica que a pandemia está quase controlada, uma vez que cada infectado só pode contaminar um, em contato com pessoas do grupo dos suscetíveis. O gráfico ilustra bem essa possibilidade se a taxa se mantivesse constante. Claro que uma situação ideal de erradicar a pandemia seria uma taxa de reprodutibilidade basal menor do que 1, segundo os especialistas apontam e a ciência também.

Continuando a análise, no município de São José de Ribamar, foi necessária uma quantidade maior de casos para termos mais consistência na construção do gráfico. Foram 100 casos utilizados da doença Covid-19 a partir do número de infectado 47, no dia 15/4, até o caso 1.004, no dia 27/7. Com base nessa informação, foi feito o gráfico de crescimento da doença nesse período como segue.

Figura 5 — Simulação da curva dos dados reais a partir do caso 47 – São José de Ribamar

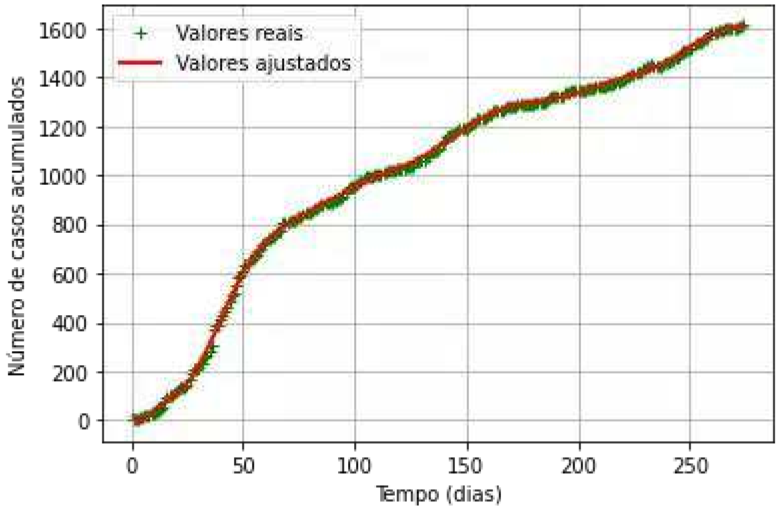


Fonte: Dados da pesquisa, 2021

De acordo com o gráfico da figura 5, compreende-se um crescimento exponencial acelerado do número de infectados nesse período e a curva tem a característica do gráfico de uma função exponencial, não na sua totalidade, pois em alguns períodos de tempo, o crescimento não acompanha a curva exponencial.

Posterior a essa análise, foi feito um ajuste de curva usando uma função polinomial de 16° para ratificar o que afirmamos anteriormente. A curva da Covid-19 tem a semelhança do gráfico da função exponencial, como segue:

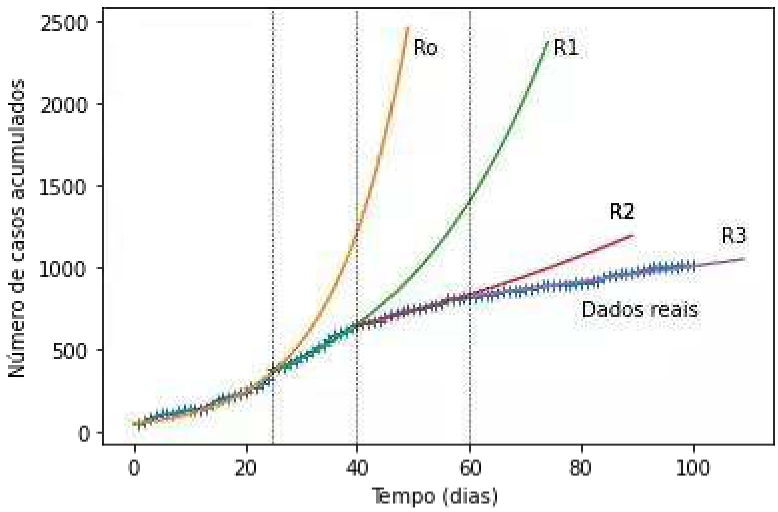
Figura 6 — Ajuste de curvas para o número de casos acumulados do covid-19 da cidade de São José de Ribamar



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Em seguida, realizou-se algumas simulações a partir do caso 47, inserindo o número de suscetíveis, número de infectados e o número de recuperados, gerando R_0, R_2, e R_3, analisamos os parâmetros supracitados: taxa de infecção, taxa de recuperação e taxa de reprodutibilidade basal, em cada período que mostrará bem a curva exponencial. O gráfico da figura 7 mostrará essas simulações.

Figura 7 — Simulação da curva a partir do caso 47 – São José de Ribamar



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

De acordo com o gráfico, nota-se quatro simulações para quatro períodos de dias diferentes para compararmos. Para os primeiros 22 dias a partir do caso 47, para $\gamma = \frac{1}{18}$, a taxa de reprodutibilidade basal $R_o = 1{,}4$, para obter a taxa de infecção seria $\beta = R_0 . \gamma$ Esta taxa de reprodução é relativamente baixa se comparada com a taxa de São Luís, no mesmo período e se fosse constante, o gráfico R_o ilustra o crescimento exponencial e esse indicador servirá de alerta para que as autoridades tomassem providencias de combate para o futuro, pois cada infectado poderá contaminar uma pessoa, ainda no grupo dos suscetíveis, o que não é tão preocupante.

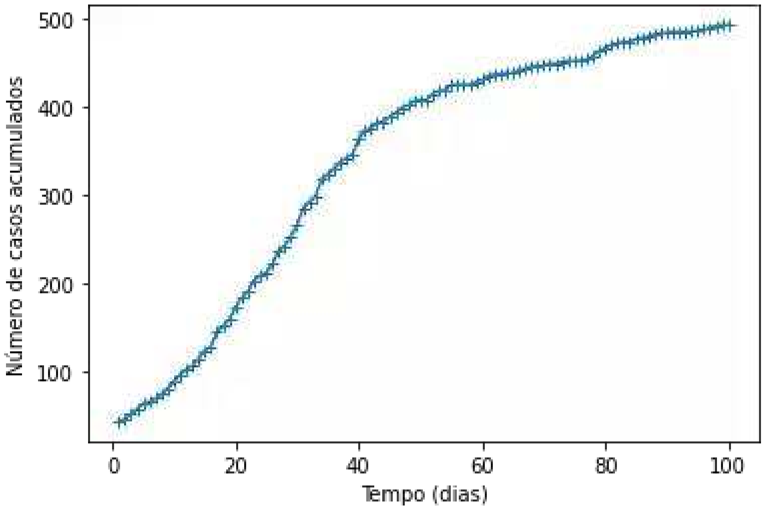
Para o segundo período, do 23° dia ao 40° dia, pode-se observar uma leve queda no crescimento da curva, o que aponta para uma queda no parâmetro $R_1 = 0{,}96$, o que implica afirmar que cada pessoa infectada terá menor possibilidade de infectar outra, apontando para uma queda na curva exponencial como mostra o gráfico, se a taxa fosse constante.

Analisando o gráfico, o terceiro período, do 41° dia ao 60° dia, há uma queda maior ainda comparado ao período anterior, com uma taxa de reprodutibilidade $R_2 = 0{,}69$, tendenciando para um controle da pandemia segundo os especialistas no estudo das doenças infecciosas.

No último período, a partir dos últimos dias restantes, a curva praticamente segue a curva dos dados reais, apontando para uma queda da taxa de reprodução $R_3 = 0{,}62$, menor do que ao estágio anterior, confirmando o fim do número dos infectados e por conseguinte o fim da pandemia. A pesar de parecer uma reta, mas é uma curva exponencial se fosse analisado mais dados.

Ao analisar os dados reais referente ao município do Paço do Lumiar, foi necessário uma quantidade maior de casos para termos mais consistência na construção do gráfico assim como ocorreu com os dados do município de São José de Ribamar. Foram 100 casos utilizados da doença Covid-19 a partir do número de infectado 43, no dia 19/4, até o caso 493, no dia 27/7. Com base nessa informação, foi feito o gráfico de crescimento da doença nesse período como segue:

Figura 8 — Simulação da curva dos dados reais a partir do caso 43 – Paço Do Lumiar

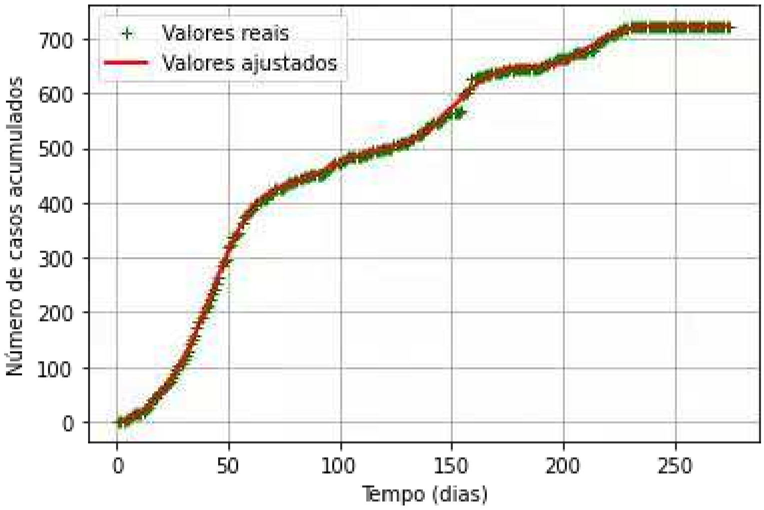


Fonte: Dados da pesquisa, 2021

De acordo com o gráfico da figura 8, percebe-se um crescimento exponencial acelerado do número de infectados nos primeiros 40 dias e depois uma redução no crescimento, nos dias restantes e a curva tem a característica do gráfico de uma função exponencial, não na sua totalidade, pois em alguns períodos de tempo, o crescimento não acompanha a curva exponencial.

Posterior a essa análise, projetou-se um ajuste de curva usando uma função polinomial de 16° para ratificar o que afirmamos anteriormente. A curva da Covid-19 tem a semelhança do gráfico da função exponencial, como segue:

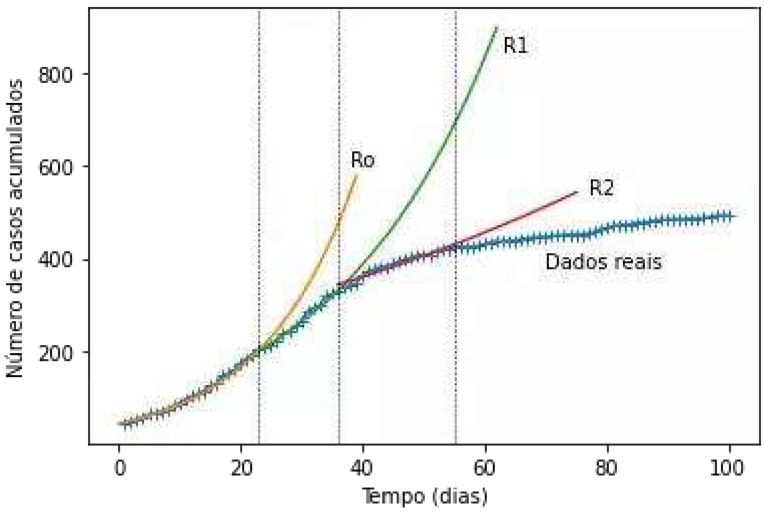
Figura 9 — Ajuste de curvas para o número de casos acumulados do covid-19 da cidade de Paço do Lumiar



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Depois, analisou-se algumas simulações usando apenas 40 dados numéricos, inserindo o número de suscetíveis, número de infectados e o número de recuperados, gerando R_0 e R_1, analisamos os parâmetros supracitados taxa de infecção, taxa de recuperação e taxa de reprodutibilidade basal em cada período que mostrará bem a curva exponencial. O gráfico da figura a seguir mostrará essas simulações.

Figura 10 — Simulação da curva a partir do caso 43 – Paço Do Lumiar



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

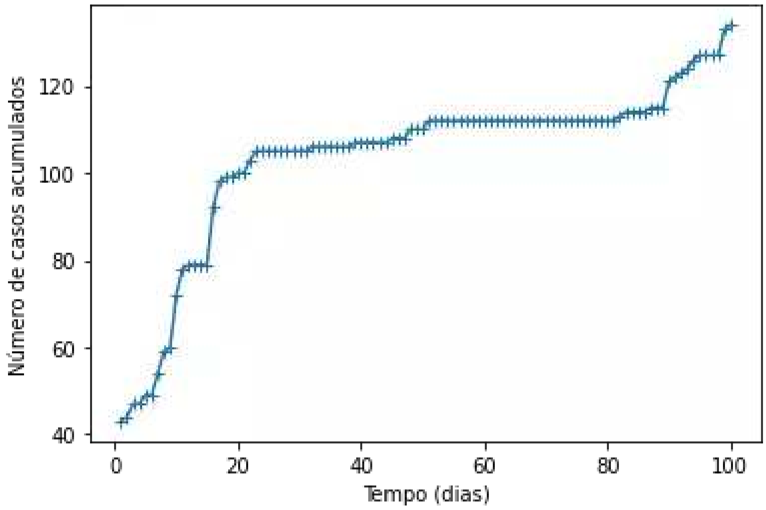
De acordo com o gráfico da figura 10, considerou-se três simulações para três períodos de dias diferentes para compararmos. Para os primeiros 22 dias a partir do caso 43, para $\gamma = \frac{1}{18}$, a taxa de reprodutibilidade basal $R_0 = 1{,}7$, para obter a taxa de infecção seria $\beta = R_0 \,.\, \gamma$. Esta taxa de reprodução é relativamente baixa se comparada com a taxa de São Luís, no mesmo período e se fosse constante, o gráfico R_0 ilustra o crescimento exponencial e esse indicador servirá de alerta para que as autoridades tomem providencias de combate para o futuro, pois cada infectado poderá contaminar uma pessoa, em contato com o grupo dos suscetíveis, o que não é tão preocupante.

Para o segundo período, do 23° dia ao 35° dia, pode-se observar uma leve queda no crescimento da curva, o que aponta para uma queda no parâmetro $R_1 = 1{,}3$ comparado com o anterior, o que implica afirmar que cada pessoa infectada terá menor possibilidade de infectar outra, apontando para uma queda na curva exponencial como mostra o gráfico da figura 10, se a taxa fosse constante.

Para o último período, do 36° dia ao 57° dia, o gráfico apresenta um crescimento considerado tímido quanto ao número de infectados, permitindo concluir uma baixa taxa de infecção ao longo dos restantes de dias, com $R_2 = 0{,}9$, ideal para chegar ao fim da pandemia.

Por último, foi analisado os dados do município de Raposa, foi necessária uma quantidade maior de casos para termos mais consistência na construção do gráfico. Foram 100 casos utilizados da doença Covid-19 a partir do número de infectado 43, no dia 21/5, até o caso 134, no dia 28/8. Com base nessa informação, foi feito o gráfico de crescimento da doença nesse período como segue.

Figura 11 — Simulação da curva dos dados reais a partir do caso 43 – Raposa

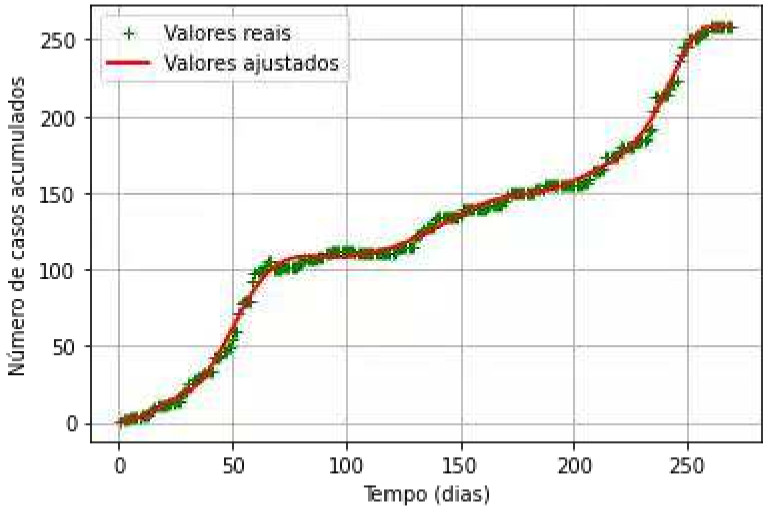


Fonte: Dados da pesquisa, 2021

De acordo com o gráfico da figura 11, nota-se claramente um crescimento inicial exponencial acelerado do número de infectados nos primeiros 20 dias, após o caso 43 e depois uma redução no crescimento até 80° dia, nos dias restantes a curva tornou a crescer bruscamente e a curva tem a característica do gráfico de uma função exponencial, não na sua totalidade, pois em alguns períodos de tempo, o crescimento não acompanha a curva exponencial.

Depois dessa análise, efetuou-se um ajuste de curva usando uma função polinomial de 16° para ratificar o que afirmamos anteriormente. A curva da Covid-19 tem a semelhança do gráfico da função exponencial, como segue:

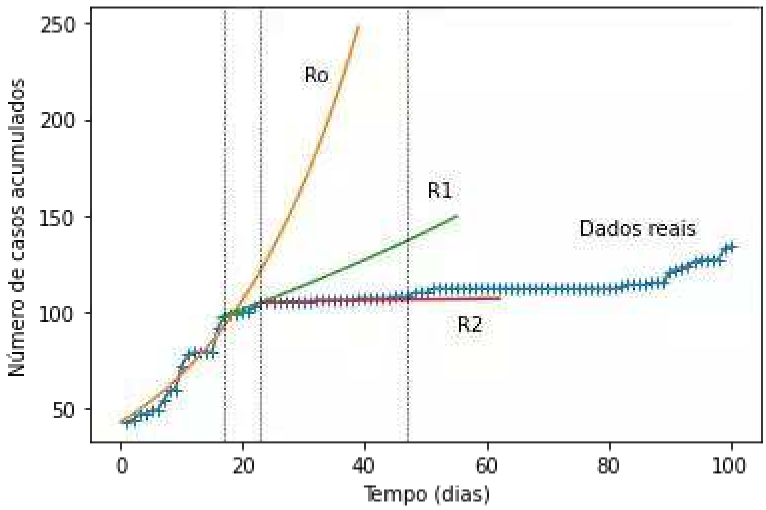
Figura 12 — Ajuste de curvas para o número de casos acumulados do covid-19 da cidade de Raposa



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

Depois, algumas simulações foram feitas usando apenas 40 dados numéricos reais, inserindo o número de suscetíveis, número de infectados e o número de recuperados, gerando R_0, R_1 e R_2 analisamos os parâmetros supracitados taxa de infecção, taxa de recuperação e taxa de reprodutibilidade basal em cada período que mostrará bem a curva exponencial. O gráfico da figura 13 mostrará essas simulações.

Figura 13 — Simulação da curva a partir do caso 43 – Raposa



Fonte: Dados da pesquisa, 2021

De acordo com o gráfico da figura 13, fez-se três simulações para três períodos de dias diferentes para compararmos. Para os primeiros 18 dias a partir do caso 43, para $\gamma = \frac{1}{18}$, a taxa de reprodutibilidade basal $R_0 = 5{,}8$, para obter a taxa de infecção seria $\beta = R_0 \,.\, \gamma$. Esta taxa de reprodução é muito alta se comparada com a taxa dos demais municípios, no mesmo período e se fosse constante, o gráfico R_0 ilustra o crescimento exponencial acelerado. Esse indicador deverá servir de alerta para que as autoridades tomem providências de combate no presente a fim de evitar um futuro catastrófico, pois cada infectado poderá contaminar no mínimo cinco pessoas, em contato com o grupo dos suscetíveis, o que poderia causar um surto da doença na cidade.

Para o segundo período, do 19° dia ao 24° dia, pode-se observar uma leve queda no crescimento da curva, o que aponta para uma queda no parâmetro reprodutibilidade $R_1 = 3{,}8$, o que implica afirmar que cada pessoa infectada tem o potencial de infectar três pessoas, apontando para uma queda na curva exponencial como mostra o gráfico da figura 13, se a taxa fosse constante.

Observando o último período, do 25° dia ao 45° dia, há uma queda maior ainda comparado ao período anterior, com uma taxa de reprodutibilidade $R_2 = 3{,}2$. Sinalizando que é preciso tomar medidas rigorosas de combate à doença Covid-19 nesse município, para tentar assegurar o controle da pandemia, segundo especialistas em doenças infecciosas.

Ainda sobre o último período, os dias restantes, a curva praticamente segue a curva dos dados reais, apontando para uma queda da taxa de reprodução, menor do que ao estágio anterior, confirmando o fim do número dos infectados e por conseguinte o fim da pandemia. A pesar de parecer uma reta, mas é uma curva exponencial se fosse analisado com mais dados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização da função exponencial em vários componentes curriculares e aplicado aos problemas sociais é de suma importância para a integração das áreas de conhecimento a fins, tornando o ensino mais significativo. Para exemplificar, foi usado um modelo matemático para trazer entendimento do crescimento da curva da doença da covid-19.

Existem vários modelos epidêmicos que estudam o comportamento das pandemias em um certo período. Assim, para analisar o comportamento da doença Covid-19 nos municípios pesquisados foi usado o modelo SIR com a linguagem de programação *Python*.

Faz-se necessário ao utilizar o modelo SIR analisar as taxas de infecção e reprodução além de outros parâmetros, pois sabe-se que há variação das taxas no decorrer da pandemia, à medida que o tempo de vigência se estende.

Através das simulações dos dados reais, foi percebido que as curvas se assemelham ao gráfico da função exponencial, com isso foi possível fazer um espectro comportamental da curva da covid-19, apontando caminhos para as autoridades para achatar o avanço da doença em cada município.

REFERÊNCIAS

ALVES, Marcos Pontes de Oliveira. **Entendendo funções exponenciais e logarítmicas**. 1 ed. Rio de Janeiro: Marcos Pontes de Oliveira Alves, 2019. 72 p.

BARROS, Aline Mide Romano de. **Modelos matemáticos de equações diferenciais ordinárias aplicadas a epidemiologia**. Revista de Ciências Exatas e Tecnologia. Belo Horizonte, 2015, p. 62-67. Disponível em: https://exatastecnologias.pgsskroton.com.br/article/view/2382. Acesso em: 9 jun. 2021.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**, f. 64. 1999. 127 p.

BOHNER, Martin; STREIPERT, Sabrina; TORRES, Delfim F.M. **Exact solution to a dinnamic SIR model**: Non linear analysis: Hibrid systems. elsevier, v. 32, 2019, p. 228-238.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília,DF. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf**.** Acesso em: 24 ago.2020.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). Matemática. 2000. Disponível em: http//portal.mec.gov.br/seb/arquivo/pdf/blegais.pdf. Acesso em: 24 ago 2020.

BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática**: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem. Campinas, 1992. 460 p Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fenando. **Matemática em contextos**: Função exponencial, função logarítmica e sequencias. 1 ed. São Paulo: ática, 2020.

FERREIRA, Gessé Pereira; SILVEIRA, Alexis; DA SILVA, Leonardo Andrade. A modelagem matemática ao longo da história e o surgimento da modelação matemática no brasil*. In:* XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2013. Anais [...] Curitiba.

KERMACK, William Ogilvy; MCKENDRICK, Anderson G. **A contribution to the mathematical theory of epidemics**. Proceedings of the royal society of London. Série A, Containing papers of a mathematical and physical character, the Royal Society London, v.115, n.772, p.700-721, 1927.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p. (Coleção PROFMAT).

LOPES, Luís. **Manual das funções exponenciais e logarítmicas**. Rio de Janeiro: interciência, 1999. 132 p.

MACHADO, Antônio dos Santos. **Matemática:** Conjunto e funções. 2 ed. São Paulo: Atual, 1988

MARTCHEVA, Maia Nenkova. **An introduction to Mathematical Epidemiology.** 1 ed. Gainesville: Springer, 2015.

MOURÃO, Paula Adriana Matos. **Simulações matemáticas em estudos epidemiológicos**: o modelo SIR com estratégias de vacinação como aplicação da modelagem matemática no ensino. Vitória da Conquista , 2020 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista , 2020.

PESQUISA FAPESP. São Paulo, jan. - fev., 2001. Ciências.

Python Brasil,2019. Disponível em: https:www.python.org/comunidadepythonbrasil. Acesso em: 20 de jul de 2021.

SOUZA, Ana Marília de; BISOGNIN, Vanilde. **Modelo matemático da evolução da síndrome da imunodeficiência adquirida - AIDS em Santa Maria**. Disciplinarum Scientia. Santa Maria, 2014, p. 29-37. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/view/1338/1270. Acesso em: 1 jun. 2021.

APÊNDICE A — Linguagem de programação Python - simulação

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt


x = [ ]


y = [ ]

dt = 1

S = np.zeros(40)

I = np.zeros(40)

R = np.zeros(40)

S[0] =  1108975


I[0] =  50

R[0] =  1

t = np.arange(40)
```

```
gama = 1/18

beta = 0.0000001864

for n in range (39):

 S[n+1] = S[n] - dt*beta*S[n]*I[n]

 I[n+1] = I[n] + dt*beta*S[n]*I[n] - dt*gama*I[n]


 R[n+1] = R[n] + dt*gama*I[n]

plt.plot(x,y,'+-',label='Dados reais')
plt.plot(t, I, label='Ro')

plt.text(65, 8000, 'Dados reais')
plt.text(38, 12500, 'Ro')


plt.xlabel('Dias - Simuação a partir do caso 50 - São Luís')
plt.ylabel('Número de casos acumulados')
plt.show()
```