

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E  
SISTEMAS  
SISTEMAS COMPUTACIONAIS APLICADOS A ENGENHARIA AEROESPACIAL

**ANÁLISE DE VIBRAÇÃO NO TRANSPORTADOR DO FOGUETE:** Modelagem  
através de representação em espaço de estados e grafos de ligação

VAGNER CUTRIM MENDES

SÃO LUIS-MA  
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA  
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO E  
SISTEMAS  
SISTEMAS COMPUTACIONAIS APLICADOS A ENGENHARIA AEROESPACIAL

VAGNER CUTRIM MENDES

**ANÁLISE DE VIBRAÇÃO NO TRANSPORTADOR DO FOGUETE:** Modelagem  
através de representação em espaço de estados e grafos de ligação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Computação e Sistemas da Universidade Estadual do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Computação e Sistemas.

Orientador: Prof. Me. Henrique Mariano Costa do Amaral.

Coorientador: Prof. Ph.D. Luiz Carlos Sandoval Góes.

SÃO LUIS-MA  
2019

**VAGNER CUTRIM MENDES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Computação e Sistemas da Universidade Estadual do Maranhão como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Computação e Sistemas, sob a orientação do Prof<sup>o</sup>. Me. Henrique Mariano Costa do Amaral e coorientação do Prof<sup>o</sup>. Ph.D. Luiz Carlos Sandoval Góes.

Aprovado em: 13 / 09 / 2019

**BANCA EXAMINADORA**



---

**Me. Henrique Mariano Costa do Amaral (Orientador)**

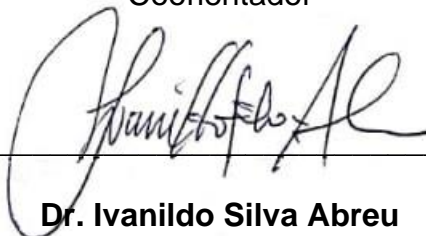
Orientador



---

**Ph.D. Luiz Carlos Sandoval Góes (Coorientador)**


Coorientador



---

**Dr. Ivanildo Silva Abreu**

Primeiro Membro da Banca



---

**Me. Antônio Rogério Torres Carvalho**

Segundo Membro da Banca

Mendes, Vagner Cutrim.

Análise de vibração no transportador do foguete: modelagem através de representação em espaço de estados e grafos de ligação / Vagner Cutrim Mendes. – São Luís, 2019. 66 f.

Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia de Computação e Sistemas, Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Me. Henrique Mariano Costa do Amaral.

Coorientador: Prof. Ph.D. Luiz Carlos Sandoval Góes.

1.Vibração no foguete. 2.Protótipo. 3.Preparação de lançamento.  
4.Centro de Lançamento de Alcântara. 5.Grafos de ligação. I.Título

CDU: 629.7.018.4

Dedico esse trabalho aos meus pais, João de Deus e Maria da Graça, ao meu irmão Vinícios, ao meu avô Benedito (*in memoriam*) e meus amigos e colegas de trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

À minha família, que sempre esteve comigo e sempre me incentivou buscar conhecimento e superar obstáculos.

Aos meus amigos, por toda ajuda e companheirismo em todos os momentos.

Aos meus companheiros de mestrado, em especial a Waldenê, Paulo Renato e Paulo Ricardo, pela união e luta nessa jornada.

Agradeço a Universidade Estadual do Maranhão – UEMA e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Computação e Sistemas – PECS, que nos incentivaram em todos os momentos.

Agradeço ao professor Me. Henrique Mariano Costa do Amaral, por sua orientação, amizade e confiança neste trabalho. Sua dedicação e paciência foram imprescindíveis. Muito obrigado professor, por tudo.

Agradeço ao professor Ph.D. Luiz Carlos Sandoval Góes, por sua orientação, amizade, paciência e sua dedicação ao nosso programa. Muito obrigado por todo conhecimento passado.

Ao professor Dr. Ivanildo Silva Abreu, por seu apoio no trabalho, e por toda a paciência e dedicação.

Ao engenheiro Me. Antônio Rogério Torres Carvalho, por todo apoio, disponibilidade e contribuições teóricas para a conclusão desse estudo.

Ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, por conceber imenso conhecimento e disponibilidade de professores.

Ao Centro de Lançamento de Alcântara – CLA, por nos apoiar na pesquisa e contribuir para a conclusão do nosso estudo.

À Fundação de Amparo à Pesquisa e ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Maranhão – FAPEMA pelo apoio financeiro concedido.

*“Deixem que o futuro diga a verdade e avalie cada um de acordo com o seu trabalho e realizações. O presente pertence a eles, mas o futuro pelo qual eu sempre trabalhei pertence a mim.”*

**Nikola Tesla**

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo de vibração do foguete no momento em que o mesmo é transportado para o Setor de Preparação de Lançamento (SPL) do Centro de Lançamento de Alcântara (CLA). O estudo é feito através de um protótipo que contém um microcontrolador e um acelerômetro, ambos trabalhando de forma integrada para coletar e armazenar dados referentes as variações na aceleração do foguete transportado. Os dados serão usados para comparar com um modelo da suspensão do transportador obtidos através de representação em espaço de estados e em grafos de ligação, assim, vamos obter as equações que descrevem o sistema dinâmico da suspensão do transportador e por fim, interpretar os resultados obtidos.

**Palavras-chave:** Vibração no foguete, Protótipo, Setor de Preparação de Lançamento (SPL), Centro de Lançamento de Alcântara (CLA), Protótipo, Sistema Dinâmico, Representação em Espaço de Estados, Grafos de Ligação.



## ABSTRACT

This work presents a study of rocket vibration during its transportation to the Launch Preparation Sector (LPS) of the Alcantara Launch Center (ALC). The study was made through a prototype composed by a microcontroller and accelerometer, both working in an integrated way to collect and store data regarding the acceleration changing of the rocket. The data will be used to compare with a conveyor suspension model obtained through state-space representation and in bond graphs, thus the equations that describe the dynamic system of the conveyor suspension is obtained and finally, the results obtained will be interpreted.

**Keywords:** Rocket Vibration, Prototype, Launch Preparation Sector (LPS), Alcantara Launch Center (ALC), Prototype, Dynamic System, State-space Representation, Bond Graphs.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Curvas características estáticas (OGATA,1998).....	22
Figura 2 – Sistema mecânico na forma <i>MKB</i> (MAYA, 2011).....	23
Figura 3 – Representação do sistema mecânico <i>MBK</i> com entrada $f(t)$ e saída $x(t)$ (MAYA, 2011) .....	23
Figura 4 – Diagrama de corpo livre com as forças descritas (MAYA, 2011) .....	24
Figura 5 – Representação do sistema mecânico <i>MBK</i> com entrada $f(t)$ e saída $V(t)$ (MAYA, 2011).....	25
Figura 6 – Representação do sistema mecânico rotacional (MAYA, 2011) .....	25
Figura 7 – Sistema com um grau de liberdade (RAO, 2010).....	27
Figura 8 – Sistema com dois graus de liberdade (RAO, 2010) .....	27
Figura 9 – Sistema com três graus de liberdade (RAO, 2010).....	28
Figura 10 – Histórico de um sistema em vibração aleatória em função do tempo $t$ (NEWLAND, 2005).....	29
Figura 11 – Exemplos de valores não correlacionados e correlacionados, respectivamente (AZEVEDO, 1996).....	34
Figura 12 – Elementos e componentes do grafo de ligação (MARTINS, 2010) .....	42
Figura 13 – Modelo dinâmico de 1/4 da suspensão (SILVA, 2007).....	43
Figura 14 – Diagrama de corpo livre (ODA, 2007, modificado pelo autor) .....	44
Figura 15 – Modelagem em grafos de ligação de 1/4 da suspensão (AUTOR, 2019) .....	45
Figura 16 – Aceleração da massa suspensa (AUTOR, 2019).....	46
Figura 17 – Protótipo para medição de aceleração (AUTOR, 2019) .....	47
Figura 18 – Acelerômetro modelo MPU6050 (INTERNET, 2019).....	48
Figura 19 – Microcontrolador modelo ESP8266 INTERNET, 2019).....	48
Figura 20 – Modelo dinâmico da suspensão do transportador (SOUTO, 2017, modificado pelo autor).....	51
Figura 21 – Aceleração na massa “ $m$ ” (AUTOR, 2019).....	57
Figura 22 – Aceleração na massa “ $m_{sa}$ ” (AUTOR, 2019).....	58
Figura 23 – Aceleração na massa “ $m_{sb}$ ” (AUTOR, 2019).....	58
Figura 24 – Aceleração na massa “ $m_{sc}$ ” (AUTOR, 2019).....	59

Figura 25 – Modelagem do transportador através de grafis de ligação (AUTOR, 2019)	59
.....	59
Figura 26 – Acelerações simuladas (AUTOR, 2019).....	60
Figura 27 – Instalação dos sensores (AUTOR, 2019).....	61
Figura 28 – Acelerações no sensor 01 (AUTOR, 2019).....	62
Figura 29 – Acelerações no sensor 02 (AUTOR, 2019).....	62
Figura 30 – Acelerações no sensor 03 (AUTOR, 2019).....	63
Figura 31 – Acelerações no sensor 04 (AUTOR, 2019).....	63

## LISTA DE SÍMBOLOS

$M$	Massa
$K$	Constante elástica
$B$	Constante viscosa de amortecimento
$x$	Eixo onde o corpo move-se
$f(t)$	Força sob corpo descrito
$V$	Velocidade do corpo
$V(t)$	Velocidade em função do tempo
$J$	Momento de inércia
$M(t)$	Momento de inércia em função do tempo
$\omega(t)$	Velocidade angular
$\theta(t)$	Abscissa angular
$x_1, x_2$	Coordenadas lineares
$q_1, q_2$	Coordenadas generalizadas
$t$	Tempo
$t_0$	Tempo inicial
$F$	Força da mola
$T$	Energia cinética do sistema massa-mola translacional
$kg$	Quilograma
$m/s$	Metros por segundo
$F_v$	Resistência viscosa
$Ns/m^2$	Newton segundo por metro ao quadrado
$\Delta x$	Varição de $x$ em um intervalo
$p_x$	Probabilidade de um evento $x$
$E[x(t)]$	Valor esperado de $x$
$E[x^2]$	Valor quadrático médio
$\sigma^2$	Variância
$\bar{y}$	Média de $y$
$E[e^2]$	Erro quadrático médio
$m_x$	Valor esperado de $x$
$m_y$	Valor esperado de $y$
$\rho$	Coefficiente de correlação

$\tau$	Valor adicional de tempo
$R_x(\tau)$	Função de autocorrelação
$S_x(\omega)$	Densidade espectral de potência
$x_1(t), x_n(t)$	Variáveis de estado
$y_1(t), y_m(t)$	Variáveis de saída
$u_1(t), u_r(t)$	Variáveis de entrada
$f_1, f_n$	Funções de entrada
$g_1, g_n$	Funções de saída
$m_{rf}$	Massa da suspensão frontal
$m_{rt}$	Massa da suspensão traseira
$K_{sf}$	Rigidez da mola da suspensão frontal
$K_{st}$	Rigidez da mola da suspensão traseira
$K_{pf}$	Rigidez da mola do pneu frontal
$K_{pt}$	Rigidez da mola do pneu traseiro
$C_{sf}$	Amortecimento da suspensão frontal
$C_{st}$	Amortecimento da suspensão traseira
$a, b, c$	Distâncias de cada suspensão até o centro de massa
$\theta(t)$	Variação angular
$x(t)$	Deslocamento da massa $m$
$x_a(t)$	Deslocamento da massa $m_{rf}$
$x_b(t), x_c(t)$	Deslocamentos das massas $m_{rt}$
$u_f(t)$	Pulso simulando estrada na suspensão frontal
$u_t(t)$	Pulso simulando estrada na suspensão traseira
$m_{sa}$	Massa da suspensão no ponto $a$
$m_{sb}$	Massa da suspensão no ponto $b$
$m_{sc}$	Massa da suspensão no ponto $c$

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>AEB</i>	Agência Espacial Brasileira
<i>ITA</i>	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
<i>CLA</i>	Centro de Lançamento de Alcântara
<i>SPL</i>	Setor de Preparação de Lançamento
<i>MEMS</i>	Sistema Micro Eletromecânicos (micro electrical mechanical system)
<i>AD</i>	Analógico/Digital
<i>IMU</i>	Unidade de Medição Inercial (inertial measurement unit)
<i>MATLAB</i>	MATrix LABoratory
<i>MySQL</i>	Linguagem de Consulta Estruturada (structured query language)
<i>Wi – Fi</i>	Wireless Fidelity
<i>BG</i>	Bond Graphs

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>16</b>
<b>1.1 Justificativa</b> .....	<b>17</b>
<b>1.2 Objetivo Geral</b> .....	<b>17</b>
1.2.1 Objetivos Específicos .....	17
<b>1.3 Trabalhos Relacionados</b> .....	<b>17</b>
<b>2 METODOLOGIA</b> .....	<b>19</b>
<b>3 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	<b>20</b>
<b>3.1 Modelagem Matemática de Sistemas Dinâmicos</b> .....	<b>20</b>
3.1.1 Sistemas Mecânicos .....	23
<b>3.2 Vibrações Mecânicas</b> .....	<b>26</b>
3.2.1 Graus de Liberdade.....	27
3.2.2 Classificação de Vibrações .....	28
3.2.3 Elementos de um sistema massa, mola e amortecedor .....	30
<b>3.3 Fundamentos de Processos Estocásticos</b> .....	<b>32</b>
<b>3.4 Representação em Espaço de Estados</b> .....	<b>37</b>
3.4.1 Elementos da Representação em Espaço de Estados.....	37
<b>3.5 Representação em Grafos de Ligação</b> .....	<b>41</b>
3.5.1 Elementos Básicos .....	41
<b>3.6 Protótipo de Medição de Aceleração</b> .....	<b>46</b>
3.6.1 Acelerômetro .....	47
3.6.2 Microcontrolador.....	48
<b>4 RESULTADOS</b> .....	<b>50</b>
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	<b>64</b>
<b>5.1 Trabalhos Futuros</b> .....	<b>64</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>65</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de foguetes no Brasil iniciou-se na década de 60, no Centro Técnico Aeroespacial (CTA), em São José dos Campos, São Paulo. O centro é fruto do mais puro e heroico ideal de criar a competência no desenvolvimento do setor aeronáutico. Como celeiro dessa competência, foi criado o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), que constitui uma das colunas de formação de engenheiros, intelectuais e dirigentes. (PALMERIO, 2016).

Para o sucesso de uma campanha de lançamento de um foguete, vários parâmetros precisam ser monitorados, avaliados e controlados. A intensidade e frequência da vibração no momento em que o foguete é transportado para a plataforma de lançamento pode impactar diretamente no funcionamento do foguete.

Segundo RAO (2010), um sistema vibratório é um sistema dinâmico para o qual as variáveis como as excitações (entradas) e respostas (saídas) são dependentes do tempo. Em geral a resposta de um sistema vibratório depende das condições iniciais, bem como das excitações externas. A maioria dos sistemas vibratórios encontrados na prática são muito complexos, e é impossível considerar todos os detalhes para uma análise matemática, desse modo, somente as características mais importantes são consideradas na análise para prever o comportamento do sistema sob as condições de entrada especificadas. A análise de um sistema vibratório envolve normalmente uma modelagem matemática para a obtenção das equações governantes do sistema, a solução das equações e interpretação dos resultados.

O modelo matemático deve incluir detalhes suficientes para descrever o sistema e obter as equações de movimento sem torná-lo complexo, podendo ser linear ou não linear. As equações de movimento devem ser resolvidas através de métodos para resolver equações diferenciais e métodos numéricos. Com a solução das equações, que fornecerão as velocidades, acelerações das várias massas do sistema, podemos interpretar o comportamento do sistema e analisar o projeto de acordo com os resultados obtidos através da modelagem. (INMAN, 2008).



## 1.1 Justificativa

O trabalho tem como objetivo coletar os dados referentes ao estado de vibração do dispositivo, ou seja, as acelerações das massas que compõem o sistema dinâmico estudado e comparar os dados com a modelagem do sistema dinâmico da suspensão do transportador, obtida através de representação por espaço de estados e uma representação através de grafos de ligação.

Tem como motivação fornecer mais parâmetros de segurança e controle, concebendo assim mais confiabilidade à operação, impactando tanto na qualidade quanto no sucesso de cada campanha.

## 1.2 Objetivo Geral

Propor uma metodologia de analisar e monitorar a vibração durante o transporte do foguete, modelar o sistema dinâmico da suspensão do transportador, comparar os dados medidos através do protótipo com o modelo obtido através da representação em espaço de estados e grafos de ligação, com o objetivo de interpretar os resultados.

### 1.2.1 Objetivos Específicos

- Coletar dados referentes ao comportamento vibratório do foguete durante o transporte.
- Modelar o sistema dinâmico da suspensão do transportador.
- Obter as equações que descrevem o sistema.
- Compilar dados com software para simulação.
- Analisar os resultados fornecidos através da simulação.

## 1.3 Trabalhos Relacionados

Este trabalho utilizou algumas metodologias e informações de trabalhos que exploram a dinâmica de sistemas mecânicos *MKB*.

As informações relacionadas aos parâmetros de amortecedores, massas, inércia, mola e distância entre suspensões do centro de massa do transportador foram absorvidas através da abordagem do SOUTO (2017), no qual seu trabalho faz uma análise do comportamento dinâmico do transportador durante o transporte do foguete.

A modelagem do sistema dinâmico do transportador teve auxílio do trabalho do BAYRAKDAR (2010), onde seu trabalho aborda diversas formas de sistemas dinâmicos e obtenção das equações que representam o sistema.

## 2 METODOLOGIA

O estudo consiste em implementar um sistema de sensoriamento durante o transporte do foguete para o Setor de Preparação de Lançamento (SPL) do Centro de Lançamento de Alcântara (CLA). O protótipo consiste em um acelerômetro (que tem a função de obtenção dos dados) e um microcontrolador (que gerencia, organiza e envia os dados para um banco de dados). Serão utilizados quatro protótipos, onde três deles estarão localizados em alinhamento com cada suspensão do transportador e um localizado no centro de massa do transportador, onde coletaremos as acelerações em  $x, x_a, x_b, x_c$ .

Será estudada uma representação através de espaço de estados e uma representação através de grafos de ligação, com a finalidade de obtermos um modelo do sistema dinâmico, simularmos o perfil da estrada onde o transportador irá trafegar, obtendo assim as acelerações através do input simulado da estrada, e então, iremos comparar com os dados medidos pelo protótipo.

### 3 REFERÊNCIAL TEÓRICO

Mostra-se nesse capítulo as disciplinas e modelos que envolvem o trabalho proposto, com a finalidade de entender a problemática e com isso, auxiliar na modelagem do problema.

#### 3.1 Modelagem Matemática e Sistemas Dinâmicos

A modelagem matemática de um sistema dinâmico é definida como um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, de forma bastante aceitável. Um sistema pode ser representado de muitas maneiras diferentes e, pode haver muitos modelos matemáticos, dependendo da aplicação e/ou perspectiva que se considere. A dinâmica de muitos sistemas, sejam eles mecânicos, elétricos, térmicos etc., pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Tais equações diferenciais podem ser obtidas utilizando-se as leis físicas que governam um sistema em si, como por exemplo as leis de Newton dos sistemas mecânicos e as leis de Kirchhoff dos sistemas elétricos. Deve-se ter sempre em mente que a obtenção de um modelo matemático razoável é a parte mais importante da análise. (OGATA, 2010).

**Modelos matemáticos:** Podem assumir diversas formas. Dependendo do sistema que é alvo de interesse e das circunstâncias particulares, um modelo matemático pode ser mais adequado do que outro. Como exemplo, em problemas de controle ótimo, é vantajoso usar representações no espaço de estado e, em contrapartida, para a análise de resposta transitória ou de resposta em frequência de sistemas monovariáveis, lineares e invariantes no tempo, a representação através de função de transferência pode ser mais aceitável do que qualquer outra. Uma vez que obtemos o modelo matemático de um sistema dinâmico, existem várias ferramentas analíticas e computacionais para fazer sínteses e/ou análises. (OGATA, 2010).

A precisão de um modelo matemático é aumentada juntamente com a sua complexidade, uma vez que, com a inclusão de novas equações para descrever um sistema completo, aumentamos o grau de precisão do modelo. Na obtenção de um

modelo matemático, deve-se estabelecer um compromisso entre a simplicidade do modelo e a precisão dos resultados, e, quando não for necessária uma precisão extrema, é preferível obter apenas um modelo simplificado, porém, é importante notar que os resultados da análise somente são válidos na medida que o modelo se aproxima do comportamento real de um estudado sistema dinâmico. (OGATA, 2010).

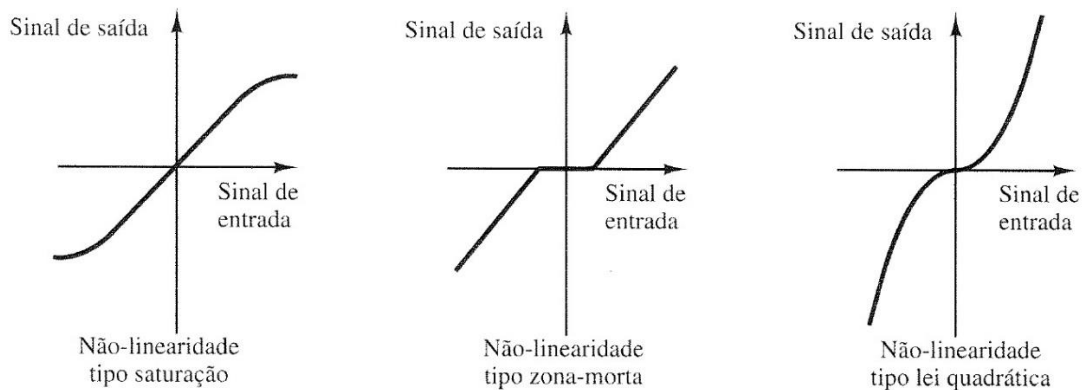
**Sistema linear:** É aquele que se aplica ao princípio da superposição. Tal princípio estabelece que a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas excitações diferentes é igual à soma das duas respostas individuais a cada uma das excitações. Conseqüentemente, para os sistemas lineares, a resposta a várias entradas pode, ser calculada considerando-se uma única entrada de cada vez e adicionando-se os resultados. Dessa forma que é permitida a construção de soluções complicadas para equações diferenciais lineares a partir de soluções simples e, em um estudo de um sistema dinâmico, se a causa e efeito forem proporcionais, presumindo-se que o princípio da superposição seja aplicável, o sistema pode ser considerado linear. (OGATA, 2010).

**Sistemas lineares invariantes no tempo e sistemas lineares variantes no tempo:** Uma equação diferencial é linear se os coeficientes forem constantes ou as funções apenas da variável independente. Sistemas dinâmicos são compostos de componentes lineares a parâmetros concentrados e invariantes no tempo, descritos por equações diferenciais lineares e invariantes no tempo. Os sistemas representados por equações diferenciais cujos coeficientes sejam funções do tempo são chamados de sistemas lineares variáveis no tempo. Um exemplo de um sistema variável no tempo é um sistema de controle de uma nave espacial, onde sua massa varia no tempo devido ao consumo do combustível. (OGATA, 2010).

**Sistemas não-lineares:** Um sistema é não-linear se ele não se aplica o princípio da superposição. Assim, nos sistemas não-lineares a resposta a duas entradas não pode ser calculada tratando-se uma entrada de cada vez e adicionando-se os resultados. Embora muitas relações físicas sejam representadas frequentemente por equações lineares, na maioria dos casos as relações reais não são exatamente lineares. Na prática, muitos sistemas mecânicos, eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos etc., envolvem relações não-lineares entre suas variáveis

descritas. Como exemplo, a saída de um componente pode saturar para grandes sinais de entrada, onde pode ocorrer uma zona morta (pequeno intervalo de valores de sinal de entrada ao qual o componente é insensível) que afeta os sinais pequenos. Não-linearidades do tipo lei quadrática podem ocorrer em alguns componentes, como em amortecedores utilizados em sistemas físicos podem ser lineares em operações de baixa velocidade, mas podem tornar-se não-lineares em altas velocidades, com uma força amortecedora proporcional ao quadrado da velocidade de operação. Exemplos de curvas características para estas não-linearidades são descritas na Fig. 1. (OGATA, 1998).

Figura 1: Curvas características estáticas.



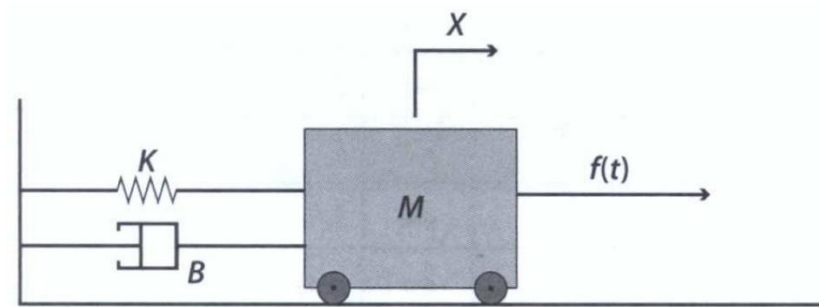
Fonte: OGATA, 1998.

**Linearização de sistemas não lineares:** Uma operação normal do sistema pode ser em torno de um ponto de equilíbrio, e os sinais podem ser considerados pequenos em torno do equilíbrio. Se o sistema opera em torno de um ponto de equilíbrio e os sinais envolvidos são sinais pequenos, então é possível aproximar-se do sistema não-linear por um sistema linear. Tal sinal linear é equivalente ao do sinal não-linear, operando dentro de uma faixa limitada. (OGATA, 1998).

### 3.1.1 Sistemas mecânicos

**Sistemas mecânicos de translação:** De acordo com MAYA (2011), um sistema constituído por um corpo de massa  $M$ , ligado a uma parede por uma mola de constante elástica  $K$  e sujeito a uma resistência viscosa de coeficiente  $B$ . O corpo move-se ao longo do eixo  $x$  sob a ação de uma força  $f(t)$ , conforme indicado na Fig. 2. Supomos, como habitualmente, condições iniciais nulas e a força  $f(t)$  aplicada no instante inicial  $t = 0$ .

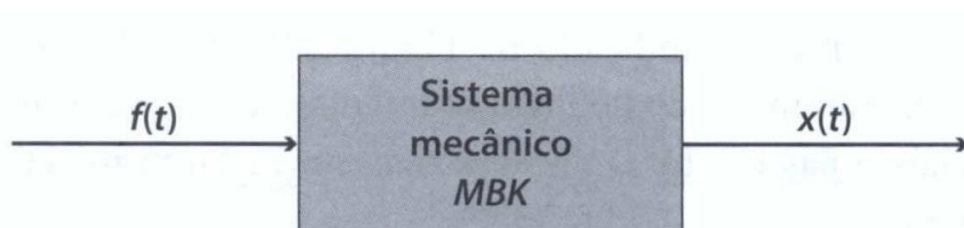
Figura 2: Sistema mecânico na forma MBK.



Fonte: MAYA, 2011.

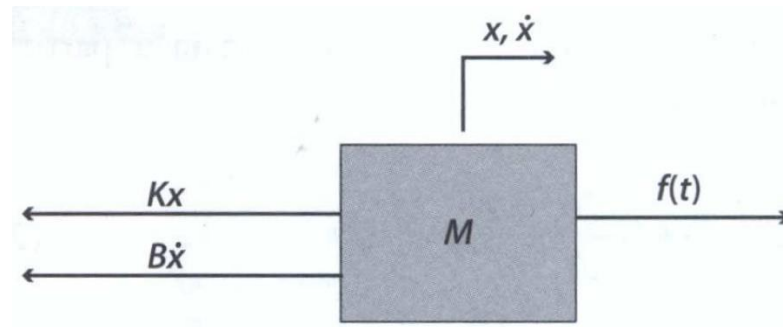
Inicia-se com um modelo matemático e supondo como entrada a força ativa  $f(t)$  e como variável de saída a posição do móvel dada pela abscissa  $x = x(t)$ , de acordo com a Fig. 3. Para escrever as equações de movimento nesse sistema, é conveniente utilizar o diagrama de corpo livre, como mostramos na Fig. 4.

Figura 3: Sistema mecânico MBK com entrada  $f(t)$  e saída  $x(t)$ .



Fonte: MAYA, 2011.

Figura 4: Diagrama de corpo livre com as forças descritas.



Fonte: MAYA, 2011.

O modelo matemático de um sistema mecânico de translação baseia-se na lei fundamental da mecânica, ou seja:

*massa × aceleração = resultante das forças externas*

E, obtêm-se:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - B \frac{dx}{dt} - Kx \quad (1)$$

Que pode ser representada da seguinte forma:

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \quad (2)$$

E de forma compacta:

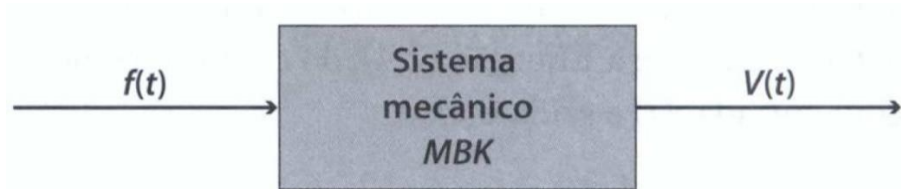
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f(t) \quad (3)$$

Observa-se agora um modelo matemático para o caso em que a entrada seja a força  $f(t)$ , mas a saída seja a velocidade  $V = V(t)$ , e não a posição do móvel Fig. 5. Como a velocidade é a derivada da posição, vem  $V(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$  e também  $x = \int_0^t V dt$ . Então, da Eq. 4, obtemos:



$$M \frac{dV}{dt} + BV + K \int_0^t V dt = f(t) \quad (4)$$

Figura 5: Sistema mecânico MBK com entrada  $f(t)$  e saída  $V(t)$ .

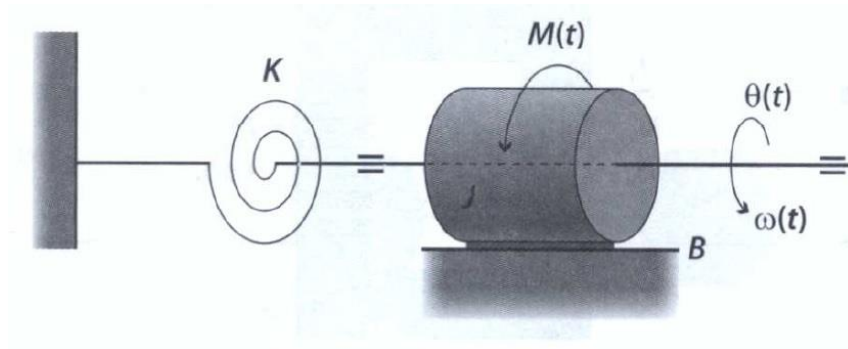


Fonte: MAYA, 2011.

**Sistemas mecânicos rotacional:** De acordo com MAYA (2011), vamos demonstrar um sistema mecânico de rotação de um eixo fixo, com apenas uma única variável de configuração.

Observando a Fig. 6, constituída por um rotor de momento de inércia  $J$ , suportado por um eixo com elasticidade de torção, de constante elástica  $K$  e sujeito a um conjugado resistente do tipo viscoso, isto é, proporcional à velocidade angular do rotor e a um conjugado externo ativo  $M = M(t)$ .

Figura 6: Representação do sistema mecânico rotacional.



Fonte: MAYA, 2011.

As variáveis do sistema são:

$$\text{Abcissa angular } \theta = \theta(t)$$

$$\text{Velocidade angular } \omega = \omega(t) = \dot{\theta}$$

O sistema está em repouso com  $t < 0$ , isto é,  $\theta(t) = 0$  para  $t < 0$ .

As condições iniciais são nulas, e neste caso a abscissa angular mede a deformação angular do eixo elástico.

O modelo matemático de um sistema mecânico rotacional baseia-se na lei fundamental da mecânica de rotação:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M(\text{resultante}) \quad (5)$$

em que  $M(\text{resultante})$  é o conjugado externo resultante que age sobre o rotor.

Assim, obtêm-se a equação:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M(t) - B \frac{d\theta}{dt} - K\theta \quad (6)$$

Resultando nas seguintes equações:

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = M(t) \quad (7)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} + B\omega + K \int_0^t \omega dt = M(t) \quad (8)$$

### 3.2 Vibrações Mecânicas

Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é denominado vibração ou oscilação, como o balançar de um pêndulo ou um movimento de uma corda dedilhada são casos típicos demonstrativos desse fenômeno. Em geral um sistema vibratório inclui um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor ou dissipador). A vibração de um sistema envolve a transferência alternada de sua energia potencial para energia cinética e de

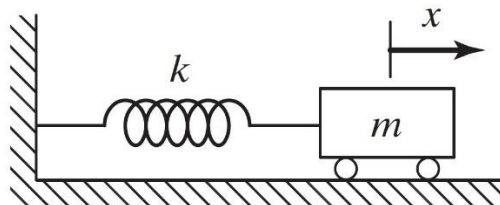
energia cinética para potencial. Se o sistema for amortecido, certa quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de vibração e deve ser substituída por uma fonte externa, se for necessário manter o regime permanente de vibração (RAO, 2010).

### 3.2.1 Graus de liberdade

De acordo com RAO (2010), número mínimo de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante define o grau de liberdade do sistema. O sistema massa-mola mostrado na Fig. 7, representa um sistema com *um grau de liberdade* e pode ser descrito em termos de deslocamento  $x$ .

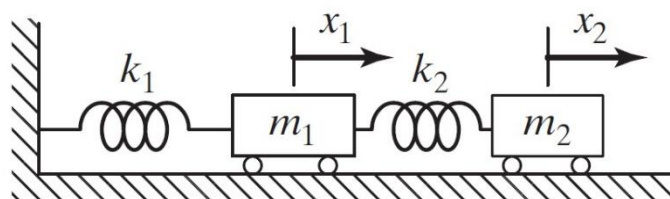
Alguns dos exemplos de *dois e três graus de liberdade* são mostrados nas Fig. 8 e 9, respectivamente. A Fig. 8 mostra um sistema de duas massas e duas molas, descritas pelas coordenadas lineares  $x_1$  e  $x_2$ , e na Fig. 9 as coordenadas  $x_i (i = 1, 2, 3)$  descrevem o movimento do sistema (RAO, 2010).

Figura 7: Sistema com um grau de liberdade.



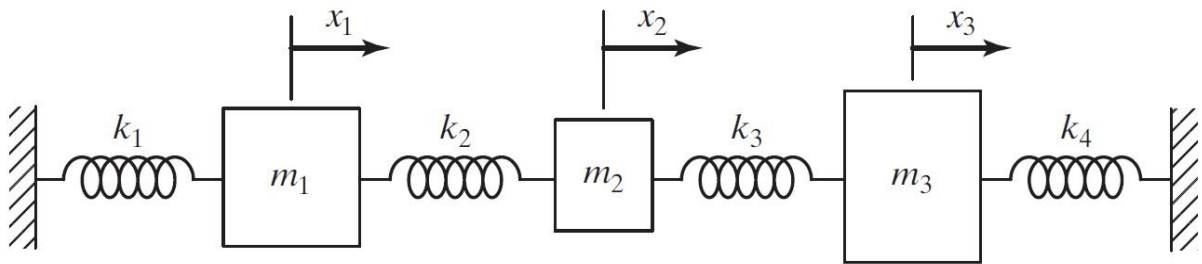
Fonte: RAO, 2010.

Figura 8: Sistema com dois graus de liberdade.



Fonte: RAO, 2010.

Figura 9: Sistema com três graus de liberdade.



Fonte: RAO, 2010.

Segundo afirma RAO (2010), coordenadas necessárias para descrever o movimento de um sistema constituem um conjunto de coordenadas generalizadas. As coordenadas generalizadas normalmente são denotadas por  $q_1$  e  $q_2, \dots$  e podem representar coordenadas cartesianas e não cartesianas.

Sistemas com número finitos de graus de liberdade são denominados *sistemas discretos* ou de parâmetros concentrados e os que tem número infinito de graus de liberdade são denominados *sistemas contínuos* ou distribuídos. Na maioria das vezes os sistemas contínuos são aproximados como sistemas discretos para facilitar na obtenção de suas soluções. Dessa forma, grande parte dos sistemas práticos são estudados tratando-os como massas, molas e amortecedores finitos concentrados, recebendo resultados mais precisos com o aumento do número de graus de liberdade (massas, molas e amortecedores).

### 3.2.2 Classificação das vibrações

Segundo afirma RAO (2010), pode-se classificar os tipos mais importantes de vibração da seguinte forma:

**Vibração livre:** após uma perturbação inicial, o sistema continuar a vibrar por conta própria.

**Vibração forçada:** quando o sistema necessita de uma força externa ou força externa repetitiva para vibrar. Se a frequência externa da força coincidir com uma das frequências naturais do sistema, ocorre uma condição chamada *ressonância*.

**Vibração não amortecida e amortecida:** se nenhuma energia for perdida ou dissipada por atrito ou outra resistência durante a oscilação, a vibração é *não*

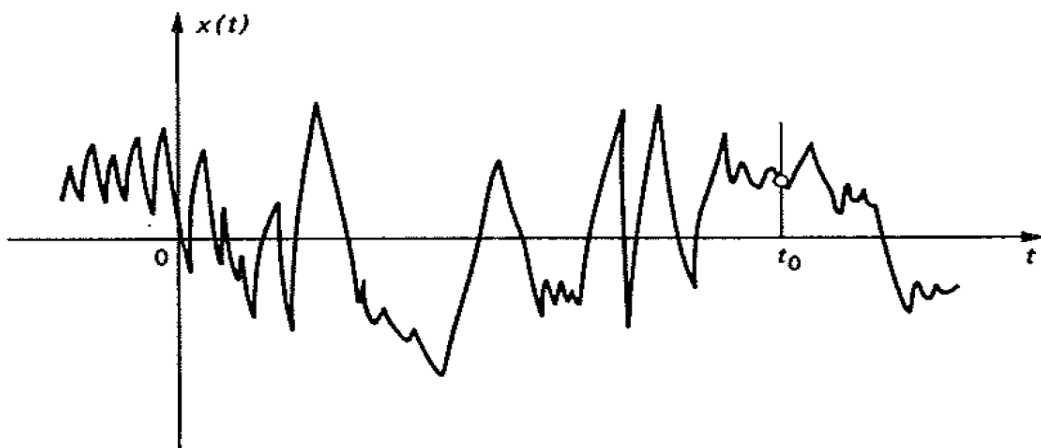
*amortecida*, e se qualquer energia for perdida durante a oscilação, é denominada amortecida.

**Vibração não linear e linear:** Se a vibração for linear, o princípio da superposição é válido e as técnicas matemáticas de análise são bem desenvolvidas. Para a vibração não linear, o princípio da superposição não é valido, e as técnicas de análise são bem menos conhecidas.

**Vibração determinística:** É quando o valor ou magnitude de excitação que age sobre um sistema vibratório for conhecido a qualquer dado instante.

**Vibração aleatória:** Segundo Newland (2005), quando um sistema está vibrando, onde tal movimento é imprevisível, essa vibração é denominada aleatória. Por exemplo uma folha está submetida ao efeito do vento (excitação aleatória), levando em conta sua massa, rigidez e amortecimento, o efeito do vento sobre a folha resulta em uma vibração aleatória. Tal efeito se diz respeito à descoberta das características estatísticas do movimento de um sistema excitado aleatoriamente, como a folha que depende estatisticamente da excitação do vento, e, as propriedades dinâmicas do sistema vibratório dependem da massa, rigidez e amortecimento do sistema da folha.

Figura 10: Histórico de um sistema em vibração aleatória em função do tempo  $t$ .



Fonte: NEWLAND, 2005.

Na Fig. 10 observa-se que um dado deslocamento  $x$  é plotado em função do tempo  $t$ , e como o movimento é aleatório, o valor exato de  $x$  em qualquer momento escolhido, não pode ser previsto com total precisão. O que podemos fazer é descobrir a probabilidade de que  $x$  em um dado momento  $t_0$  esteja dentro dos limites definidos.

### 3.2.3 Elementos de um sistema massa, mola e amortecedor

Trata-se de um sistema clássico para abordagem de sistemas mecânicos, assim, segundo RAO (2010), o conceito desses elementos serão explanados nesse capítulo.

**Mola linear:** uma mola linear é um tipo de elo mecânico cuja massa e amortecimento são considerados desprezíveis, obedecendo a *Lei de Hooke (Princípio da superposição dos efeitos)*. Uma força é desenvolvida na mola sempre que houver um movimento relativo entre suas duas extremidades. A força da mola é proporcional à quantidade de deformação e é dada por:

$$K = dF/dx \quad (9)$$

onde  $F$  é a força da mola,  $x$  é a deformação e  $k$  é a rigidez da mola ou constante elástica. Quanto maior o  $k$  da mola, maior o esforço necessário para efetuar o deslocamento.

**Massa ou Inércia:** admite-se que o elemento de massa ou inércia é um corpo rígido; pode ganhar ou perder energia cinética sempre que a velocidade do corpo mudar. Pela segunda lei do movimento de Newton, o produto da massa por sua aceleração é igual a força aplicada à massa. O trabalho é igual à força multiplicada pelo deslocamento na direção da força e o trabalho sobre uma massa é armazenado na forma de energia cinética da massa.

Usando o *princípio da conservação de energia*, a energia cinética de um sistema massa-mola translacional é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x} \quad (10)$$

onde  $m$  é a massa em  $kg$ , e  $\dot{x}$  é a velocidade de translação da massa em  $m/s$ .

**Elemento de amortecimento:** É um componente do sistema mecânico que funciona como dissipador de energia, assim como o resistor é o componente do sistema elétrico que possui essa função. Admite-se que um amortecedor não tem massa e nem elasticidade, e que a força de amortecimento só existe se houver uma velocidade relativa entre as duas extremidades.

O amortecedor viscoso é o mais usado nos problemas de sistemas mecânicos em engenharia, com o resultado do atrito viscoso, ou seja, atrito que ocorre entre a peça rígida do sistema e um fluido viscoso usado entre as peças móveis do sistema. A resistência viscosa  $F_v$  é descrita matematicamente da seguinte forma:

$$F_v = B \dot{x} \quad (11)$$

onde temos  $\dot{x}$  como a velocidade relativa entre o sólido e o fluido, e  $B$  é o coeficiente de amortecimento viscoso em  $Ns/m^2$ .

**Amplitude:** Deslocamento máximo de um corpo vibratório em relação ao seu ponto de equilíbrio.

**Período de Oscilação:** Tempo que leva para concluir um ciclo do movimento, mostrado da seguinte forma:

$$Período = \frac{2\pi}{\omega} \quad (12)$$

onde  $\omega$  é a frequência circular.

**Frequência Natural:** Segundo NISE (2015), a frequência natural de um sistema é a frequência sem o amortecimento. Um sistema vibratório com  $n$  graus de liberdade terá  $n$  frequências naturais de vibração distintas.

**Batimentos:** RAO (2015) diz que quando dois movimentos harmônicos cujas frequências estão próximas, o movimento resultante é descrito como batimentos. Assim, observando as equações:

$$x_1(t) = X \cos(\omega t) \quad (13)$$

$$x_2(t) = X \cos(\omega + \delta)t \quad (14)$$

onde  $\delta$  é uma variação, tem-se a seguinte representação da soma desses movimentos:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X[\cos(\omega t) + \cos(\omega + \delta)t] \quad (15)$$

### 3.3 Fundamentos de Processos Estocásticos

Segundo AZEVEDO (1996) e QUINTERO (2017), os processos estocásticos descrevem um fenômeno aleatório. O conjunto de valores que não se pode descrever por meio de uma relação matemática explícita é um conjunto que denomina-se estocástico. É possível a obtenção de propriedades estatísticas de um processo estocástico fazendo-se medias e outras características do conjunto considerando-se todos os registros.

Pode-se classificar os processos estocásticos como estacionários e não estacionários, sendo que os estacionários são aqueles nos quais as propriedades estatísticas não variam com o tempo, e os não estacionários possuem propriedades estatísticas totalmente dependentes do tempo. Os processos estacionários podem ser divididos em processos ergódicos, que são os processos que possuem as médias iguais a qualquer uma de suas realizações.

Têm-se as definições também dos processos estocásticos, sendo como discretos ou contínuos, já que o conjunto de valores de uma realização pode ser ou não finito. Um processo contínuo pode ser exemplificado como a variação de temperatura durante um dia qualquer, assim, cada realização do processo corresponde a um registro contínuo de temperaturas durante o dia e o processo é dado pela conjugação da informação relativa a todos os dias em que existia um



registro contínuo. A precipitação diária ao longo de um ano, é um processo discreto onde cada realização é um conjunto de 365 valores referentes às precipitações diárias durante um ano.

**Função densidade de probabilidade:** Define a probabilidade de o valor registrado estar compreendido em um certo intervalo  $\Delta x$ , sendo que é dada pela razão do período de tempo em que  $x(t)$  está situado entre  $x$  e  $x + \Delta x$ , assim tem-se:

$$P[x < x(t_1) \leq x + \Delta x] = p_x(x; t_1)\Delta x \quad (16)$$

**Função cumulativa:** É a função que expressa a probabilidade de o valor registrado ser inferior a um dado valor  $x$ , dada pela razão entre o período de tempo em que  $x(t) < x$  e o período de tempo ocorrido, da seguinte forma:

$$P[x(t_1) \leq x] = F_x(x; t_1) = \int_{-\infty}^x p_x(x; t_1)dx \quad (17)$$

**Valor esperado:** Dado um processo em um determinado instante de tempo e a média temporal desse processo são dois valores estatísticos mais relevantes de uma função. Em processos ergódicos, esses valores serão coincidentes.

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_x(x; t)dx \quad (18)$$

**Valor quadrático médio:** É o valor médio ou valor esperado de  $x^2$ , descrito da seguinte forma:

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p_x(x)dx \quad (19)$$

**Variância:** É o valor médio do quadrado do desvio de  $x$  em relação ao seu valor médio, desse modo:

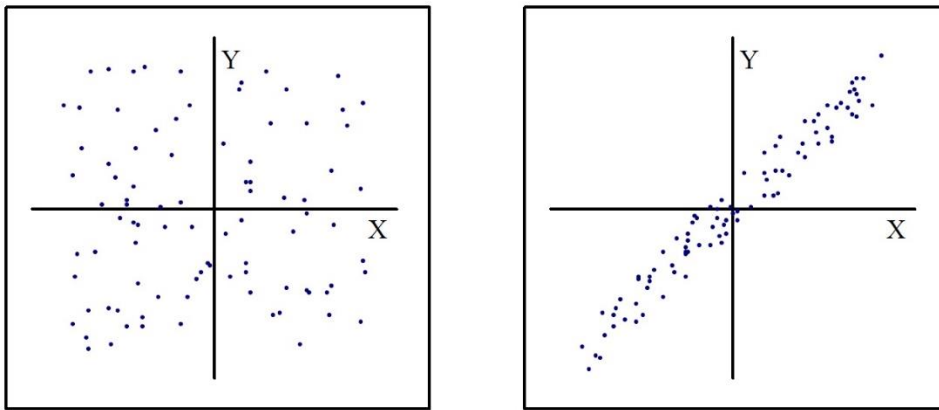
$$\sigma^2 = E[(x - E[x])^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[x])^2 p_x(x) dx = E[x^2] - (E[x])^2 \quad (20)$$

onde  $\sigma$  é o desvio padrão.

A função densidade de probabilidade que representa uma distribuição normal, ou dita Gaussiana, é comumente utilizada na caracterização de fenômenos, representada da seguinte forma:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (21)$$

Figura 11: Exemplo de valores não correlacionados e correlacionados, respectivamente.



Fonte: AZEVEDO, 1996.

Observando a Fig. 11, tem-se duas séries de pontos com coordenadas X e Y, assim podem-se ver a diferença explícita de não correlação e correlação.

Supondo que as médias dos valores de  $x$  e  $y$  são nulas, pode-se relacionar a média de  $y$  da seguinte forma:

$$\bar{y} = ax \quad (22)$$

Calculando os desvios em qualquer ponto na reta descrita, juntamente com o erro quadrático médio, respectivamente tem-se:

$$e = y - \bar{y} = y - ax \quad (23)$$

$$E[e^2] = E[(y - ax)^2] = E([y^2] - 2aE([xy] + a^2E[x^2]) \quad (24)$$

Assim tem-se o valor de “a” que minimiza o erro quadrático médio:

$$a = \frac{E[xy]}{E[x^2]} \quad (25)$$

E estima-se o  $\bar{y}$  com maior precisão da seguinte forma:

$$\bar{y} = \frac{E[xy]}{E[x^2]} x \quad (26)$$

Considerando nulo todos os valores médios de  $x$  e de  $y$ :

$$\frac{(\bar{y} - m_y)}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \right\} \frac{(x - m_x)}{\sigma_x} \quad (27)$$

Sendo que  $m_x$  e  $m_y$  são os valores esperados de  $x$  e de  $y$ . o desvio de  $y$  em relação de acordo com sua média, normalizado por seu desvio padrão pode ser relacionado a um valor similar de  $x$  por meio do **coeficiente de correlação**, da seguinte forma:

$$\rho = \frac{E[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (28)$$

**Função de autocorrelação:** É um valor esperado do produto  $\{x(t)x(t + \tau)\}$ , sendo que essa função é obtida com o valor de cada registro em um dado instante  $t$  e novamente em um instante  $t + \tau$ . Seguindo com o cálculo do produto desses dois valores para cada uma das realizações desse processo, obtêm-se a média desses produtos para todas as realizações do processo.

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)] \quad (29)$$

Podendo observar que, a função de autocorrelação é uma forma de descrição dos processos, já que ela tem toda a informação estatística relevante sobre eles e mostra como os valores variam com o tempo e como se relacionam entre si.

Pode-se afirmar que, se um processo tem média nula, a função de autocorrelação tende para zero, e se o processo estocástico é estacionário e tem média nula, por ergodicidade, pode-se dizer que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(\tau)| d\tau < \infty \quad (30)$$

A transformada de Fourier da função é descrita da seguinte forma:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \quad (31)$$

A transformada inversa de Fourier é:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (32)$$

Onde define-se  $S_x(\omega)$  como a **densidade espectral** do processo  $x(t)$ , onde se refere à transposição da função de autocorrelação para o domínio da frequência.

E, de acordo com  $R_x(0) = E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) 1 d\omega$ , tem-se que  $E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega$ , mostrando que a área sobre a curva que representa a função de densidade espectral é o valor quadrático médio do processo.

Em casos em que o sinal analisado é um registro de acelerações, a densidade espectral é chamada de **densidade espectral de potência**, ou **espectro de potência**, com unidade igual ao quadrado das unidades do sinal por unidade de frequência.

### 3.4 Representação em espaço de estados

A tendência atual dos sistemas de engenharia é no sentido de aumentar sua complexidade em função, principalmente, da necessidade de realizar tarefas complexas e com requisitos de boa precisão. Sistemas complexos podem ter muitas entradas e muitas saídas e podem ser variantes no tempo. A necessidade de satisfazer requisitos cada vez mais rigorosos quanto ao desempenho de sistemas de controle, o aumento de complexidade dos sistemas e a facilidade de acesso aos computadores de grande porte ensejaram o desenvolvimento da teoria de controle moderno, iniciada por volta de 1960, como uma nova forma de analisar e projetar sistemas de controles complexos (OGATA, 2010).

Com a disponibilidade dos computadores digitais, é conveniente considerar a formulação no domínio do tempo de equações representando os sistemas de controle. As técnicas no domínio do tempo podem ser usadas para sistemas não-lineares, variantes no tempo e multivariáveis. Um sistema de controle variante no tempo é um sistema para o qual um ou mais parâmetros do sistema podem variar em função do tempo, como exemplo, a massa de um foguete varia em função do tempo à medida em que o propelente vai sendo consumido. Um sistema multivariável, é um sistema com diversos sinais de entrada e de saída. A solução da formulação do problema de um sistema de controle no domínio do tempo é facilitada pela disponibilidade e facilidade do uso dos computadores digitais. Em consequência disto decorre o interesse em reconsiderar a descrição de sistemas dinâmicos no domínio do tempo (domínio matemático que incorpora a resposta e a descrição de um sistema em termos do tempo,  $t$ ), uma vez que são representados por equações diferenciais. (DORF, 2001).

#### 3.4.1 Elementos da Representação em Espaço de Estados

De acordo com OGATA (2010), tem-se a seguir as definições relacionadas a modelagem em espaço de estados.

**Estado:** O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de valores de variáveis (chamadas variáveis de estado) de modo que o conhecimento destes valores em  $t = t_0$ , junto com o conhecimento dos valores do sinal de entrada para  $t \geq t_0$ , determina completamente o comportamento do sistema em qualquer instante  $t \geq t_0$ . Temos que o conceito de estado não está limitado aos sistemas físicos. Ele se aplica em sistemas biológicos, econômicos e outros diversos.

**Variáveis de estado:** as variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas cujo conjunto de valores determina o estado do sistema. Se forem necessárias pelo menos  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , para descrever completamente o comportamento de um sistema dinâmico (de modo que uma vez conhecidos os valores do sinal de entrada para  $t \geq t_0$  e especificado o estado inicial em  $t = t_0$ , o estado futuro do sistema esteja completamente determinado), então tais  $n$  variáveis são um conjunto de variáveis de estado.

Observando que as variáveis de estado não precisam ser grandezas fisicamente mensuráveis ou observáveis. Variáveis que não representam grandezas físicas e aquelas que não são nem mensuráveis nem observáveis podem ser escolhidas como variáveis de estado. Tal liberdade na escolha das variáveis de estado é uma vantagem dos métodos de espaço de estados, em termos práticos, é conveniente escolher grandezas facilmente mensuráveis para variáveis de estado, pois as leis de controle ótimo requerem a retroação de todas as variáveis de estado com ponderação adequada.

**Vetor de estado:** Se  $n$  variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então estas  $n$  variáveis de estado podem ser consideradas as  $n$  componentes de um vetor  $\mathbf{x}$ . Um vetor de estado é, um vetor que determina univocamente o estado  $\mathbf{x}(t)$  do sistema para qualquer instante  $t \geq t_0$ , uma vez conhecidos o estado em  $t = t_0$  e a função de entrada  $\mathbf{u}(t)$  para  $t \geq t_0$ .

**Espaço de estados:** O espaço  $n$ -dimensional cujo eixos coordenados consistem nos eixos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , assim, qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

**Equações no espaço de estados:** A análise no espaço de estados envolve três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado. A representação de um dado sistema no espaço de estado não é única, exceto que o número de variáveis de estado é o mesmo para qualquer das diferentes representações do sistema descrito.

Os sistemas dinâmicos devem envolver elementos que memorizem os valores de excitação para  $t \geq t_1$ . Uma vez que os integradores atuam nos sistemas de controle contínuos no tempo como dispositivos de memória, os sinais de saída de tais integradores podem ser considerados como valores das variáveis que definem o estado interno de sistemas dinâmicos. Desse modo, as variáveis de saída dos integradores servem como variáveis de estado. O número de variáveis de estado necessárias na definição completa dinâmica de um sistema é igual ao número de integradores envolvidos.

Admita-se que um sistema multivariável (múltiplas entradas e múltiplas saídas) envolva  $n$  integradores. Suponha-se, que haja  $r$  sinais de entrada  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...  $u_r(t)$  e  $m$  sinais de saída  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , ...  $y_m(t)$ . Definam-se as  $n$  variáveis de saída dos integradores como variáveis de estado com valores:  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...  $x_n(t)$ . O sistema pode, então, ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \tag{33}$$

Os valores dos sinais de saída  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , ...  $y_m(t)$  do sistema são dados por:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \tag{34}$$

Assim, obtêm-se a seguinte definição:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Onde as Eq. 36 e 37 se mostram-se da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (36)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (37)$$

De modo que, a Eq. 36 é a equação de estado e a Eq. 37 é a equação de saída. Se as funções vetoriais  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  envolverem uma variável  $t$  explicitamente, então o sistema será dito variante no tempo.

E, se as Eq. 36 e 37 forem linearizadas em torno de um estado de operação, obtêm-se as seguintes equações lineares para o estado e para a saída:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (38)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (39)$$

E tem-se que  $\mathbf{A}(t)$  é a matriz de estado,  $\mathbf{B}(t)$  é a matriz de entrada,  $\mathbf{C}(t)$  é a matriz de saída e  $\mathbf{D}(t)$  a matriz de transmissão direta.



### 3.5 Representação através de grafos de ligação

A modelagem de sistemas físicos permite uma simples representação sem perder a generalidade do sistema dinâmico de parâmetro concentrado, permitindo analisar sistemas complexos com diferentes domínios energéticos. Essa técnica possui os seguintes elementos básicos (KARNOPP, 2012):

**Geradores de potência:** Fonte de fluxo ( $Sf$ ) e Fonte de esforço ( $Se$ ).

**Dissipadores:** Resistores ( $R$ ).

**Armazenadores de energia:** Capacitores ( $C$ ) e Elementos inerciais ( $I$ ).

**Elementos de acoplamento:** Transformadores ( $TF$ ), Giradores ( $GY$ ), Junção “0” e Junção “1”.

Esses elementos combinados convenientemente, descrevem o modelo físico de um sistema através de uma representação gráfica usando simbologia própria, que além de permitir a visualização da conexão de vários elementos componentes do sistema, mostra implícito todo o equacionamento do modelo. Um modelo de grafos de ligação é formado por um componente ou subsistemas conectados por ligações (Bonds) que representam o fluxo de potência entre eles (Martins, 2002).

São utilizadas as seguintes variáveis generalizadas:

**Variável de potência (Estado):** esforço ( $e$ ) e fluxo ( $f$ ).

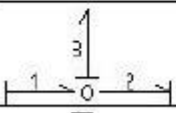
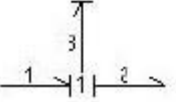
**Variável de energia (Integral):** quantidade de movimento ( $p$ ) e deslocamento ( $q$ ).

As variáveis de esforço  $e(t)$  e de fluxo  $f(t)$  são chamadas de variáveis de potência porque o produto dessas variáveis em função do tempo é igual a potência que existe no sistema (Martins, 2002).

#### 3.5.1 Elementos básicos

Quando é definido o modelo que será utilizado, e uma vez identificados os elementos dos componentes de acordo com a Fig. 12, podemos obter a representação através dos Grafos de Ligação (Bond Graphs).

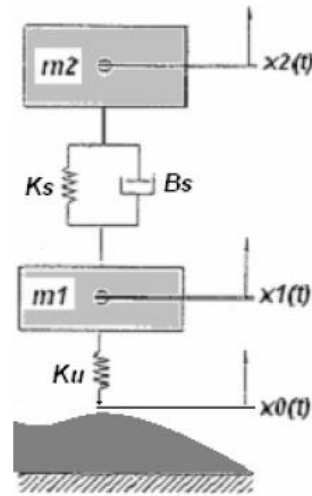
Figura 12: Elementos e componentes do grafo de ligação.

Elementos		Relação Constitutiva	Símbolo Convencional	Sistema Elétrico	Sistema Hidráulico
Variáveis de Potência	Esforço	$e$	$e$	Tensão, $U$ [V]	Pressão, $p$ [Pa]
	Fluxo	$f$	$f$	Corrente elétrica, $i$ [A]	Vazão, $Q$ [m <sup>3</sup> /s]
Variáveis Integrais	Momentum	$p = \int edt$	$p$	Fluxo elétrico, $\lambda$ [V.s]	Quantidade Movimento de pressão, $Pp$ , [Pa.s]
	Deslocamento	$q = \int fdt$	$q$	Carga elétrica, $q$ [C]	Volume, $V$ [m <sup>3</sup> ]
Inertância	Indutância de energia ao sistema	$f(t) = \frac{1}{L} \int_0^i e(t).dt$	$\frac{e}{f} \rightarrow L$	Indutância Elétrica [H]	Indutância Fluida [Pa.s <sup>2</sup> /m <sup>3</sup> ]
Capacitância	Capacidade de acumular energia	$e(t) = \frac{1}{C} \int_0^i f(t).dt$	$\frac{e}{f} \rightarrow C$	Capacitância Elétrica [F]	Capacitância fluida [m <sup>3</sup> /Pa]
Resistência	Elemento dissipador de energia	$e(t) = f(t).R$	$\frac{e}{f} \rightarrow R$	Resistência elétrica [Ω]	Resistência fluida [Pa.s/m <sup>3</sup> ]
Fonte de Esforço	Supre o sistema		$Se \xrightarrow{E(t)}$	Fonte de tensão	Fonte de pressão
Fonte de Fluxo	Supre o sistema		$Sf \xrightarrow{(Ft)}$	Fonte de corrente	Fonte de vazão
Transformador	Ampliam ou reduzem a amplitude de uma entrada	$e_1 = me_2$ $mf_1 = f_2$	$\frac{m}{TF} \rightarrow$	Transformador de potência	Pistão hidráulico
Girador	Relaciona esforço de entrada e fluxo de saída e vice versa	$e_1 = \Omega f_2$ $\Omega f_1 = e_2$	$\frac{\Omega}{Gy} \rightarrow$	Gerador Motor	Turbina Bomba
Elementos de Junções	Junção " 0 "	$e_1 = e_2 = e_3$ $f_1 - f_2 - f_3 = 0$		Impedância em paralelo	Derivações em sistemas hidráulicos
	Junção " 1 "	$f_1 = f_2 = f_3$ $e_1 - e_2 - e_3 = 0$		Impedância em série	Perda de carga serie

Fonte: MARTINS, 2010.

Expressa-se a seguir, a Fig. 13 que representa uma modelagem de 1/4 de uma suspensão de um veículo, composta por duas massas, um amortecedor viscoso e duas molas, onde todos esses componentes fazem parte do sistema dinâmico que descreve a suspensão que estudaremos nesse trabalho.

Figura 13: Modelo dinâmico de 1/4 da suspensão.

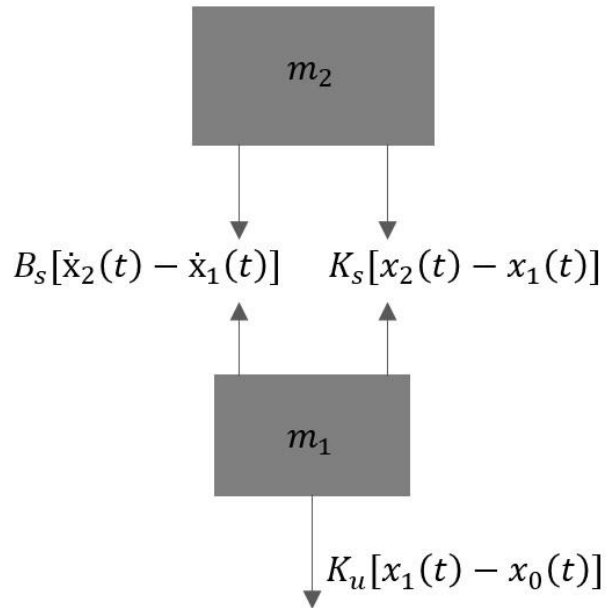


Fonte: SILVA, 2007.

A rigidez do pneu é modelada pela mola  $K_u$  e as demais massa não suspensas, são modeladas como  $m_1$ . O coeficiente de amortecimento viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente por  $B_s$  e  $K_s$ , e a massa suspensa distribuída conforme 1/4 da suspensão é modelada pela massa  $m_2$ . Foram adotadas as coordenadas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. A coordenada  $x_0$  servirá para descrever o movimento do solo, devido às irregularidades do terreno (Oda, 2007).

O diagrama de corpo livre do sistema é mostrado na Fig. 14, onde  $x_2(t) > x_1(t) > x_0(t)$ .

Figura 14: Diagrama de corpo livre.



Fonte: ODA, 2007, modificado pelo autor.

Aplicando a segunda lei de Newton à  $m_1$  e  $m_2$ :

$$-K_u([x_1(t) - x_0(t)]) + K_s[x_2(t) - x_1(t)] + B_s[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = m_1\ddot{x}_1(t) \quad (40)$$

$$-K_s[x_2(t) - x_1(t)] - B_s[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)] = m_2\ddot{x}_2(t) \quad (41)$$

Dando origem ao modelo matemático que fica composto pelo conjunto de EDOL's:

$$m_1\ddot{x}_1(t) + B_s\dot{x}_1(t) - B_s\dot{x}_2(t) + [K_u - K_s]x_1(t) - K_sx_2(t) = K_u x_0(t) \quad (42)$$

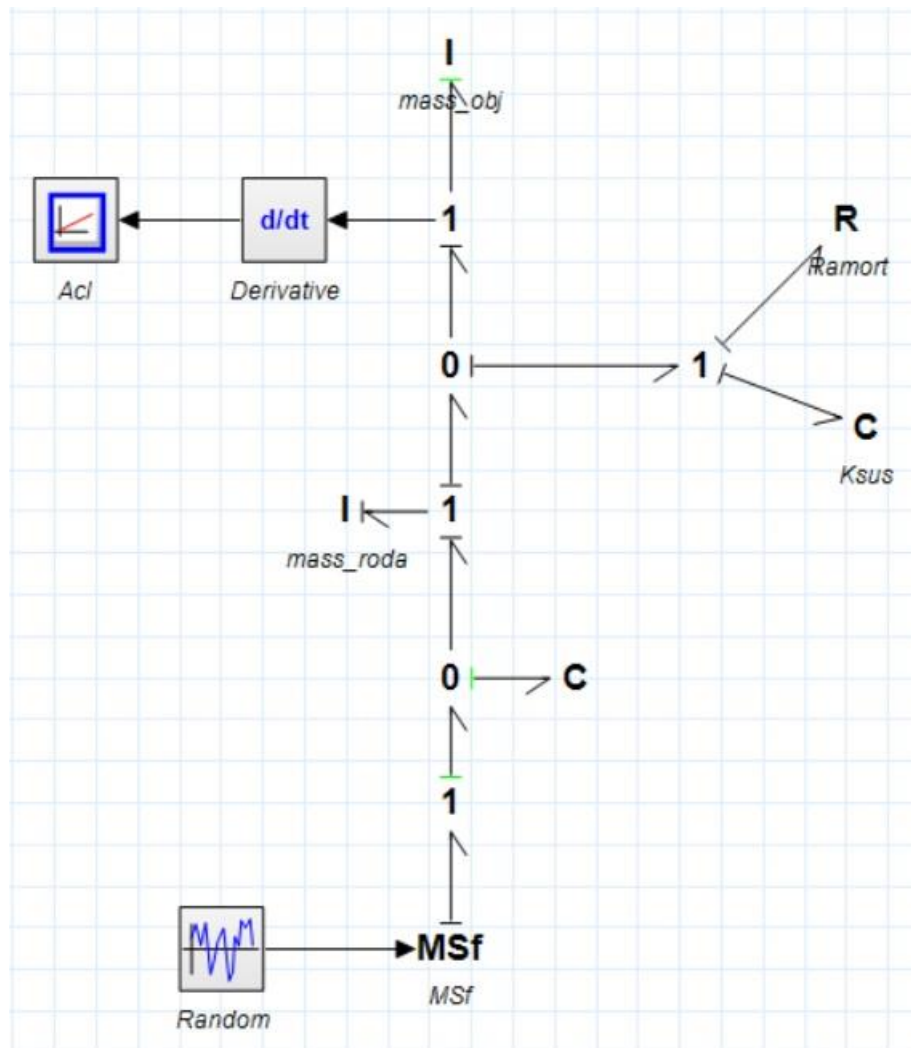
$$m_2\ddot{x}_2(t) - B_s\dot{x}_1(t) + B_s\dot{x}_2(t) - K_sx_1(t) + K_sx_2(t) = 0 \quad (43)$$

Matricialmente, onde observa-se a matriz de inércia, o vetor aceleração, matriz de amortecimento, vetor velocidade, matriz de rigidez, vetor de deslocamento (*saída*) e vetor de excitação (*entrada*), respectivamente (ODA, 2007):

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_s & -B_s \\ -B_s & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_u + K_s & -K_s \\ -K_s & K_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = K_u \begin{bmatrix} x_0(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

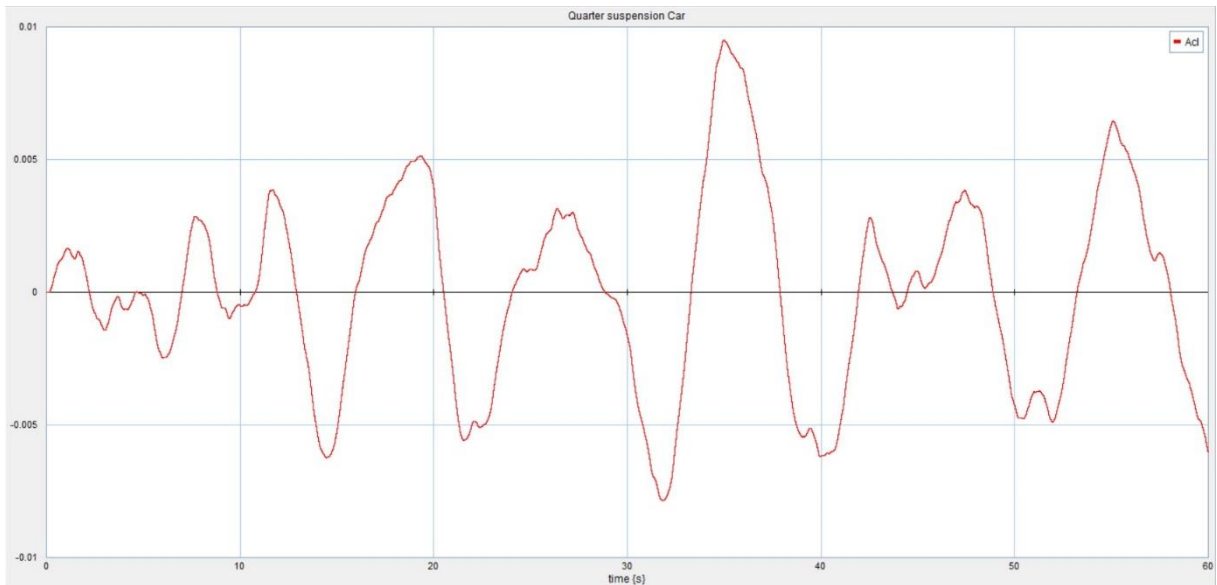
A modelagem é feita pela técnica de grafos de ligação, através do software 20-sim, da empresa Controllab, onde as premissas de projeto estão sendo estudadas para gerar um modelo consistente e mais próximo do real. A Fig. 15 mostra o resultado da modelagem de 1/4 da suspensão de um veículo, e na Fig. 16 podemos observar o comportamento da aceleração da massa suspensa, quando excita-se com uma entrada aleatória, simulando o perfil da estrada.

Figura 15: Modelagem em grafos de ligação de 1/4 da suspensão.



Fonte: AUTOR, 2019.

Figura 16: Aceleração da massa suspensa.

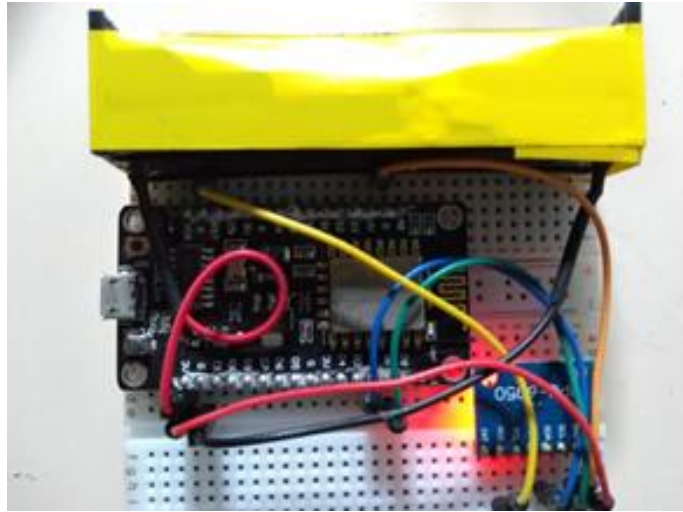


Fonte: AUTOR, 2019.

### 3.6 Protótipo de Medição de Aceleração

O protótipo trata-se do conjunto de dispositivos (acelerômetro e microcontrolador) conectados através de uma placa protoboard ou matriz de contatos (usada para fazer testes provisórios) atuando de forma integrada e alimentados por uma fonte 3,3V, como mostrado na Fig. 17. Os dados capturados serão enviados via Wi-Fi para um servidor nas nuvens e armazenados em uma base de dados MySQL onde poderão ser recuperados/acessados de acordo com a necessidade em qualquer dispositivo com conexão à internet.

Figura 17: Protótipo para medição de aceleração.



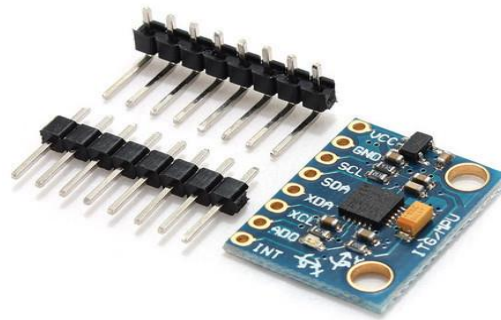
Fonte: AUTOR, 2018.

Para fim de conhecimento, neste capítulo falaremos sobre os dispositivos e algumas de suas especificações.

### 3.6.1 Acelerômetro

Trata-se de um sensor IMU, com uma combinação de um giroscópio e de um acelerômetro triaxial MEMS (tecnologia que integra elementos mecânicos, sensores e eletrônicos em um único chip). Possui um processador digital de movimento com a capacidade de processamento de algoritmos complexos de fusão de movimento em nove eixos. Existe uma gama de aplicações relacionadas a MEMS, o modelo utilizado no protótipo é o MPU6050, que usaremos para fazer as medições das acelerações nos três eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Figura 18: Acelerômetro modelo MPU6050.



Fonte: <https://www.filipeflop.com>, 2019.

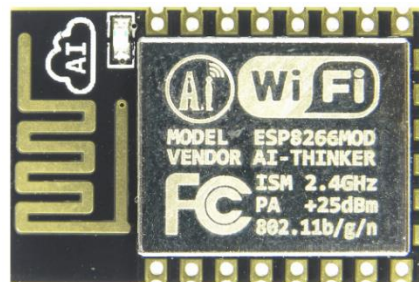
Suas especificações são:

- Modelo MPU-6050
- Tensão de operação entre 3-5V
- Conversor AD 16 bits
- Comunicação com protocolo padrão I<sup>2</sup>C
- Faixa do acelerômetro entre  $\pm 2$ ,  $\pm 4$ ,  $\pm 8$ ,  $\pm 16g$

### 3.6.2 Microcontrolador

É um dispositivo de modelo comercial do tipo ESP8266 de baixo consumo, que possibilita a troca e armazenamento de informações para uma estação de monitoramento.

Figura 19: Microcontrolador modelo ESP8266.



Fonte: <https://labdegaragem.com>, 2019.



Suas especificações são:

- Suporte para rede WIFI 802.11 b/g/n
- Protocolo TC/IP integrado,
- Interfaces SDIO 2.0, SPI, UART e I<sup>2</sup>C integradas
- Processador RISC integrado
- Níveis de tensão entre 0-3,3V
- Linguagem de programação C++

## 4 RESULTADOS

Como resultado, tem-se a modelagem do sistema dinâmico do transportador, representada através de representação em espaço de estados, descrita na Fig. 20 e uma representação através de grafos de ligação descrita na Fig. 25. Utilizamos os dados do transportador como referência do SOUTO (2017), mostrados a seguir:

$$m = 19995 \text{ kg (massa do transportador)}$$

$$J = 274980 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ (inércia)}$$

$$m_{rf} = 544 \text{ kg (massa da suspensão frontal)}$$

$$m_{rt} = 1043 \text{ kg (massa da suspensão traseira)}$$

$$K_{sf} = 2000 \text{ N/m (rigidez da mola da suspensão frontal)}$$

$$K_{st} = 2000 \text{ N/m (rigidez da mola da suspensão traseira)}$$

$$K_{pf} = 9800 \text{ N/m (rigidez da mola do pneu frontal)}$$

$$K_{pt} = 9800 \text{ N/m (rigidez da mola do pneu traseiro)}$$

$$C_{sf} = 6570 \text{ N} \cdot \text{s/m (amortecimento da suspensão frontal)}$$

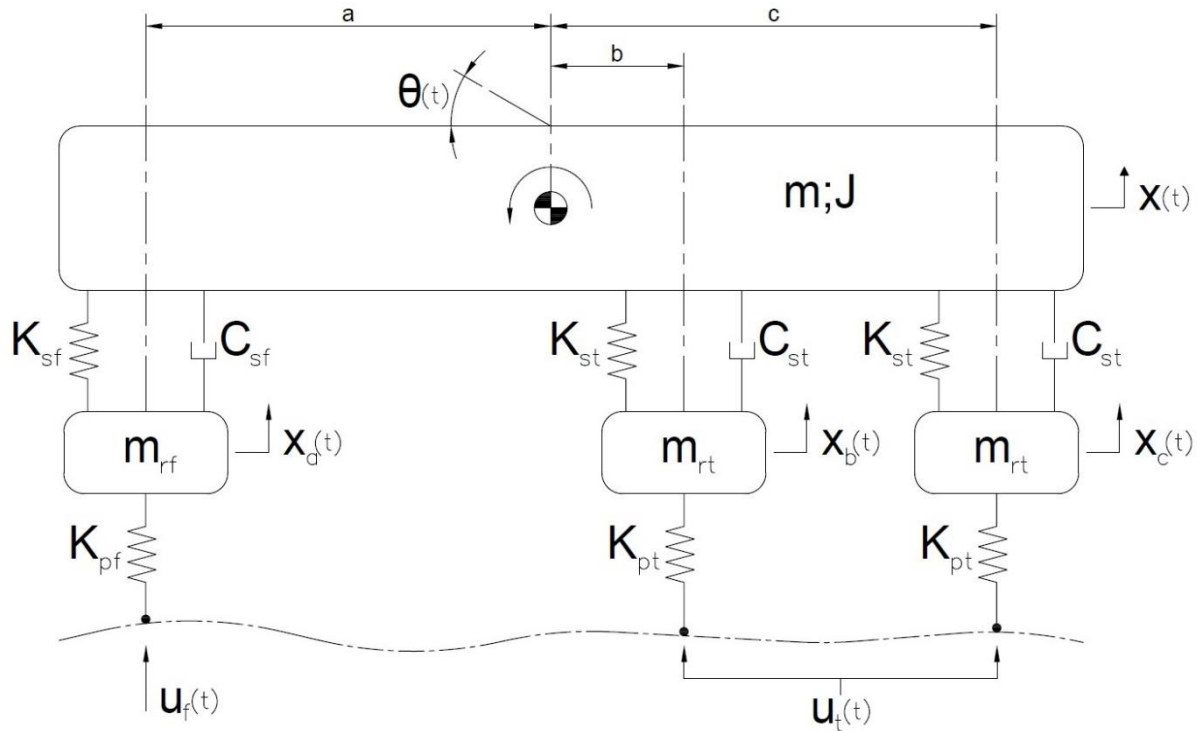
$$C_{st} = 7790 \text{ N} \cdot \text{s/m (amortecimento da suspensão traseira)}$$

$$a = 8,375 \text{ m (distância } a \text{ da suspensão frontal para centro de massa)}$$

$$b = 7,700 \text{ m (distância } b \text{ da suspensão traseira para centro de massa)}$$

$$c = 8,375 \text{ m (distância } c \text{ da suspensão traseira para centro de massa)}$$

Figura 20: Modelo dinâmico da suspensão do transportador.



Fonte: Souto, 2017, modificado pelo autor.

Os parâmetros do modelo dinâmico da suspensão, são descritos da seguinte forma:

$\theta(t)$  : variação angular;

$x(t)$  : deslocamento da massa  $m$ ;

$x_a(t)$  : deslocamento da massa  $m_{rf}$ ;

$x_b(t)$  e  $x_c$  : deslocamentos das massas  $m_{rt}$ ;

$u_f(t)$  : pulso simulando estrada na suspensão frontal;

$u_t(t)$  : pulso simulando estrada na suspensão traseira;

Onde  $x(t) > (x_a(t), x_b(t), x_c(t)) > (u_f(t), u_t(t))$ .

Aplicando a segunda lei de Newton à  $m, J, m_{rf}$  e  $m_{rt}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}(t) = & -K_{sf}(x(t) - a\theta(t) - x_a(t)) - K_{st}(x(t) - b\theta(t) - x_b(t)) - K_{st}(x(t) - \\ & c\theta(t) - x_c(t)) - C_{sf}(\dot{x}(t) - a\dot{\theta}(t) - \dot{x}_a(t)) - C_{st}(\dot{x}(t) - b\dot{\theta}(t) - \dot{x}_b(t)) - \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
& C_{st} \left( \dot{x}(t) - c\dot{\theta}(t) - \dot{x}_c(t) \right) \\
\mathbf{J}\ddot{\theta}(t) = & -K_{sf}(ax(t) - a^2\theta(t) - ax_a(t)) + K_{st}(bx(t) - b^2\theta(t) - \\
& bx_b(t)) + K_{st}(cx(t) - c^2\theta(t) - cx_c(t)) - C_{sf} \left( a\dot{x}(t) - a^2\dot{\theta}(t) - a\dot{x}_a(t) \right) + \\
& C_{st} \left( b\dot{x}(t) - b^2\dot{\theta}(t) - b\dot{x}_b(t) \right) + C_{st} \left( c\dot{x}(t) - c^2\dot{\theta}(t) - c\dot{x}_c(t) \right)
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\mathbf{m}_{rt}\ddot{x}_a(t) = -K_{pf}(x_a(t) - u_f(t)) + K_{sf}(x(t) - a\theta(t) - x_a(t)) + C_{sf} \left( \dot{x}(t) - a\dot{\theta}(t) - \dot{x}_a(t) \right) \tag{47}$$

$$\mathbf{m}_{rt}\ddot{x}_b(t) = -K_{pt}(x_b(t) - u_t(t)) + K_{st}(x(t) - b\theta(t) - x_b(t)) + C_{st} \left( \dot{x}(t) - b\dot{\theta}(t) - \dot{x}_b(t) \right) \tag{48}$$

$$\mathbf{m}_{rt}\ddot{x}_c(t) = -K_{pt}(x_c(t) - u_t(t)) + K_{st}(x(t) - c\theta(t) - x_c(t)) + C_{st} \left( \dot{x}(t) - c\dot{\theta}(t) - \dot{x}_c(t) \right) \tag{49}$$

Definindo as variáveis de estado, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_1 = x(t); x_2 = \dot{x}(t); x_3 = \theta(t); x_4 = \dot{\theta}(t); x_5 = x_a(t); x_6 = \dot{x}_a(t); \\
x_7 = x_b(t); x_8 = \dot{x}_b(t); x_9 = x_c(t); x_{10} = \dot{x}_c(t);
\end{aligned}$$

As derivadas das variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 = \dot{x}(t); \dot{x}_2 = \ddot{x}(t); \dot{x}_3 = \dot{\theta}(t); \dot{x}_4 = \ddot{\theta}(t); \dot{x}_5 = \dot{x}_a(t); \dot{x}_6 = \ddot{x}_a(t); \\
\dot{x}_7 = \dot{x}_b(t); \dot{x}_8 = \ddot{x}_b(t); \dot{x}_9 = \dot{x}_c(t); \dot{x}_{10} = \ddot{x}_c(t);
\end{aligned}$$

Desenvolvendo as equações, e usando a modelagem através de espaço de estados, obtêm-se as novas equações descritas a seguir:

$$\dot{x}_1 = \dot{x}(t) = x_2 \tag{50}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \left(\frac{-K_{sf}-2K_{st}}{m}\right)x_1 + \left(\frac{-C_{sf}-2C_{st}}{m}\right)x_2 + \left(\frac{aK_{sf}+(b+c)K_{st}}{m}\right)x_3 + \left(\frac{aC_{sf}+(b+c)C_{st}}{m}\right)x_4 + \left(\frac{K_{sf}}{m}\right)x_5 + \left(\frac{C_{sf}}{m}\right)x_6 + \left(\frac{K_{st}}{m}\right)x_7 + \left(\frac{C_{st}}{m}\right)x_8 + \left(\frac{K_{st}}{m}\right)x_9 + \left(\frac{C_{st}}{m}\right)x_{10} \quad (51)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = \dot{\theta}(t) = x_4 \quad (52)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4 = \left(\frac{-aK_{sf}+(b+c)K_{st}}{J}\right)x_1 + \left(\frac{-aK_{sf}+(b+c)K_{st}}{J}\right)x_2 + \left(\frac{a^2K_{sf}-(b^2+c^2)K_{st}}{J}\right)x_3 + \left(\frac{a^2C_{sf}-(b^2+c^2)C_{st}}{J}\right)x_4 + \left(\frac{aK_{sf}}{J}\right)x_5 + \left(\frac{aC_{sf}}{J}\right)x_6 + \left(\frac{-bK_{st}}{J}\right)x_7 + \left(\frac{-bC_{st}}{J}\right)x_8 + \left(\frac{-cK_{st}}{J}\right)x_9 + \left(\frac{-cC_{st}}{J}\right)x_{10} \quad (53)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_5 = \dot{x}_a(t) = x_6 \quad (54)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_6 = \left(\frac{K_{sf}}{m_{rf}}\right)x_1 + \left(\frac{C_{sf}}{m_{rf}}\right)x_2 + \left(\frac{-aK_{sf}}{m_{rf}}\right)x_3 + \left(\frac{-aC_{sf}}{m_{rf}}\right)x_4 + \left(\frac{-K_{pf}-K_{sf}}{m_{rf}}\right)x_5 + \left(\frac{-C_{sf}}{m_{rf}}\right)x_6 + \left(\frac{K_{pf}}{m_{rf}}\right)u_f \quad (55)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_7 = \dot{x}_b(t) = x_8 \quad (56)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_8 = \left(\frac{K_{st}}{m_{rt}}\right)x_1 + \left(\frac{C_{st}}{m_{rt}}\right)x_2 + \left(\frac{-bK_{st}}{m_{rt}}\right)x_3 + \left(\frac{-bC_{st}}{m_{rt}}\right)x_4 + \left(\frac{-K_{pt}-K_{st}}{m_{rt}}\right)x_7 + \left(\frac{-C_{st}}{m_{rt}}\right)x_8 + \left(\frac{K_{pt}}{m_{rt}}\right)u_t \quad (57)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_9 = \dot{x}_c(t) = x_{10} \quad (58)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{10} = \left(\frac{K_{st}}{m_{rt}}\right)x_1 + \left(\frac{C_{st}}{m_{rt}}\right)x_2 + \left(\frac{-cK_{st}}{m_{rt}}\right)x_3 + \left(\frac{-cC_{st}}{m_{rt}}\right)x_4 + \left(\frac{-K_{pt}-K_{st}}{m_{rt}}\right)x_9 + \left(\frac{-C_{st}}{m_{rt}}\right)x_{10} + \left(\frac{K_{pt}}{m_{rt}}\right)u_t \quad (59)$$

Definindo as entradas do sistema:

$\theta(t)$ ;  $\dot{x}_2(t)$ ;  $\dot{x}_6(t)$ ;  $\dot{x}_8(t)$ ;  $\dot{x}_{10}(t)$ ,  $u_f(t)$ ;  $u_t(t)$ ;

E as saídas do sistema:

$$\ddot{x}(t); \ddot{x}_a(t); \ddot{x}_b(t); \ddot{x}_c(t)$$

Assim, tem-se a composição dos vetores de estado:

$$\dot{X} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4 \quad \dot{x}_5 \quad \dot{x}_6 \quad \dot{x}_7 \quad \dot{x}_8 \quad \dot{x}_9 \quad \dot{x}_{10}]^T$$

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10}]^T$$

$$U = [\theta \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_6 \quad \dot{x}_8 \quad \dot{x}_{10} \quad u_f \quad u_t]^T$$

E, para:

$$\dot{X} = A.X + B.U \quad (60)$$

$$y = C.X + D.U \quad (61)$$

Obtêm-se as matrizes para implementar os dados medidos e observar o comportamento do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-K_{sf}-2K_{st}}{m} & \frac{-C_{sf}-2C_{st}}{m} & \frac{aK_{sf}+(b+c)K_{st}}{m} & \frac{aC_{sf}+(b+c)C_{st}}{m} & \frac{K_{sf}}{m} & \frac{C_{sf}}{m} & \frac{K_{st}}{m} & \frac{C_{st}}{m} & \frac{K_{st}}{m} & \frac{C_{st}}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -aK_{sf}+(b+c)K_{st} & -aC_{sf}+(b+c)C_{st} & a^2K_{sf}-(b^2+c^2)K_{st} & a^2C_{sf}-(b^2-c^2)C_{st} & aK_{sf} & aC_{sf} & -bK_{st} & -bC_{st} & -cK_{st} & -cC_{st} \\ J & J & J & J & J & J & J & J & J & J \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{sf}}{m_{rf}} & \frac{C_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-aK_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-aC_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-K_{pf}-K_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-C_{sf}}{m_{rf}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K_{st}}{m_{rt}} & \frac{C_{st}}{m_{rt}} & \frac{-bK_{st}}{m_{rt}} & \frac{-bC_{st}}{m_{rt}} & 0 & 0 & \frac{-K_{pt}-K_{st}}{m_{rt}} & \frac{-C_{st}}{m_{rt}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_{st}}{m_{rt}} & \frac{C_{st}}{m_{rt}} & \frac{-cK_{st}}{m_{rt}} & \frac{-cC_{st}}{m_{rt}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{pt}-K_{st}}{m_{rt}} & \frac{-C_{st}}{m_{rt}} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pf}}{m_{rf}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{pt}}{m_{rt}} \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{pt}}{m_{rt}} \end{bmatrix} \quad (63)$$

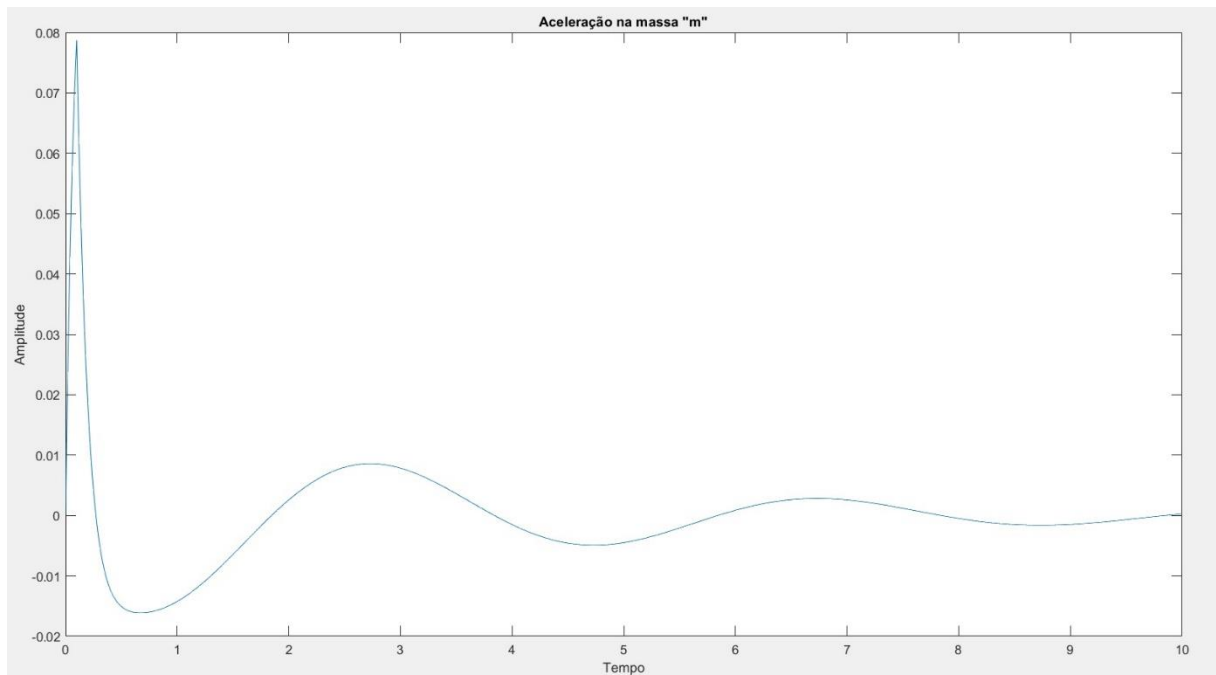
$$C = \begin{bmatrix} \frac{-K_{sf}-2K_{st}}{m} & \frac{-C_{sf}-2C_{st}}{m} & \frac{aK_{sf}+(b+c)K_{st}}{m} & \frac{aC_{sf}+(b+c)C_{st}}{m} & \frac{K_{sf}}{m} & \frac{C_{sf}}{m} & \frac{K_{st}}{m} & \frac{C_{st}}{m} & \frac{K_{st}}{m} & \frac{C_{st}}{m} \\ \frac{K_{sf}}{m_{rf}} & \frac{C_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-aK_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-aC_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-K_{pf}-K_{sf}}{m_{rf}} & \frac{-C_{sf}}{m_{rf}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K_{st}}{m_{rt}} & \frac{C_{st}}{m_{rt}} & \frac{-bK_{st}}{m_{rt}} & \frac{-bC_{st}}{m_{rt}} & 0 & 0 & \frac{-K_{pt}-K_{st}}{m_{rt}} & \frac{-C_{st}}{m_{rt}} & 0 & 0 \\ \frac{K_{st}}{m_{rt}} & \frac{C_{st}}{m_{rt}} & \frac{-cK_{st}}{m_{rt}} & \frac{-cC_{st}}{m_{rt}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-K_{pt}-K_{st}}{m_{rt}} & \frac{-C_{st}}{m_{rt}} \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

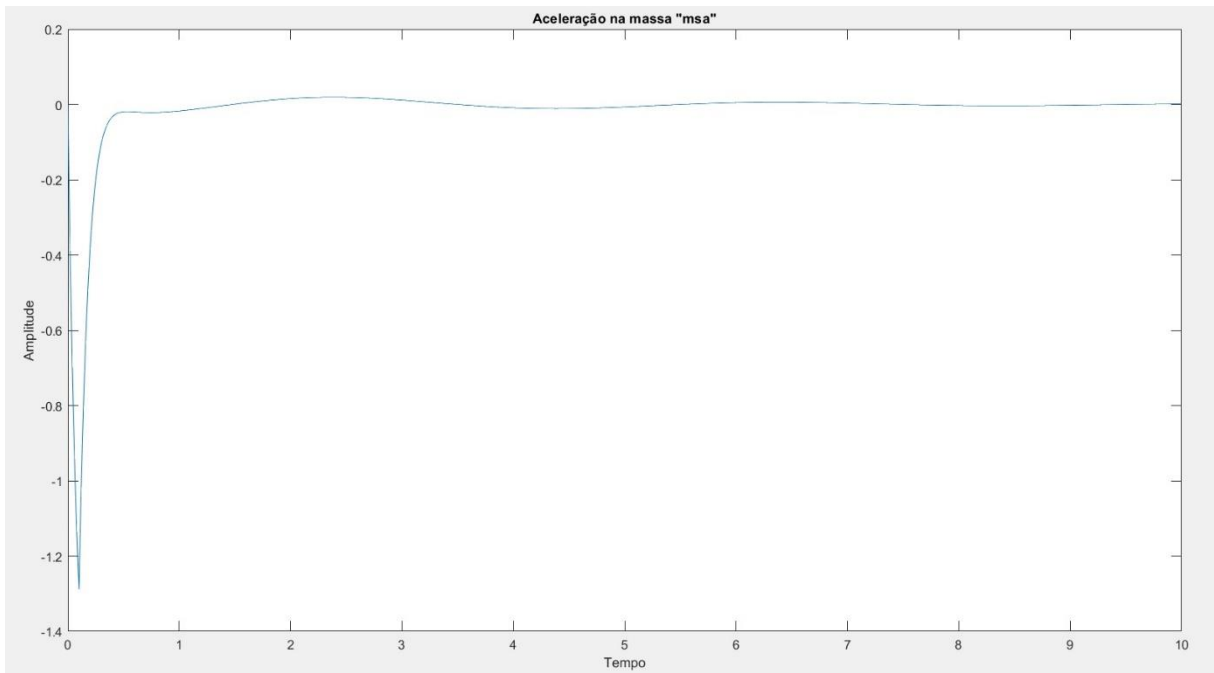


Implementou-se a modelagem feita através de representação em espaço de estados no MATLAB, simulamos duas entradas na suspensão frontal e na suspensão traseira ( $u_f$ ,  $u_t$ ), e a partir dos dados reais obtidos do transportador, obtemos comportamento transitório das massas do transportador e nas massas da suspensões frontal e traseira. Observa-se nas Fig. 21, 22, 23 e 24 as respostas decorrentes de um impulso simulado inserido, onde o sistema se caracteriza de forma subamortecida.

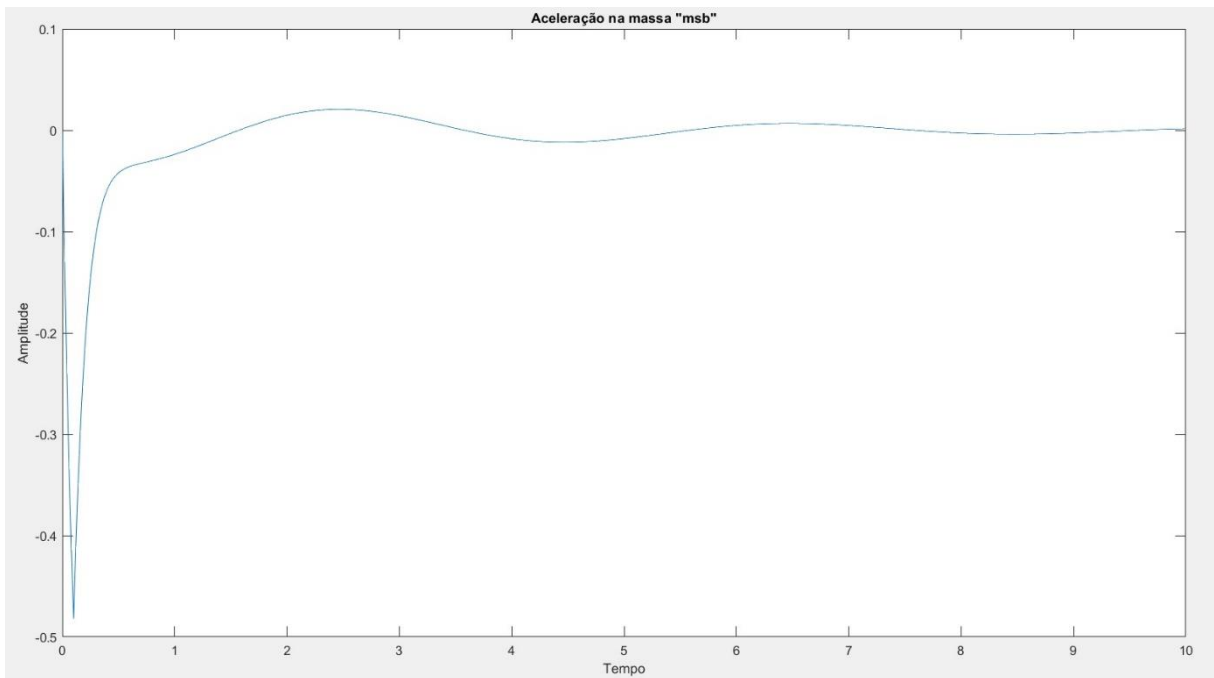
Figura 21: Aceleração na massa "m".



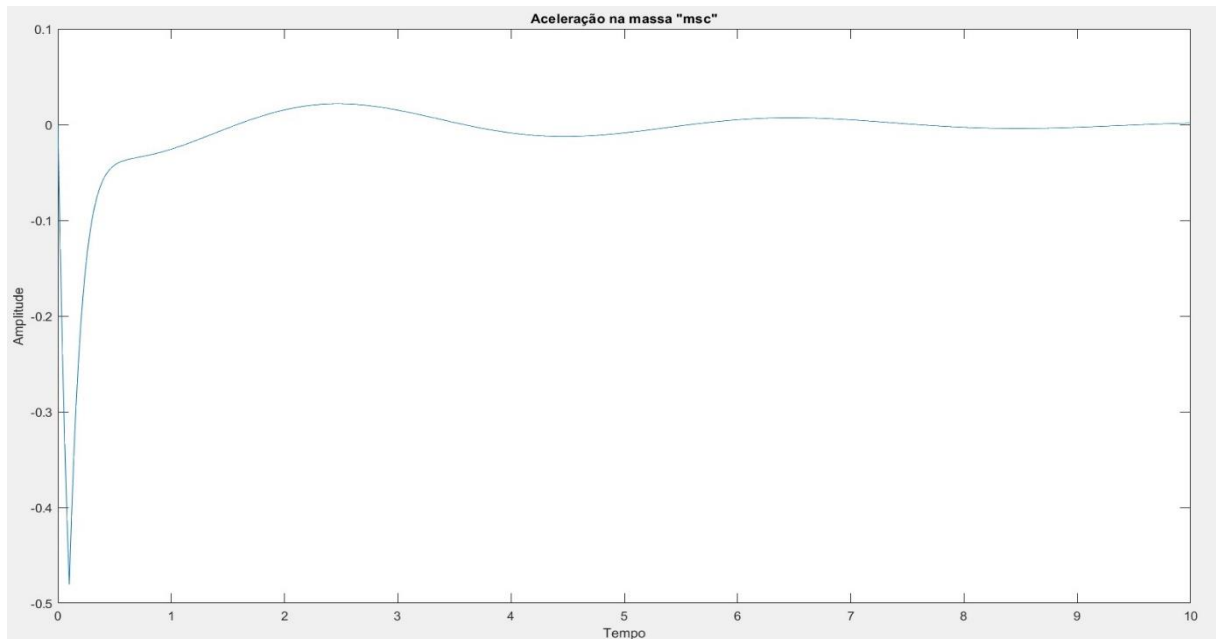
Fonte: AUTOR, 2019

Figura 22: Aceleração na massa " $m_{sa}$ ".

Fonte: AUTOR, 2019

Figura 23: Aceleração na massa " $m_{sb}$ ".

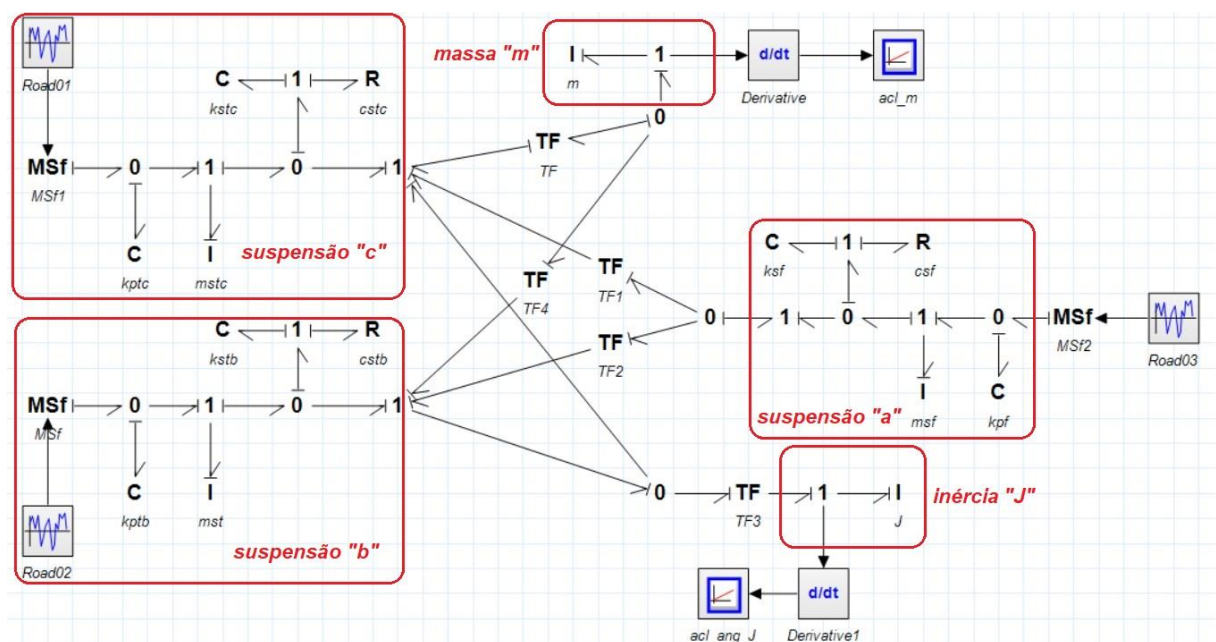
Fonte: AUTOR, 2019

Figura 24: Aceleração na massa " $m_{sc}$ ".

Fonte: AUTOR, 2019

Usa-se para a modelagem através da representação em grafos e ligação, o software 20-sim 4.7, da Controllab, assim obtemos o modelo da Fig. 25, onde pode-se observar as massas que compõem cada suspensão, e, a massa suspensa:

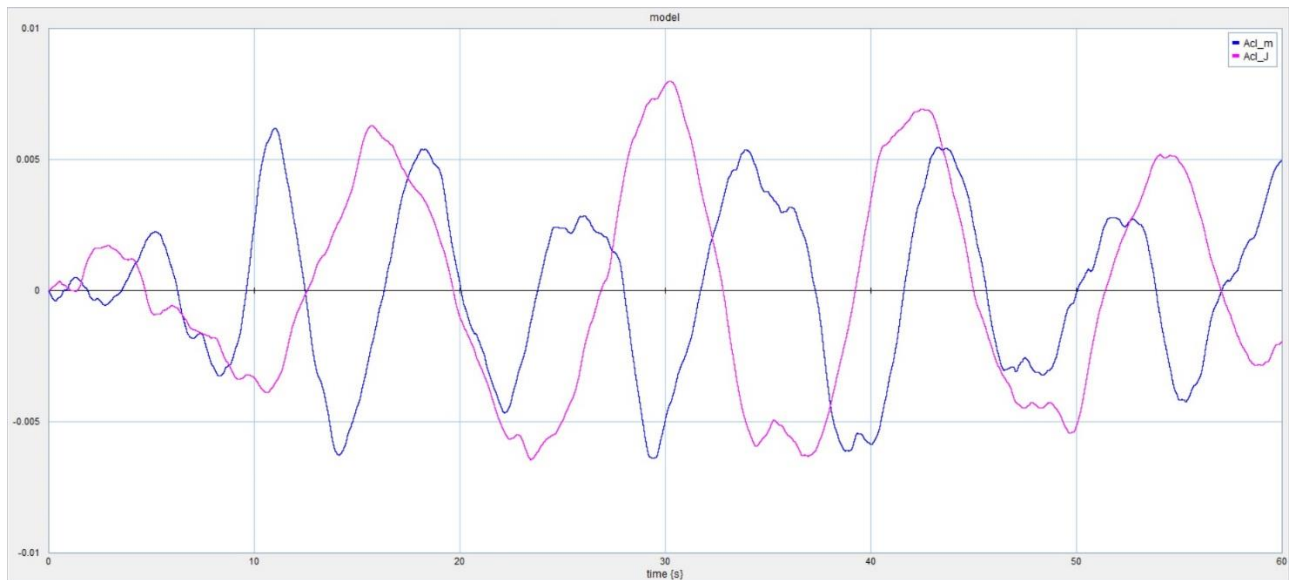
Figura 25: Modelagem do transportador através de Grafos de Ligação



Fonte: AUTOR, 2019

Como resultado de uma excitação aleatória em cada uma das suspensões para simular o perfil da estrada, tem-se as respostas das acelerações translacional (em cor azul) e rotacional (em cor magenta), descritos na Fig. 26.

Figura 26: Acelerações simuladas.



Fonte: AUTOR, 2019

A implementação dos sensores foi feita como mostra a Fig. 27, onde cada um foi instalado alinhado com a linha de centro de cada uma das suspensões. Foram coletadas 34.853 amostras durante 4979 segundos, e utilizou-se o valor eficaz para fazer a média de 7 amostras por segundo. Observa-se nos gráficos das Fig. 28, Fig. 29, Fig. 30 e Fig. 31 as acelerações obtidas pelos sensores instalados com os dados tratados parcialmente.

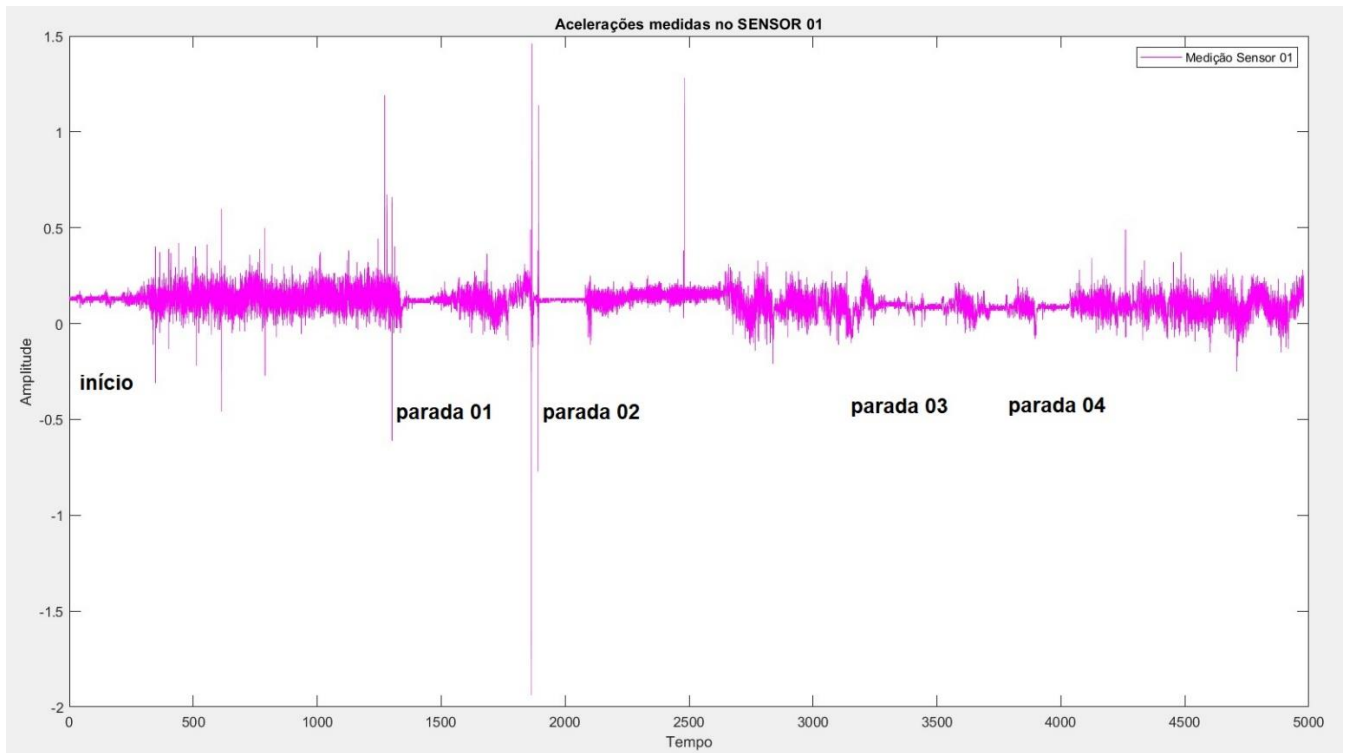
Observa-se nos gráficos mostrados, o aumento da amplitude nas acelerações à medida que os sensores se distanciam das suspensões, no caso o sensor 03 e 04 mostram esse comportamento claramente.

Figura 27: Instalação dos sensores.



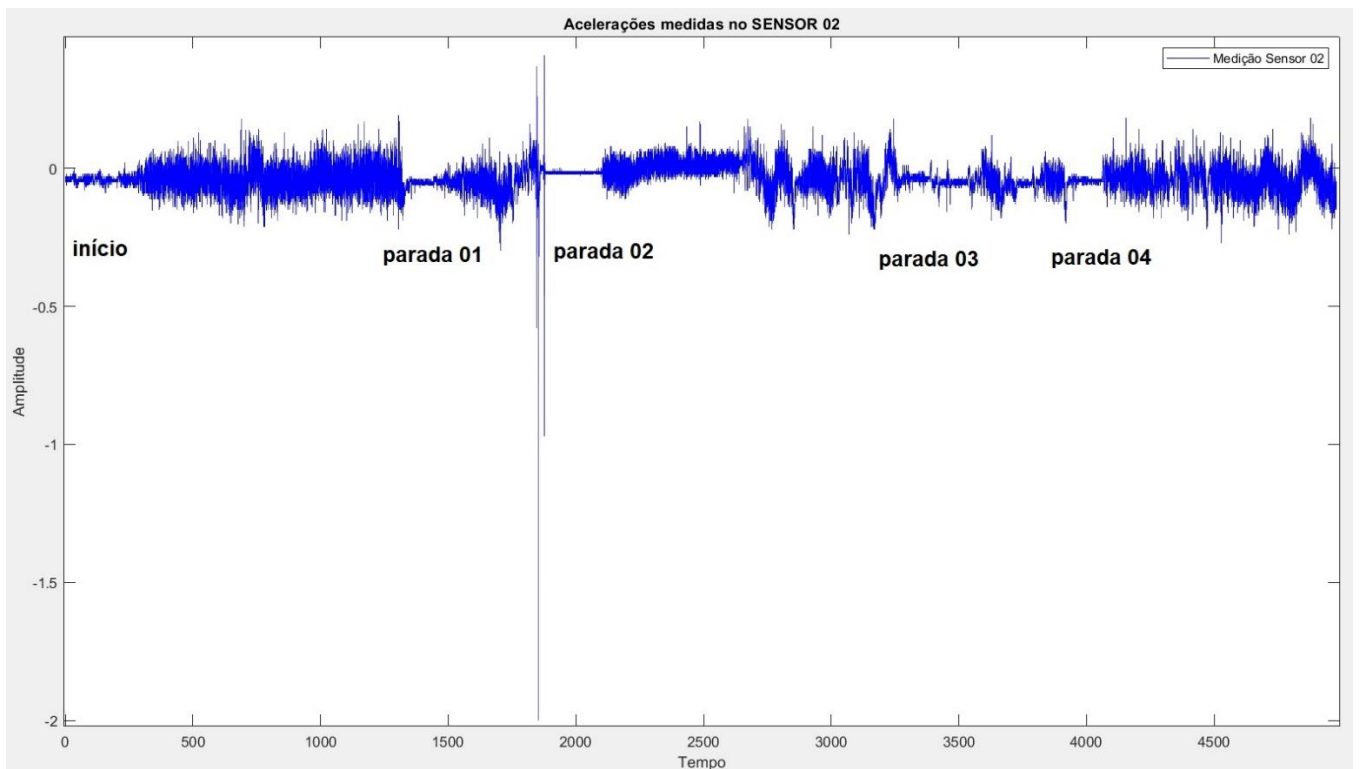
Fonte: AUTOR, 2019

Figura 28: Acelerações no sensor 01.



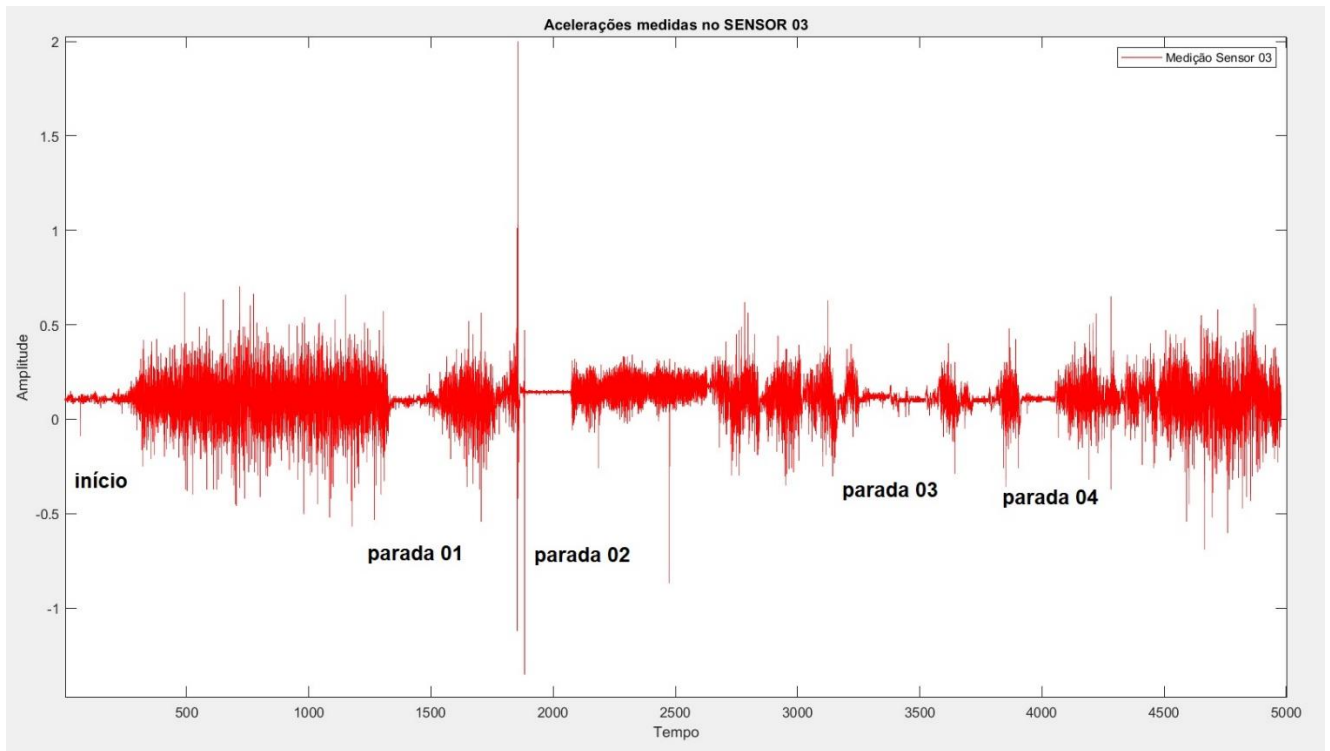
Fonte: AUTOR, 2019

Figura 29: Acelerações sensor 02.



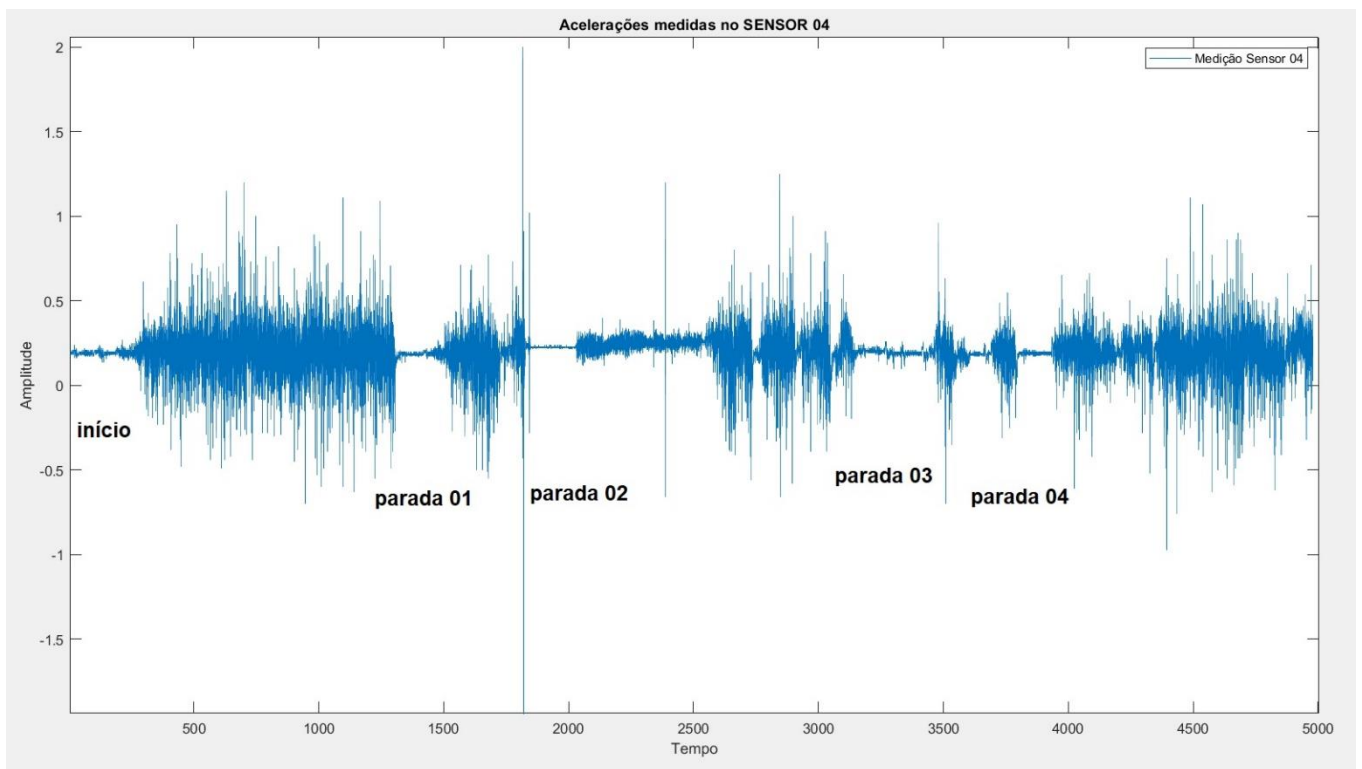
Fonte: AUTOR, 2019

Figura 30: Acelerações no sensor 03.



Fonte: AUTOR, 2019

Figura 31: Acelerações no sensor 04.



Fonte: AUTOR, 2019

## 5 CONCLUSÃO

Esse estudo apresentou uma nova metodologia de medição de vibração no Centro de Lançamento de Alcântara (CLA), aumentando a segurança e confiabilidade do sistema, pois, quanto maior o conhecimento dos parâmetros que estão diretamente relacionadas com o processo de lançamento, mais segurança e chances de sucesso a campanha de lançamento terá.

### 5.1 Trabalhos futuros

Após o estudo de pesquisa feito nesse trabalho, tem-se como sugestão algumas recomendações para trabalhos futuros, agregando e melhorando a modelagem feita:

- Trabalhar uma filtragem eficaz dos dados obtidos através dos protótipos;
- Estudar com mais ênfase a modelagem feita através do sistema dinâmico através de grafos de ligação;
- Criar um monitor para explicitar o comportamento do sistema estudado, prevendo uma facilidade de acesso aos dados (*em andamento*).
- Melhorar a comunicação entre os dispositivos, visando melhor resposta e mais qualidade dos resultados (*em andamento*).
- Inserir o parâmetro de GPS juntamente com a aquisição dos dados do protótipo, como forma de localizar possíveis pontos críticos do trajeto;
- Analisar a viabilidade da aplicação do estudo em outras áreas, onde a incidência de vibração é bem evidente.



## REFERÊNCIAS

PALMERIO, ARIIVALDO. **Introdução à Tecnologia de Foguetes**. Primeira Edição. São José dos Campos/SP: SindCT, 2016.

INMAN, D. J. **Engineering vibration**. Quarta Edição. Estados Unidos: Pearson Education INC, 2008.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. Quinta Edição. Estados Unidos: Pearson Education INC, 2011.

NEWLAND, D. E. **An introduction to random vibrations, Spectral & Wavelet Analysis**. Terceira Edição. Estados Unidos: Dover Publications INC, 2005.

PALAZZOLO, A. B. **Vibration theory and applications with finite elements and active vibration control**. Primeira Edição. Estados Unidos: John Wiley & Sons LTD, 2016.

SHUVRA DAS. **Mechatronic modeling and simulation using bond graphs**. Primeira Edição. Estados Unidos: Taylor & Francis Group, 2009.

KARNOPP, D. C. **System Dynamics: Modeling, simulation and control of mechatronic systems**. Quinta Edição. Estados Unidos: John Wiley & Sons INC, 2012.

ODA, EDUARDO. **Modelagem matemática de sistemas mecânicos translacionais pela mecânica newtoniana**. Notas de aula. Universidade de São Paulo, Instituto de matemática e estatística, 2007. Disponível em:< <https://www.ime.usp.br/~oda/contents/>>. Acesso em: 17 de março de 2019.

INTERNET. Disponível em:< <https://labdegaragem.com> >. Acesso em: 05 de maio de 2019.

MARTINS, ADAIR. **O uso da técnica dos grafos de ligação na simulação de sistemas hidráulicos em regime transitório**. Em: First South-American Congress on Computational Mechanics, 2002, Santa Fé – Paraná, Argentina. Disponível em:< <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/1096/1047>>. Acesso em: 21 de julho de 2019.

INTERNET. Disponível em:< <https://www.filipeflop.com> >. Acesso em: 21 de maio de 2019.

SILVA, LUIS. **Bond graph based fault diagnosis of 4W – Vehicles suspension systems I: Passive Suspensions**. In: 8th International conference on bond graph modeling and simulation, 2007, San Diego, California, USA. Escuela de Ingeniería Mecánica Facultad de Ciencias Exactas. Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario, 2007. Disponível em

<https://pdfs.semanticscholar.org/8211/6f345a9f4bc19209c8986f1a91e6e48ecea0.pdf>  
>. Acesso em: 22 de maio de 2019.

JACK, HUGH. **Dynamic System Modeling and Control**. Versão 2.1. Estados Unidos: Taylor & Francis Group, 2009.

BAYRAKDAR, Ö. **Random Vibration of a Road Vehicle**. 42 p. Master dissertation, İzmir Institute of Technology, İzmir, Turkey, 2010.

AZEVEDO, J. J. R. T., **Vibrações Aleatórias – Dinâmica Estocástica**. Instituto Superior Técnico, Portugal, Lisboa 1996.

QUINTERO, P. M., **Análise Sísmica no Domínio do Tempo versus no Domínio da Frequência para uma Ponte em Seção Celular**. Dissertação (Mestrado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. São Paulo, 2017.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. Quinta Edição. Estados Unidos: Pearson Education INC, 2011.

DORF, R. C & Bishop, R. H. **Modern Control Systems**. Décima segunda Edição. Estados Unidos: Pearson Education INC, 2011.

MAYA, P. A & LEONARDI, F. **Controle Essencial**. Segunda Edição. São Paulo/SP: Pearson, 2015.

ROMERO, M. & SOUTO, C. A & CAMARGO E. A. **Rocket dynamic loading during road transportation in a tractor semi-trailer**. 11 p. Undergraduate Scholarship, DINAME 2017, São Sebastião/SP, 2017.

Controllab Products B.V., 20-sim™. Disponível em:< <https://www.20sim.com> >.