Paulo César Pereira Abitibol

RACIOCÍNIO LÓGICO-RECURSIVO: Uma Proposta para Resolução de Problemas do Ensino Médio.

São Luís

2018

Paulo César Pereira Abitibol

RACIOCÍNIO LÓGICO-RECURSIVO: Uma Proposta para Resolução de Problemas do Ensino Médio.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Estadual do Maranhão, para obtenção do grau de mestre.

Universidade Estadual do Maranhão – UEMA

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

São Luís

2018

Paulo César Pereira Abitibol
RACIOCÍNIO LÓGICO-RECURSIVO: Uma Proposta para Resolução de Problemas do Ensino Médio./ Paulo César Pereira Abitibol. – São Luís, 2018-
84 p. : il.

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Maranhão – UEMA
Programa de Pós-Graduação, 2018.

1. Sequências. 2. Recorrências lineares. 3. Problemas recursivos. 4. Fórmula fechada.
CDU 519.111.1

Paulo César Pereira Abitibol

RACIOCÍNIO LÓGICO-RECURSIVO: Uma Proposta para Resolução de Problemas do Ensino Médio.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Estadual do Maranhão, para obtenção do grau de mestre.

Trabalho aprovado. São Luís, 20 de abril de 2018:

Prof. Dr. Felix Costa Silva
Orientador
DEMATI - UEMA

Prof. Dr. João Coelho Silva Filho
Membro interno
DEMATI - UEMA

Prof. Dr. Flank David Morais Bezerra
Membro externo
UFPB

São Luís
2018

Dedico este trabalho às minhas sobrinhas Elen, Mariane e Jady e à minha esposa Priscila.

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, detentor da vida e do conhecimento. DEle vieram inspiração, força e coragem para vencer todas as etapas e desafios e conseguir chegar até aqui. Sem Sua permição e ajuda nada disso seria possível.

À minha mãe, Maria Pereira Abitibol, que, não apenas me deu a vida mas uma criação heróica. Em meio a adversidades, revestiu-se de força divina para que não me faltasse o básico, será sempre a minha maior inspiração.

À minha esposa Priscila Abitibol por preencher a minha vida com a sua amorosa companhia e por me apoiar ao longo deste curso.

Às minhas sobrinhas Helem, Mariane e Jadiely que me alegram e melhoram o meu humor com sinceras demonstrações de carinho. Aos meus irmãos Juse, Daiana e Daniel e aos demais familiares e amigos que acreditam em mim e na minha capacidade.

À UEMA e à SBM pelo esforço conjunto em prol da qualificação do docente de matemática do Estado do Maranhão.

Ao meu orientador, o prof. Dr. Félix Silva Costa, pelas colaborações na realização deste trabalho.

Ao coordenador do Profmat UEMA, o prof. Dr. João Coelho Silva Filho, que tanto se esforçou pela implantação do curso.

A todos os professores do Profmat UEMA pela dedicação ao curso e aos alunos. Um agradecimento especial ao professor Dr José Antônio Pires Marão que durante todo o tempo se mostrou mais que um professor competente e responsável, surpreendeu-me com gestos de humildade e humanidade pouco comuns na categoria, não medindo esforços para ajudar a quem fosse não importando dia e hora. Lembro ainda, com gratidão, da secretária Annanda pela eficiência e apoio fundamentais para que houvesse comunicação e boa relação com os docentes.

Aos colegas de luta e estudos da turma Profmat Uema 2016: Aristóteles, Cléssio, Dárcio, Diwey, Enildo, Erivelton, José Alexandre, José Nazareno, Katarine, Mário, Valderlândio, Vilson e Willanickson. Na contra-mão das expectativas, um grupo de profissionais em busca de qualificação convergem numa amizade que deu certo. Situação inédita em minha vida profissional e de estudante, com essa união nos mantivemos fortalecidos e preparados para apoiarmos uns aos nos momentos difíceis. Acredito e espero que os contratempos das nossas vidas não nos impeça de continuarmos a brincar, torcer e apoiarmos uns aos outros, como fazem os amigos.

“A viagem de mil quilômetros começa com um passo”.

(Lao Tzu)

Resumo

Este trabalho faz uma abordagem sobre recorrências lineares, com destaque para as recorrências de 1ª e 2ª ordem. Mostra a importância do raciocínio recursivo para resolver problemas que envolvem os termos de uma sequência recursiva, isto é, uma sequência na qual cada elemento, a partir de um certo termo, é definido em função dos termos anteriores. Problemas assim aparecem com frequência no Ensino Médio e estão relacionados, entre outros assuntos, a algumas funções, progressões, matemática financeira, análise combinatória e probabilidade. Além de exibir a solução das recorrências, destacamos três importantes aplicações: a Sequência de Fibonacci, a Torre de Hanói e a Pizza de Steiner. Visando mostrar a eficiência do método, apresenta-se a solução para diversos problemas de nível médio, com graus de dificuldade variados, sendo a maioria extraídos de ENEM e outros vestibulares.

Palavras-chave: Sequências. Recorrências Lineares. Progressões. Problemas Recursivos.

Abstract

This work approaches linear recurrences, highlighting first and second order recurrences. Its main purpose is to show the importance of recursive reasoning to solve problems involving the terms of a recursive sequence, that is, a sequence in which each element, from a certain term, is defined in function of the previous terms. Such problems often appear in high school and are related, among other things, to some functions, progressions, financial mathematics, combinatorial analysis and probability. In addition to displaying the recurrence solution, we highlight three important applications: the Fibonacci Sequence, the Tower of Hanoi and Steiner's Pizza. To show the efficiency of the method, we present solutions for several medium level problems, with varying degrees of difficulty, most of them being extracted from ENEM and other testes or exames.

Keywords: Sequences. Linear Recurrences. Progressions. Recursive Problems.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Lista de abreviaturas e siglas

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
EPCAr	Escola Preparatória de Cadetes do Ar
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
ITA	Intituto Tecnológico de Aeronáutica
MA12	Matemática Discreta
PROFMAT	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática
SEDUC-MA	Secretaria de Estado da Educação - Maranhão
UEMA	Universidade Estadual do Maranhão
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

Sumário

Introdução

Às vezes é difícil definir um objeto explicitamente, entretanto, pode ser fácil defini-lo em termos dele mesmo. Esse processo, chamado recursão, se faz presente na natureza, nas artes e nas ciências, especialmente na matemática.

Algumas paisagens, árvores, flores e legumes (tais como brócolis e couve-flor), impressionam com partes que lembram o próprio objeto num padrão de repetição contínua de si mesmos. Esse padrão, comum dos fractais, ocorre, com certa frequência, nas artes visuais materializado em mosaicos, pinturas e fotografias. Por exemplo, como mostra a Figura 1, se um indivíduo segura um espelho plano estando de frente para outro, surge uma imagem recursiva, porque a imagem do indivíduo refletida no espelho à frente é o objeto a ser refletido no espelho que está em suas mãos, e assim sucessivamente.

Figura 1 – Recursão no espelho.

Fonte: https://brasilescola.uol.com.br/fisica/espelhos-paralelos.htm

Em computação, os programadores lidam com algoritmos recursivos, que permitem a uma função chamar a si mesma direta ou indiretamente. A ideia básica de um algoritmo recursivo, consiste em diminuir sucessivamente o problema em um problema menor ou mais simples, até que o tamanho ou a simplicidade do problema reduzido permita resolvê-lo de forma direta, sem recorrer a si mesmo, mediante a condição de parada do algoritmo.

A maioria das tarefas cotidianas, tais como subir uma escada, contar uma quantia de dinheiro, pagar as prestações de um bem, etc, são executadas, intuitivamente, por recorrência. Na ação de subir escadas, por exemplo, a tarefa estará terminada quando o topo for alcançado. Caso isso não ocorra, avança-se mais um degrau e retorna-se à tarefa de subir escadas, mas agora, já tendo avançado um dos degraus, o problema tem dimensão reduzida. Desse modo, é difícil de entender que o ensino de matemática das escolas brasileiras continue a ignorar o raciocínio recursivo a jovens que já o utilizam, espontaneamente, em diversas situações do dia a dia e que têm, cada vez mais, familiaridade com o computador e seus programas.

No ambiente escolar, muitas definições e teorias matemáticas, apresentadas aos alunos desde os primeiros anos da Educação Básica, são construídas pelo método recursivo, onde se definem alguns casos base e, a partir daí, definem-se regras para formular casos mais complexos em termos de casos mais simples. A exemplo disso, tem-se as definições de adição e de multiplicação de números naturais, bem como as definições de potência e fatorial, operações básicas do Ensino Médio. Apesar disso e do desempenho insatisfatório da maior parte dos estudantes do Ensino Médio no que tange à modelagem e resolução de problemas matemáticos, o método recursivo não tem sido adotado pela maioria dos autores de livros, tampouco, por professores da disciplina.

Partindo dessa explanação, este trabalho levanta o seguinte problema: É possível aplicar o método recursivo em problemas do Ensino Médio? Há vantagens nesse método em relação aos tradicionais?

Este trabalho visa apresentar as vantagens do raciocínio recursivo diante de exercícios considerados difíceis e mostrar que esse método pode ainda ser usado, para resolver vários problemas simples com elegância e criatividade. O passo inicial do raciocínio recursivo consiste em abrir o problema em casos e fazer o problema recair em problemas de tamanhos menores, conforme a natureza do primeiro termo. Nesse tipo de abordagem, parte-se do caso particular para o caso genérico. Embora possa não parecer, essa abordagem é bem sucedida desde que se consiga:

(1) obter a solução do problema genérico a partir da solução de modelos menores do problema;

(2) determinar de modo trivial a solução para os casos mais elementares do problema.

Considerando que as dificuldades dos alunos do Ensino Médio para com problemas recorrente em matemática, principalmente combinatórios, já são percebidas há muito tempo e vêm se repetindo ao longo dos anos, é de se questionar a eficiência do método empregado e mantido no ensino da disciplina. Assim, pretende-se propor a aplicação do raciocínio recursivo como meio para facilitar a compreensão de conceitos, obter diversas fórmulas, bem como modelar e resolver vários problemas.

A fim de organizar melhor as ideias, o presente trabalho está distribuído em quatro capítulos. No primeiro capítulo são apresentados conceitos gerais de recorrências lineares e sequências definidas recursivamente, com foco nas recorrências de primeira e de segunda ordem, indicando técnicas de resolução e citando exemplos. No segundo capítulo, faz-se uma abordagem recursiva sobre vários assuntos do curriculo do Ensino Médio tais como Sequências e Progressões, algunas funções e Análise Combinatória. No terceiro capítulo, apresenta-se a resolução comentada de três problemas clássicos importantes: Sequência de

Fibonacci, Pizza de Steiner e Torre de Hanoi. Finalmente, no quarto capítulo, resolve-se, pelo método recursivo, uma série de problemas de diversos níveis, extraídos de livros de Ensino Médio, ENEM e de provas de vestibulares.

1 Recorências Lineares

Este capítulo trata de sequências definidas recursivamente e recorrências lineares de primeira e de segunda ordem, exibe definições, técnicas de resolução e exemplos.

Lipschutz e Lipson definem funções recorrentes do seguinte modo:

> Uma função é dita recursivamente definida se a definição da função se referir à própria função. Para que a definição não seja circular, precisa satisfazer as duas seguintes propriedades:
> (1) Devem existir certos argumentos, chamados valores base, nos quais a função não se referencie a ela mesma.
> (2) Cada vez que a função se referir a si própria, o argumento da função precisa estar próximo a um valor base.(LIPSCHUTZ, 2004, p.65)

Sgundo Rosen (2010), pode-se usar recursão para definir sequências, conjuntos e funções. Sobre as funções definidas recursivamente, ela diz:

> As funções definidas recursivamente são bem definidas, ou seja, para todo número inteiro positivo, o valor da função neste inteiro é determinado de uma forma não ambígua. Isso significa que com qualquer número inteiro positivo, podemos usar as duas partes da definição para encontrar o valor da função naquele inteiro, e também que obtemos o mesmo valor, não importando como aplicamos as duas partes da definição. (ROSEN, 2010, p.296)

Para Muniz Neto (2016), a etapa fundamental da resolução de problemas recursivos consiste em representá-lo através de um modelo algébrico que permita determinar um certo termo de uma sequência recorrente:

> vários são os problemas de caráter recursivo que, quando modelados algebricamente, transformam-se no problema de calcular, em função de n, o n-ésimo termo de uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, que satisfaz uma certa relação de recorrência. (MUNIZ NETO, 2016, p.23)

Definição 1.0.1. *Uma recorrência é dita linear de ordem k, se um termo pode ser expresso em função dos k termos imediatamente anteriores de forma linear, ou seja, se podemos escrever x_n em função de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}$, satisfazendo uma relação do tipo:*

$$x_n = f_{n-1}(n) \cdot x_{n-1} + f_{n-2}(n) \cdot x_{n-2} + \cdots + f_{n-k}(n) \cdot x_{n-k} + h(n), \tag{1.1}$$

onde $f_j(n)$, $n-1 \leq j \leq n-k$, e $h(n)$ são funções de n, e $f_{n-k} \neq 0$.

- A linearidade da equação (1.1) está assegurada pelo fato de não haver potências ou produtos dos termos x_j;

- Se $h(n) = 0$, a recorrência (1.1) será dita homogênea;
- A recorrência (1.1) é dita linear com coeficientes constantes, se

$$f_{n-1} = C_1,\ f_{n-2} = C_2,\ \cdots, f_{n-k} = C_k$$

  forem constantes.

1.1 Sequências Definidas Recursivamente

Observa-se uma grande dificuldade nos alunos do Ensino Fundamental e Médio para resolver problemas matemáticos, o que significa pouca perícia em associar e aplicar os conhecimentos adquiridos em situações gerais, sejam elas práticas ou não. O estudo das sequências oferece uma oportunidade de fortalecer o pensamento matemático, uma vez que permite avaliar regularidades, analisar possibilidades e fazer inferências, habilidades importantes para resolver problemas, sobretudo aqueles cuja solução é algum termo de uma sequência recorrente. Sobre a importâncias dessas habilidades para a formação intelectual do aluno, as Orientações Curriculares dizem o seguinte:

> A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático - nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplo e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. Também significa um processo de ensino [...] que valorize o uso da matemática para a resolução de problemas interessantes, quer sejam de aplicação ou de natureza simplesmente teórica. (BRASIL, 2006, p.69)

Na definição (1.1.1), $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ é o conjunto dos números naturais.

Definição 1.1.1. *Uma sequência numérica é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada natural n a um valor real. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n, ou o n-ésimo termo da sequência.*

Noutros termos, uma sequências é uma lista ordenada de números reais (que pode ser finita ou infinita) na qual se especifica, por meio de índices naturais, quem é o primeiro termo da lista, o segundo, o terceiro e assim por diante. Tal lista será representada, simplesmente, por (x_n), onde $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ no caso finito e por $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ no caso infinito.

Muitas sequências matemáticas têm seus termos determinados por uma regra ou lei de formação. Por exemplo, a sequência $(x_n) = (1, 3, 5, \cdots)$ possui lei de formação

$x_n = -\frac{n^3}{6} + n^2 + \frac{n}{6}$ que permite calcular qualquer termo da sequência sabendo apenas a sua posição. Tais leis são ditas *fórmulas fechadas.*

Muitas vezes, porém, uma sequência vem definida *recursivamente*, ou seja, por uma *equação de recorrência* onde cada termo é dado em função de um ou mais termos anteriores.

Definição 1.1.2. *Uma sequência é dita recorrente, ou simplesmente uma Recorrência, quando a relação entre seus termos é dada por uma equação de recorrência, que é uma expressão matemática que relaciona um termo da sequência em função do(s) termo(s) anterior(es).*

Segue algumas importantes sequências matemáticas que são definidas por fórmulas de recorrência.

Exemplo 1.1.1. *A sequências* (x_n) *dos números naturais ímpares* $(1, 3, 5, 7, \ldots)$ *pode ser definida por* $x_{n+1} = x_n + 2$ $(n \geq 1)$, *com* $x_1 = 1$.

Exemplo 1.1.2. *Qualquer progressão aritmética* (x_n) *de razão* r *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geq 1)$, *com* $x_1 = a$.

Exemplo 1.1.3. *Qualquer progressão geométrica de razão* q *e primeiro termo* a *pode ser definida por* $x_{n+1} = q \cdot x_n$ $(n \geq 1)$, *com* $x_1 = a$.

Exemplo 1.1.4. *A sequência* (F_n), *dita de Fibonacci, cujos termos são* $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ *e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$, *com* $F_0 = F_1 = 1$.

Note que as recorrências que aparecem nos Exemplos 1.1.1 e 1.1.2 são lineares não homogêneas de primeira ordem e a recorrência do Exemplo 1.1.3 é linear homogênea de primeira ordem, ao passo que a recorrência do Exemplo 1.1.4 é linear homogênea de segunda ordem.

Perceba que uma equação de recorrência, por si só, não é suficiente para definir uma sequência, devem ser fornecidos também os valores dos primeiros termos da sequência em quantidade suficiente para fazer a função chamar os termos seguintes. Por exemplo, a recorrência do Exemplo 1.1.1, $x_{n+1} = x_n + 2$, é satisfeita não apenas pela sequência dos números ímpares, mas também pela sequência dos números pares, bem como por todas as progressões aritméticas de razão 2, desde que se indique outro valor inicial. O par de informações *equação de recorrência* e *valor(es) inicial(is)* formam uma *Relação de Recorrência* e caracterizam completamente uma sequência recorrente.

Ainda que uma relação de recorrência requisite os valores de todos os termos anteriores ao que se deseja obter, ela representa uma etapa importante da resolução de muitos problemas recursivos, pois possibilita, mediante certas manipulações, encontrar fórmulas fechadas para os mesmos, conforme será feito nas seções seguintes. Ademais, uma relação de recorrência, constituída de equação de recorrência e valores iniciais, conduz ao resultado de um problema recorrente desde que se disponha de um programa de computador como o GeoGebra ou, até mesmo, o excel.

A solução de muitos problemas matemáticos recai em encontrar um determinado termo de uma sequência recorrente. O exemplo a seguir colabora com essa ideia, visto que fornece a análise de um problema sob a ótica da recursividade, ao passo que conduz a uma relação de recorrência para o mesmo.

Exemplo 1.1.5. *Um professor de matemática preparou um teste de 8 questões para seus alunos. A cada questão deve ser atribuído um valor verdadeiro ou falso. Sabendo que o professor não pretende que duas questões consecutivas sejam verdadeiras, quantos são os gabaritos possíveis?*

Acompanhe a solução:

Tabela 1 – Tabela dos gabaritos possíveis de um teste.

Número de Questões	Gabaritos Possíveis	X_n
$n = 1$	(V) (F)	2
$n = 2$	(FF) (FV) (VF)	3
$n = 3$	(FFF) (VFF) (FVF) (FFV) (VFV)	5
$n = 4$	$(FFFF)$ $(VFFF)$ $(FVFF)$ $(FFVF)$ $(FFFV)$ $(VFVF)$ $(FVFV)$ $(VFFV)$	8

Fonte: elaborada pelo autor.

A solução do problema para testes com até 4 questões pode ser obtida fazendo uma listagem de todos gabaritos possíveis e depois contando-os, conforme foi feito na Tabela 1. Entretanto, para testes com quantidade de questões superior a 4, torna-se cada vez mais complicado e inviável listar todos os gabaritos permitidos. Deve-se pensar em um meio de contar que dispense exibir a lista de gabaritos para cada caso.

Repare que o princípio multiplicativo não se aplica aqui, em decorrência da restrição do problema (*de não poder haver duas questões verdadeiras consecutivas*). Caso se optasse por esse caminho ter-se-ia que excluir, por exemplo, os casos (FVVFVFF), (FVVFVVF), (FVVVFFV), bem como todas as situações em que há duas questões consecutivas verdadeiras ou três questões consecutivas verdadeira ou dois grupos de questões consecutivas verdadeiras e etc, o que levaria a sérias complicações.

Diante disso, suponha conhecida a solução do problema para uma certa quantidade n de questões, digamos X_n. Tem-se duas situações para analisar, conforme a primeira questão seja verdadeira ou falsa:

- Se a primeira questão for falsa (F), deve-se determinar o número de gabaritos possíveis para as $n-1$ questões, de modo que não haja duas questões verdadeiras consecutivas. A solução para esse caso é X_{n-1};
- Se a primeira questão for verdadeira (V), a segunda, necessariamente, deverá ser falsa (F). Nesse caso, deve-se determinar o número de gabaritos possíveis para testes com as $n-2$ questões, tais que não ocorra duas questões consecutivas verdadeiras. O total de gabaritos possíveis para este caso é X_{n-2}.

Assim,

$$(X_n) = (2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ X_n),$$

onde

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2}. \tag{1.2}$$

A solução para o problema de n questões foi escrita, recursivamente, em termos da solução para o mesmo problema com tamanhos menores, ou seja, em termos da solução do problema para testes com $n-1$ e $n-2$ questões.

Segundo a equação (1.2), o termo de ordem n é a soma de seus dois precedentes imediatos[1], ou seja, a soma do termo de ordem $n-1$ com o termo de ordem $n-2$; por sua vez, o termo de ordem $n-1$ é a soma do termo de ordem $n-2$ com o termo de ordem $n-3$ e assim por diante. Esse processo se repete até que se chegue no termo de ordem 3, cuja solução é a soma dos dois primeiros termos, que já devem ser conhecidos. A sequência de resultados pode ser construída de trás para frente, considerando os primeiros resultados encontrados, de modo que, para n=8, como pede o problema, não enfrentamos mais dificuldade. Sabendo que $X_1 = 2$ e $X_2 = 3$, tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} X_3 & = & X_1 + X_2 = 5 \\ X_4 & = & X_2 + X_3 = 8 \\ X_5 & = & X_3 + X_4 = 13 \\ X_6 & = & X_4 + X_5 = 21 \\ X_7 & = & X_5 + X_6 = 34 \\ X_8 & = & X_6 + X_7 = 55. \end{array}$$

E, portanto, a solução do problema para 8 questões é $X_8 = 55$.

É possível que, a essa altura (o que é natural), o leitor esteja fazendo os seguintes questionamentos:

[1] Repare que a equação (1.9) é a mesma recorrência da Sequência de Fibonacci que aparece no Exemplo 1.1.4, as duas sequências diferem pelos valores iniciais.

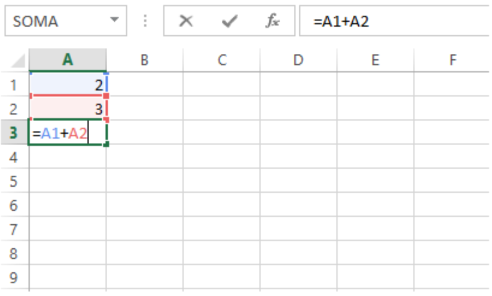
- *E se o problema pedisse a solução para* $n = 100$*?*
- *Como resolver a relação de recorrência (1.2) de modo a obter uma expressão explícita para* X_n*, como função de* n *?*

Cada vez mais popular entre os jovens, o computador é uma ferramenta que pode e deve ser aproveitada para facilitar o ensino da matemática, principalmente das sequências, como indicam as Orientações Curriculares:

> As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Planilhas oferecem um ambiente adequado para experimentar seqüências numéricas e explorar algumas de suas propriedades, por exemplo, comparar o comportamento de uma seqüência de pagamentos sob juros simples e juros compostos. Também oferecem um ambiente apropriado para trabalhar com análises de dados extraídos de situações reais. É possível organizar atividades em que os alunos têm a oportunidade de lidar com as diversas etapas do trabalho de análise de dados reais: tabular, manipular, classifi car, obter medidas como média e desvio padrão e obter representações gráficas variadas. (BRASIL, 2010, p.89)

Uma vez que já se sabia os resultados para $n = 1$ e $n = 2$, a recorrência de equação (1.2) levou à solução do problema por meio de 8 somas simples, dispensando qualquer outra fórmula. Outros termos mais adiantados dessa sequência podem ser obtidos, mais facilmente, utilizando o programa excel. Como se fez na Figura 2, pode-se escolher a coluna A e digitar 2 na primeira célula e 3 na segunda, na célula seguinte digita-se a fórmula $= A1 + A2$, depois tecla-se $\boxed{\text{ENTER}}$ e a terceira célula exibirá o resultado para $n = 3$. Feito isso, pode-se levar o cursor para a terceira célula e arrastá-lo para baixo até que se alcançe a quantidade de termos que se deseja encontrar.

Figura 2 – Construindo recorrência no excel.



Fonte: elaborada pelo autor.

Fazendo dessa forma, em muito pouco tempo, encontra-se a solução do problema para 50 questões, por exemplo. O valor de X_{50} aparece na sequência da Figura 3.

Embora, em algumas ocasiões, a relação de recorrência ou é ou leva à solução de um problema, é importante que se saiba resolvê-la, o que significa encontrar uma fórmula fechada para o problema. Os subsídios para esse fim são mostrados nas seções seguintes.

Figura 3 – Solução recursiva no excel para $n = 50$.

n	Xn
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55
9	89
10	144
11	233
12	377
13	610
14	987
15	1597
16	2584
17	4181
18	6765
19	10946
20	17711
21	28657
22	46368
23	75025
24	121393
25	196418
26	317811
27	514229
28	832040
29	1346269
30	2178309
31	3524578
32	5702887
33	9227465
34	14930352
35	24157817
36	39088169
37	63245986
38	102334155
39	165580141
40	267914296
41	433494437
42	701408733
43	1134903170
44	1836311903
45	2971215073
46	4807526976
47	7778742049
48	12586269025
49	20365011074
50	32951280099

Fonte: elaborada pelo autor.

1.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Definição 1.2.1. *Uma recorrência linear de primeira ordem é uma função* $x_n = f(x_{n-1}, n)$ *que expressa cada termo em função do seu antecessor imediato. Mais precisamente,*

$$x_{n+1} = f(n)x_n + h(n), \quad f(n) \neq 0. \tag{1.3}$$

1.2.1 Resolução das Recorrências Homogêneas

Uma recorrência linear de primeira ordem é dita homogênea se, na equação (1.3), $h(n) = 0$. É, portanto, do tipo

$$x_{n+1} = f(n)x_n. \tag{1.4}$$

Expandindo (1.4), obtém-se

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & f(1)x_1 \\ x_3 & = & f(2)x_2 \\ x_4 & = & f(3)x_3 \\ & \vdots & \\ x_n & = & f(n-1)x_{n-1}. \end{array}$$

Multiplicando essas igualdades, membro a membro, tem-se que:

$$x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \cdots \cdot x_{n-1} \cdot x_n = \prod_{k=1}^{n-1} f(k)(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_{n-1}).$$

Segue-se daí,que

$$x_n = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} f(k). \tag{1.5}$$

Observação 1.2.1. *Convém observar que, se $f(n) = 1$, a sequência é constante com termo geral dado por $x_n = x_1$. Se, porém, $f(n) = c \neq 1$, a sequência é uma progressão geométrica de razão c cujo termo geral é dado por $x_n = x_1 \cdot c^{n-1}$, $n \geq 1$.*

Exemplo 1.2.1. *Resolver a recorrência $x_{n+1} = nx_n$, com $x_1 = 1$.*

Aqui, $f(n) = n$. Tem-se, pelo resultado encontrado na equação (1.5), que:

$$x_n = x_1 \prod_{k=1}^{n-1} k = x_1 \cdot (n-1)!$$

Dado que $x_1 = 1$, segue que

$$x_n = (n-1)!.$$

1.2.2 Resolução de Recorrências Não Homogêneas

Sempre que $h(n) \neq 0$ na equação (1.3), a recorrência será dita não homogênea.

Os casos mais simples das recorrências lineares não homogêneas de primeira ordem ocorrem quando $f(n) = 1$. Trata-se das equações do tipo:

$$x_{n+1} = x_n + h(n). \tag{1.6}$$

A partir dessa recorrência, obtém-se as igualdades

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h(1) \\ x_3 &= x_2 + h(2) \\ x_4 &= x_3 + h(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + h(n-1). \end{aligned}$$

Somando-as, obtém-se:

$$x_n = x_1 + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1)$$

ou, simplesmente,

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k). \tag{1.7}$$

Exemplo 1.2.2. *Resolver a recorrência* $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

Trata-se de uma recorrência não homogênea do tipo (1.6) em que $h(n) = n$ e cuja solução é da forma 1.7. Assim,

$$\begin{aligned} x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k &= x_1 + (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)) \\ &= (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)). \end{aligned}$$

é a soma dos termos de uma *progressão aritmética de razão 1*.

Segue que

$$x_n = \frac{(1 + (n-1)) \cdot (n-1)}{2}.$$

Portanto,

$$x_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}.$$

Vê-se que a resolução das recorrências lineares homogêneas e das recorrências não homogêneas com coeficientes iguais, não requer nehuma tecnica especial. Segundo Lima (2006), a resolução de recorrências não homogêneas de coeficientes distintos pode ser conseguida aplicando, concomitantemente, os métodos de resolução das recorrências do tipo (1.4) e (1.6), conforme mostra o seguinte teorema.

Teorema 1.2.1. *Se a_n é uma solução não-nula de $x_{n+1} = g(n)x_n$, então a substituição de $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \quad \textit{em} \quad y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

Demonstração. Dado que a_n é solução da homogênea associada, fazendo a substituição de $x_n = a_n y_n$ em $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, obtem-se:

$$a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Mas, $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. Portanto, a equação se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n).$$

Dividindo essa igualdade por $g(n)a_n$, a equação se transforma em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h(n)}{g(n) \cdot a_n}.$$

□

Exemplo 1.2.3. *Resolver a recorrência* $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, $x_1 = 1$.

Solução. Por 1.5, uma solução não nula da homogênea associada $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é $x_n = n!$. Substituindo x_n por $n!\, y_n$ em $x_{n+1} = (n+1)x_n + n$, obtém-se

$$(n+1)!\, y_{n+1} = (n+1)n!\, y_n + n,$$

que é equivalentemente a

$$(n+1)!\, y_{n+1} = (n+1)!\, y_n + n.$$

Dividindo essa igualdade por $(n+1)!$, a equação transforma-se em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{n}{(n+1)!}.$$

Segue que:

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1\\
y_2 &= y_1 + \frac{1}{2!}\\
y_3 &= y_2 + \frac{2}{3!}\\
y_4 &= y_3 + \frac{3}{4!}\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + \frac{n-1}{n!}.
\end{aligned}$$

Somando essas igualdades, encontra-se:

$$y_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n-1}{n!}.$$

Mas,

$$\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}.$$

Logo,

$$y_n = 1 + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right).$$

Simplificando essa soma, encontra-se:

$$y_n = 2 - \frac{1}{n!}$$

Finalmente, substituindo esse resultado em $x_n = n!\, y_n$, segue que :

$$x_n = 2n! - 1.$$

1.3 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Definição 1.3.1. *Uma relação de recorrência linear de segunda ordem é uma função $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n, n)$, que expressa cada elemento da sequência em função dos dois termos imediatamente anteriores a ele. É, então, do tipo*

$$x_{n+2} = f_1(n)x_{n+1} + f_2(n)x_n + h(n), \qquad f_2(n) \neq 0. \tag{1.8}$$

- A equação (1.8) tem o mesmo significado quando escrita na forma

$$x_n = f_1(n)x_{n-1} + f_2(n)x_{n-2} + h(n);$$

- Neste trabalho serão abordados apenas os casos em que $f_1(n) = p$ e $f_2(n) = q$ são constantes, caracterizando as recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n + h(n);$$

- Repare que a condição $f_2(n) \neq 0$ é fundamental para garantir que a recorrência (1.8) seja, de fato, de segunda ordem, pois do contrário, x_{n+2} dependeria apenas de x_{n+1};

- Lembrando que, se $h(n) = 0$, a recorrência é dita homogênea;

- Tal como fazem Lima (2006) e Morgado (2015), as recorrências de segunda ordem serão mostradas, daqui em diante, não mais escrevendo x_{n+2} como função de x_{n+1} e x_n mas na forma de uma equação linear, ou seja, na forma

$$x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0.$$

1.3.1 Resolução das Recorrências Homogêneas com Coeficientes Constantes

A cada recorrência linear de segunda ordem, com coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, pode-se associar uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, chamada *equação característica.* Uma outra vantagem em consierar $q \neq 0$ é que assim evita-se que haja raízes iguais a zero na equação característica.

Por Santos (2007) e Morgado (2015), afirma-se que, se r_1 e r_2 são raízes da equação característica $r^2 + pr + q = 0$, então as sequências r_1^n e r_2^n, bem como qualquer combinação linear $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$, satisfazem a equação de recorência linear $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam as constantes α e β.

Oa próximos teoremas são encontrados em Lima (2006) e Morgado (2015).

Teorema 1.3.1. *Se r_1 e r_2 são as raízes de $r^2+pr+q = 0$, então $a_n = \alpha r_1^n+\beta r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes α e β.*

Demonstração. Substituindo $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
&(\alpha r_1^{n+2} + \alpha p r_1^{n+1} + \alpha q r_1^n) + (\beta r_2^{n+2} + \beta p r_2^{n+1} + \beta q r_2^n)\\
&= \alpha r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + \beta r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q)\\
&= \alpha r_1^n \cdot 0 + \beta r_2^n \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

□

O teorema seguinte garante que, se r_1 e r_2 são raízes distintas de $r^2 + pr + q = 0$, então todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no teorema anterior.

Teorema 1.3.2. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, quaiquer que sejam as constantes α e β .*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Para que os dois primeiros termos da sequência possam ser escritos na forma desejada devem existir as constantes α e β tais que o sistema

$$\begin{cases} \alpha r_1 + \beta r_2 &= y_1 \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 &= y_2 \end{cases}$$

sempre tenha solução única. Resolvendo esse sistema encontra-se:

$$\alpha = \frac{y_1}{r_1} - \frac{y_2 - r_1 y_1}{r_1(r_2 - r_1)} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{y_2 - r_1 y_1}{r_2(r_2 - r_1)}.$$

Tais constantes sempre vão existir, pois $r_1 \neq r_2$ e $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Deve-se mostrar que y_n é da forma $\alpha r_1^n + \beta r_2^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se isso for verdade, a diferença $z_n = y_n - (\alpha r_1^n + \beta r_2^n)$ deve ser igual a zero. Tem-se que

$$\begin{aligned} z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n &= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) + \alpha(r_1^{n+2} + pr_1^{n+1} + qr_1^n) + \beta(r_2^{n+2} + pr_2^{n+1} + qr_2^n) \\ &= (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) + \alpha r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + \beta r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q). \end{aligned}$$

A expressão do primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; as expressões dos dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$. Então,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0.$$

Além disso, como $\alpha r_1 + \beta r_2 = y_1$ e $\alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = y_2$, tem-se que $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n. □

Exemplo 1.3.1. *Determinar a solução da recorrência* $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$, $x_0 = 3$ *e* $x_1 = -6$.

A equação característica da recorrência de equação $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$ é $r^2 + 5r + 6 = 0$, cujas soluções são -3 e -2. De acordo com os Teoremas 1.3.1 e 1.3.2, as soluções da recorrência são as sequências da forma $x_n = \alpha(-3)^n + \beta(-2)^n$. Usando o fato que $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ -3\alpha - 2\beta = -6. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontra-se $\alpha = 0$ e $\beta = 3$. Assim, a solução da recorrência é $x_n = 3 \cdot (-2)^n$.

Exemplo 1.3.2. *Resolver a recorência do Exemplo 1.1.5.*

A equação $X_n - X_{n-1} - X_{n-2} = 0$ é uma equação de recorrência linear homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes. Sua equação característica, $r^2 - r - 1 = 0$, tem raízes

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Conforme os Teoremas 1.3.1 e 1.3.2, as soluções da recorrência são da forma

$$X_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \tag{1.9}$$

Embora se tenha iniciado a Tabela 1 com o termo X_1, é conveniente buscar a solução para $n = 0$. Decorre, da recorrência (1.2), que $X_0 = X_2 - X_1 = 1$.

Assim, considerando como casos base, os termos $X_0 = 1$ e $X_1 = 2$, e substituindo na equação (1.9), chega-se ao sistema

$$\begin{cases} \alpha & + \quad \beta & = \quad 1 \\ \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & + \quad \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = \quad 2 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontra-se:

$$\alpha = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}.$$

Portanto, a solução geral (fórmula fachada) da recorrência é:

$$X_n = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observação 1.3.1. *Se as raízes da equação característica forem complexas, a solução $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, α e β constantes arbitrárias, pode ser escrita na forma trigonométrica.*

Fazendo: $r_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ *e* $r_2 = \rho(cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$,

segue que $r_1^n = \rho^n(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ *e* $r_2^n = \rho^n(cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$.

Logo,

$$\alpha r_1^n + \beta r_2^n = \rho^n[(\alpha+\beta)cos\, n\theta + i(\alpha-\beta)\operatorname{sen} n\theta].$$

É claro que $\alpha' = \alpha + \beta$ e $\beta' = i(\alpha - \beta)$ são novas constantes e a solução pode ser escrita na forma

$$a_n = \rho^n[\alpha' cos\, n\theta + \beta' \operatorname{sen} n\theta].$$

Exemplo 1.3.3. *A recorrência $x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ tem equação característica $r^2 + 2r + 2 = 0$. As raízes da equação característica são os complexos*

$$r_1 = -1 + i \quad e \quad r_2 = -1 - i.$$

Logo, a solução geral é

$$x_n = \alpha(-1+i)^n + \beta(-1-i)^n,$$

onde α e β são constantes arbitrárias. Usando o fato de que as raízes são números complexos de módulo $\sqrt{2}$ e argumento $\pm\frac{3\pi}{4}$, esta solução pode ser escrita sob forma

$$x_n = \alpha\cos\frac{3n\pi}{4} + \beta\operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}.$$

Teorema 1.3.3. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então, $a_n = \alpha r^n + \beta n r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes α e β.*

Demonstração. Se as raízes são iguais, então $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = \alpha r^n + \beta n r^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtém-se:

$$\alpha r^{n+2} + \beta(n+2)r^{n+2} + \alpha p r^{n+1} + \beta p(n+1)r^{n+1} + \alpha q r^n + \beta q n r^n$$

$$= \alpha r^n(r^2 + pr + q) + \beta n r^n(r^2 + pr + q) + \beta r^n r(2r + p)$$

$$= \alpha r^n \cdot 0 + \beta n r^n \cdot 0 + \beta r^n r \cdot 0 = 0.$$

□

Teorema 1.3.4. *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são iguais, $r_1 = r_2 = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $\alpha r^n + \beta n r^n$, α e β são constantes.*

Demonstração. Seja y_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determine constantes α e β que sejam soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha r + \beta r = y_1 \\ \alpha r^2 + 2\beta r^2 = y_2, \end{cases}$$

isto é,

$$\alpha = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{y_2 - r y_1}{r^2}.$$

Isto é possível, pois $r \neq 0$.

Afirmação: $y_n = \alpha r^n + \beta n r^n$ para todo n natural. Agora faça $z_n = y_n - \alpha r^n - \beta n r^n$ e mostre que $z_n = 0$ para todo n. De fato, pois

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - \alpha r^n(r^2 + pr + q) - \beta n r^n(r^2 + pr + q) - \beta r^n r(2r + p).$$

A expressão do primeiro parêntese é igual a zero porque y_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; as expressões do segundo e do terceiro perênteses são iguais a zero porque r é rais de $r^2 + pr + q = 0$; a expressão do quarto parêntese também é zero, porque $2r + p = 0$, já que, quando $r_1 = r_2 = r$, tem-se $r = -\frac{p}{2}$. Então,

$$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0.$$

Além disso, como $\alpha r + \beta r = y_1$ e $\alpha r^2 + 2\beta r^2 = y_2$, segue que $z_1 = z_2 = 0$. Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$, então $z_n = 0$ para todo n.

□

1.3.2 Resolução das Recorrências Não Homogêneas

Os métodos empregados na resolução de recorrências lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes, juntamente com o teorema que enunciaremos nesta seção, darão condições de resolver as recorrências lineares não homogêneas de segunda ordem.

Teorema 1.3.5. *Se a_n é uma solução da equação $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$, então a substituição $x_n = a_n + y_n$ transforma a equação em $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.*

Demonstração. Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtém-se

$$(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n) + (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$, pois a_n é a solução da equação original. Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0.$$

□

Morgado (2015) diz, através do Teorema 1.3.5, que a solução de uma recorrência linear não homogênea de segunda ordem com coeficientes constantes é constituída de duas parcelas: uma correspondente à solução da homogênea associada e a outra corresponde a uma solução qualquer da não homogênea. Já é conhecido um método para encontrar a solução da homogênea. Uma solução da não homogênea pode ser encontrada por tentativa.

Exemplo 1.3.4. *Resolver a recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n$.*

Solução: A equação homogênea associada à recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n$ tem equação característica $r^2 - 5r + 6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Portanto, a solução da homogênea, ou seja, de

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0,$$

é

$$h_n = \alpha\, 2^n + \beta\, 3^n.$$

É necessário, agora, encontrar uma solução particular, t_n, da recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n + 3^n$. Perceba que t_n deve ser tal que quando substituída em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n$ leve a encontrar $n + 3^n$. Que tipo de função deve ser t_n? Pelas características do termo independente, é razoável acreditar que t_n deva ser a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial, ou seja,

$$t_n = An + B + Cn3^n.$$

Substituindo t_n na recorrência, tem-se:

$$A\,(n+2)+B+C\,(n+2)3^{n+2}-5\,(n+1)+B+C\,(n+1)3^{n+1}]+6\,[An+B+Cn3^n] = n+3^n$$

$$\Longrightarrow An + 2A + B + Cn3^{n+2} + 2\,C3^{n+2} - 5An - 5A - 5B$$
$$- 5\,Cn3^{n+1} - 5\,C3^{n+1} + 6An + 6B + 6\,Cn3^n = n + 3^n$$

$$\Longrightarrow 2An - 3A + 2B + 9Cn3^n + 18C3^n - 15Cn3^n - 15C3^n + 6Cn3^n = n + 3^n$$

$$\Longrightarrow 2An - 3A + 2B + 3C3^n = n + 3^n.$$

A última igualdade conduz ao sistema:

$$\begin{cases} 2An - 3A + 2B & = & n \\ 3\,C\,3^n & = & 3^n, \end{cases}$$

cuja solução é $A = \dfrac{1}{2}$, $B = \dfrac{3}{4}$ e $C = \dfrac{1}{3}$.

Logo, a solução da recorrência é

$$x_n = \alpha\,2^n + \beta\,3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4} + \frac{n\,3^n}{3}.$$

Observação 1.3.2. *Uma outra forma de proceder com respeito às recocorrências de primeira e de segunda ordem pode ser encontrada em Oliveira e Carneiro (2010).*

2 Conteúdos da Educação Básica Associados ao Raciocínio Recursivo

Este capítulo aborda, através do método recursivo, vários assuntos da matemática básica cujos reultados são termos de alguma sequência recorrente e a relação entre eles.

2.1 Progressão Aritmética

As progressões aritméticas são sequências numéricas importantes que aparecem com frequência em muitas situações. Apresentam um padrão aritmético simples com propriedades úteis que se aplicam nas diversas ciências.

Morgado (2015), e vários autores do Ensino Médio, adotam a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada razão da progressão e representada pela letra r.*

Segundo essa definição, uma progressão aritmética é uma sequência $(a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots)$ para a qual vale

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r.$$

Dessas igualdades, conclui-se, para todo natural $n \geqslant 2$, que

$$a_n = a_{n-1} + r, \quad a_1 \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

que define recursivamente a sequência (a_n).

Muitas vezes, o resultado da equação (2.1) é usado para definir as progressões aritméticas, com o seguinte enunciado: *uma progressão aritmética é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior mais uma constante, chamada de razão da progressão.*

2.1.1 Termo Geral

Um resultado importante como é a fómula do termo geral de uma progressão aritmética deve ser construído com os alunos e não, simplesmente, apresentado a eles. Aplicando o raciocínio recursivo na equação (2.1), o aluno é facilmente convencido do resultado e pode extrair durante o processo, outras informações importantes. Segue o processo:

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 + r \\ a_3 & = & a_2 + r \\ a_4 & = & a_3 + r \\ & \vdots & \\ a_{n-1} & = & a_{n-2} + r \\ a_n & = & a_{n-1} + r \end{array}$$

Observa-se que, exceto a_1 e a_n, todo termo que aparece no primeiro membro de cada equação se repete no segundo membro da equação seguinte. Somando essas $n-1$ igualdades, tem-se:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r. \tag{2.2}$$

Algumas sequências podem começar com a_0. Nesses casos, o n-ésimo termo dista n posições do termo inicial, a_0, e a equação (2.2) assumirá a forma $a_n = a_0 + n \cdot r$. De fato, partindo de a_0, para se chegar a a_n basta somar a razão n vezes,

$$a_0 \longrightarrow \underbrace{a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n}_{n}.$$

Com esse argumento construtivo, o aluno tanto estará menos sujeito ao uso de uma fórmula errada para o termo geral como será capaz de escrever a_n em função da razão e de qualquer termo a_k, $1 \leq k \leq n$. Compreende que, partindo de a_k, chega-se a a_n somando a razão em quantidade igual à distância que separa esses termos,

$$a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_k \longrightarrow \underbrace{a_{k+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n}_{(n-k) \quad termos}.$$

Portanto,

$$a_n = a_k + (n-k) \cdot r$$

ou, no caso em que a sequência começa com a_0,

$$a_n = a_k + (n - (k+1)) \cdot r.$$

2.1.2 Progressão Aritmética e Função Afim

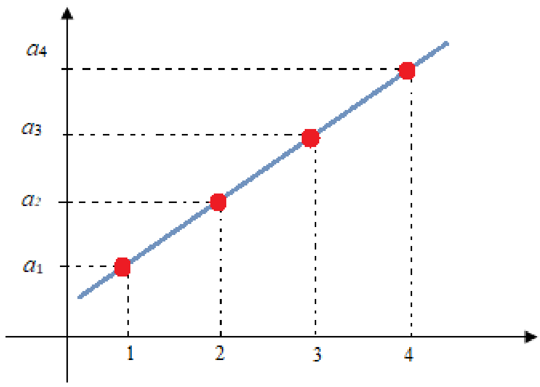
> As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas (...). (BRASIL, 2006, p.75)

Observa-se na equação (2.2) que o termo geral de uma progressão aritmética de termo inicial a_1 e razão r, $a_n = n \cdot r + (a_1 - r)$, é uma *função afim* $x(n) = an + b$ com domínio nos naturais, onde $a = r$ e $b = a_1 - r$. Em particular, se $a_1 = r$, (a_n) caracteriza uma *função linear* $x(n) = an$ com domínio em $\mathbb{N}$. Pelo que se sabe das funções afins, fica fácil entender o comportamento dos termos de (a_n), no que surge a classificação de uma P.A, segundo o sinal de r:

- Se $r = 0$, a sequência é *constante* e igual ao primeiro termo, $a_n = a_1$;
- Se $r > 0$, a sequência é *crescente*, ou seja, é tal que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n$;
- Se $r < 0$, a sequência é *decrescente*, ou seja, é tal que $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_n$.

Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares do plano: $(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \cdots (n, a_n)$:

Figura 4 – Gráfico de uma progressão aritmética.



Fonte: elaborada pelo autor.

Exemplo 2.1.1. *Um bem cujo valor hoje é de R\$ 8000, 00, desvaloriza-se de tal forma que seu valor daqui a 4 anos será de R\$ 2000, 00. Supondo constante a desvalorização anual, qual será o valor do bem daqui a 3 anos?*

Solução: É claro que o valor do bem depende do tempo decorrido, em anos. Pode-se indicar por $v_0 = 8000$ ou por $v(0) = 8000$, o valor do bem no ano atual. Em termos de função, $v(n) = v(0) + n \cdot r$ é o valor do bem decorridos n anos, onde r é a taxa de variação. O problema estará resolvido desde que se saiba o valor de r:

$$v(4) = v(0) + 4r \Rightarrow 2000 = 8000 + 4r \Rightarrow 4r = -6000 \Rightarrow r = -1500$$

Como o bem está sofrendo desvalorização, já era esperado um valor negativo para r. Logo, o valor do bem após 3 anos, é:

$$v(3) = v(0) + 3r \Rightarrow v(3) = 8000 + 3 \cdot (-1500) = 3500$$

2.1.3 Números poligonais

Uma interessante aplicação das progressões aritméticas são os conhecidos números poligonais ou números figurados.

Duarte e Silva (2014), apontam que conteúdos como sequências e progressões aritméticas e geométricas, quando ensinados de forma descontextualizada, pouco contribuem para a formação matemática do aluno, servem apenas para aplicar um conjunto de fórmulas, que na maioria das vezes, o aluno não consegue entender seu significado, em exercícios feitos com essa finalidade. Recomendam introduzir o assunto, por exemplo, com os *números poligonais*, pois assim, os alunos poderão entender melhor a ideia de sequências e padrões, sairão de situações particulares para casos gerais e terão confiança para construir certas fórmulas.

Definição 2.1.2. *Números figurados são aqueles que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Se o arranjo formar um polígono regular, esses números são ditos poligonais.*

O número de pontos de cada lado do polígono determina sua ordem. Por convenção, 1 é o primeiro número poligonal, independente do número de lados. Na Figura 5, os números ***triangulares***, ***quadrados*** e ***pentagonais*** de ordem n estão representados, respectivamente, por T_n, Q_n e P_n.

De acordo com Simmons (1987), os pitagóricos[1] tinham especial interesse pelos números poligonais. Não apenas foram os primeiros a representar números através de figuras formadas por pontos, como estabeleceram muitos fatos interessantes sobre tais números apenas observando as figuras. Perceberam, por exemplo, que para passar de um número quadrado para o seguinte, basta adicionar pontos sobre dois lados consecutivos, tal como um esquadro, a que chamaram de *gnomon*, e que *gnomons* sucessivos são, simplesmente, números ímpares consecutivos.

Acompanhando a Figura 5, nota-se que cada triângulo da lista é obtido acrescentando-se ao triângulo anterior, uma fileira de pontos com quantidade igual à ordem do triângulo que está sendo formado. Assim, cada número triangular é a soma de todos os seus antecessores. Vale, portanto, a recorrência:

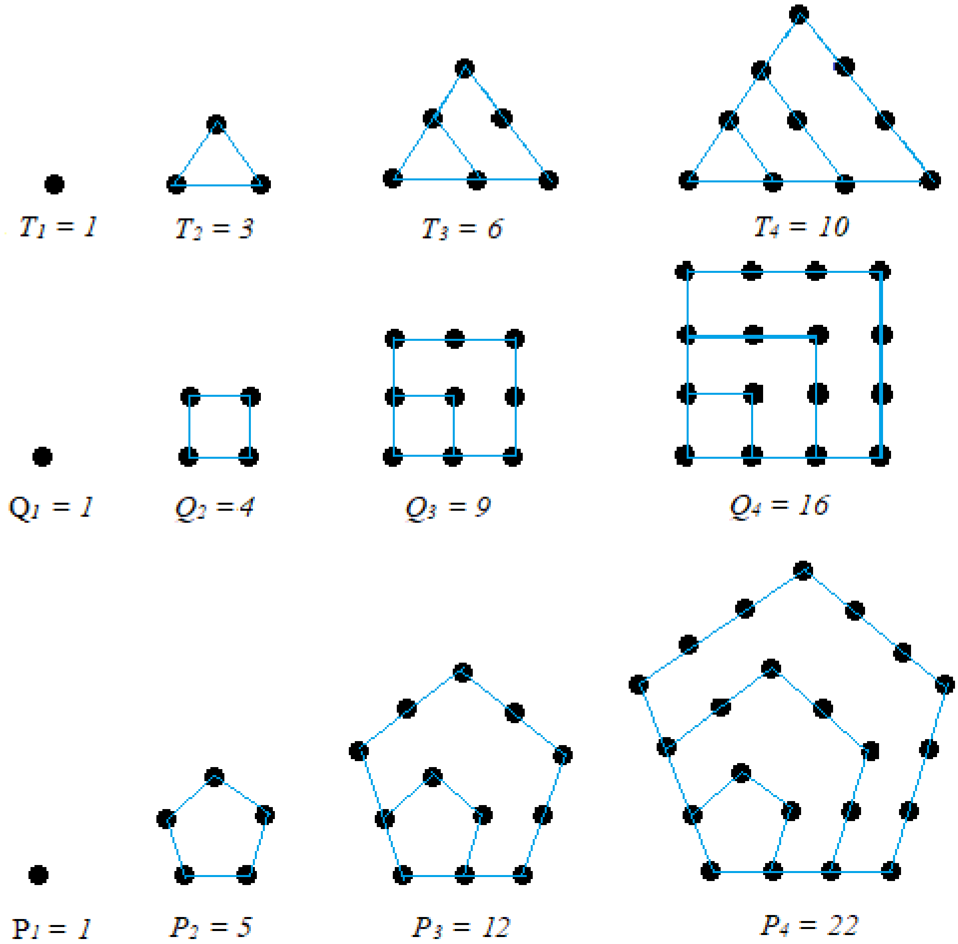
$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + (n+1) \\ T_1 = 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Assim,

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n$$

1 Discípulos de Pitágoras, famoso matemático e filósofo grego que viveu no século VI a.C.

Figura 5 – Números poligonais.



Fonte: elaborada pelo autor.

é a soma dos n primeiros inteiros positivos. Sendo assim, qualquer termo de (T_n) pode ser obtido diretamente através do termo geral:

$$T_n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Sobre os números quadrados, percebe-se que, para se construir a figura de ordem $n+1$, acrescenta-se à figura de ordem n, um *gnomon* com $2n+1$ pontos. Mas, isso significa somar a sequência dos números ímpares, ou seja, de uma P.A de razão 2. Assim, cada número quadrado segue a regra de recorrência

$$\begin{cases} Q_{n+1} = Q_n + (2n+1) \\ Q_1 = 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

segundo a qual,

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= \frac{(1+(2n-1))n}{2} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Esses cálculos não são absolutamente necessários, é possível concluir que $Q_n = n^2$, apenas analisando o padrão nos termos da Figura 5.

Percebe-se, pela Figura 5, que cada pentágono da sequência é obtido acrescentando ao pentágono anterior, três segmentos pontilhados consecutivos, cada um com quantidades de pontos igual à ordem. Como o segmento intermediário compartilha os pontos das extremidades com os segmentos adjacentes, é imediato que, ao pentágono P_n, são acrescentados $3n - 2$ pontos em relação ao polígono anterior. Assim, o $(n+1)$-ésimo número pentagonal é conseguido com a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + (3n+1) \\ P_1 = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} P_n &= 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + (3n-2) \\ &= \frac{(1 + (3n-2))n}{2} \\ &= \frac{3n^2 - n}{2}. \end{aligned}$$

Segundo Roque (2012, p.107), uma conclusão importante a que os pitagóricos chegaram de forma visual é a seguinte: “ todo número quadrado é a soma de dois números triangulares sucessivos”.

Esse resultado pode ser verificado, algebricamente, do seguinte modo:

$$\begin{aligned} T_n + T_{n+1} &= \frac{(1+n)n}{2} + \frac{(1+(n+1))(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+n^2) + (n^2+n+2n+2)}{2} \\ &= \frac{2n^2+4n+2}{2} \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T_n + T_{n+1} = Q_{n+1}.$$

De modo análogo, definem-se números construídos a partir de pontos sobre haxágonos e outros polígonos com maior número de lados.

Voltando às recorrências dos números triangulares, quadrados e pentagonais, percebe-se que o número da etapa seguinte é igual ao número anterior somado com

n mais um, o dobro de n mais um e o triplo de n mais um, respectivamente. Esse padrão se mantém, de modo que o $(n+1)$-ésimo número j-gonal[2], A_{n+1}, é regido por:

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + ((j-2)n + 1) \\ A_1 = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Segue-se daí, que

$$\begin{aligned} A_n &= 1 + (j-1) + (2j-3) + (3j-5) + \cdots + [(j-2)\cdot(n-1)+1] \\ &= \frac{(1+1+(n-1)\cdot(j-2))n}{2} \\ &= \frac{4n + jn^2 - 2n^2 - jn}{2} \\ &= \frac{(j-2)n^2 - (j-4)n}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A_n = \frac{(j-2)n^2 - (j-4)n}{2},$$

$j \geq 3$ é o número de lados do polígono.

2.2 Progressão Geométrica

As progressões geométricas aparecem com muita frequência em problemas financeiros, biológicos e outros de relevância científico-social.

> Tenha sempre em mente que uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma e esse instrumento matemático foi criado para descrever grandezas que variam com taxa de crescimento constante. É absurdo, mas infelizmente é comum ensinar progressões geométricas e não relacioná-las à ideia de taxa de crescimento. (MORGADO, 2015, p.64)

Definição 2.2.1. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência na qual é constante o quociente da divisão de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente é chamado de razão da progressão e é representado pela letra q.*

Da definição, cada termo a_i da progressão geométrica (a_n) é não-nulo, e

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q,$$

implicando em

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \quad \text{com} \quad a_1 = k\,(\in \mathbb{R}), \tag{2.7}$$

que definine, recursivamente, os termos da progressão (a_n).

[2] Quantidades de pontos, igualmente espaçados, suficientes para construir polígonos de j lados.

Exemplo 2.2.1. *Suponha que um capital C_0 esteja sujeito a um decréscimo mensal de 5%. Nessas condições, o capital após o primeiro mês, C_1, é 5% menor que o anterior, ou seja, corresponde a 0,95 ou 95% do capital inicial:*

$$C_1 = C_0 - C_0 \cdot 0,05 = C_0 \cdot (1 - 0,05) = 0,95 \cdot C_0$$

por sua vez, o capital do segundo mês é

$$C_2 = C_1 - C_1 \cdot 0,05 = 0,95 \cdot C_1 = (0,95)^2 \cdot C_0$$

Uma vez que a taxa de decrescimento é constante, segue que o capital em cada mês é 95% do capital anterior: $C_n = q \cdot C_{n-1} = 0,95 \cdot C_{n-1}$. Assim, ao passar de um mês para o outro a quantia é multiplicada por 0,95. Desse modo, para passar do mês zero para o mês n, a quantia deve ser multiplicada por $(0,95)^n$. Em particular,

$$C_{12} = (0,95)^{12} \cdot C_0 = 0,54 \cdot C_0$$

Portanto, após 12 meses, o capital é 0,46 ou 46% menor que o capital inicial.

2.2.1 Termo Geral

Aplicando o raciocínio recursivo na equação (2.7), tem-se que

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 \cdot q \\ a_3 & = & a_2 \cdot q \\ a_4 & = & a_3 \cdot q \\ & \vdots & \\ a_n & = & a_{n-1}.q. \end{array}$$

Multiplicando essas igualdades, segue que

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}. \tag{2.8}$$

Algumas vezes, a sequência (a_n) pode ser definida para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Quando assim, $a_n = a_0 \cdot q^n$.

O que deve ficar claro través da relação (2.8), é que o n-ésimo termo de uma *P.G* pode ser escrito em função de quaisquer de seus termos anteriores, a_j, $1 \leq j \leq n$. Basta observar que, partindo do j-ésimo, chega-se ao n-ésimo termo avançando $(n - j)$ termos: $a_n = a_j \cdot q^{n-j}$.

2.2.2 Progressões Geométricas e Função Exponencial

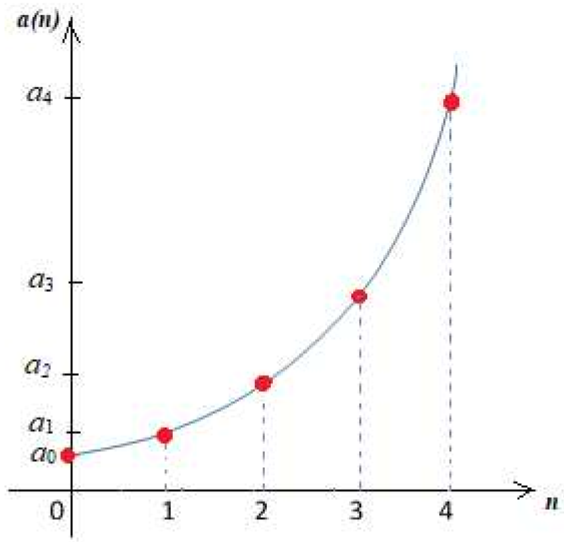
A progressão geométrica pode ser pensada como uma função que associa cada número natural positivo n ao número $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Tal aplicação é a restrição aos naturais da função tipo exponencial $a(x) = a \cdot q^{x-1}$.

Em geral, dada qualquer função exponencial do tipo $a(x) = a \cdot q^{x-1}$, a sequência $(a(1), a(2), a(3), ...)$ é uma $P.G$ de razão q, pois, para todo $x \in \mathbb{N}$, vale que:

$$\frac{a(2)}{a(1)} = \frac{a(3)}{a(2)} = \cdots = \frac{a(x)}{a(x-1)} = \frac{a \cdot q^x}{a \cdot q^{x-1}} = \frac{q^{x-1} \cdot q}{q^{x-1}} = q$$

Portanto, o gráfico de uma *progressão geométrica* é uma sequência de pontos $(1, a(1)), (2, a(2)), \cdots (x, a($ pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

Figura 6 – Gráfico de uma progressão geométrica.



Fonte: elaborada pelo autor.

Entendendo como esses assuntos se comunicam, pode-se aplicar técnicas de *progressão geométrica* para resolver certos problemas exponenciais.

2.2.3 A Curva de Koch

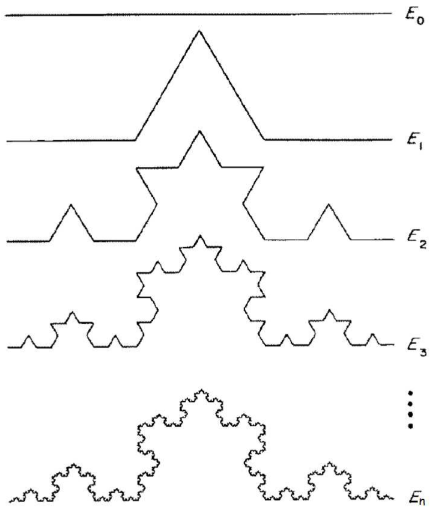
Uma importante aplicação das progressões geométricas e, portanto, das recorrências, é o *fractal*[3] conhecido como *floco de neve de Koch*.

Dividindo um segmento de reta em três partes iguais e, em seguida, substituindo-se o segmento médio por outros dois lados de um triângulo equilátero construído no segmento médio, obtém-se uma linha poligonal de 4 lados. Fazendo o mesmo em cada um desses lados, obtém-se uma linha poligonal de 16 lados. Repetindo esse processo, na n-ésima iteração, obtém-se uma linha poligonal de 4^n lados. Repetindo esse processo sucessivamente em cada um dos lados encontrados na etapa anterior, obtém-se uma curva de comprimento infinito, conhecida como *Curva de Koch*[4].

[3] A palavra *fractal* surgiu do latin fractus, que significa irregular ou quebrado. Fractais podem ser definidos como formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita

[4] A curva de Koch foi apresentada pelo matemático sueco Helge Von Koch, em 1904.

Figura 7 – Curva de Koch



Fonte: http://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/koch-kurve/5284

Um outro fractal, conhecido como *Floco de Neve de Koch*[5], é obtido quando se aplica as etapas da construção da *Curva de Koch* aos lados de um *triângulo equilátero.*

Figura 8 – Construção do Floco de Neve de Kock até o quarto estágio.

Fonte: http://www.jayrus.art.br/Apostilas/7UPE/FractaisNatureza.htm

Analisando a impressionante transformação da Figura 8 a cada iteração, algumas perguntas surgem naturalemnte:

- *Quantos"lados" tem o Floco de Neve de Koch?*
  Indicando por F_n o número de lados da Figura 8 no estágio n, tem-se que $F_0 = 3$, pois a figura inicial é um triângulo. Observando que, em cada estágio, cada lado de F_n é substituído por outros 4 de mesma medida, tem-se que $F_{n+1} = 4 \cdot F_n$.
  Assim, a recorrência
  $$\begin{cases} F_0 = 3 \\ F_{n+1} = 4 \cdot F_n \end{cases}$$
  fornece o número de lados do estágio n.

[5] Recebe esse nome devido sua semelhança com um floco de neve. É também conhecido como Ilha de Von Koch.

Mas essa recorrência é uma progressão geométrica de razão 4 e termo inicial 3. Logo, $F_n = 3 \cdot 4^n$. Entretanto, é importante notar que o Floco de Neve não está terminado no estágio n, sua construção segue indefinidamente, razão pela qual possui infinitos lados.

- Qual o perímetro do Floco de Neve de Koch?

  Uma vez que o Floco origina-se a partir de um triângulo equilátero, onde cada um de seus lados, igual e simultaneamente, transforma-se em uma Curva de Koch, é suficiente determinar o perímetro da curva.

  Considere um segmento reto de tamanho l, como na Figura 7. Se P_n é o perímetro da curva no estágio n, tem-se que $P_0 = l$.

  No primeiro estágio, o segmento reto é divido em três outros de mesma medida, de modo que o segmento intermediário é substituído por dois outros que formam com ele um triângulo equilátero. Nesse momento, obtém-se 4 segmentos, cada um medindo um terço de l. Segue que $P_1 = \frac{4}{3}l$.

  Como o mesmo procedimento se aplica a todos os lados em cada estágio, segue que, na n-ésima iteração, o número de segmentos é 4 vezes maior e cada um deles corresponde a um terço de um segmento do estágio anterior.
  Assim,
  $$P_n = \frac{4}{3} \cdot P_{n-1} \Rightarrow P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n l.$$

  Portanto, o perímetro do floco após a n-ésima iteração, é $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n l$. Como (P_n) é uma P.G de razão quatro terços (maior que 1), o perímetro da curva, consequentemente do floco de neve, tende para o infinito à medida que n cresce indefinidamente.

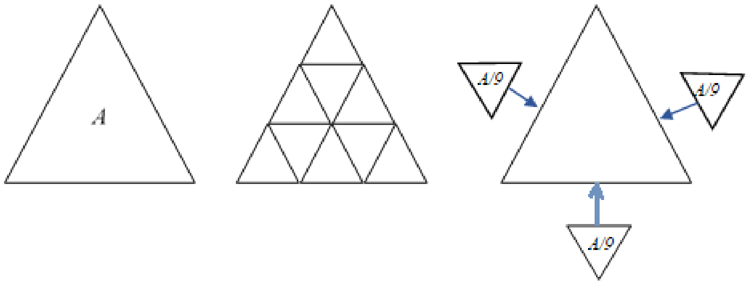
  Para se ter uma ideia, no septagésimo quarto estágio, o perímetro de um floco de neve que inicia com um triângulo de $1\,cm$ de lado é, aproximadamente, $53\,km$, tamando mais que suficiente para dar uma volta em torno da terra[6].

- Qual a área do Floco de Neve?

  Considere um triângulo equilátero de área A, tal como na Figura 9.

[6] Uma volta inteira na Terra corresponde a uma distância aproximada de 40 000 Km.

Figura 9 – Áre do Floco de Neve



Fonte: elaborada pelo autor.

Indicando por S_n a área ao final do estágio n, é imediato que $S_0 = A$.

No primeiro estágio é acrescentado, na parte média de cada lado do triângulo inicial, um triângulo com área equivalente a *um nono* de A, de modo que

$$S_1 = S_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} S_0 = A + \frac{1}{3}A \Rightarrow S_1 = A + \frac{1}{3}A.$$

A partir da segunda etapa, a quantidade de triângulos que serão acrescentados, é quatro vezes maior que na etapa anterior, e a área de cada um continua variando à taxa constante e igual a um nono. Acompanhe o desenvolvimento para as duas etapas seguintes:

$$S_2 = S_1 + 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 S_0 \Rightarrow S_2 = S_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} A$$

e

$$S_3 = S_2 + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 S_0 \Rightarrow S_3 = S_2 + \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^2 A.$$

Então, a área do floco de neve no estágio n é dada pela recorrência:

$$\begin{cases} S_n &= S_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} S_0 \\ S_0 &= A, \end{cases} \tag{2.9}$$

que conduz às igualdades:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + \frac{1}{3}A \\ S_2 &= S_1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^1 A \\ S_3 &= S_2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 A \\ &\vdots \\ S_n &= S_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} A. \end{aligned}$$

Somando, essas igualdades, encontra-se:

$$\begin{aligned} S_n &= A + A\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + +\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right] \\ &= A + A\left[\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{4}}\right] \\ &= A + A\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{5}\right) \\ &= A + \frac{3}{5}A. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{8}{5}A.$$

Em particular, se o triângulo do estágio zero tiver 1 unidade de área, tem-se que $A = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$, para o qual:

$$S_n = \frac{8}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow S_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

2.3 Matemática Financeira

A *matemática financeira* é essencialmente aplicada e se faz necessária para compreender as práticas mais importantes e comuns aos indivíduos de toda a sociedade capitalista, que são as relações de consumo, além de fornecer subsídios necessários para a tomada de decisões importantes da vida desses indivíduos, tornando-os críticos e atuantes. O emprego do raciocínio recursivo, proporciona ao aluno, melhor compreensão da dinâmica dos regimes de juros, bem como o entendimento sobre taxas equivalentes e sistemas de amortização. Este trabalho contemplará apenas os regimes de juros simples e composto.

De acordo com Morgado e Carvalho (2015), a operação básica da matemática financeira é a operação de *empréstimo*. Segundo eles, quando um capital C (também chamado *Valor Principal* ou *Valor Atual*) é emprestado a alguém por um certo período de tempo, ao final desse tempo, o capital deve ser devolvido a quem o emprestou acompanhado de uma remuneração J pelo empréstimo (uma espécie de compensação pelo uso do dinheiro). Essa remuneração é chamada de *juro*.

A soma do capital com os juros por ele produzidos forma o *Montante* (M):

$$M = C + J \Longrightarrow \frac{M}{C} = \frac{C}{C} + \frac{J}{C} = 1 + \frac{J}{C},$$

onde, a razão $i = \dfrac{J}{C}$ corresponde à taxa de crescimento do capital com relação ao período da operação e é chamada de *taxa de juros*.

Os juros podem ser capitalizados segundo os regimes: *simples e composto.*

2.3.1 Juros Simples

No regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sobre o *Valor Principal*. Assim, os juros são diretamente proporcionais ao valor do Capital emprestado (C) e à quantidade de períodos (n) em que o mesmo foi emprestado.

$$J = \underbrace{iC + iC + \cdots + iC}_{n} = niC.$$

Assim, passados n períodos unitários de tempo, o juro J produzirá o capital

$$C_n = C + J = C + niC.$$

De certo, representando o capital inicial, o capital ao final do primeiro período, o capital ao final do segundo período e, mais geralmente, o capital ao final do n-ésimo período, respectivamente, por C_0, C_1, C_2 e C_n, segue que:

$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & C_0 + iC_0 \\ C_2 & = & C_1 + iC_0 \\ C_3 & = & C_2 + iC_0 \\ & \vdots & \\ C_n & = & C_{n-1} + iC_0. \end{array}$$

Após a soma dessas igualdades, tem-se que

$$C_n = C_0 + inC_0.$$

2.3.2 Juros Compostos

No regime de capitalização com *juros compostos*[7], os juros são calculados, ao final de cada período, sobre o montante do período anterior. Mais precisamente, os juros auferidos em cada período são incorporados ao capital anterior para render juros no período seguinte.

Em termos algébricos, vale a recorrência

$$C_n = C_{n-1} + iC_{n-1},$$

isto é,

$$C_n = C_{n-1}(1 + i). \tag{2.10}$$

Se C_0 é o capital inicial, a equação (2.10) se refere a uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$ e termo inicial C_0. Segue que:

$$C_n = C_0(1 + i)^n. \tag{2.11}$$

[7] Também chamdos *juros sobre juros*.

Exemplo 2.3.1. *Qual o montante produzido por uma aplicação de* $R\$\,3\,600,00$ *a juros compostos de* 12% *ao mês durante 6 meses?*

Designando o capital (ou montante) gerado no sexto mês por C_6, segue o resultado:

$$\begin{aligned} C_6 &= 3\,600 \cdot (1+0,12)^6 \\ &= 3\,600 \cdot (1,12)^6 \\ &= 7\,115,76. \end{aligned}$$

2.4 Análise Combinatória

A *análise combinatória* ensinada, geralmente, na segunda série do Ensino Médio, costuma ser resumida em alguns métodos de contagem: *permutação, arranjos e combinação simples.* Cada um desses métodos acompanha uma fórmula que permite calcular o número de configurações de uma certa quantidade de objetos. Para tanto, os alunos são preparados para identificar o método a ser usado em cada problema e, portanto, que fórmula devem utilizar. Todavia, esse modelo de ensino pode levar a aprendizado pouco significativo pelas seguintes razões:

- nem sempre o aluno tem clareza do método adequado para cada situação. Diante de problemas combinatórios, os alunos tendem a escolher um desses métodos de contagem e costumam perguntar qual devem utilizar;
- existem problemas simples que não se aplicam diretamente/exclusivamente a nenhum dos métodos citados. Existem problemas, por exemplo, que utilizam as ideias de permutação e de arranjos;
- quando se dispunha apenas desses recursos, a solução de problemas um pouco mais complexos é inatingível.

Santos (2007) chama a atenção para a importância do raciocínio recursivo na resolução de problemas combinatórios. Com esse tipo de abordagem, os problemas básicos ganham mais significado e as fórmulas de permutação, arranjos e combinação deixam de ser essenciais e podem ser percebidas naturalmente no decorrer do procedimento. Além disso, o aluno torna-se capaz de resolver uma quantidade maior de problemas com níveis de dificuldade variados, indo além dos modelos básicos de exercícios propostos.

> A formulação de relações de recorrência é uma arma poderosa e versátil na resolução de problemas combinatórios. De fato, muitos problemas considerados difíceis à primeira vista são facilmente resolvidos por esta técnica. Neste tipo de abordagem partimos do problema particular (calcular o número de determinadas configurações quando dispomos de, por exemplo, 5 elementos) para o problema genérico (quando existem n elementos). (SANTOS, 2007, p.205)

A análise combinatória apóia-se nos dois seguintes princípios básicos de contagem:

- *Princípio Aditivo:* Se A e B são dois conjuntos disjuntos ($A \cap B = \emptyset$) com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos;
- *Princípio Multiplicativo*[8]: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e um evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer simultaneamente os eventos A e B é $m \cdot n$.

Uma vez que a Análise Combinatória se presta a solucionar problemas de contagem, nada mais honesto que apresentar a teoria com problemas dessa natureza. Os três seguintes problemas têm esse propósito:

Problema 2.1. *De quantos modos é possível formar uma fila com n pessoas?*

Seja f_n a solução do problema. É claro que $f_1 = 1$, pois só há 1 modo de formar uma fila com uma pessoa. Formar filas com duas pessoas também é fácil: uma determinada pessoa pode ocupar o primeiro ou o segundo lugar da fila, alternadamente com a segunda pessoa, de modo que $f_2 = 2$. Havendo 3 pessoas, cada vez que uma delas ocupar a primeira posição da fila, restará o problema de formar filas de duas pessoas, a partir da segunda. Como há 3 possibilidades para a primeira posição, $f_3 = 3 \cdot f_2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Estudando os primeiros resultados, aprende-se que as versões mais simples do problema fornecem parte da solução para os casos mais gerais.

Seguindo com a mesma ideia, considere agora um conjunto com n pessoas: $\{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n\}$. Fixando uma dessas pessoas, suponhamos p_1 na primeira posição, restarão $n - 1$ pessoas para formar uma fila de tamanho $n - 1$, o que poderá ser feito de f_{n-1} modos. Esse resultado se mantém toda vez que quais quer das $p_i, 1 \leq i \leq n$, outras pessoas ocupar a primeira posição da fila. Portanto,

$$f_n = n \cdot f_{n-1}. \tag{2.12}$$

Segue que

$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & 1 \\ f_2 & = & 2 \cdot f_1 \\ f_3 & = & 3 \cdot f_2 \\ f_4 & = & 4 \cdot f_3 \\ & \vdots & \\ f_n & = & n \cdot f_{n-1} \end{array}$$

[8] Também conhecido como *princípio fundamental da contagem.*

Multiplicando essas igualdades e simplificando adequadamente, chega-se a

$$f_n = \prod_{i=1}^{n} i \Longrightarrow f_n = n!$$

De fato, a menos do coeficiente, a recorrência (2.12) é a mesma que aparece no Exemplo 1.2.1.

Esse problema costuma ser classificado como um problemas de *Permutação Simples* de n elementos e é denotado do seguinte modo: $P_n = n!$.

Exemplo 2.4.1. *Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas?*

Inicialmente classifique todas as vagas de tal modo que fique claro qual é a primeira, qual é a segunda, etc. Feito isso, deve-se escolher o carro que vai ocupar cada uma das vagas. Há 6 opções para a primeira vaga; 5 opções para segunda; 4 opções para a terceira; 3 opções para a quarta; 2 opções para quinta e, finalmente, 1 opção para a sexta vaga. Aplicando o princípio multiplicativo, segue o resultado:

$$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720.$$

Problema 2.2. *De quantos modos é possível formar uma fila de tamanho k, $1 \leq k \leq n$, com n pessoas disponíveis?*

Para resolver esse problema, deve-se, inicialmente, tomar k decisões sucessivas: pessoa que deve ocupar a primeira posição da fila, depois a pessoa que deve ocupar a segunda posição, a pessoa que deve ocupar a terceira e assim por diante até que se tenha terminado de formar uma fila de k pessoas. Indique por a_k a solução do problema, isto é, o número de modos de n pessoas formarem uma fila de k lugares. A primeira escolha pode ser feita de n nodos, ou seja, $a_1 = n$. Para as decisões seguintes, aplica-se o princípio multiplicativo, levando em conta que, a cada nova decisão, o número de pessoas disponíveis diminui 1 unidade. Assim,

$$\begin{aligned} a_2 &= (n-1)a_1 \\ a_3 &= (n-2)a_2 \\ a_4 &= (n-3)a_3 \\ &\vdots \\ a_k &= (n-(k-1))a_{k-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando, tem-se que

$$a_k = a_1 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1)) \Longrightarrow a_k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1).$$

Esse resultado aparece na literatura como *Arranjo* de n elementos tomados de k em k. É representado simbolicamente por:

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.4.2. *O número de filas que se podem ser formadas no caso em que* $n = 10$ *e* $k = 4$*, é dado pelo produto dos termos que vão de* n *até* $(n-k+1)$*, isto é,* $a_{10,4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\,040$.

Problema 2.3. *Quantas comissões de* k *pessoas,* $k \leq n$*, é possível formar a partir de um grupo de* n *pessoas?*

Seja x_k a solução do problema. É imediato que $x_1 = n$. Perceba que esse problema difere do problema de formar filas de tamanho k porque aqui a ordem não importa, desse modo:

Para formar grupos de 2 pessoas basta escolher uma pessoas, de $(n-1)$ modos, para compor cada uma das x_1 comissões de uma pessoa. Mas x_2 é o dobro de $x_1 \cdot (n-1)$, pois esse produto considera, por exemplo, $(p_1, p_{10}) \neq (p_{10}, p_1)$;

Para formar comissões de 3 pessoas basta escolher uma pessoa, de $(n-2)$ modos, para compor cada uma das x_2 comissões de duas pessoas. Mas x_3 é o triplo de $x_2 \cdot (n-2)$, pois esse produto considera, por exemplo, $(p_1, p_{10}, p_2) \neq (p_{10}, p_2, p_1) \neq (p_2, p_{10}, p_1)$;

Avançando um pouco mais, para formar comissões de k pessoas basta escolher uma pessoa, de $(n-k+1)$ modos, para compor cada cada uma das x_{k-1} comissões de $k-1$ pessoas. Mas $(n-k+1) \cdot x_{k-1}$ é k vezes maior que x_k, pois esse produto considera distintas as comissões $(p_k, p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}) = (p_1, p_k, p_2, \cdots, p_{k-1}) = (p_1, p_2, p_k, \cdots, p_{k-1}) = \cdots = (p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k-1}) = (p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}, p_k)$.

Desse modo,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} x_1 \cdot (n-1) \\ x_3 &= \frac{1}{3} x_2 \cdot (n-2) \\ x_4 &= \frac{1}{4} x_3 \cdot (n-3) \\ &\vdots \\ x_k &= \frac{1}{k} x_{k-1} \cdot (n-(k-1)). \end{aligned}$$

Fazendo o produto consegue-se o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{x_1 \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1) \cdot k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1) \cdot k}. \end{aligned}$$

Na literatura esse resultado é conhecido como *Combinação* simples de n elementos tomados de k em k. É usualmente representado com a seguinte simbologia:

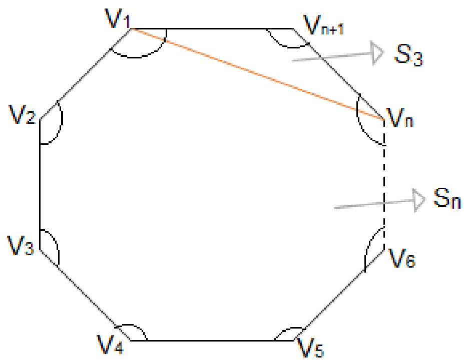
$$\begin{aligned} C_{n,k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k-1) \cdot k} \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

2.5 Em Geometria

2.5.1 Soma dos ângulos internos de um polígono

Seja S_n a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados, $n \geq 3$. Dado que $S_3 = 180^o$, estamos interessados em saber a soma dos ângulos internos de um polígono de $n+1$ lados.

Figura 10 – Soma dos ângulos internos de um polígono de n+1 lados.



Fonte: elaborada pelo autor.

O segmento V_1V_n divide o polígono de $n+1$ lados em dois outros, sendo um de n e outro de 3 lados, que têm soma dos ângulos internos conhecidas, a saber, S_n e 180^o, respectivamente. Assim,

$$S_{n+1} = S_n + 180^o, \quad \text{com} \quad n \geq 3 \quad \text{e} \quad S_3 = 180^o \tag{2.13}$$

A recorrência (2.13) é, na verdade, uma *progressão aritmética* de termo inicial $S_3 = 180^o$ e razão $r = 180^o$. Trilhando o mesmo caminho que conduziu à fórmula (2.2), encontra-se

$$S_n = S_3 + (n-3) \cdot 180^o = 180^o + (n-3) \cdot 180^o$$

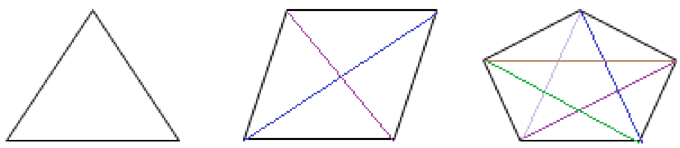
Portanto,

$$S_n = (n-2) \cdot 180^{\circ}.$$

2.5.2 Número de diagonais de um polígono

Não há dificuldade alguma em contar as diagonais de polígonos regulaes de 4 ou de 5 lados. Porém, a mesma tarefa passa a ser muito complicada, ou até impossível, quando se considera um polígono com 10 lados ou mais. Chamando de D_n o número de diagonais de um polígono regular de n lados, é imediato que $D_3 = 0$, $D_4 = 2$ e $D_5 = 5$.

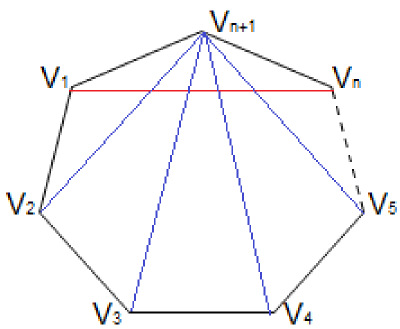
Figura 11 – Diagonais do triângulo, quadrilátero e pentágono



Fonte: elaborada pelo autor.

Considere o problema de determinar o número de diagonais de um polígono regular de $n+1$ lados, P_{n+1}.

Figura 12 – Diagonais de um polígono regular de $n+1$ lados



Fonte: elaborada pelo autor.

O segmento V_1V_n é um lado do polígono P_n, de D_n diagonais. Mas, V_1V_n e as D_n diagonais de P_n, são diagonais de P_{n+1}. Além disso, dos $n+1$ segmentos que aparecem quando se associa o vértice V_{n+1} a todos os vértices de P_{n+1}, só não são diagonais quando este é associados a si mesmo e aos dois vértices adjacentes. Desse modo, $D_{n+1} = D_n + 1 + (n+1-3)$.

Portanto, o número de diagonais de um polígono de $n+1$ lados é dado por

$$\begin{cases} D_3 = 0 \\ D_{n+1} = D_n + n - 1, \quad n \geq 3 \end{cases} \tag{2.14}$$

que é uma relação de recorrência linear não homogênea de primeira ordem. De (2.14), tem-se que

$$\begin{aligned} D_4 &= D_3 + 2 \\ D_5 &= D_4 + 3 \\ D_6 &= D_5 + 4 \\ &\vdots \\ D_n &= D_{n-1} + (n-2) \end{aligned}$$

Segue-se daí, que

$$D_n = D_3 + (2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)) = (2 + 3 + 4 + \cdots + (n-2)),$$

que é a soma dos termos de uma *progressão aritmética* de $n - 3$ termos, sendo o primeiro deles igual a 2 e o último igual a $(n - 2)$. Portanto,

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}. \tag{2.15}$$

3 Aplicações Clássicas

Este capítulo, tem como objetivo, estudar *O Problema dos Coelhos de Fibonacci*, *A Torre de Hanoi* e *A Pizza de Steiner*. Muito conhecidas em Matemática Discreta, essas aplicações aparecem com frequência em textos que tratam de recorrências lineares.

3.1 A Sequência de Fibonacci

Sem dúvida, é uma das mais conhecidas e impressionantes sequências que se tem notícia, tem sido objeto de pesquisa e estudo em diversas áreas da matemática tais como criptografia e teoria dos jogos, bem como em outras áreas do conhecimento humano.

Figura 13 – Fibonacci.

Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm

Flood (2013,p.54) conta que "Leonardo de Pisa (1170 -1240), conhecido desde o século XIX como Fibonacci (filho de Bonaccio), é lembrado principalmente pelo seu *Liber Abaci* (Livro dos Cálculos), que usou para popularizar os algarismos indo-arábicos, e pela sequência de números que recebeu o seu nome. O seu trabalho foi importantíssimo para dar à matemática árabe reconhecimento mais amplo na Europa ocidental."

O *Liber Abaci* apresenta uma grande variedade de problemas. O mais famoso deles, *O Problema dos Coelhos*, deu origem à sequência que leva o seu nome e que tem inspirado muitos matemáticos por todo o mundo. O problema é proposto da seguinte forma:

"Um fazendeiro tem um casal de filhotes de coelho. Os coelhos levam dois meses para chegar à maturidade e dão à luz outro casal a cada mês. Quantos casais de coelho haverá dalí a um ano?"

Indicando um casal de coelhos com a letra C e a respectiva idade (0 = recém nascido, 1 = um mês de idade, * = pelo menos dois meses) acima e à direita da letra, pode-se representar a evolução da população como na Tabela 2.

Tabela 2 – População dos coelhos de Fibonacci

Mês	População	Total de Casais
1	C^0	1
2	C^1	1
3	C^* C^0	2
4	C^* C^1 C^0	3
5	C^* C^* C^1 C^0 C^0	5
6	C^* C^* C^* C^1 C^1 C^0 C^0 C^0	8
7	C^* C^* C^* C^* C^* C^1 C^1 C^1 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0	13
8	C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^1 C^1 C^1 C^1 C^1 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0	21
9	C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^* C^1 C^1 C^1 C^1 C^1 C^1 C^1 C^1 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0 C^0	34

Fonte: elaborada pelo autor.

Analisando as condições do problema verifica-se que a população evolui do seguinte modo: no mês 1 apenas o casal de recém-nascidos. A população do segundo mês é a mesma do mês anterior (um casal), agora com um mês de idade. O casal do segundo mês torna-se adulto no terceiro mês e passa a dar cria, a partir de então, a um novo casal a cada mês. Assim, a população do terceiro mês é formada por dois casais. Seguindo com esse processo sistemático e levando em conta que não há mortes nem fugas, é possível formar as populações dos meses seguintes conforme a Tabela 2. Analisando os resultados dos primeiros meses pode-se perceber uma regra de formação para o crescimento dessa população. Com base no que foi observado, como calcular a população do início do décimo mês? Nota-se que esta é formada pela população do nono mês mais a quantidade de nascimentos do mês 10. Mas, o número de nascimentos nesse mês corresponde ao número de casais com pelo menos um mês no início do nono mês. Ora, mas a população com pelo menos um mês no inicio do nono mês é, exatamente, a população do oitavo mês. Assim, $F_{10} = F_9 + F_8 = 55$.

De modo geral, denotando por F_n a população de casais do n-ésimo mês, esse argumento fornece a equação de recorrência

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad \text{para} \quad n \geq 3, \tag{3.1}$$

que é uma equação de recorrência linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

A equação (3.1), juntamente com as populações dos dois primeiros meses, forma a relação de recorrência

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 3 \\ F_1 = 1, \quad F_2 = 1 \end{cases} \tag{3.2}$$

que descreve a sequência de números

$$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots), \tag{3.3}$$

conhecida como a *Sequência de Fibonacci.*

Perceba que a equação (3.1) apenas, não determina, especificamente, a sequência (3.3) mas qualquer sequência que se comporte de tal modo que qualquer de seus termos é determinado pela somas de dois de seus termos anteriores.

Repare que as equações de recorrência (3.1) e (1.2), embora iguais, determinam sequências diferentes. Isso não é surpreendente uma vez que os problemas de que elas tratam têm valores iniciais diferentes.

Para resolver a relação de recorrência (3.2) procede-se como na Seção (1.3).

A equação característica associada à equação de recorrência (3.1) é

$$r^2 - r - 1 = 0,$$

cujas raízes são

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Assim,

$$F_n = \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

A sequência (3.3) está completamente definida pela relação de recorrência (3.2), significando que a equação (3.1), mediante os valores de F_1 e F_2, fornece todos os termos subsequentes. A partir dessa mesma relação, consegue-se determinar os termos anteriores, de onde se consegue que $F_0 = 0$.

Resolvendo a equação (3.1) para os casos base $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha & + \quad \beta & = 0 \\ \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) & + \quad \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = 1, \end{cases}$$

cuja solução é

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Finalmente, tem-se:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \text{para} \quad n \geq 0. \tag{3.5}$$

A equação (3.5) é conhecida como ***Fórmula de Binet***. Embora seja constituída por termos irracionais, essa fórmula fornece, surpreendentemente, todos os inteiros da sequência (3.3).

O problema dos Coelhos de Fibonacci, tem um enunciado simples, de fácil compreensão mas com resultados surpreendentes. É um problema que atrai e distrai aos curiosos, matemáticos ou não. Entendemos que pode ser utilizado em sala de aula para introduzir o assunto de *recorrências*. Ao final do desenvolvimento da teoria, alguns questionamentos podem ser levantados com o intuito de instigar o espírito de investigação dos alunos acerca das sequências recorrêntes, tais como:

1. O problema dessa seção se baseou em determinar o tamanho da população (de casais) de coelhos em cada mês. E se quiséssemos determinar o tamanho da população de indivíduos (número total de coelhos), como seria a relação de recorrência?

2. Outra variante interessante seria investigar a sequência gerada para condições iniciais diferentes, como, por exemplo, $F_1 = 3$ e $F_2 = 7$.

3.2 A Torre de Hanoi

Inventado pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1982, o jogo *Torre de Hanoi*, é formado por uma pilha de discos de diâmetros distintos e uma base onde estão fincadas, verticalmente, três hastes idênticas. Estando os discos em uma das hastes em ordem decrecente de diâmetro (de baixo para cima), o jogo consiste em transferir todas as peças, uma de cada vez, da primeira para a terceira haste e usando a haste do meio como apoio, realizando o menor número de movimentos possíveis de modo que, em cada etapa, seja atendida a regra de que nenhum disco pode ser apoiado em outro de diâmetro menor que o seu.

Desse modo, como resolver o problema de passar oito discos de uma haste para outra, na mesma ordem, respeitando as condições estabelecidas?

Para se responder a esse problema deve-se observar, inicialmente, o que acontece para um disco e depois para quantidades maiores, quando se vai aumentando um disco de cada vez. Construindo os primeiros termos da sequência do número mínimo de movimentos necessários para mover cada quantidade de disco, pretendemos encontrar um padrão comum a todos os termos de modo que, sejamos capazes de chegar aos termos seguintes apenas com cálculos aritméticos. Para tanto, vamos nos referir às hastes, da esquerda para a direita, como primeira, segunda e terceira.

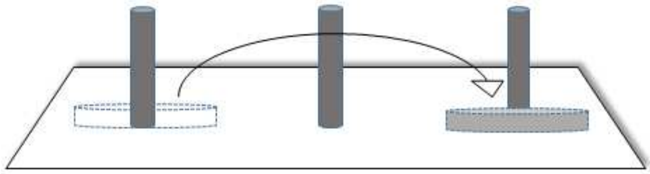
Para $n = 1$ disco, um único movimento é suficiente para tranferi-lo para a haste desejada, ver Figura 14.

Para $n = 2$ discos, são necessários três movimentos, ver Figura 15.

Para $n = 3$ discos, conforme mostra a Figura 16, são necessários sete movimentos.

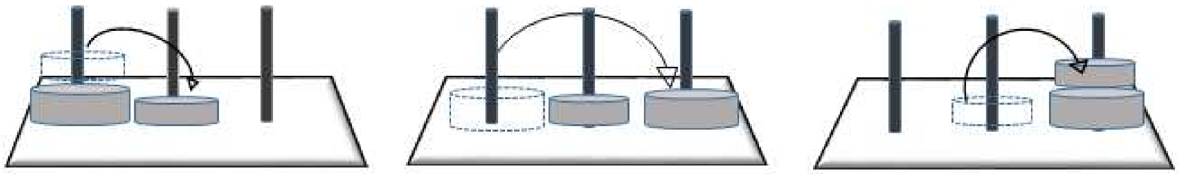
Observe que no caso $n = 3$, precisou-se, inicialmente, resolver o problema para dois discos (3 movimentos), em seguida transferir o disco maior para a terceira haste e,

Figura 14 – Torre de Hanoi: movimentos de 1 disco.



Fonte: elaborada pelo autor.

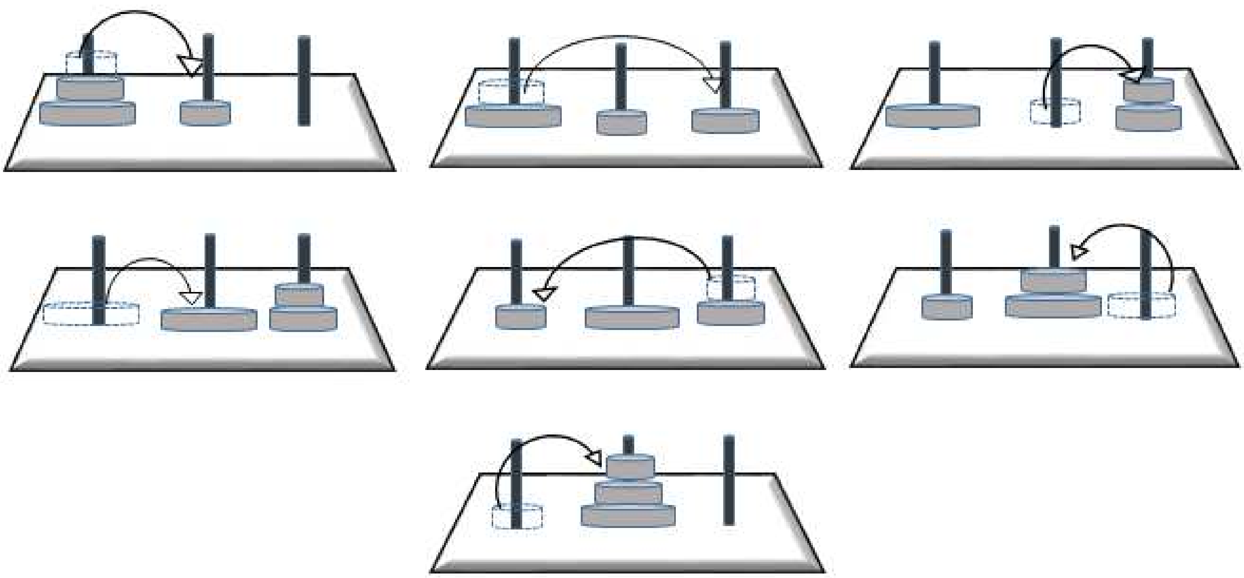
Figura 15 – Torre de Hanoi: movimentos de 2 discos.



Fonte: elaborada pelo autor.

finalmente, mover os dois discos da haste auxiliar para a terceira (mais 3 movimentos), totalizando 7 movimentos.

Figura 16 – Torre de Hanoi: movimentos de 3 discos.



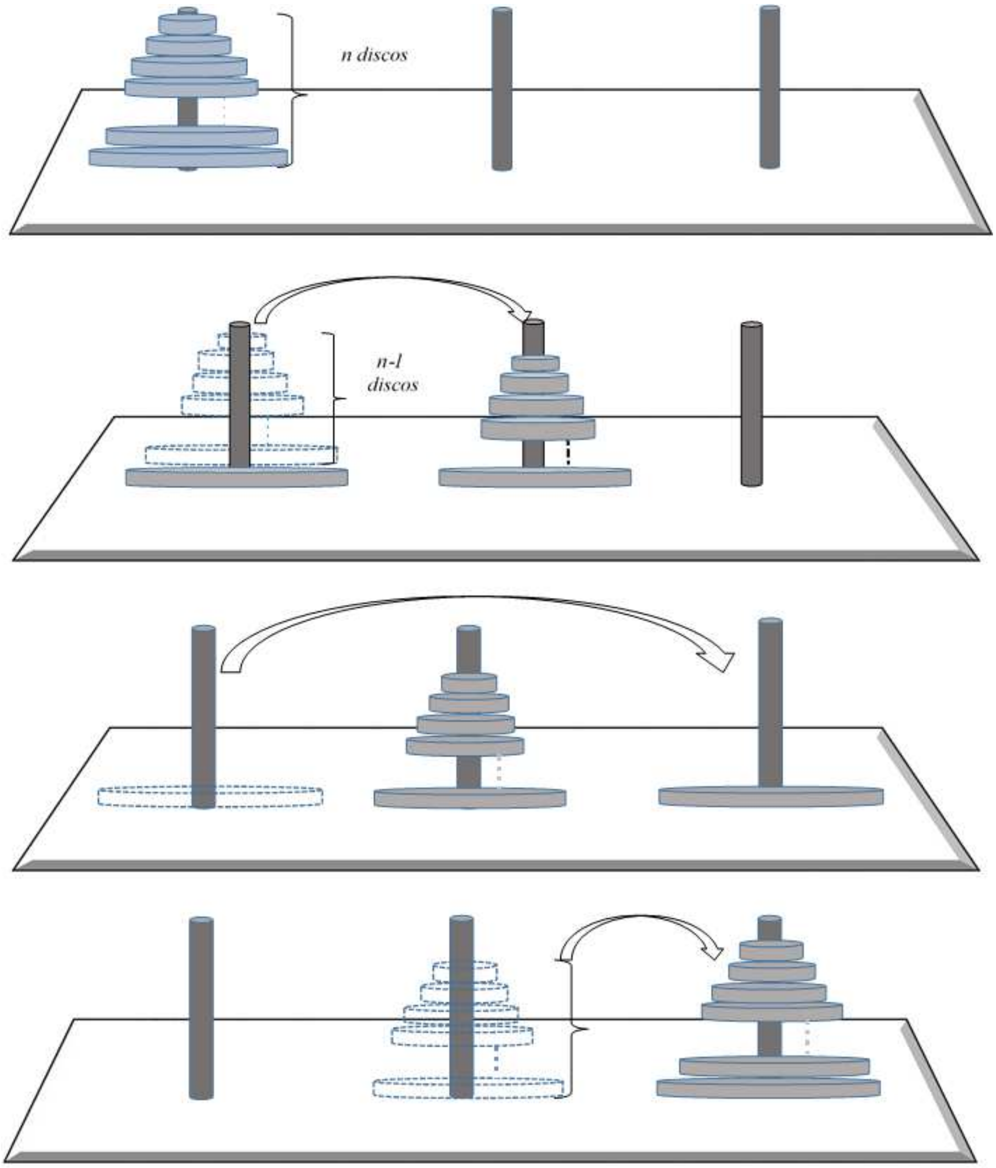
Fonte: elaborada pelo autor.

Como se faria para mover 4 discos da primeira para a terceira haste? Pela nálise dos primeiros casos, percebe-se que, para levar o disco da base para a terceira haste, o que pode ser feito com um movimento, deve-se antes transferir os três discos menores para a segunda haste, corresponde aos sete movimentos do caso anterior, e, em seguida, transferí-los para a terceira haste, mais sete movimentos, totalizando 15 movimentos.

Essa estratégia vale para casos mais gerais. Para uma torre com n discos, segue o raciocínio da Figura 17.

Seja h_n a solução do problema, isto é, o número mínimo de movimentos necessários

Figura 17 – Torre de Hanoi: movimentos para n discos.



Fonte: elaborada pelo autor.

para mover n discos, um por vez. Comece movendo os $n-1$ discos menores para a haste intermediária com h_{n-1} movimentos, em seguida faça um movimento para mover o disco maior para a terceira haste e, por fim, transfira os $n-1$ discos da haste auxiliar para a terceira haste, tal como se fez antes.

Logo, a solução é dada pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} h_1 = 1 \\ h_n = 2 \cdot h_{n-1} + 1, \quad \text{para} \quad n \geq 2. \end{cases} \tag{3.6}$$

De posse da recorrência (3.6), fica fácil apresentar a solução para 8 discos. O resultado é mostrado na Tabela 3.

Interessa saber calcular h_8, ou qualquer h_n, diretamente, sem a necessidade de

Tabela 3 – Torre de Hanoi: Solução para 8 discos.

Número de discos (n)	Número de movimentos (h_n)
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
8	255

Fonte: elaborada pelo autor.

calcular todos os valores anteriores.

Partindo de (3.6), tem-se que uma solução da equação homogênea $h_n = 2h_{n-1}$ é $h_n = 2^{n-1}$. Fazendo a substituição $h_n = 2^{n-1}y_n$, obtém-se $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$. Daí, segue-se que

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 \\
y_2 &= y_1 + 2^{-1} \\
y_3 &= y_2 + 2^{-2} \\
y_4 &= y_3 + 2^{-3} \\
&\vdots \\
y_n &= y_{n-1} + 2^{-(n-1)}.
\end{aligned}$$

Somando, tem-se que

$$\begin{aligned}
y_n &= y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \cdots + 2^{-(n-1)} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} \\
y_n &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$h_n = 2^{n-1} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \Longrightarrow h_n = 2^n - 1. \tag{3.7}$$

O fato de h_n ser exponencial confirma que o número mínimo de jogadas necessárias aumenta muito rapidamente à medida que n cresce e, a certa altura, se torna impraticável até mesmo para um computador. Por exemplo, para 64 discos, tem-se surpreendentes

$$t_{64} = 2^{64} - 1 = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

movimentos.

Para se ter uma ideia da grandeza desse número, assumindo que cada movimento de 1 disco demora 1 milissegundo, isto é, 10^{-3} segundos, chega-se aos seguintes valores:

$$\begin{aligned} t_{64} &= 18\,446\,744\,073\,709\,551 \quad \text{segundos} \\ &\cong 5,124 \times 10^{12} \quad \text{horas (aproximadamente 5,124 trilhões de horas)} \\ &\cong 213,5 \times 10^{9} \quad \text{dias (aproximadamente 213,5 bilhoes de dias)} \\ &\cong 548,5 \times 10^{6} \quad \text{anos (aproximadamente 548,5 milhões de anos)} \\ &\cong 5\,845\,420 \quad \text{séculos.} \end{aligned}$$

3.3 A Pizza de Steiner

Atribuído ao matemático suíço *Jacob Steiner* (1796 - 1863), uma das versões[1] desse problema é a seguinte: *Determinar o número máximo de regiões do plano formadas por um conjunto de n retas.*

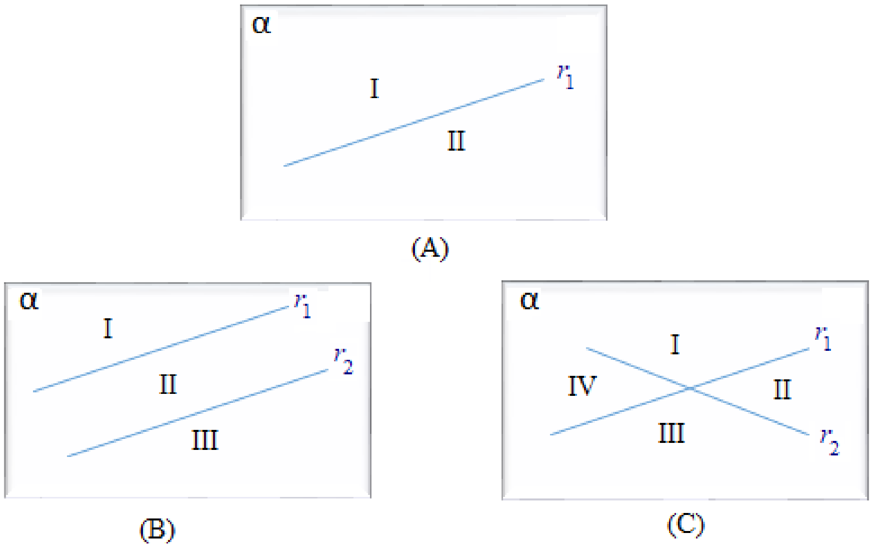
Um jeito eficiente de resolver esse problema é analisar os casos mais simples, acrescentando a primeira reta e seguir acrescentando outras retas, uma de cada vez, para observar algum padrão e fatos que devem ser considerados nas etapas seguintes.

Indicando por R_n o número (máximo) de regiões em que n retas cortam o plano, não há dúvidas de que $R_1 = 2$. De fato, idetificando uma reta r_1 em um plano α qualquer, esta secciona o plano em duas partes: uma acima de r_1 e outra abaixo de r_1.

Na segunda etapa, acescenta-se uma segunda reta r_2 a α. Perceba que r_2 não pode coincidir com r_1 ou novas regiões não serão formadas. Outra possibilidade é que as retas r_1 e r_2 sejam paralelas, conforme mostra a Figura 18 (B), nesse caso elas estarão formando 3 regiões: uma entre as duas retas, uma acima de r_1 e a outra abaixo de r_2. Pode ocorrer ainda, como mostra a Figura 18 (C), que elas sejam concorrentes, nesse caso, haverá um ponto de interseção e a segunda reta atravessa as duas regiões formadas pela primeira, fazendo aparecer duas novas regiões. Desse modo, $R_2 = 4 = 2 + 2$.

1 Há uma versão mais lúdica que faz jus ao nome: determinar o número de pedaços em que uma pizza pode ser dividida com n cortes.

Figura 18 – Regiões do plano formadas por duas retas.

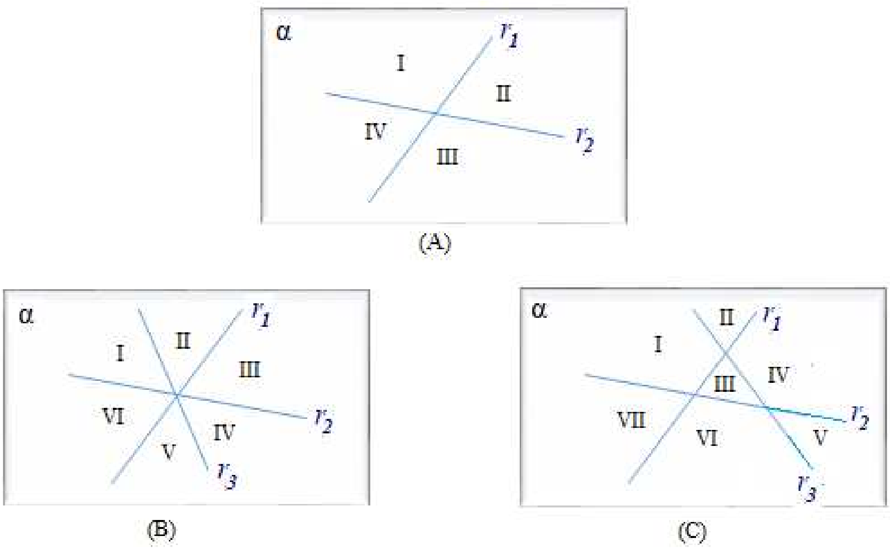


Fonte: elaborada pelo autor.

Um fato que deve ser observado e considerado é que uma nova reta não deve ser paralela a nenhuma outra para que se consiga o número máximo de novas regiões.

A terceira reta a ser traçada em α deve ser concorrente com as duas anteriores. Se r_3 concorrer com r_1 e r_2 em um único ponto, tal como na Figura 19 (B), ela estará percorrendo duas regiões e produzirá duas novas regiões, de modo que $R_3 = 6$. Agora, caso r_3 concorra com as retas r_1 e r_2 em dois pontos distintos, tal como na Figura 19 (C), fará aparecer 3 novas regiões: uma antes do primeiro ponto, uma entre os dois pontos e a outra após o segundo ponto, acarretando em $R_3 = 7$. Assim, o maior número de regiões que podem ser formadas com 3 retas é 7.

Figura 19 – Regiões do plano formadas por três retas.

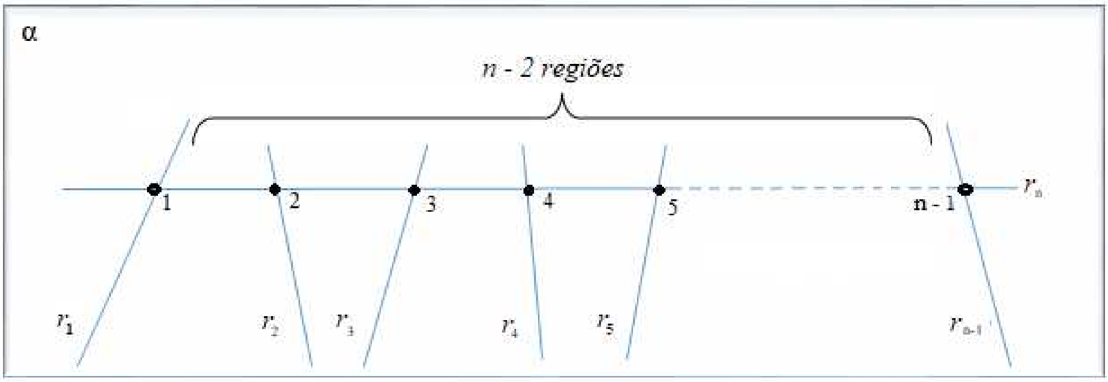


Fonte: elaborada pelo autor.

Outro fato para ser considerado é que toda nova reta deve intersectar cada uma das retas anteriores em pontos distintos.

Avançando até a n-ésima etapa, a reta de ordem n concorre com todas as $n-1$ retas anteriores em $n-1$ pontos distintos, fazendo surgir um total de n novas regiões, como ilustra a Figura 20, sendo uma antes do primeiro ponto, $n-2$ entre o primeiro e o último ponto[2] e uma outra após o n-ésimo ponto.

Figura 20 – Regiões do plano formadas por n retas.



Fonte: elaborada pelo autor.

Valendo-se de que $n-1$ retas determinam R_{n-1} regiões, a solução do problema para n retas é dado pela seguinte recorrência[3]:

$$\begin{cases} R_n = R_{n-1} + n \\ R_1 = 2. \end{cases} \tag{3.8}$$

Somando, obtém-se:

$$\begin{aligned} R_n &= R_1 + (2 + 3 + 4 + \cdots + n) \\ &= 2 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} \\ &= 2 + \frac{n^2 + n - 2}{2}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$R_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Esse problema é, de fato, interessante e exige de quem o faz não o domínio de fórmulas e habilidade em cálculo mas, atenção aos detalhes, estudar cada possibilidade

[2] Observe que o número de regiões que se formam entre o primeiro e o n-ésimo ponto é sempre 2 unidades menor que n.

[3] Aqui tomou-se $n = 1$ para o caso base. Entretano, é comum e estaria igualmente certo considerar como base o caso trivial em que $R_0 = 1$, o que é óbvio uma vez que se nenhuma reta é traçada o plano continuará formado por uma única região.

e relacionar os resultados mais simples com as etapas seguintes. Outras importantes conclusões podem ser conseguidas analisando as seguintes variações do problema da *Pizza de Steiner*:

- Em quantas regiões o plano é dividido por n linhas que se cruzam no mesmo ponto?
- Qual o maior número de regiões em que um plano pode ser dividido por n retas das quais 3 são paralelas?
- Como fica a solução do problema se, ao invés de n retas, o plano estiver dividido por n círculos que se interseptam dois a dois?

4 Resolução de Problemas pelo Método Recursivo

Neste capítulo resolveremos em detalhes problemas de níveis variados pelo método recursivo. Alguns problemas podem ter enunciado familiar para os quais o leitor é capaz de indicar rapidamente um caminho para a solução. Outros podem parecer muito difíceis. Em todos os casos chegaremos à solução de maneira construtiva, sem nos preocuparmos em buscar (caso exista) uma fórma que resolva o problema.

Problema 4.1 (Questão do 2º Simulado mais IDEB 2017 SEDUC-MA)**.** *Um cientista iniciou uma cultura de bactérias com apenas duas unidades de certa espécie. Ele verificou que, a cada duas horas, a população de bactérias duplicava e tentou representar essa reprodução utilizando uma expressão algébrica. Qual a expressão utilizada pelo cientista?*

Solução: Vamos chamar de P_0 a população inicial de bactérias, P_2 a população após duas horas, P_4 a população após quatro horas e, mais geralmente, P_{2k} é a população após $2k$ horas do início do experimento.
Logo,

$$\begin{aligned} P_2 &= 2 \cdot P_0 \\ P_4 &= 2 \cdot P_2 \\ P_6 &= 2 \cdot P_4 \\ P_8 &= 2 \cdot P_6 \\ &\vdots \\ P_{2k} &= 2 \cdot P_{2(k-1)}. \end{aligned}$$

Multiplicando essas igualdades adequadamente, temos:

$$P_2 \cdot P_4 \cdot P_6 \cdot \dots \cdot P_{2k} = 2^k \cdot P_0 \cdot P_2 \cdot P_4 \cdot \dots \cdot P_{2(k-1)}.$$

Como cada P_i, $i \in \{0\} \cup 2\mathbb{N}$, é não nulo, segue do cancelamento que:

$$P_{2k} = 2^k \cdot P_0.$$

Considerando a população inicial,

$$P_{2k} = 2^{k+1}.$$

Se a população dobra pela primeira vez duas horas após o início do experimento, pela segunda vez, quatro horas após o início do experimento, pela n-ésima vez $2k$ horas após o início do experimento, pode-se substituir $2k$ por n, consequentemente, $k = \frac{n}{2}$. Essa mudança acarreta

$$P_n = 2^{\frac{n+2}{2}}.$$

Problema 4.2 (EPCAr - 2005). *Gastei tudo que tinha em* 6 *lojas. Em cada uma delas gastei um real a mais do que a metade do que tinha ao entrar nela. Com base nisso, pode-se afirmar que:*
a) inicialmente tinha 120 *reais.*
b) ao entrar na 3^a *loja tinha loja tinha* 16 *reais.*
c) gastei 8 *reais na* 4^a *loja.*
d) sobraram 4 *reais ao sair da* 4^a *loja.*

Solução: Seja x_{n+1} o valor ao entrar na loja $n+1$ (ou saldo ao sair da loja n). Segue do enunciado, que x_{n+1} é uma recorrência liner de primeira ordem:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_n}{2} + 1\right) \Rightarrow x_{n+1} = \frac{x_n}{2} - 1$$

Repare que não é fornecido nem é possível obter diretamente o valor inicial (ou passo indutivo). Entretando, sabe-se que o saldo ao sair da loja 6 é zero:

$$x_{6+1} = 0 \Rightarrow \frac{x_6}{2} - 1 = 0 \Rightarrow x_6 = 2.$$

Por conveniência, escrevemos $x_n = 2 \cdot (x_{n+1} + 1)$. Segue que:

- $x_5 = 2 \cdot (x_6 + 1) = 2 \cdot 3 = 6;$
- $x_4 = 2 \cdot (x_5 + 1) = 2 \cdot 7 = 14;$
- $x_3 = 2 \cdot (x_4 + 1) = 2 \cdot 15 = 30;$
- $x_2 = 2 \cdot (x_3 + 1) = 2 \cdot 31 = 62;$
- $x_1 = 2 \cdot (x_2 + 1) = 2 \cdot 63 = 126.$

É imediato que os ítens (a), (b) e (d) estão incorretos. Além disso, gastou-se na quarta loja: $\left(\frac{14}{2}\right) + 1 = 8$ reais. Portanto, a resposta certa é a letra (c).

Problema 4.3 (ENEM- 2015). *O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industriaç tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou* 8000 *unidades de um determinado produto. No ano seguinte investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em* 50 %*. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de* 50%*. Considere* P *a quantidade anual de produtos fabricados no ano* t *de funcionamento da indústria.*

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?
(A) $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8000$
(B) $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8000$
(C) $P(t) = 4000 \cdot t^{-1} + 8000$
(D) $P(t) = 8000 \cdot (0,5)^{t-1}$
(E) $P(t) = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$

Solução:
Indicando por P_t a produção no ano t, tem-se que $P_1 = 8000$. Considerando que de um ano para o outro deve haver um aumento de $50\,\%$, o número de unidades produzidas no ano t é três meios da produção do ano anterior: $P_t = 1,5 \cdot P_{t-1}$.
Assim,

$$\begin{aligned} P_2 &= 1,5 \cdot P_1 \\ P_3 &= 1,5 \cdot P_2 \\ P_4 &= 1,5 \cdot P_3 \\ &\vdots \\ P_t &= 1,5 \cdot P_{t-1} \end{aligned}$$

Somando, obtém-se:

$$P_t = P_1 \cdot (1,5)^{t-1}$$

Portanto,

$$P_t = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$$

Logo, a resposta correta está no ítem (E).

Problema 4.4 (Profmat - MA12/2013)**.** *Paulo economizou durante muitos anos e tem, hoje,* $R\$\,500.000,00$ *aplicados em um investimento que rende juros de* 1% *ao mês. A partir do próximo mês, ele pretende fazer uma retirada mensal de* $R\$\,1.000,00$.
a) Seja s_n o saldo que resta da aplicação após fazer a n-ésima retirada. Exprima s_{n+1} em termos de s_n. Dê também a condição inicial da recorrência obtida.
b) Obtenha uma expressão para s_n em função de n.
c) Qual é a retirada mensal máxima que Paulo pode fazer de modo que o saldo da aplicação nunca se torne negativo?

Solução:
a) Na data de hoje, o saldo do Paulo é $s_0 = 500.000$. Assim, $s_1 = 504.000$, haja visto que $s_1 = 1,01 \cdot s_0 - 1.000$. Como a taxa de rendimento é sempre a mesma e as retiradas mensais são constantes, segue que o saldo após $n+1$ meses é dado pela recorrência

$$s_{n+1} = 1,01 \cdot s_n - 1000. \tag{4.1}$$

b) A homogênea associada à equação 4.1, $s_{n+1} = 0,01 \cdot s_n$, é uma progressão geométrica de razão 0,01. Uma solução dessa equação é $s_n = (1,01)^n$.
Substituindo $s_n = (1,01)^n y_n$ em 4.1, obtém-se

$$(1,01)^{n+1} y_{n+1} = 1,01 \cdot (1,01)^n y_n - 1000,$$

segue que

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1000}{(1,01)^{n+1}}.$$

Partindo daí,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 - \frac{1000}{(1,01)^1} \\ y_2 &= y_1 - \frac{1000}{(1,01)^2} \\ y_3 &= y_2 - \frac{1000}{(1,01)^3} \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} - \frac{1000}{(1,01)^n}. \end{aligned}$$

A soma dessas igualdades resulta em:

$$y_n = y_0 - 1.000 \underbrace{\left(\frac{1}{1,01} + \frac{1}{(1,01)^2} + \cdots + \frac{1}{(1,01)^n} \right)}_{\text{soma uma P.G de n termos e razão } \frac{1}{1,01}}.$$

Como,

$$\left(\frac{1}{1,01} + \frac{1}{(1,01)^2} + \cdots + \frac{1}{(1,01)^n} \right) = \frac{1}{1,01} \cdot \frac{\left(\frac{1}{1,01}\right)^n - 1}{\frac{1}{1,01} - 1} = \frac{1 - (1,01)^{-n}}{0,01}$$

e, além disso,

$$s_0 = 500.000 = (1,01)^0 \cdot y_0 = y_0,$$

tem-se que

$$y_n = 500.000 - 1.000 \cdot \left(\frac{1 - (1,01)^{-n}}{0,01} \right).$$

Voltando para s_n, segue o resultado:

$$s_n = \left(500.000 - 1.000 \cdot \left(\frac{1 - (1,01)^{-n}}{0,01} \right) \right) \cdot (1,01)^n.$$

c) Para que o saldo nunca se torne negativo, a retirada deve ser no máximo igual ao juro aferido em cada período, ou seja, ela deve ser menor ou igual a $500.000 \cdot 0,01 = R\$\, 5.000,00$.

Problema 4.5 (ENEM - 2015). *Um casal realiza um financiamento imobiliário de* $R\$\,180\ 000,00$*, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetiva de* 1% *ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de* $R\$\,500,00$ *mais juro de* 1% *sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em* $R\$\,500,00$ *e considere que não há prestações em atraso.*

Efetuando o pagemento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de
(A) $2075,00$.
(B) $2093,00$.
(C) $2138,00$.
(D) $2255,00$.
(E) $2300,00$.

Solução: O problema diz que cada prestação é formada por 1% de juros em realção ao saldo anterior S_n mais 500 reais e que, a cada pagamento, o saldo diminui $R\$\,500,00$. Então, a prestação do (n+1)-ésimo mês corresponde a 1% de S_n mais 500, ou seja,

$$P_{n+1} = 0,01 \cdot S_n + 500.$$

Mas

$$S_n = 180\ 000 - 500 \cdot n$$

Logo,

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 0,01 \cdot (180\ 000 - 500n) + 500 \\ &= 2300 - 5n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_{10} = 2\ 300 - 5 \cdot 9 = 2\ 300 - 45 = 2\ 255.$$

Problema 4.6 (ENEM - 2013). *As projeções para a produção de arroz no período de* $2012 - 2021$*, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.*

Ano	***Projeção da produção (t)***
2012	$50,25$
2013	$51,50$
2013	$52,75$
2014	$54,00$

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 *a* 2021 *será de*
(A) $497,25$.
(B) $500,85$.
(C) $502,87$.
(D) $558,75$.
(E) $563,25$.

Solução: Levando em conta que há um aumento constante (e deve continuar assim segundo a projeção) de $c = 1,25$ toneladas de um ano para o outro, é facil ver que a produção P_n em um ano qualquer $n > 2012$ é equivalente à produção do ano anterior P_{n-1} mais c, ou seja, $P_n = P_{n-1} + c$. Interessa saber a produção total de arroz pelo período de dez anos (2012 a 2021), onde $P_{2012} = 50,25$. Levando em conta que (P_n) é uma progressão aritmética, segue que

$$P_{2021} = P_{2012} + (9 \times 1,25) = 50,25 + 11,25 = 61,5.$$

Assim, a solução do proplema é dada pela soma

$$\begin{aligned} \sum_{i=2012}^{2021} P_i &= 50,25 + 51,50 + \cdots + 61,50 \\ &= \frac{(50,25 + 61,5) \cdot 10}{2} = 558,75. \end{aligned}$$

Problema 4.7 (FUVEST - 2018)**.** *O ano de* 2017 *marca o trigésimo aniversário de um grave acidente de contaminação radioativa, ocorrido em Goiânia em* 1987*. Na ocasião, uma fonte radioativa, utilizada em um equipamento de radioterapia, foi retirada do prédio abandonado de um hospital e, posteriormente, aberta no ferro-velho para onde fora levada. O brilho azulado do pó de césio-*137 *fascinou o dono do ferro-velho, que compartilhou porções do material altamente radioativo com sua família e amigos, o que teve consequências trágicas. O tempo necessário para que metade da quantidade de césio-*137 *existente em uma fonte se transforme no elemento não radioativo bário-*137 *é trinta anos. Em relação a* 1987*, a fração de césio-*137*, em* %*, que existirá na fonte radioativa* 120 *anos após o acidente, será, aproximadamente,*
(A) $3,1$.
(B) $6,3$.
(C) $12,5$.
(D) $25,0$.
(E) $50,0$.

Solução: Designemos por Q_n a quantidade de césio-137, n anos após o acidente. Supondo que o episódio de 1987 liberou uma quantidade k de césio-137, tem-se que $Q_0 = k$. Levando em conta que a cada 30 anos a quantidade desse material se reduz pela metade, segue que:

$$\begin{aligned} Q_{30} &= 0,5 \cdot Q_0 \\ Q_{60} &= 0,5 \cdot Q_{30} \\ Q_{90} &= 0,5 \cdot Q_{60} \\ &\vdots \\ Q_{30t} &= 0,5 \cdot Q_{30(t-1)}. \end{aligned}$$

Multiplicando essas igualdades,

$$Q_{30t} = (0,5)^t \cdot Q_0 \Longrightarrow Q_{30t} = (0,5)^t \cdot k, \quad t \in \mathbb{N} \cup 0.$$

Indicando cada período de 30 anos por n, e substituindo $30t = n$, tem-se que $t = \frac{n}{30}$.

Daí,

$$Q_n = (0,5)^{\frac{n}{30}} \cdot k.$$

Portanto, após 120 anos do acidente, a quantidade de césio-137 é de

$$Q_{120} = (0,5)^{\frac{120}{30}} k = (0,5)^4 k = 0,0625 \cdot k \cong 6,3\% k.$$

Logo, a resposta certa está no ítem (b).

Problema 4.8. *Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?*

Solução: Esse é um tipo de problema que costuma aparecer com certa frequência nos livros didáticos do Ensino Médio. Em geral os alunos são ensinados a associar o problema a um certo tipo de contagem, quando então saberão, acredita-se, que fórmula ou regra utilizar.

Indiquemos por A_n a solução do problema para n questões. Perceba que, depois que respondermos à primeira questão, o que pode ser feito de 5 modos, restará um teste de $n-1$ questões, cada uma com 5 opções de respostas. Como o resultado da primeira questão não influencia nos resultados seguintes, aplica-se o princípio multiplicativo. Obtém-se que $A_n = 5 \cdot A_{n-1}$. Essa recorrência está dizendo, por exemplo, que os gabaritos possíveis de 5 questões corresponde a 5 vezes os gabaritos para 4 questões, que por sua vez correspondem a 5 vezes os gabaritos para 3 questões e assim por diante, como segue:

$$\begin{aligned} A_2 &= 5 \cdot A_1 \\ A_3 &= 5 \cdot A_2 \\ A_4 &= 5 \cdot A_3 \\ &\vdots \\ A_n &= 5 \cdot A_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando, resulta que

$$A_n = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot 5)}_{n-1} \cdot A_1 = 5^{n-1} \cdot A_1 = 5^{n-1} \cdot 5 \Longrightarrow A_n = 5^n.$$

Em particular, no caso do nosso teste de 10 questões, segue o resultado:

$$A_{10} = 5^{10}.$$

Problema 4.9. *Uma bandeira é formada por 7 listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos se pode colorir a bandeira?*

Solução: Considere o problema de coloriri uma bandeira de n listras com as 3 cores dadas e seja x_n sua solução. Dvemos começar colorinda a primeira listra, o que pode ser feito de 3 modos, $x_1 = 3$. Levando em conta que a cor utilizada na primeira listra não deve se repetir a segunda, a cor da segunda não deve se repetir terceira, etc, ocorre que, para cada listra, a partir da 2ª, haverá duas cores disponíveis. Então, $x_n = 2 \cdot x_{n-1}$.

$$\begin{aligned} x_2 &= 2 \cdot x_1 \\ x_3 &= 2 \cdot x_2 \\ x_4 &= 2 \cdot x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 2 \cdot x_{n-1}. \end{aligned}$$

Por multiplicação, encontra-se que

$$x_n = 2^{n-1} \cdot x_1.$$

Em particular,

$$x_3 = 3 \cdot 2^6.$$

Problema 4.10. *A e B lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha soma de pontos 7, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que obteve soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?*

Solução: No lançamento de dois dados, há 36 resultados possíveis, dos quais 6 constituem o evendo *soma 7*, a saber: $\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

A probabilidade de se obter soma 7 é $\dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ e de que isso não ocorra é $1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

O jogador A ganha se obtiver soma 7 na primeira partida, ou na segunda ou na tercira, ou na quarta, atc. Como A começa jogando, ele pode ganhar na primeira partida com probabilidade de $\dfrac{1}{6}$. A ganha na segunda partida se nem A nem B conseguirem soma 7 na primeira partida, o que ocorre com probabilidade de

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right).$$

Mais geralmente, para A ganhar na partida $n+1$, nem A nem B podem obter soma 7 na n-ésima partida, o que ocorre com probabilidade de

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2(n-1)} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2}.$$

Logo, a probabilidade de A vencer é dada pela soma

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-2} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^8 + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11}.\end{aligned}$$

Problema 4.11 (Bélgica - 97). *Considere todos os inteiros consistindo de n dígitos, cada um escolhido do conjunto $\{1,2,3,4\}$, tais que nenhum dígito 3 aparece à direita de um dígito 4. Por exemplo, quando $n = 0$, os inteiros 123314 e 113424 satisfazem, enquanto que 114234 não. Seja a_n o número de tais inteiros com n dígitos. Qua expressão vale para todo $n \in \mathbb{N}$?*

(A) $a_{n+1} = 4a_n - 1$

(B) $a_{n+1} = 4a_n - 6^{n-1}$

(C) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$

(D) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n/2$

(E) $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$

Solução: Seja a_n o número de inteiros com n dígitos tais que nenhum dígito 3 aparece à direita de um dígito 4, como no enunciado. Acrescentemos um dígito à direta dos n anteriores:

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \cdots\ \_}_{n\ \text{dígitos}}\ \_$$

Nesse momento o problema passa a ser analisado em dois casos distintos conforme o n-ésimo mais um dígito seja 3 ou não:

- O $(n+1)$-ésimo dígito não é 3. Nessa situação o novo dígito poderá ser 1 ou 2 ou 4. Cada vez que um dígito permitido ocupar essa posição produzirá a_n inteiros. Logo, a solução para esse caso é $3a_n$;

- O $(n+1)$-ésimo dígito é 3. Nessa situação não pode haver nehum 4 entre os n dígitos que o antecedem. Como os algarismos 1, 2 e 3 poderão ocupar todas as n ordens, a solução para esse caso é 3^n.

Portanto, o número de inteiros formados por $n+1$ dígitos, nas condições do problema é

$$a_{n+1} = 3a_n + 3^n.$$

Conclui-se assim, que a solução do problema é a letra (E).

Pode-se ir além e encontrar uma fórmula fechada para a_n. Note inicialmente que $a_1 = 4$ e que uma solução de $a_{n+1} = 3a_n$ é 3^{n-1}. Fazendo a subtituição $a_n = 3^{n-1}y_n$, encontra-se

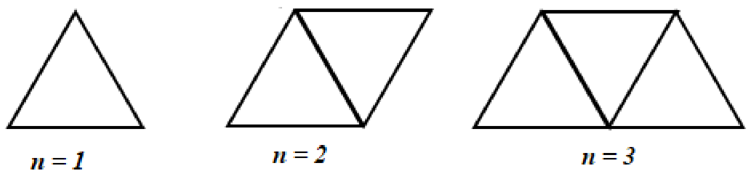
$$3^n y_{n+1} = 3 \cdot 3^{n-1} y_n + 3^n \Longrightarrow y_{n+1} = y_n + 1,$$

que é uma *progressão aritmética* de razão 1 e cujo primeiro termo é $y_1 = 4$. Segue que $y_n = 4 + (n-1) \cdot 1 = n + 3$.

Finalmente,

$$a_n = 3^{n-1}(n+1) \Longrightarrow a_n = n3^{n-1} + 3^n.$$

Problema 4.12 (UFPB-99). *Usando-se palitos de fósforo, constrói-se uma sequência de triângulos equiláteros, dispostos horizontalmente, conforme é mostrado abaixo.*



Com esta construção, quantos palitos de fósforo são necessários para se formar o centésimo elemento da sequência?

Solução: Seja a_n o número de palitos necessários para construir n triângulos. É claro que $a_1 = 3$. Conforme mostra a figura, os triângulos são construídos de tal modo que 1 palito é lado comum a dois triângulos adjacentes. Assim, para construir o próximo triângulo basta acrescentar 2 palitos à construção anterior. É uma construção recursiva:

$a_n = a_{n-1} + 2$.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + 2. \end{aligned}$$

Fazendo a soma, fica

$$a_n = a_1 + \underbrace{(2 + 2 + \cdots + 2)}_{n-1 \quad parcelas} = 3 + 2 \cdot (n-1) \Longrightarrow a_n = 2n + 1.$$

Em particular, a solução para 100 triângulos é:

$$a_{100} = 2 \cdot 100 + 1 = 201.$$

Problema 4.13 (ITA - 2015)**.** *Seja $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geqslant 3$. Considere as afirmações a seguir:*
I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.
II. a_7 é um número primo.
III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s):
(A) apenas II. *(B) apenas I e II.* *(C) apenas I e III.*
(D) apenas II e III. *(E) I, II e III.*

Solução: (a_n) é a conhecida sequência de Fibonacci.

- Suponha que existam termos consecutivos a_p, a_{p+1} e a_{p+2} formando uma P.G. Então existe uma constante $q \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} = \frac{a_{p+1}}{a_p} = q$$

Isso significa que $a_{p+2} = q \cdot a_{p+1}$ e que $a_{p+1} = q \cdot a_p$.

Assim,

$$a_{p+2} = a_{p+1} + a_p = q \cdot a_p + a_p = (q+1) \cdot a_p$$

Mas,

$$a_{p+2} = q \cdot a_{p+1} = q \cdot q \cdot a_p = q^2 \cdot a_p.$$

Segue que,

$$q^2 \cdot a_p = (q+1) \cdot a_p, \quad \text{absurdo!}$$

Logo, é falso que existem três termos consecutivos em (a_n) que formam uma P.G.

- Sabendo que $a_1 = a_2 = 1$, obtém-se a_7 rapidamente a partir das seguintes iterações:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1 + a_2 = 2 \\ a_4 &= a_2 + a_3 = 3 \\ a_5 &= a_3 + a_4 = 5 \\ a_6 &= a_4 + a_5 = 8 \\ a_7 &= a_5 + a_6 = 13. \end{aligned}$$

  Como 13 é número primo, segue que a afirmação II é verdadeira.

- Sabendo que a soma de números de mesma paridade é par e que a soma de números de paridades diferentes é ímpar, ou seja, que

$$i + i = p + p = p \tag{4.2}$$

$$i + p = p + i = i \tag{4.3}$$

  e que os dois primeiros termos de (a_n) são ímpares, é claro que o terceiro é par.

$$(i,\ i,\ p,\ i,\ i, p,\ i, \cdots)$$

  Como um termo par é sucessor de um termo ímpar, os dois termos seguintes serão ímpares, pois resultam de $i + p$ e $p + i$. Portanto, o próximo par está três posições à frente. Dado que o primeiro par é o terceiro da lista, é verdade que todos os pares da sequência encontram-se na posição $3k$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, a afirmação III é verdadeira.

Assim, a resposta certa é a letra (D), apenas as afirmações II e III estão corretas.

Problema 4.14. *Determine uma relação de recorrência para o número de maneiras de formar palavras com n letras utilizando o alfabeto $\{A,\ B,\ C,\ D\}$ se as letras a e b não devem aparecer juntas?*

Solução: Esse é um exercício de combinação altamente complicado para um estudante que passou pelo ensino tradicional de análise combinatóra baseado no informe das definições de permutações, arranjos e combinações simples aplicados a exemplos modelos. Evidente que, não fossem as restrições, a resposta seria 4^n. Imagine, por exemplo, a impensável tarefa de eliminar todos os casos proibidos de 4^{100} palavras.

Começemos analisando os casos mais simples. Com $n = 1$ letra formam-se as 4 seguintes paravras: A, B, C e D. Com 2 letras, há duas palavras proibidas (AB e BA), com isso, a resposta é $2^4 - 2 = 14$.

Seja x_n a resposta do problema para uma quantidade qualquer n de letras, isto é, o número de palavras de n letras formadas com esse alfabeto tais que as letras A e B não aparecem juntas. Novas palavras são produzidas quando se acrescenta qualquer das letras do alfabeto à direita das x_n palavras anteriores. A quantidade de novas palavras que surgem depende se a letrar que será acrescentada é A (ou B) ou C (ou D):

- se a $(n+1)$-ésima posição for ocupada pela letra for C, teremos outras x_n palavras em que A e B não aparecem juntas. A quantidade é a mesma no caso em que essa posição é ocupada pela letra D.

- se a $(n+1)$-ésima posição for ocupada pela letra A, teremos x_{n-1} palavras em que A e B não aparecem juntas, pois a última das n primeiras letras pode ser A ou B mas a anterior a ela não. A quantidade é a mesma no caso em que essa posição é ocupada pela letra B.

Assim, a quantidade de palavras de tamanho $n+1$ é dada pela recorrência

$$\begin{cases} x_1 = 4,\ x_2 = 14 \\ x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n-1}, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

atendento ao que pede o problema.

Para um valor específico (e praticável) de n, a solução pode ser construída progressivamente com o auxílio de uma tabela. A Tabela 4 exibe os 8 primeiros termos da sequência (x_n).

Tabela 4 – Solução da recorrência.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
x_n	4	14	50	178	634	2 258	8 042	28 642

Fonte: elaborada pelo autor.

Problema 4.15. *Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a* $\{0, 1, 2\}$, *que possuem um número ímpar de termos iguais a zero?*

Solução: Seja x_n a solução do problema, isto é, o número de sequências com n termos pertencentes ao conjunto fornecido, com quantidade ímpar de termos iguais a zero. Acrescentando um novo termo ao final de cada uma dessas x_n sequências, formam-se sequências de tamanho $n+1$. Para determinar a quantidade de tais sequências deve-se pensar sobre os dois possíveis casos para o $(n+1)$-ésimo termo: o caso em que as sequências não terminam em zero e o caso em que as sequências terminam em zero.

- Se a sequência terminar em 1, formam-se x_n sequências de tamanho $n+1$ atendendo às condições do problema. O mesmo resultado ocorre quando $(n+1)$-ésimo termo é 2;

- Se o $(n+1)$-ésimo termo for 0, as sequências formadas pelos n termos anteriores devem possuir uma quantidade *par* de termos iguais a zero. A diferença, $3^n - x_n$, de todas as sequências de tamanho n pelas sequências de tamanho n que têm quantidade ímpar de termos iguais a zero, determina a quantidade de sequências de n termos com quantidade par de termos iguais a zero.

Assim,

$$x_{n+1} = 2x_n + (3^n - x_n)$$

ou, simplesmente,

$$x_{n+1} = x_n + 3^n.$$

Decorre que

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 3^1 \\ x_3 &= x_2 + 3^2 \\ x_4 &= y_3 + 3^3 \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Realizando essas somas, encontra-se

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k.$$

Note que $x_1 = 1$, pois, como 1 é ímpar, a única sequência válida é aquela formada pelo zero. Assim,

$$\begin{aligned} x_n &= 3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} \\ &= \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{3^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Problema 4.16. *Ache uma relação de recorrência e a solução correspondente para a_n, o número de sequências quinárias que contêm pelo menos um 2 e este 2 ocorre antes do primeiro 0, se houver 0's na sequência.*

Solução: Seja a_n a solução do problema, ou seja, o número de sequências de tamanho n formadas com os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ que contêm pelo menos um 2 e este 2 ocorre antes do primeiro zero, caso haja zeros.

Repare que nenhuma de tais sequências pode começar com 2, ou teríamos o primeiro 2 após este zero, contrariando as condições do enunciado.

No caso em que $n = 1$, a única sequência possível é a que contém o 2, ou seja, $a_1 = 1$. Vamos analisar o problema geral, dividindo-o em dois casos, conforme o primeiro termo seja 2 ou não:

- Caso o primeiro termo seja 1 ou 3 ou 4, as condições são atendidas devendo-se determinar agora, o número de sequências de tamanho $n-1$ formadas pelos 5 elementos do conjunto acima tais se tenha pelo menos um 2 e este dois deva estar antes do primeiro zero, quando houver zeros. Assim, para cada uma dessas três situações, a solução do problema é a_{n-1};

- A outra situação é quando o primeiro termo é 2. Nesse caso, os $n-1$ termos seguintes podem ser quaisquer dos elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Segue que a solução é 5^{n-1}.

Portanto,

$$a_n = 3a_{n-1} + 5^{n-1}. \tag{4.4}$$

Uma solução não nula de $a_n = 3a_{n-1}$ é $a_n = 3^{n-1}$. Substituindo $a_n = 3^{n-1}y_n$ na equação (4.4), encontra-se:

$$3^{n-1}y_n = 3 \cdot 3^{n-2}y_{n-1} + 5^{n-1} = 3^{n-1}y_{n-1} + 5^{n-1},$$

acarretando em

$$y_n = y_{n-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{5}{3} \\ y_3 &= y_2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ y_4 &= y_3 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando essas igualdades, encontra-se:

$$y_n = y_1 + \frac{5}{3} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Como $1 = a_1 = 3^0 \cdot y_1 = y_1$, segue que

$$y_n = \left(\frac{5}{3}\right)^0 + \left(\frac{5}{3}\right)^1 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{3}\right) - 1} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n - \frac{3}{2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo o resultado encontrado em (4.5) em $a_n = 3^{n-1}y_n$, encontra-se:

$$a_n = \frac{5^n}{2} - \frac{3^n}{2}.$$

Problema 4.17. *Quantos subconjuntos possui um conjunto de n elementos?*

Solução: Seja X_n a solução do problema, isto é, o total de subconjuntos que se pode formar com um conjunto de n elementos.

Se $n = 1$, há dois subconjuntos possíveis: o vazio e o unitário. Assim, $X_1 = 2$.

Imagine que uma pessoa está completando um conjunto inserindo um elemnto de cada vez, continuamente e que, cada vez que um novo elemento é acrescentado, essa pessoa faz uma lista de todos os subconjuntos possíveis. Suponha que quando o conjunto possui, exatamente, $n - 1$ elementos, seja possível formar X_{n-1} subconjuntos. Quando o n-ésimo elemento for trazido para o conjunto, todos os X_{n-1} subconjuntos da configuração anterior continuarão aparecendo, além disso, formam-se outros X_{n-1} subconjuntos quando o novo elemento comparece em cada um dos $n - 1$ subconjuntos da configuração anterior. Logo,

$$X_n = 2 \cdot X_{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{4.6}$$

Conforme foi mostrado no Capítulo 1, a recorrência de equação (4.6), refere-se a uma *progressão geométrica* de razão 2. Logo, $X_n = 2^{n-1} \cdot X_1$.

Portanto,

$$X_n = 2^n.$$

Problema 4.18. *Mônica e Fátima disputam uma série de partidas. Quem vence uma partida tem o direto de iniciar a partida seguinte. Não há empates e a probabilidade de uma partida ser ganha por quem iniciou é $0,6$. Se Mônica iniciou a primeira partida, qual á a probabilidade de Mônica vencer a n-ésima partida?*

Solução: Seja P_n a probabilidade de Mônica vencer a primeira partida. Como Mônica iniciou a primeira partida, segue que $P_1 = 0,6$.

Para Mônica vencer a n-ésima partida, ou ela vence a $(n-1)$-ésima partida com probabilidade P_{n-1} e vence a partida seguinte com probabilidade condicional de $0,6$, ou ela perde a partida anterior com probabilidade $1 - P_{n-1}$ para vencer a n-ésima partida com probabilidade de $0,4$. Assim,

$$P_n = 0,6 \cdot P_{n-1} + (1 - P_{n-1}) \cdot 0,4$$

ou ainda,

$$P_n = 0,2 \cdot P_{n-1} + 0,4. \tag{4.7}$$

A homogênea $P_n = 0,2 \cdot P_{n-1}$, tem solução é $0,2^{n-1}$. Substituindo $P_n = 0,2^{n-1}y_n$ na recorrência de equação (4.7), tem-se que:

$$0,2^{n-1} \cdot y_n = 0,2 \cdot 0,2^{n-2} \cdot y_{n-1} + 0,4 \Longrightarrow y_n = y_{n-1} + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}.$$

Além disso, ganha-se que $y_1 = 0,6$, visto que $P_1 = 0,6$ e $P_n = 0,2^{n-1}y_n$.

Segue que

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + \frac{0,4}{(0,2)^1}\\
y_3 &= y_2 + \frac{0,4}{(0,2)^2}\\
y_4 &= y_3 + \frac{0,4}{(0,2)^3}\\
&\vdots\\
y_n &= y_{n-1} + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Somando essas iguladades, encontra-se:

$$\begin{aligned}
y_n &= 0,6 + \frac{0,4}{(0,2)^1} + \frac{0,4}{(0,2)^2} + \frac{0,4}{(0,2)^3} + \cdots + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}\\
&= 0,6 + \frac{0,4}{0,2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{0,2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{0,2} - 1}\\
&= 0,6 + 2 \cdot \frac{(0,2)^{1-n} - 1}{4}\\
&= 0,6 + 0,5 \cdot (0,2)^{1-n} - 0,5.
\end{aligned}$$

A seguir, substitui-se o valor encontrado para y_n em P_n:

$$\begin{aligned}
P_n &= 0,2^{n-1} \cdot [0,6 + 0,5 \cdot (0,2)^{1-n} - 0,5]\\
P_n &= (0,5) + (0,1) \cdot (0,2)^{n-1}\\
P_n &= (0,5) + (0,5) \cdot (0,2) \cdot (0,2)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$P_n = 0,5 \cdot (0,2^n + 1).$$

Considerações Finais

Não é de hoje que, apesar de seus esforços, os professores de matemática têm percebido muita dificuldade em grande parte dos alunos para acompanharem a disciplina, mais ainda diante de exercícios que exigem interpretação e modelagem. Desse modo, pôde-se, através deste trabalho, refletir sobre o modelo de ensino de matemática empregado nas escolas e verificar se a valorização do raciocínio recursivo, até então ignorado pela maior parte da literatura conforme se constatou, pode, de fato, facilitar o entendimento e resolução de certos problemas.

A realização deste trabalho possibilitou analisar diversos livros didáticos de matemática do Ensino Médio, onde verificou-se que o ensino (e a resolução) de problemas ligados a temas cujos resultados são termos de alguma sequência numérica, em sua maioria, induzem o aluno a identificar uma fórmula que resolva o problema tornando o processo mecanizado e pouco eficiente, uma vez que não leva o aluno à reflexão e a avaliar possibilidades.

Diferente do que fazem pensar os autores de Ensino Médio, as sequências numéricas com características recorrentes não estão presentes apenas nas progressões, mas em algumas funções tais como as lineares, afins e exponenciais (desde que tenham domínio sobre os naturais), bem como em análise combinatória, probabilidade, matemática financeira e até geometria. Daí, a importância de se dar um tratamento mais cuidadoso ao estudo das sequências não com o intuito de mostrar todas as fórmulas e propriedades que regem as mesmas, mas de fazer com que os alunos reflitam sobre a disposição dos termos, quantidade, como eles se relacionam e, a partir dessa análise, obter propriedades gerais e deduzir fórmulas. Conforme mostrado no Capítulo 2, uma maneira eficaz de introduzir esse assunto é através dos números poligonais e dos fractais.

De certo, não há razões para não se aplicar o raciocínio recursivo no Ensino Médio, pois essa é a forma mais natural de estudar problemas originalmente recorrentes e não requer conhecimento além do que é necessário até essa etapa. Além do mais, o aluno passa a ser mais seguro de suas decisões e aprende mais e melhor, pois torna-se capaz de pensar (também) sobre problemas não idênticos aos aos modelos que ele já conhece. As respostas tornam-se fundamentadas, pois não são produto de "fórmulas mágicas" que o aluno apenas decorou, tais fórmulas passam a ter significado. Essas ideias tornaram-se mais claras durante a construção do Capítulo 4.

Espera-se que este trabalho possa ajudar a despertar novas paixões pela matemática e colaborar para formar gerações mais habilidosas em analisar e resolver problemas recursivos de qualquer natureza.

Referências

BRASIL. **Orientções curriculares nacionais para o ensino médio, V2**. Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática**, v 1.1 ed.São Paulo: SM, 2016.

DANTE, Luiz Roberto.**Matemática: Contexto & Aplicações**, v1. 3.ed. São Paulo: Ática, 2017.

DUARTE, Gustavo Ignácio; SILVA, Daniel Romão. **Números poligonais como introdução ao estudo de sequências**, 2014. Disponível em: <http://falandodematematica.weebly.com/ensino-meacutedio>. Acesso em : 30/12/2017.

FLOOD, Raymond; WILSON, Robin. **Os Grande Matemáticos: as descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos.** São Paulo, M.Books, 2013.

IEZZI, Gelson; et. al.**MATEMÁTICA: Ciência e aplicações**, volume 1. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, E. L; et al. **A Matemática do Ensino Médio, Volume 2**. Coleção do Professor de Matemática. Ed.SBM: 6.ed - Rio de Janeiro, 2006.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc.**Teoria e Problemas de MATEMÁTICA DISCRETA.** 2 ed. Porto Alegre: ARTMED, 2004.

MOREIRA, Carlos Gustavo. Sequências Recorrentes. Revista da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina, Florianópolis, n. 4, p. 53 - 69, 2007.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar. **MATEMÁTICA DISCRETA, Coleção PROFMAT.** 2ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2015.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila. **Progressões e matemática Financeira.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: Combinatória.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino; CARNEIRO, Manoel Leite. **Coleção Elementos da Matemática, 3: Sequências, Análise Combinatória, Matriz.** 3ed, Fortaleza, Editora VestSeller- 2010.

QUARESMA, Inês M. M. C. ; OLIVEIRA, Jorge M. D. M.; FARIA, Paula C. R. P. **Floco de Neve e Curva de Von Koch.** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/koch.htm>. Acesso em: 25/09/2017.

ROSEN, Kenneth H. **matemática discreta e suas aplicações**- 6. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

SANTOS, José Plínio; MELLO, Margarida; MURARI, Idani Calzolari. **Introdução à Análise Combinatória**, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007

SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria analítica v.1**. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.