UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MARANHÃO - UEMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO - PPG

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Cálculo Diferencial e Integral: Uma Abordagem no Ensino Médio

Jálio Araújo da Silva

São Luís - MA
2019

Cálculo Diferencial e Integral: Uma Abordagem no Ensino Médio

Jálio Araújo da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao departamento de Matematica como requisito parcial para obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus.

São Luís - MA
2019

Cálculo Diferencial e Integral: Uma Abordagem no Ensino Médio

Jálio Araújo da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao departamento de Matematica como requisito parcial para obtenção do título de mestre.
Orientador: Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus.

Aprovada em: 28 de Fevereiro de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sergio Nolêto Turibus - UEMA
Orientador

Prof. Dr. Raimundo J. Barbosa Brandão - UEMA

Prof. Dr. Raimundo Luna Neres - UFMA

São Luís - MA
2019

Silva, Jálio Araújo da
Cálculo diferencial e integral: Uma abordagem no ensino médio /
Jálio Araújo da Silva. - São Luís, 2019.

...46 páginas

Dissertação (mestrado) - Curso de Matemática,
Universidade Estadual do Maranhão, 2019.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Nolêto Turibus.

1.Cálculo diferencial 2.Cálculo integral 3.Ensino médio I.Título

CDU 517.2/.3:373.5

Dedico essa dissertação a minha esposa e aos meus filhos que sempre estiveram do meu lado, nos momentos mais alegres e difíceis desta trajetória. Amo vocês.

Agradecimentos

Agradeço imensamente a DEUS pelo dom da vida, e por permitir que eu pudesse ingressar e concluir este mestrado.

À minha esposa JULIANA SOUSA, por ter me apoiado em todos os dias, por ter tido paciência e por sempre mim incentivar a crescer profissionalmente colaborando nos estudos. Momentos esses que serei grato por toda vida.

Agradeço em especial aos meus filhos, EXPEDITO JÁLIO, HELENA LAURA e BENÍCIO JÁLIO que foram e sempre serão os motivos do meu crescer. Amo muito vocês.

Agradeço à minha mãe e ao meu pai, MARIA ARAÚJO e COSME DAMIÃO pela luta de acreditar nos filhos, sempre enfrentando as dificuldades financeiras para que pudéssemos estudar.

Aos meus irmãos por sempre depositar confiança em mim.

Agradeço aos meus professores do mestrado PROFMAT/UEMA em especial ao coordenador profº Dr. João Coelho, que sempre esteve do nosso lado nos auxiliando em todo momento do curso.

Aos colegas que se tornaram amigos, pela paciência nas brincadeiras e por sempre ajudar nos momentos difíceis do curso.

Agradeço imensamente ao meu orientador Dr. SÉRGIO NOLÊTO TURIBUS, por ter aceitado me orientar, por ter me proporcionado essa amizade e por sempre ter a paciência nos momentos difíceis desta dissertação.

Agradeço a CAPES pela ajuda financeira.

RESUMO

Com a sistematização dos ingressos dos estudantes nas universidades através do ENEM, muitas escolas procuram trabalhar o tempo gasto do discente na resolução de questões. E, porque não utilizar o cálculo? Os educadores, em geral, possuem dificuldades em lidar com o cálculo, e suas diversas aplicações? Com isso, o Cálculo Diferencial e Integral, é uma ferramenta importantíssima para algumas resoluções de exercícios no âmbito da Matemática e Física. Este trabalho consiste na utilização do Cálculo Diferencial e Integral para mostrar aos alunos que é uma ferramenta otimizada em alguns casos e essencial para a vida como estudante seja ensino médio ou como universitário. Utilizamos o Instituto federal do Maranhão campus Santa Inês, como o centro da pesquisa, nele foi feita uma explanação da definição de limites, derivadas e integrais com suas respectivas propriedades. Acreditamos ser possível propor melhorias sobre os benefícios da inserção do cálculo já no ensino médio. Espera-se que este trabalho estimule os educadores e educandos, sobre os desafios do ensino de forma mais significativa, e de novas abordagens no "cotidiano" das aulas.

Palavras Chave: Cálculo Diferencial e Integral, Ensino Médio.

ABSTRACT

With the systematization of students' admission to universities through ENEM, many schools seek to work the student's time spent in solving questions. And, why not use the calculus? Do educators, in general, have difficulties in dealing with calculus, and its various applications? With this, the Differential and Integral Calculus, is a very important tool for some resolutions of exercises in the scope of Mathematics and Physics. This work consists in the use of Differential and Integral Calculus to show to the students that it is an optimized tool in some cases and essential for the student's life as a high school or college student. We used the Federal Institute of Maranhão Santa Ines campus, as the center of the research, in which it was made an explanation of the definition of limits, derived and integral with their respective properties. We believe it is possible to propose improvements on the benefits of inserting the calculus already in high school. It is hoped that this work will stimulate educators and learners about the challenges of teaching in a more meaningful way, and new approaches in the "everyday"of classes.

Keywords: Differential and Integral Calculus, high school .

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

INTRODUÇÃO

Considerando-se as dificuldades com que alunos egressos do Ensino Básico se deparam ao ingressar em um curso de Cálculo no Ensino Superior, buscou-se, por meio dessa pesquisa, refletir a respeito de possíveis maneiras de amenizar tais dificuldades e proporcionar ao aluno uma transição mais tranquila da educação básica para a universidade e torná-lo melhor preparado para trabalhar com os objetos do Cálculo.

Realizou-se uma pesquisa bibliográfica, estudando desde as origens históricas do Cálculo para compreender como se deu o processo de desenvolvimento desse campo de conhecimento e como se pode, com inspiração na história, buscar meios que possam auxiliar no ensino e na aprendizagem do Cálculo.

Buscou-se também, analisar alguns dos fatores vinculados às dificuldades enfrentadas pelos estudantes em um curso de Cálculo e quais os principais erros cometidos pelos mesmos.

Foram criadas situações de aprendizagem, para serem trabalhadas ainda no Ensino Médio, abordando noções relacionadas aos conceitos de limite, derivada e integral. Tais situações foram criadas visando trabalhar com tais objetos matemáticos de maneira intuitiva, deixando a formalização dos mesmos de acordo com a linguagem e o rigor simbólico-formal da Matemática para o Ensino Superior.

O objetivo de se propor para alunos do Ensino Médio situações como as desenvolvidas é dar aos mesmos condições para que eles comecem a compreender à aplicação e a importância de alguns conceitos fundamentais do Cálculo por meio de problemas contextualizados e interdisciplinares.

Os matemáticos só conseguiram chegar ao conceito de função, tal como o entendemos hoje, depois de um longo período de evolução do cálculo, cerca de século e meio. As funções iam aparecendo na formulação e tratamento dos problemas; primeiro funções simples, como os polinômios ou as que deles se obtêm por operações algébricas, depois a função logarítmica, a exponencial, as funções trigonométricas, etc.

Aos poucos funções mais complicadas, dadas por séries ou integrais, também apareceram naturalmente, na tentativa de resolver equações diferenciais surgidas na formulação de problemas de Mecânica, condução do calor, em Mecânica celeste, etc. Foi ao longo dessa lenta maturação que se foi reconhecendo a importância do conceito de função. É importante justamente porque com ele era possível formular e resolver problemas, o que exigia derivar e integrar funções, desenvolvê-las em séries infinitas, etc.

Portanto para podermos mostrar ao aluno a importância do conceito de função, temos de ensinar-lhe os conceitos de derivada e integral, e, para que servem esses conceitos.

À medida que vamos avançando com a apresentação de ideias, com o desenvolvimento de métodos relevantes no tratamento de problemas significativos, aí sim, vão surgindo, a cada passo, gradativamente, a necessidade de definições novas, e dessa maneira o ensino pode tornar-se interessante, o aluno se sentirá estimulado porque entende a razão de ser do que está aprendendo.

Embora não pretendamos dar uma resposta definitiva a essas perguntas, estamos convencidos de que as ideias presentes no estudo do Cálculo não são de difícil assimilação. Ao contrário, são passíveis de serem compreendidas pelos estudantes da Escola Básica, desde que estejam inseridas em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade.

Este trabalho esta organizado de forma sucinta a proporcionar uma visão geral, na segunda seção mostramos aos alunos um contexto histórico do cálculo diferencial e integral, os estudiosos que difundiram o cálculo para a sociedade. Analisamos o comportamento de uma função de acordo com as possíveis variações em valores de seu domínio, introduzindo, assim, a noção intuitiva de limite. No que diz respeito ao conteúdo de derivada, trabalhamos o conhecimento de velocidade média e velocidade instantânea, aliando-o ao estudo de reta tangente ao gráfico de uma função em um determinado ponto, por meio da análise e interpretação do coeficiente angular dessa reta. Para o cálculo Integral foi trazida a proposta da área abaixo do gráfico de uma função positiva, limitada pelo eixo das abscissas e por retas verticais com o auxílio do software de geometria dinâmica.

A terceira seção apresenta uma visão do funcionamento no estudo do cálculo segundo alguns pesquisadores. A ideia de se colocar de forma gradativa o cálculo no ensino básico, dando um pensamento crítico a este estudo.

A quarta seção nos remete ao início da pesquisa contemplando turmas do ensino médio do IFMA - Instituto Federal do Maranhão, campus Santa Inês, onde puderam contribuir com os questionamentos e participação com o processo de ensino aprendizagem a que eles foram submetidos. De forma que os alunos não foram colocados à prova de maturidade para entenderem o Cálculo como é visto nos cursos superiores, mas acredito na possibilidade de integração dos seus conceitos com os tópicos estudados no ensino médio.

Já na seção 5 são apresentados as considerações finais com a perspectiva de que o trabalho venha a influenciar no âmbito do meu local de serviço. Os demais relacionam a bibliografia consultada e os apêndices em geral.

2 O CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

2.1 UMA BREVE IDEIA DO CÁLCULO

O Cálculo integral e diferencial é um instrumento natural e poderoso para atacar uma variedade de problemas que aparecem na Física, Astronomia, Engenharia, Química, Geologia, Biologia e outros campos. É uma compilação de ideias atraentes e excitantes, que interessaram o pensamento humano durante séculos. Estas ideias estão relacionadas com velocidade, área, volume, taxa de crescimento, continuidade e com outros conceitos dizendo respeito a uma variedade de domínios.

A origem do cálculo integral remonta a mais de 2000 anos, quando os gregos tentavam resolver o problema da determinação de áreas por um processo que designaram de "método de exaustão", que de maneira elementar era assim descrito: dada uma região cuja área pretende determinar-se, inscrevemos nela uma região poligonal que se aproxime da região dada e cuja área seja de cálculo fácil, e continuamente fazemos o mesmo processo tomando linhas poligonais com cada vez maior número de lados, de modo a cobrir a região dada.

Figura 1: Método de exaustão

Fonte: Internet

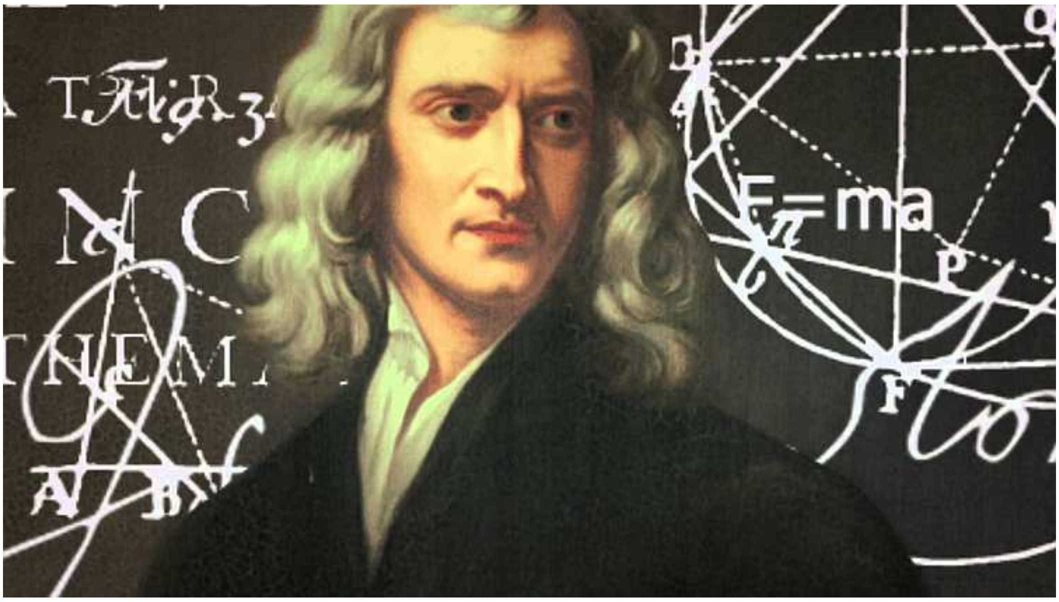
Gradualmente, o método de exaustão foi transformado no que hoje se designa por cálculo integral, nova e poderosa disciplina com uma grande variedade de aplicações.

Newton tornou-se o efetivo inventor do cálculo, porque foi capaz de explorar a relação inversa entre inclinação e área através de sua nova análise infinita. Mais durante este mesmo tempo em 1673, Leibniz percebeu que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abcissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que forma a área. Leibniz sempre teve uma percepção aguda ao pensamento, e sua escolha no caso do cálculo foi particularmente feliz.

Newton e Leibniz, independentemente um do outro, foram largamente responsáveis pelo desenvolvimento das ideias do cálculo integral, a tal ponto que problemas até ai irresolúveis passaram a ser resolvidos por métodos mais ou menos rotineiros. A auspiciosa realização destes homens foi devida principalmente ao fato de terem sido capazes de fundir cálculo integral com o segundo ramo importante do cálculo, o cálculo diferencial.

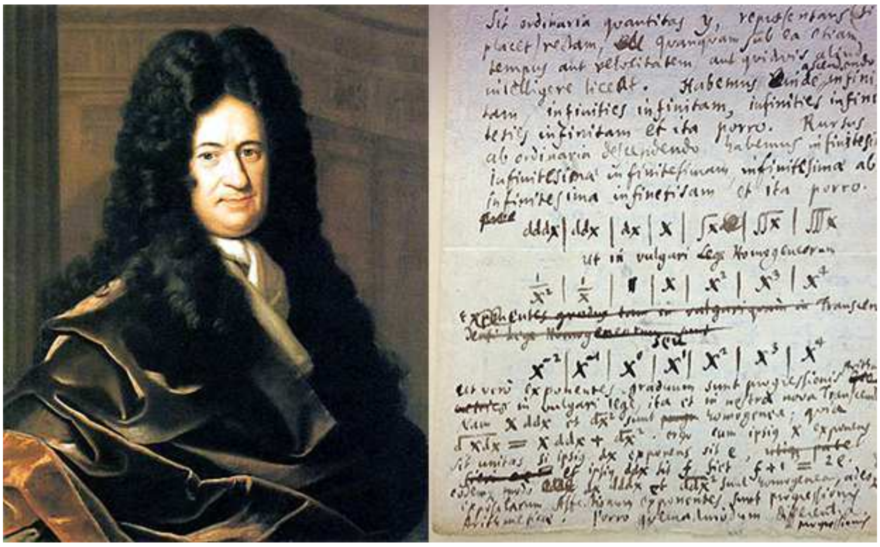
Contudo Newton e Leibniz foram os primeiros a compreender a verdadeira importância desta relação e a explorá-la tão completamente que iniciaram uma era sem precedente no desenvolvimento da matemática. Foi Leibniz que definiu as notações de derivadas e de integral que usamos até hoje.

Figura 2: Isaac Newton



Fonte: biografiaresumida.com

Figura 3: Gottfried Leibniz



Fonte: blog.wolfran.com

O cálculo diferencial permite que as pessoas definam os coeficientes angulares de curvas, calculem grandezas como a velocidade e a aceleração de corpos em movimento e determinem os ângulos. Além disso permite o cálculo de regiões irregulares no plano, a medida o comprimento de curvas e determinam o volume e massa de sólidos arbitrários.

Possuímos três ramificações no estudo do cálculo, operações de base para a compreensão. São elas, o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais.

2.2 CÁLCULO DE LIMITES

Definição: Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é L escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1}$$

Se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ se então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0;\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

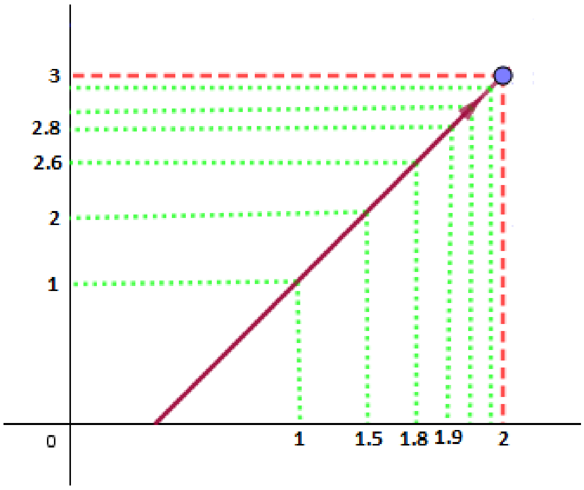
Exemplo 1: Seja f uma função de $[\frac{1}{2}, +\infty)$ em R definida por $f(x) = 2x - 1$, vejamos o que acontece quando atribuímos valores a x próximos do número 2, ou seja, vamos atribuir valores tão próximos de 2 tanto inferiores como superiores.

- Atribuindo valores menores que 2 na função:

Tabela 1: Valores menores que 2.

x	$f(x)$
1	1
1.5	2
1.8	2.6
1.9	2.8
1.99	2.98
1.999	2.998

Figura 4: Gráfico da Função valores menores que 2



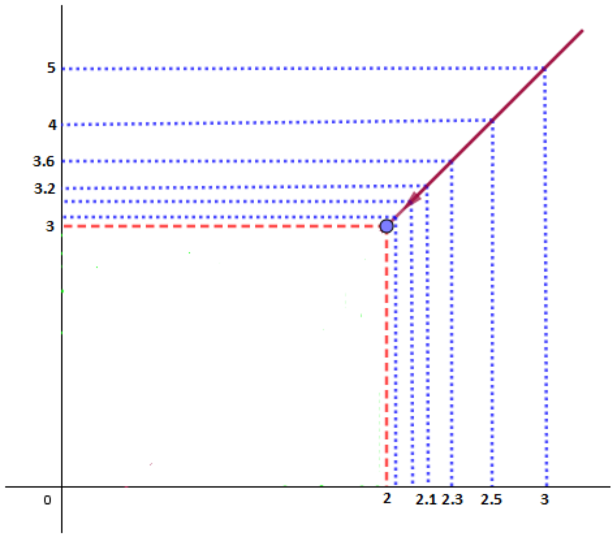
Fonte: Próprio Autor

- Atribuindo valores maiores que 2 na função:

Tabela 2: Valores maiores que 2.

x	$f(x)$
3	5
2.5	4
2.3	3.6
2.1	3.2
2.01	3.02
2.001	3.002

Figura 5: Gráfico da Função valores maiores que 2



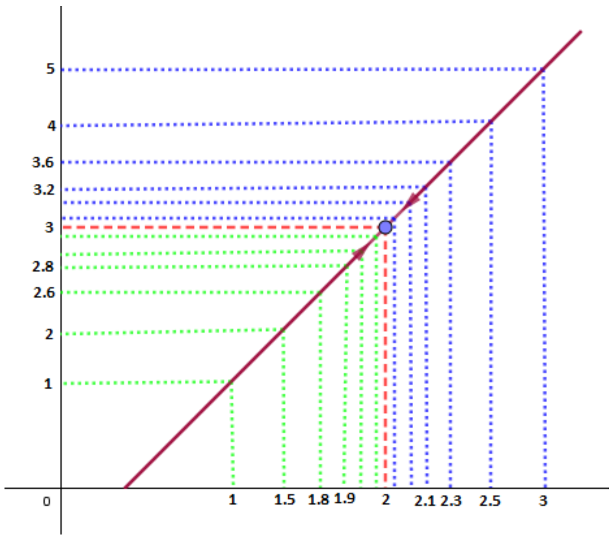
Fonte: Próprio Autor

Portanto é perceptível que a função tende a se aproximar cada vez mais da ordenada 3.

> Quantidades, e as razões de quantidades, que em qualquer tempo finito convergem continuamente à igualdade, e antes do fim desse tempo se aproximam mais uma da outra que por qualquer diferença dada, se tornam finalmente iguais.(Newton, 1687)

Assim, pelo exemplo dado. É importante ter sempre em mente que no cálculo interessa o comportamento da função próximo do ponto e não no próprio ponto.

Figura 6: Gráfico da Função valores maiores e menores que 2



Fonte: Próprio Autor

2.2.1 Propriedades dos limites

Se $f(x)$ e $g(x)$ existem, então:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a}[kf(x)] = k\lim_{x\to a} f(x) \; para \; qualquer \; valor \; de \; k \tag{4}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)] \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \; se \lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \tag{6}$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^p = \lim_{x\to a}[f(x)]^p \; se \lim_{x\to a}[f(x)]^p \; existe \tag{7}$$

Em outras palavras, o limite de uma soma, de uma diferença, de um múltiplo, de um produto, de um quociente e de uma potência é a soma, diferença, múltiplo, produto, quociente e potência dos limites individuais, contanto que todas as expressões envolvidas sejam definidas.

Exemplo 2: Calcule $\lim_{x\to 0}\dfrac{(3x^3-8)}{(x-2)}$

O exemplo dado, estar na forma das propriedade 6, logo utilizando propriedades 7 e 3, temos:

Como $\lim_{x\to 0}(x-2) \neq 0$, podemos usar a propriedade de que o limite do quociente é igual ao quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3x^3-8)}{(x-2)} = \frac{\lim_{x\to a}(3x^3-8)}{\lim_{x\to a}(x-2)} = \frac{3\lim_{x\to 0} x^3 - \lim_{x\to 0} 8}{\lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 2} = \frac{-8}{-4} = 4$$

2.3 CÁLCULO DE DERIVADAS DE FUNÇÕES

Definição: A derivada da função $f(x)$ em relação a x é a função $f'(x)$ (lê: "f linha de x ") dada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{8}$$

e o processo de calcular a derivada é chamado de **derivação**. Dizemos que uma função $f(x)$ é **derivável** no ponto a se $f(a)$ existe (ou seja, se o limite do quociente-diferença existe no ponto $x = a$).

Exemplo 1: Calcule a derivada da função f definida por $f(x) = x^3$.

De acordo com a definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} =$$

$\lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas explicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à cinemática. Não há dificuldades no estudo de movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como *velocidade instantânea*. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo 2: Determinar a velocidade de um projétil lançado do solo, verticalmente, em cada instante do seu movimento. Sabendo que sua velocidade inicial é de $144m/s$, desprezando o atrito e admitindo que o projétil está sujeito unicamente à ação da gravidade, de tal modo que ele se move para cima e para baixo ao longo de uma reta, sendo assim $f(t)$ a altura e t o tempo; Descritos pela fórmula $f(t) = 144t - 16t^2$, ou seja $0 \leq t \leq 9$.

Solução: Para o fazer, introduzimos em primeiro lugar a noção de velocidade média durante um intervalo de tempo, por exemplo de t a $t + h$ definida assim pelo quociente

$$\frac{\textit{variação da distância no intervalo de tempo}}{\textit{medida do intervalo de tempo}} = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}, h \neq 0$$

Consideremos o instante $t = 2$.

$f(2) = 288 - 64 = 224$

Para instante $t = 2 + h$ $f(2 + h) = 144(2 + h) - 16(2 + h)^2 = 224 + 8h - 16h^2$

Portanto a velocidade média durante o intervalo de $t = 2$ a $t = 2 + h$ é

Quando tomamos valores de com cada vez menor valor absoluto esta velocidade média aproxima-se cada vez mais de 80.

Tabela 3: Valores próximos de 80.

h	$velocidademdia$
0,1	78,4
0,001	79,984
0,00001	79,99984
0,000001	80,00016

Por outras palavras, a velocidade média aproxima-se de 80 como limite quando h tende para zero. Parece natural chamar este valor limite a *velocidade instantânea* no instante $t = 2$

O mesmo tipo de cálculo pode ser efetuado para outro instante. A velocidade média para um intervalo de tempo arbitrário de t a $t + h$ é dada pelo quociente.

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{[144(t+h) - 16(t+h)^2] - [144t - 16t^2]}{h} = 144 - 32t - 16h$$

Quando h tende para zero a expressão do segundo membro tende para $144 - 32t$ e este limite define a velocidade *instantânea* no instante $v(t) = 144 - 32t$.

2.3.1 Derivadas das funções elementares

A. Derivada da função constante:

$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

B. Derivada da função potência:

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

C. Derivada da função seno:

$f(x) = senx \Rightarrow f'(x) = cosx$

D. Derivada da função cosseno:

$f(x) = cosx \Rightarrow f'(x) = -senx$

E. Derivada da função exponencial:

$f(x) = a^x$ $(a > 0$ e $a \neq 1) \Rightarrow f'(x) = a^x lna$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$

E, em caso particular da função exponencial de base e , temos:
$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$ onde e é o número neperiano.

2.3.2 Regras de derivação

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$ duas funções deriváveis:

- Regra da SOMA.

  $s(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow s'(x) = f'(x) + g'(x)$

- Regra do PRODUTO.

  $p(x) = f(x).g(x) \Rightarrow p'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

- Regra do QUOCIENTE.

  $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow q'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Exemplo 3: O lucro obtido com a venda de unidades de um certo produto é dado por
$p(x) = \dfrac{-x^3 + 27x^2 + 160x + 7}{x + 5}$ mil reais. Qual é a taxa de variação do lucro em relação às vendas para $x = 2$?

Solução

$$p'(x) = \frac{(-x^3 + 27x^2 + 160x + 7)'(x + 5) - (-x^3 + 27x^2 + 160x + 7)(x + 5)'}{[x + 5]^2} =$$
$$\frac{(-x^3 + 27x^2 + 160)(x + 5) - (-x^3 + 27x^2 + 160x + 7)(1)}{[x + 5]^2}$$

Para $x = 2$, temos:

$$p'(2) = \frac{(-3.2^2 + 54.2 + 160)(2 + 5) - (-2^3 + 27.2^2 + 160.2 + 7)}{[2 + 5]^2} = 27857$$

2.4 INTEGRAL DE DIFERENCIAIS

Definição: Consideremos f contínua e não negativa em $[a, b]$. O número

$$A = \int_a^b f(x)dx \tag{9}$$

representa a área A sob o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

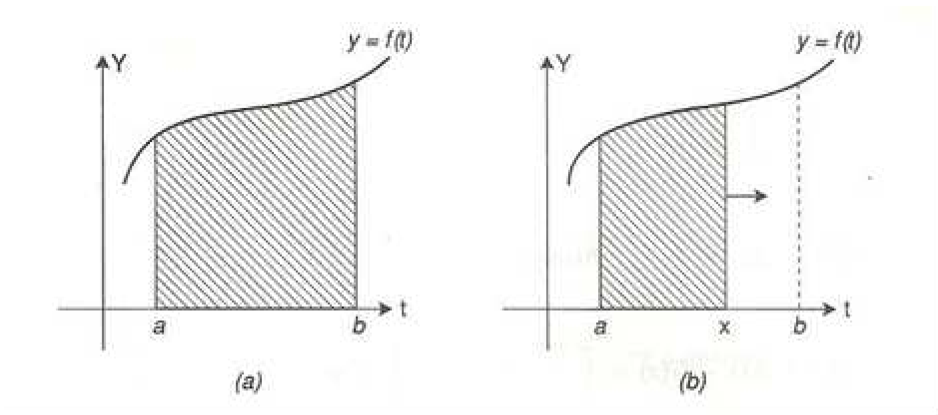
Observação 1: Naturalmente, a letra que representa a variável independente pode ser escolhida arbitrariamente, e considera-se que:

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \ldots etc.$$

"Em muitos problemas, a derivada de uma função é conhecida e o objetivo é encontrar a própria função. Por exemplo, um sociólogo que conhece a taxa de aumento da população pode estar interessado em usar essa informação para prever qual será a população em algum instante futuro; um físico que conhece a velocidade de um corpo em movimento pode querer calcular a posição do corpo em um momento futuro; um economista que conhece o índice de inflação pode querer estimar os preços em um instante futuro."

O processo de obter uma função a partir de sua derivada é chamado de *antiderivação* ou integração indefinida.

Figura 7: Gráfico de uma Integral



Fonte: Apostila de cálculo 1 (Mecatrônica)

2.4.1 Integral indefinida

Vamos representar a família de todas as antiderivadas de $f(x)$ usando o símbolo $\int f(x)dx = F(x) + C$ que é chamado de **integral indefinida** de f.

Neste contexto, o símbolo $\int$ é chamado de **sinal de integração**, a função $f(x)$ é chamada de **Integrando**, o símbolo dx indica que a antiderivada deve ser calculada em relação à variável x e o termo C é conhecido como **constante de integração**. Por exemplo, a integral indefinida da função $f(x) = 3x^2$ é $\int 3x^2 dx = x^3 + C$

2.4.2 Regras para Integrar Funções Comuns

- Regra da CONSTANTE.

  $\int kdx = kx + C$ para k constante

- Regra do POTÊNCIA.

  $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ para qualquer $n \neq -1$

- Regra do LOGARÍTIMO.

  $\int \dfrac{1}{x}dx = ln|x| + C$ para qualquer $x \neq 0$

- Regra da EXPONENCIAL.

  $\int e^{kx}dx = \dfrac{1}{k}e^{kx}e^{kx} + C$ para k constante $\neq 0$

Exemplo 1: Determine as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int 3dx$

Solução: Como $k = 3$ então $\int 3dx = 3x + C$

b) $\int x^{17}dx$

Solução: Como $n = 17$ então $\int x^{17}dx = \dfrac{x^{18}}{18} + C$

c)$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

Solução: Como $n = -\dfrac{1}{2}$ e, $n + 1 = \dfrac{1}{2}$ então $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

d) $\int e^{-3x}dx$

Solução: Como $k = 3$ então $\int e^{-3x}dx = \dfrac{1}{(-3)}e^{-3x} + C$

Este exemplo mostra como algumas funções simples podem ser integradas, mas o que fazer no caso de combinações de funções, como o polinômio $x^5 + 2x^3 + 7$ ou uma expressão como $5e^{-x} + \sqrt{x}$? As regras algébricas a seguir permitem lidar facilmente com essas expressões:

2.4.3 Regras Algébricas para Integração Indefinida

- Regra da multiplicação por uma constante:

  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ para k constante

- Regra da soma:

  $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

- Regra da diferença:

  $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3 O ESTUDO DO CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

3.1 ASPECTOS DO CÁLCULO NO ENSINO BÁSICO

O ensino básico no Brasil, sofre uma mudança grandiosa, tanto em relação aos próprios professores como em relação às regiões. Existe uma diferença grotesca entre o ensino da matemática nas escolas particulares como nas escolas públicas. Isto se olharmos somente em uma microrregião. A lei existe para todos, mais nem sempre é cumprida, relato este que podemos verificar como exemplo os vestibulares tradicionais antes de tudo vejamos a necessidade de cotas, pois como algo importante e grandioso para os estudantes, tenta equiparar o déficit que existe nas instituições públicas.

Como pode um aluno de escola pública que sofre com greves, desestimulo profissional do educador, começar a olhar a matemática com um olho clínico de superação, grandiosidade como uma ciência que só tem a oferecer, concorrer com alunos de escolas renomadas, ou até mesmo somente particular mas que não sofrem com greves, e onde têm-se um plano a cumprir.

Então o cálculo como ferramenta nova, e de uma perfeição com a prática é um grande obstáculo para as ideias de renovação do ensino básico. A matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O Cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático.

É muito usual afirmar-se no meio acadêmico que o ensino básico de matemática é (ou pelo menos deveria ser) processado em três vias: a via da aritmética, a via da geometria e a via da álgebra. Uma pergunta que surge naturalmente dessa questão é “cadê a via do Cálculo?”. No entanto, pode-se dizer que: o que se quer aqui está muito além de simplesmente construir a quarta via: a via do Cálculo. O que se quer, isto sim, é possibilitar ao Cálculo exercer no ensino básico de matemática o mesmo papel epistemológico que ele realizou no processo de construção do conhecimento matemático no âmbito científico. Só que para que isto ocorra será também necessária uma articulação do ensino de matemática com outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a física, mais precisamente, a mecânica. Desse modo, as três vias – a da aritmética (número), a da geometria (medida) e a da álgebra (variável) – juntas com a via da mecânica (movimento), devem ser articuladas e tecidas a partir das ideias e problemas construtores do Cálculo em benefício, não só de uma preparação de natureza epistemológica para um futuro ensino superior de Cálculo, mas, sobretudo, para a consolidação e construção das significações propostas no ensino básico tanto de matemática quanto de física.

Por outro lado, é notório que estão presentes alguns resultados do Cálculo no ensino básico de matemática: cálculo de áreas de círculos e de volumes de sólidos de revolução, soma de uma progressão geométrica infinita, representação decimal dos números reais etc. O que não está presente é o Cálculo. As ideias e as soluções dos problemas do Cálculo estão, como já afirmamos, submersas, escondidas, e os seus resultados são na maioria das vezes ensinados de forma camuflada: a área do círculo e a soma de uma progressão geométrica infinita tornam-se simplesmente fórmulas algébricas, a transformação das dízimas periódicas em frações é realizada por uma regra da aritmética etc.

> A proposta pedagógica (...) É projeto, posto que, se lança no futuro, efetuando-se no próprio lançamento, ou seja, atualizando-se enquanto força propulsora, enquanto energia que faz surgir, estabelecer-se e continuar sendo no próprio processo do ser e do vir-a-ser. (Bicudo 1993, p.21)

Assim, para essa emersão e preparação do Cálculo no ensino básico, duas linhas diretrizes se constituem naturalmente: o problema da variabilidade e o problema da medida – que são, efetivamente, as questões fundamentais do Cálculo. Há de se ressaltar, entretanto, que no problema da medida existem propriamente dois problemas distintos e intrinsecamente relacionados: o processo geométrico da medida (procedimento de cálculo de áreas e volumes) e o processo aritmético da medida (o valor numérico da medida, o número real). Em (Rezende, 2003) são explicitados alguns dos conteúdos próprios de cada uma dessas linhas de inserção do Cálculo no ensino básico, bem como algumas sugestões de atividades didáticas de emersão de suas ideias e problemas construtores.

3.2 ENSINAR CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Como ensinar e porque não ensinamos cálculo diferencial e integral no ensino médio? Talvez o conteúdo seja muito difícil, ou então as escolas não estão cobrando aos seus docentes? Nas reuniões pedagógicas, procura-se entender mais os problemas que aconteceram e entanto têm-se uma iniciativa de mudar durante o corrente ano, mais isso se restringi à relação (professor x aluno), e como (aluno x escola). Mais a ação pedagógica deve sim entrar no contexto da educação, com críticas e reflexões sobre os processos abordados. Como fazer isso?

Estas são as questões que serão tratadas aqui. O tema é importante e deve merecer a atenção de quem se ocupa do ensino médio direta ou indiretamente.

Não é muito comentado mais há anos atrás! -, lá para os anos de 1950 entrando em 1960 houve uma grande e relativa mudança no ensino da matemática , (mais pelos motivos das coisas que acontecia no exterior). O nome do movimento era *Matemática Moderna*, com isso entramos numa dinâmica onde o formalismo excessivo foi introduzido com ideias de retirar importantes capítulos do ensino como exemplo o próprio cálculo e a geometria.

- Esta reforma foi boa?

- Não! pode ter sido muito prejudicial, pois as universidades, receberam alunos que não estavam preparados para uma dinâmica mais voltada para pesquisa, - Não, claro que não, os professores se acostumaram a fazer atividades muito "mastigadas", ou seja, como a ser relatado mais a frente, um assunto de função passou a tomar todo o espaço do 1^0 ano do ensino médio, onde sabemos que este espaço poderia ser melhor trabalhado.

Mais no Brasil ainda foi-se utilizado o cálculo no ensino médio, a editora FTD introduziu no mercado o livro **MATEMÁTICA aula por aula** dos autores Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva publicado em 1998, onde consta o estudo dos limites, derivadas e noções de integral, o porquê de não ter saído mais exemplares, talvez seja o fato das reformas no ensino, deixando o cálculo diferencial e integral somente para o uso no Ensino superior.

Alguns países perceberam que o cálculo é efetivamente necessário para o ensino médio, dentro de suas reformas não mexeram na matemática para acomodar, e sim para preparar seus alunos para um ensino superior voltado para pesquisa, talvez seja pedir muito, mais a necessidade é óbvia. Sistema que produzam, conteúdos que efetivamente tragam uma realidade maior aos educados.

3.3 O PORQUÊ DO CÁLCULO

O estudo do cálculo estar literalmente inserido nos cursos de exatas, mesmo assim pesquisas nas áreas biológicas(saúde) são realizadas concomitantemente com estudo do cálculo, então porquê não inseri-lo no ensino básico e sim somente deixar a caso do ensino superior.

> A educação é um ato de amor e, portanto, um ato de coragem. Não pode temer o debate, a análise da realidade; não pode fugir à discussão criadora, sob pena de ser uma farsa. (Paulo Freire)

As reformas tentaram ser benéficas ao ensino mais contudo, descartaram o que de mais moderno surgia na época com relevância nos estudos científico-tecnológico, uma componente significativa na formação do discente. Erraram no momento da construção, e continuamos errando durante esses anos.

É tão moderno e diferente com novas ideias, que o aluno de ensino médio não encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o propósito maior do ensino é preparar o jovem para se integrar adequadamente ao mercado de trabalho e também à sociedade. Não se visa, com a matemática no ensino médio, formar especialistas no assunto. Ensina-se matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento.

3.4 O QUE ENSINAR

É visível que o cálculo não é a ferramenta que vai resolver a vida do estudante, mais sim! vai facilitar em algumas questões, por isso o cálculo deve ser apresentado de forma simples sem muito aprofundamento, principalmente no caso das integrais, pois a noção com o cálculo de áreas já é o suficiente para o aluno poder entender a praticidade do seu estudo.

O professor ao ensinar função quadrática por exemplo, deve mostrar o estudo das derivadas que é a maneira mais exata de resolver, o ponto crítico de uma função, com isso o aluno percebe a necessidade de ideias novas no seu pensar. Para fazer o estudo da variação de uma função $f(x)$ é importante conhecer os intervalos nos quais ela é crescente ou decrescente, os seus extremos e os pontos de inflexão.

> Ensina-se matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (Geraldo Ávila, p. 4)

Aqui, não estamos falando de aumentar a grade curricular, mais sim diminuí-la! ser precisamente mais crítico em relação aos conteúdos abordados. Já que uma vez aprendido a derivar funções na forma de potências, fica fácil resolver o vértice de uma parábola. E, na física o estudo é tão importante. Como escreveu Geraldo Ávila na Revista Professor de Matemática $n^0 18$ "É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias das suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea".

> A ideia de que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados. (Geraldo Ávila, p. 5)

A derivada permite obter, facilmente, a equação da velocidade a partir do dado de que a aceleração é constante; e também a equação horária do movimento, fazendo raciocínio análogo sobre a equação da velocidade.

3.5 CÁLCULO NO ENSINO BÁSICO

Os atuais programas estão favorecendo um pensamento que o ensino deve estar ligado ao cotidiano, ou seja, os livros atuais trazem consigo questões contextualizadas onde o aluno tem que "interpretar"e raciocinar o que é pedido, num esforço enorme de melhorar, têm-se colocado os alunos de forma ironicamente "lúdicos"onde a visualização da figura já remete a no mínimo 20 por cento da resposta. Logo adiante o trabalho possui uma questão do ENEM de 2015 respondida de duas maneiras, onde a primeira é aquilo que o aluno estar assemelhado e a segunda é aquela precisa, de forma bastante racional é resolvida, sem a necessidade da linguagem da figura.

Esta reforma que estar acontecendo que remete dos anos 60 até o início do séc XXI nos mostra um formalismo em muitos livros, e talvez até mesmo na educação inicial, que um, vem passando para o outro.

O exemplo mais evidente disso está no ensino das funções. Gasta-se muito tempo para introduzir uma extensa nomeclatura – *contradomínio, função inversa, função composta, função injetiva, sobrejetiva* – num esforço de poucos resultados práticos. É anti-pedagógico introduzir conceitos que não estejam sendo solicitados no desenvolvimento da disciplina. E se o professor seguir esta salutar orientação, ele não precisará, por um bom tempo, de nenhum dos exemplos?

Estes conteúdos gastam muito tempo se forem aplicados de forma completa, imagine só se for apresentado ao aluno toda a ideia de *função inversa, função composta* e *função seno.* Os professores mostram somente seus cálculos mais não o surgimento e onde são aplicadas.

É triste dizer que muitos assuntos tem uma apresentação inadequada, sem estímulos cheio de exercícios básico dos básicos, com um grau de insatisfação para o educador que acabam atropelando outros conteúdos de suma importância, a ideia no assunto de função de determinar domínio, imagem e contradomínio e outras coisas mais desestimulam o aguçar do jovem

Trabalhar definições e frisar muito o entender delas é um pouco usual, mais é o que vem em muitos livros. Logo a necessidade de se introduzir o cálculo para acabar com essas mesmices é urgente e de uma necessidade enorme, logo o professor tem que se deslocar desse mundo fechado e bastante frequentado, e ir para um mundo aberto de mais similaridade onde o conteúdo visto deve ser apresentado de forma mais participativa com outros tópicos, num entremeado de saberes.

> Descartar o cálculo no ensino é grave, porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (Geraldo Ávila, p. 7)

O problema não é achar mais espaço para inserir o cálculo, e sim! saber pegar o que se tem e fazer uma distribuição atípica na apresentação dos diferentes tópicos

3.6 A ESTRUTURA DOS PROGRAMAS

O que posso dizer como professor é que os atuais programas(ementas) estão aquém de serem no mínimo boas. Como sabemos países desenvolvidos tem o cálculo diferencial e integral dentro dos seus programas de ensino médio. As universidades na parte de robótica, engenharia e outras mais, recebem uns alunos preparados e com isso o professor não perde tempo com apresentação do cálculo, ele sim! introduz o assunto de maneira mais quantitativa visando a parte prática. No entanto o Brasil como um país subdesenvolvido, trabalha questões em que o cálculo deve ser visto somente no ensino superior, basta ver as ementas dos livros que vêm para as escolas.

Como pesquisado, não é que falte professores capazes de inserir o cálculo, mais sim o pulso firme, para que ele seja inserido em todas as escolas, para com isso eliminar o que há de arcaico. As mudanças tem que surgir de forma organizacional e bem articuladas, para os tempos de hoje se tornarem um passado equitativo.

O estudo de função trazendo a ideia de limites produz ao aluno a verificação da necessidade de investigar um ponto máximo ou mínimo, dando entrada às derivadas e porque não à noção de integral também.

4 A INVESTIGAÇÃO

A partir dos conteúdos citados nas ementas foram realizadas pesquisas, nas quais se basearam na consulta a materiais didáticos utilizados em aula, como livros, apostila e cadernos, e, também em depoimentos de alguns alunos e professores.

Analisando a carga horária dos cursos técnicos ELETROELETRÔNICA, ELETROMECÂNICA E EDIFICAÇÕES, sabe-se que o tempo semanal dos cursos são de no mínimo de 30h dividido em disciplinas de abrangência "normal e técnica", contudo tivemos a pretensão de tentar detectar fatores que possam aperfeiçoar a dinâmica do curso. Com isso a matemática tida como uma disciplina de caráter normal – técnico!. Têm uma grande variedade de conteúdos sobrecarregando demais um aluno voltado para o ensino técnico. Assim a pesquisa estar baseada em tentar formalizar uma dinâmica dos conteúdos de forma a operacionaliza-los de maneira rápida e sucinta.

Sabemos que o cálculo estar tanto dentro da matemática como da física, portanto resolver questões mais rápidas, do que a tamanha formulação de conceitos entretanto necessários mais que ao mesmo tempo, só fazem perder o tempo. O cálculo diferencial e integral resolve de maneira mais rápida. Ao finalizar esta etapa serão levantados temas, conceitos e ideias que se mostraram relevantes para uma revisão dos planos de ensino e dos planos de aula, das disciplinas em questão e que, portanto devem ser tratados de forma mais ou menos contundente durante o estudo do cálculo.

Vamos aqui deixar certo que o cálculo diferencial e integral ajuda muito nas resoluções de várias questões, algumas escolas particulares de "conceito elevado" adotam o cálculo diferencial e integral nas suas metodologias de ensino, mais vejamos bem: Os alunos dessas escolas não estudam o limite, derivada e integral da "noite para o dia", eles já são preparados no decorrer dos ensinos fundamental e médio com uma linguagem única entre os professores, pois o cálculo diferencial e integral não é assim a solução para tudo, se torna prático depois que o aluno consegue entender seu conceito e suas propriedades.

Como o professor, consegue perceber quais as maiores dificuldades dos alunos ao se depararem com a necessidade da aplicação do cálculo? Muitas vezes as dificuldades não estão em resolver a integral ou a derivada, até porque são relativamente simples. Há uma dificuldade enorme na parte da manipulação algébrica simples e da interpretação de gráficos, muitas vezes o aluno não consegue derivar ou integrar uma forma de função quadrática por não saber retirar as equações dos segmentos de reta.

Diante do exposto, o professor não pode se esquecer de que o aluno precisa perceber a inter-relação dos conhecimentos matemáticos com a realidade a qual está inserido. Acredita-se que essa seja a melhor maneira de dar sentido ao aprendizado da disciplina. Como um instrumento importante para compreender o mundo e sua realidade. Não se pode mais pensar na matemática como uma sequência linear de informações, mas como uma teia de relações. Não se pode mais cruzar os braços e ficar satisfeito só com que os livros didáticos oferecem, ficando limitado a um ensino pobre e sem significado, é preciso agir e mostrar que o ensino da matemática pode e deve ser um inovador e desafiador, capaz de romper as barreiras do desconhecido.

4.1 APLICAÇÃO DA PESQUISA

Toda a pesquisa foi realizada no IFMA – Instituto Federal do Maranhão com os alunos do turno manhã, turmas do terceiro ano do ensino médio ELETROELETRÔNICA, ELETROMECÂNICA E EDIFICAÇÕES, foi feito um pedido de solicitação da pesquisa direcionado a chefia imediata, depois foi enviado a cada um dos alunos um termo de consentimento onde eles poderiam aceitar ou recusar a participação na pesquisa, (olhar apêndice B).

A pesquisa foi realizada em três momentos:

- A lista de exercícios para que eles pudessem resolver da maneira que sabiam.
- A explanação dos conteúdos de forma gradativa, para que pudessem assimilar o assunto abordado na lista de exercícios.
- A resolução após o conhecimento dos conteúdos.

4.2 A LISTA DE EXERCÍCIOS

No primeiro momento, foi entregue aos alunos uma lista de exercícios onde continham questões de matemática e física, foi dado um tempo a eles para que pudessem resolver da maneira que quisessem conforme tinham aprendido durante o ensino. A lista segue no **apêndice A**.

A lista como mostra no apêndice, possui dez questões, onde duas foram resolvidas pelo professor, restando 8 questões para serem desenvolvidas pelos alunos.

As duas questões resolvidas utilizando os métodos adquiridos e a serem apresentados durante o trabalho, seguem aqui:

▶ Questão 6

(ENEM 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Tabela 4: Questão do ENEM - 2015

Intervalos de Temperatura (^{0}C)	**Classificação**
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq \mathrm{T} \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq \mathrm{T} \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

A) Muito baixa

B) Baixa

C) Média

D) Alta

E) Muito alta

Resposta 1

Aqui, a questão foi respondida de maneira em que o aluno assimilasse com o conteúdo já visto.

Como $a < 0$ temos que o gráfico da função $T(h)$ tem concavidade voltada para baixo, e ainda temos que o eixo x é representado por h e o eixo y é pela temperatura dada por T.

Portanto, basta calcularmos o Y_v da função.

$Y_v = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$ e, como $a = -1$, $b = 22$ e $c = -85$ segue que $Y_v = \dfrac{-(22^2 - 4.(-1).(-85))}{4.(-1)} =$
$\dfrac{-144}{-4} = 36$

Logo a temperatura máxima é 36 e a resposta da questão é o item **D**, já que a temperatura estar entre 30 e 43.

Resposta 2

Neste momento, foi mostrado a resolução da questão utilizando o cálculo de DERIVADAS. Mais sem eles terem a noção ainda do assunto, então foi realizado uma resolução "atípica"ou seja, foi resolvido sabendo que a turma não entenderia o desenrolar do desenvolvimento, com explicações direcionadas.

Sendo assim calculamos T' de T.

$T(h) = -h^2 + 22h - 85$ daí $T' = -2h + 22$ como a função derivada novamente tem valor negativo, logo a função tem valor de máximo.

Portanto tomando $T' = 0$, temos $-2h + 22 = 0$ que implica $h = 11$.

E agora, basta substituirmos na função original:

$T(11) = -11^2 + 22.11 - 85 = -121 + 242 - 85 = 36^0C$ que estar entre 30 e 43, letra **D**.

▶ **Questão 9**

Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de $10m/s$, sua altura (em metros), depois de t segundos é dada por $h = 10t - 4,9t^2$. Vamos determinar a velocidade quando $t = 2$.
Como a questão anterior , também procuramos resolver utilizando os dois métodos.

Resposta 1

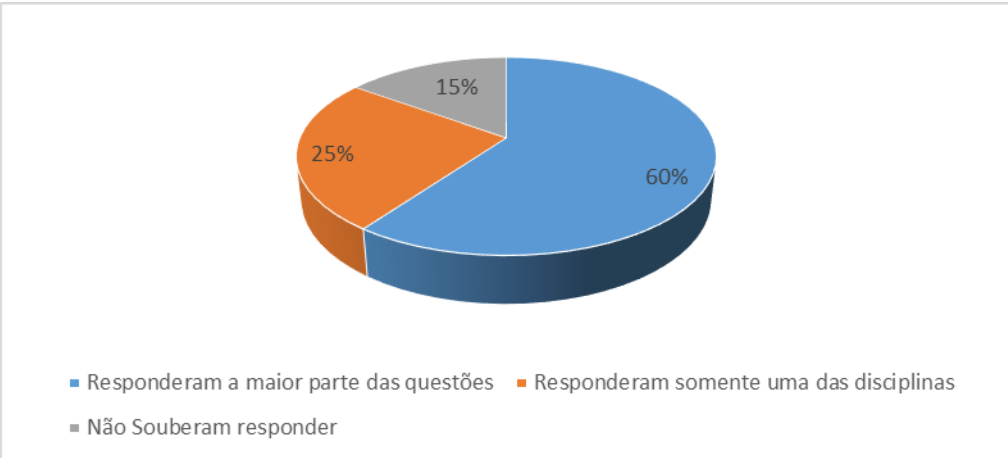
A função do MRUV é $h = h_0 + v_0.t + \frac{g}{2}.t^2$, comparando com a fórmula dada na questão, temos $v_0 = 10$ e $\frac{g}{2} = -4,9 \Rightarrow g = -9,8$ daí $v = v_0 + gt$ implica em $v = 10 - (9,8).2$
Portanto $v =$ **- 9,6 m/s**

Resposta 2

Neste caso, a resposta sai muito semelhante ao método anterior, basta sabermos que $v(t) = h' = 10 - (2).4,9t$ (derivada da função dada), aí segue que $v = 10 - 9,8t \Rightarrow v(2) = 10 - 9,8(2) =$ **- 9,6 m/s**.

A turma de ELETROELETRÔNICA, possuía no momento da pesquisa 38 alunos em sala de um total de 43.

Figura 8: Turma de eletroeletrônica



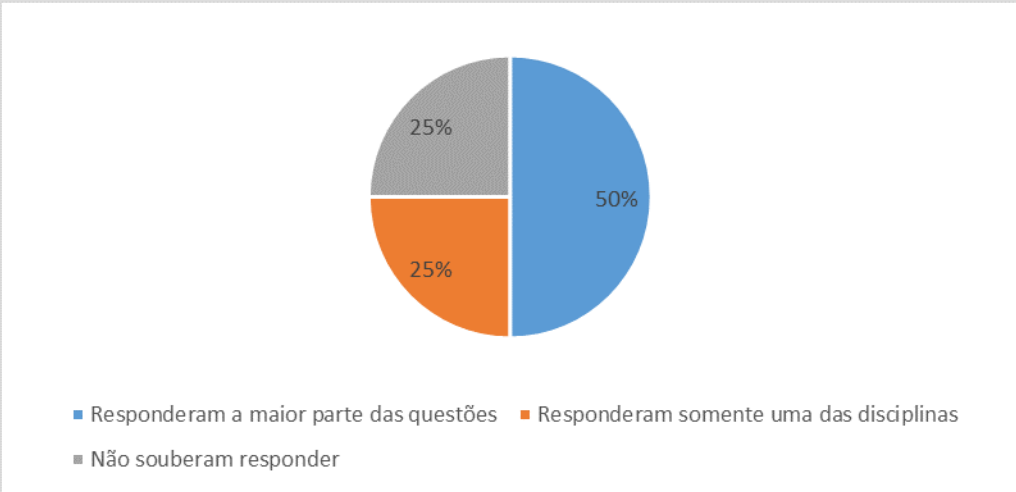
Fonte: Próprio Autor

Sendo assim distribuído 24 alunos fizeram toda a lista, 10 fizeram somente de uma das disciplinas e os outros 6 não souberam responder.

A turma de ELETROMECÂNICA, possuía no momento da pesquisa 32 alunos em sala do total de 35. Também duas questões foram resolvidas pelo professor, restando 8 questões para serem desenvolvidas pelos alunos.

Sendo assim distribuído 16 alunos fizeram toda a lista, 8 fizeram somente de uma das disciplinas e os outros 8 não souberam responder.

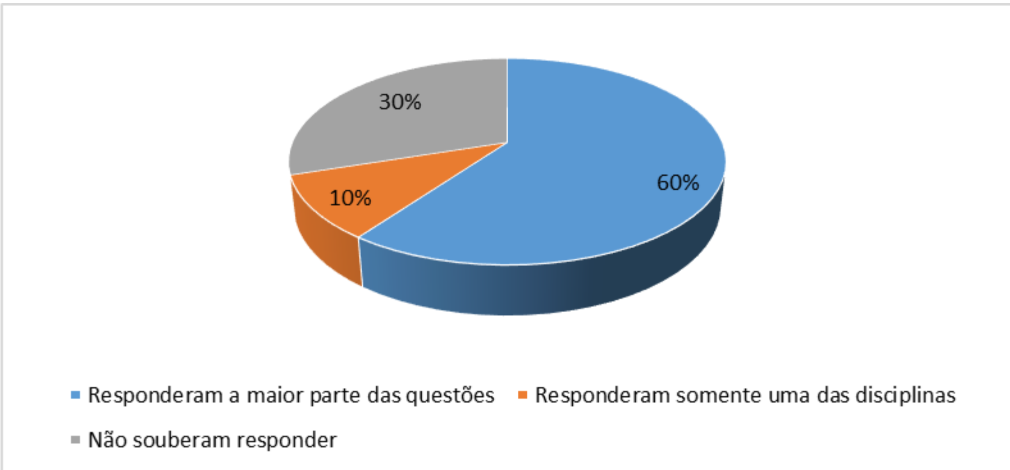
Figura 9: Turma de eletromecânica



Fonte: Próprio Autor

A turma de EDIFICAÇÕES, possuía no momento da pesquisa 20 alunos em sala do total de 34. Também duas questões foram resolvidas pelo professor, restando 8 questões para serem desenvolvidas pelos alunos.

Figura 10: Turma de edificações

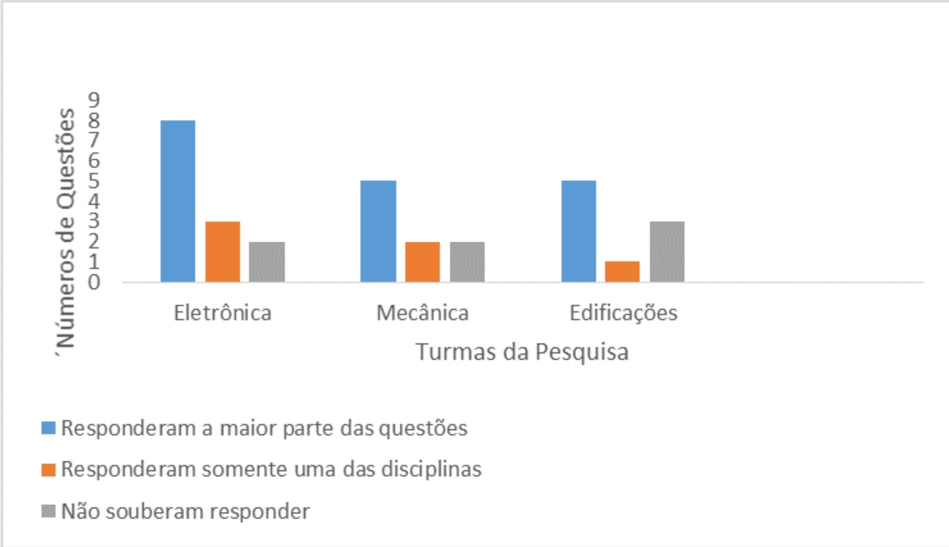


Fonte: Próprio Autor

Daí distribuído, 12 alunos fizeram toda a lista, 2 fizeram somente de uma das disciplinas e os outros 6 não souberam responder.

Durante essa abordagem foi verificado que muitos alunos não sabiam responder as questões, ou se sentiam mais apropriados em uma das disciplinas e outros sabiam responder toda a lista, mais estes mesmos indagaram que a resolução era muito demorada.

Figura 11: Análise da primeira etapa



Fonte: Próprio Autor

4.3 EXPLANAÇÃO DOS ASSUNTOS

Já no segundo momento, foi explicado o assunto de limites, derivadas e integral.

O assunto de limites foi explanado somente o conceito e suas propriedades, assim como o de derivadas e integral. Estes assuntos foram dados somente o básico, pois a pesquisa em questão, tenta mostrar ao aluno que existe outras maneiras de se ganhar tempo (rapidez) na resolução dos exercícios, e, mostrar a necessidade do estudo do cálculo.

Sobre Limites, Hobbes (1588 – 1779), filósofo inglês disse: "Seja o que for que imaginemos, é finito. Portanto não existe qualquer ideia, ou concepção, de algo que denominamos infinito(...) quando dizemos que alguma coisa é infinita, queremos apenas dizer que não somos capazes de conceber os limites e fronteiras da coisa designada, não tendo concepção da coisa, mas de nossa própria incapacidade."

4.3.1 Da Explanação de Limites

Como já abordado anteriormente na explanação do conteúdo na parte da fundamentação teórica foi mostrado ao aluno o comportamento de uma função quando ela se aproxima de certo valor, para que ele compreendesse a trajetória de um gráfico.

Foi dado o seguinte exemplo:

Seja a função f de R em R, definida por $f(x) = x + 3$.Faça o gráfico cartesiano correspondente e estude a função.

Notamos que, para valores de x cada vez mais próximos de 2, temos valores de $f(x)$ cada vez mais próximos de 5. Isso ocorre tanto quando x tende a 2 pela esquerda, isto é, se aproxima por valores menores de 2, como quando x tende a 2 pela direita, isto é, se aproxima por valores maiores de 2.

Logo após foi dado a definição de Limites e suas propriedades, sendo assim de maneira básica explicado o conteúdo de limites.

4.3.2 Da Explanação de Derivadas

Aqui tentamos aprofundar um pouco mais, já que as derivadas de início tem um sentido fácil, por isso tentamos envolver mais o aluno com este tópico. De início foi comentado sobre potências e logo após foi comentado sobre coeficiente angular da reta, assunto este recém estudado no período letivo, a eles foi mostrado um exemplo básico.

Exemplo:

Considerando a reta t, tangente à curva definida por $f(x) = x^2$, no ponto de abscissa 2, determinar:

a) o coeficiente angular da reta t

Sendo $f(x) = x^2$, temos $f(2) = 2^2 = 4$. Logo, o ponto P de tangência tem coordenadas P(2,4).

Essa maneira é bem simples de se fazer, mais no intuito de trabalhar questões com um grau maior de dificuldade, foi mostrado utilizando o cálculo diferencial.

O coeficiente angular da reta tangente à curva é dado por $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Então $f'(2) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

ou seja $f'(2) = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = 4$

b) a equação da reta t

A equação da reta t é dada por $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ daí $y - 4 = 4(x - 2)$ ou ainda $y = 4x - 4$

Que, a partir daí o aluno pode perceber que resolvendo a letra a da forma de cálculo diferencial ele responderia a letra b facilmente.

Como dizia *Karl Marx (1818 – 1883)* filósofo e economista alemão: "É um paradoxo a Terra se mover ao redor do Sol e a água ser constituída por dois gases altamente inflamáveis. A verdade científica é sempre um paradoxo, se julgada pela experiência cotidiana que se agarra à aparência efêmera das coisas".

Daí em diante foi explicado as derivadas de funções elementares e as propriedades operatórias das derivadas, com isso o aluno já tinha um bom suporte para voltar à lista de exercícios e verificar onde eles estavam com dificuldades.

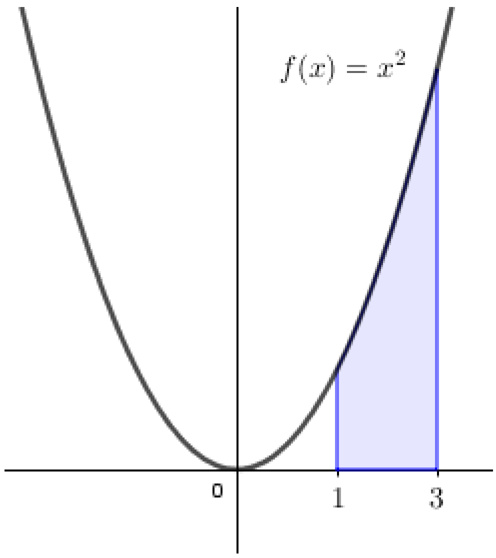
4.3.3 Da Explanação de Integrais

Este tópico tem por objetivo servir de introdução elementar, onde a ênfase recai na compreensão dos conceitos básicos e não na manipulação formal. A linguagem intuitiva foi utilizada em todo o texto, mas sempre de maneira consistente com conceitos precisos e procedimentos claros.

No primeiro contato foi trabalhado áreas de figuras planas como o quadrado, retângulo, trapézio, triângulo e etc. também foi mostrado figuras planas sem serem definidas para que pudéssemos encontrar a área. Contudo o aluno foi aprendendo a fazer partições nas figuras até encontrar uma área já conhecida para que pudesse calcular. Logo após, foi visto a necessidade de um método mais geral de calcular áreas de uma figura limitada, não por polígonos, mas por curvas.

Desse modo foi posto um problema do cálculo da área que uma função $f(x)$ faz com o eixo das abscissas do ponto 1 ao ponto 3, e tal função é definida como $f(x) = x^2$.

Figura 12: Área da figura em torno do eixo x



Fonte: Próprio Autor

O exemplo foi respondido pelo método de "exaustão", o espaço foi subdividido em pequenos retângulos e calculados suas áreas, a somatória das áreas foi o valor aproximado da área total. Os alunos, é claro, acharam aquilo muito trabalhoso, e também muito incerto pois como proceder qual o tamanho do retângulo a ser escolhido, essa foi uma das indagações mais pertinentes.

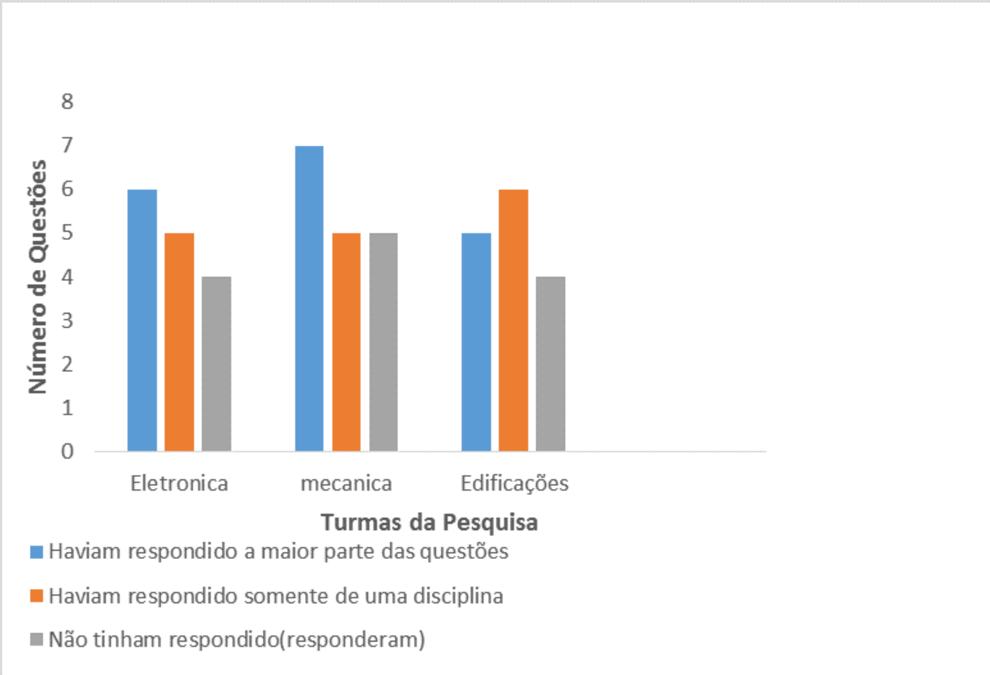
No entanto esse método, foi feito simplesmente para chamar a atenção dos alunos como a definição e o cálculo inicial básico é de suma importância, pois resolver cálculos de áreas incertas é algo novo (não trabalhado) no ensino básico.

Em sequência, foi explanado a definição de integral e suas propriedades, assim como algumas técnicas de integração.

4.4 RESPOSTAS OBTIDAS APÓS EXPLANAÇÃO

Agora no terceiro momento, os alunos receberam a mesma lista para novamente tentar respondê-la, até mesmo aqueles que já tinham respondido por completo.

Figura 13: Análise da terceira etapa



Fonte: Próprio Autor

Portanto, percebeu-se uma melhora significativa das turmas em questão, pois analisando somente um tópico “Não souberam responder” teve um aumento grandioso. Saindo de 6, 8 e 6 para 15, 16, 12 respectivamente em número de alunos que conseguiram e assimilaram o conteúdo de acordo com seus gráficos.

O resultado obtido foi valioso, os estudantes que não assimilaram os conteúdos da lista que foram visto nos anos anteriores, puderam resolver as questões com esta nova dinâmica. Mais isso ainda têm-se de ser revisto, pois a similaridade pode ser confundida com o esquecimento e a falta de prática dos estudos.

Podemos ainda olhar em conversas com os alunos da pesquisa, que o conteúdo dar uma melhor resolutividade ao entendimento dos assuntos. A primeiro modo os estudantes precisam focar mais em organizar seu tempo, mas eu recomendo muito que usem uma combinação de testes e práticas distribuídas para aprenderem as informações mais importantes de que precisarão nas aulas futuras, na vida e no trabalho.

Os resultados encontrados no presente estudo sugerem o aprendizado e compreensão geral de um conteúdo, da seleção dos itens importantes, da elaboração desses itens pelo estudante e da testagem desta elaboração. — recomenda-se aos estudantes que as melhores técnicas não são mais difíceis de aplicar, embora demandem uma agenda bem organizada para distribuir as sessões de estudo ao longo do ano.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o discutido no seção 2, os conceitos de limites, derivadas e integrais, podem ser desenvolvidos de várias maneiras: matematicamente, utilizando suas definições, ou a partir da ideia de aproximação, retas tangentes e cálculo de áreas, respectivamente. E essa é apenas uma proposta possível.

O presente trabalho foi possível demonstrar o distanciamento existente entre a matemática apresentada em sala de aula e aquela mais exigida em relação aos cursos de cálculo. Observou-se também que alguns alunos na iminência de conclusão do ensino médio, independentemente de ter visto o conteúdo, tiveram influência positiva e significativa no grau de acertos na pesquisa em relação às noções básicas de cálculo. No entanto, quando se tratava da percepção de alunos que não haviam respondido o primeiro momento da lista isso foi significativo, pois ambos apresentaram aproximadamente o mesmo grau de acerto.

Espera-se que este trabalho contribua no sentido de enriquecer as discussões em relação à inserção dos conteúdos relativos ao cálculo diferencial e integral nos diferentes níveis de ensino, buscando a sua inclusão efetiva em sala de aula, vinculando-a às necessidades do dia a dia, dada a importância que o conteúdo têm no sistema educacional. Para que isso ocorra, tantos os futuros professores de matemática quanto aqueles que já se formaram deve ter acesso a formação necessária para transmitir tais conteúdos.

Este trabalho procurou deixar claro cada experiência e resultado provenientes de extremo esforço fazendo contas que, por muitas vezes desfocam o verdadeiro objetivo que é elucidar um problema tendo em mãos um produto final e não o seu desenvolvimento. Isso permitiu que pudéssemos elucidar algumas questões e interpretar algebricamente e graficamente de forma mais ampla, elaborada e rápida os resultados. Portanto, as discussões empregadas na elaboração deste trabalho contribuíram para nosso crescimento pessoal e esperamos que também possam contribuir no processo de ensino aprendizagem do Cálculo no ensino médio.

Outro fato que nos fez escolher esse assunto foi a facilidade e a praticidade que o professor encontra ao utilizar o cálculo diferencial e integral como uma metodologia auxiliar. Porém, ele deverá ficar mais atento aos questionamentos que envolverão a prática. Além disso, foi também apresentado sequências didáticas das quais pode-se perceber o cálculo como forma satisfatória, contextualizada e que pode vir a ser mais significativo para o aluno. É importante ressaltar que o cálculo diferencial e integral não pode ser visto como uma "tábua de salvação"no ensino da Matemática, ele é mais uma ferramenta para auxiliar nessa tarefa de ensinar de forma mais significativa e empolgante.

Referências

[1] ÁVILA, G., *Ensino do Cálculo no 2^0 grau*, Revista do Professor de Matemática, n. 18 Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

[2] ÁVILA, G., *Limites e Derivadas no Ensino Médio*, Revista do Professor de Matemática, n. 60. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

[3] APOSTOL, Tom M. *Cálculo*, Rio de Janeiro: Editora Reverté, 1979.

[4] BOULOS, Paulo. *Introdução ao Cálculo.* São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

[5] BOYER, Carl B. *História da Matemática / Carl B, Boyer.* Tradução:Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

[6] DINIZ, Maria Ignez, SMOLE Kátia Stocco. **Matemática Ensino Médio**. Editora Saraiva, 2010, São Paulo;

[7] FONSECA, L. *Didática do Cálculo - Epistemologia, Ensino e Aprendizagem* http://www.buscape.com.br . Acesso em 15 dez. 2018.

[8] GUIDORIZZI,H.L. *Um Curso de Cálculo.* Vol 1. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

[9] HOFFMANN, L. D., BRADLEY, G. L. *Cálculo - Um Curso Moderno e Suas Aplicações.* 7^a ed., LTC Editora, 2002.

[10] IEZZI, G. *Fundamentos da Matemática Elementar: Limites, Derivadas, Noções de Integral.* vol 8, São Paulo: Atual. 1985.

[11] LIMA, E.L., CARVALHO, P. C.P.WAGNER, E. MORGADO, A. C. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro : IMPA, 2003.

[12] MACHADO, N. J. *Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica: possível e necessário.* São Paulo: USP, 2008. Disponível em http://www.nilsonmachado.net/sema20080311.pdf . Acesso em 25 nov. 2018.

[13] REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

[14] SOUZA, Joanir Roberto de. **Matemática**. Editora FTD, 2010, São Paulo.

Apêndice A

LISTA DE EXERCÍCIOS

1°. O custo de produção de um determinado bem de consumo é dado pela fórmula $C(x) = \frac{200}{x+50} + 2{,}5$. Onde x representa a quantidade produzida e *C*(x) o custo de produção. Determine o limite do custo de produção quando x tende a 100 peças.

2°. A função consumo em uma certa economia é dada pela equação $C(x) = 0{,}75x + 6$. Onde *C*(x) é o total gasto em consumo pessoal e x é a renda total disponível para os gastos dados em milhões de dólares. Qual o limite de gastos quando a renda tende a 30?

3°. O lucro trimestral de uma empresa, depende da quantidade x de dinheiro gasto em publicidade por trimestre de acordo com a fórmula $P(x) = \frac{-1}{8}x^2 + 7x + 30$. Onde *P*(*x*) e *x* são medidos em milhões de dólares. Qual o limite do lucro quando seu orçamento publicitário trimestral tende a 28?

4°. A posição de um móvel em movimento retilíneo é dada por $S(t) = t^2 + 9t + 15$ onde, t está em segundo e S em metros. Determine a velocidade no instante de 6 s.

5°. Um fazendeiro tem 1200 m de cerca e quer cercar um campo retangular que está na margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

6°. (ENEM 2015) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de Temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está:
a) Muito baixa
b) Baixa
c) Média
d) Alta
e) Muito alta

7°. O movimento de um objeto ocorre ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a função horária: $s = f(t) = t^2 + 2t - 3$. Qual a área do espaço quanto t varia de t = 2 s para t =2,5 s?

8°. Um móvel tem seu movimento dado por $v = 14 + 8t$. Determine o espaço percorrido no intervalo de 0 a 6 s.

9°. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros), depois de *t* segundos é dada por $h = 10t - 4{,}9t^2$. Vamos determinar a velocidade quando t = 2.

10°. Determinar a área da região limitada por

$$y = f(x) = 4 \text{ e } y = g(x) = x^2$$

"O Mundo está nas mãos daqueles que têm a coragem de sonhar e de correr o risco de viver seus sonhos"

Paulo Coelho

Apêndice B

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) como voluntário(a) a participar da pesquisa de mestrado: CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA ABORDAGEM NO ENSINO MÉDIO.

A JUSTIFICATIVA, OS OBJETIVOS E OS PROCEDIMENTOS: O motivo que nos leva a estudar o tema é **possibilitar a compreensão da composição da grade curricular da disciplina de matemática dos discentes do campus,** a pesquisa se justifica no sentido de nortear **as intervenções pedagógicas empreendidas no campus, por uma educação pautada na diversidade e dinâmica da ementa das disciplinas de matemática e física contra as desigualdades, adaptada a nossa realidade educacional, ou seja, mais do que entender o perfil do nosso alunado, o projeto em questão poderá ser um importante subsídio para medidas de ações afirmativas.** O objetivo desse projeto é a**nalisar a composição da grade curricular no tocante as resoluções de problemas nas áreas da matemática e da física do corpo discente do IFMA/Santa Inês**. O(s) procedimento(s) de coleta de dados será da seguinte forma: **Aplicação de questionários digitais nas turmas das séries de 3º ano do ensino médio do turno matutino do Campus.**
DESCONFORTOS, RISCOS E BENEFÍCIOS: O preenchimento do questionário não representará qualquer risco de ordem física ou psicológica para você.
GARANTIA DE ESCLARECIMENTO, LIBERDADE DE RECUSA E GARANTIA DE SIGILO: Você será esclarecido(a) sobre a pesquisa em qualquer aspecto que desejar. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. A sua participação é voluntária e a recusa em participar não irá acarretar qualquer penalidade ou perda de benefícios. O(s) pesquisador(es) irá(ão) tratar a sua identidade com padrões profissionais de sigilo. Os resultados da pesquisa serão publicizados, mas os dados individuais permanecerão confidenciais. Seu nome ou o material que indique a sua participação não será liberado. Você não será identificado(a) em nenhuma publicação que possa resultar deste estudo. Uma cópia deste consentimento informado será arquivada nos arquivos do DPPGI Campus Santa Inês e outra será fornecida a você.
CUSTOS DA PARTICIPAÇÃO, RESSARCIMENTO E INDENIZAÇÃO POR EVENTUAIS DANOS: A participação no estudo não acarretará custos para você e não será disponível nenhuma compensação financeira adicional.
DECLARAÇÃO DO(A) PARTICIPANTE: O(a) professor(a) orientador(a) **Sérgio Nolêto Turibus** e o(a) professor(a) orientando(a) **Jálio Araújo da Silva** certificaram-me de que todos os dados desta pesquisa serão confidenciais. Declaro que concordo em participar desse estudo. Recebi uma cópia deste termo de consentimento livre e esclarecido e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

Santa Inês, ____ de _________________ de 2018

____

Sérgio Nolêto Turibus
Doutor em Engenharia Nuclear
Tel: (99) 9 8829 9627
Email: sturibus@gmail.com

____

Jálio Araújo da Silva
Mestrando em Matemática
Tel: (86) 9 9924 7887
Email: jalio.silva@ifma.edu.br

Nome do(a) aluno(a): ____

Assinatura do Pai ou Responsável: ____